द्रव्यमान केन्द्र (CENTER OF MASS)

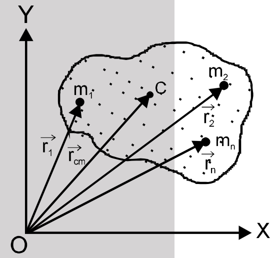
द्रव्यमान केन्द्र

प्रत्येक भौतिक निकाय में एक विशेष बिन्दु होता है जिसकी गति सम्पूर्ण निकाय की गति को निरूपित करती है। जब निकाय कुछ बाह्य बलो के अधीन गति करता है तो यह बिन्दु इस प्रकार गति करता है, जैसे कि निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान इसी बिन्दु पर केन्द्रित हो और बाह्य बल भी इसी बिन्दु पर आरोपित किये गये हों (स्थानान्तरित गति के लिये)। इस बिन्दु को निकाय का द्रव्यमान केन्द्र कहते हैं।

'N' कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र

माना N बिन्दुवत् द्रव्यमान $m_1, m_2, m_3,$ .... m_n का एक निकाय है। इन द्रव्यमान के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$,............... $\vec{r}_n$ है। तब निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है।

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ... + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \quad ; \quad \vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

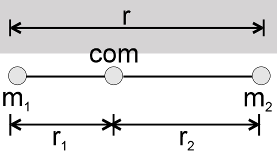
यहाँ $M\left(= \sum_{i=1}^{n} m_i\right)$ निकाय का कुल द्रव्यमान है।

नोट : यदि मूल बिन्दु, द्रव्यमान केन्द्र पर है तो $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = 0$ होगा। अतः द्रव्यमान केन्द्र वह बिन्दु है, जिसके सापेक्ष निकाय का द्रव्यमान आघूर्ण शून्य होता है।

दो कणों के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

एक दूसरे से r दूरी पर रखे m_1 व m_2 द्रव्यमानों के कणों का द्रव्यमान केन्द्र उनके बीच में होता है। किसी भी एक कण से द्रव्यमान केन्द्र की दूरी कण के द्रव्यमान के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

अर्थात् $r \propto \frac{1}{m}$ या $\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ या $m_1r_1 = m_2r_2$



या $r_1 = \left(\frac{m_2}{m_2 + m_1}\right) r$ और $r_2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) r$ (यहाँ $r_1 = m_1$ से COM की दूरी व $r_2 = m_2$ से COM की दूरी है।)

उपरोक्त विवेचना से हम देखते है कि

$r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ यदि $m_1 = m_2$, अर्थात् समान द्रव्यमान वाले कणों का द्रव्यमान केन्द्र ठीक उनके मध्य मे स्थित होता है।

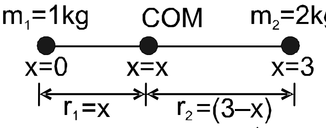
इसी प्रकार $r_1 > r_2$ यदि $m_1 < m_2$ व $r_1 < r_2$ यदि $m_2 < m_1$, अर्थात् असमान द्रव्यमान वाले कणों का द्रव्यमान केन्द्र अधिक द्रव्यमान वाले कण के अधिक निकट होता है।

Solved Examples

Example 1. 1 kg व 2 kg द्रव्यमान के दो कण x = 0 व x = 3 m पर स्थित है। इनके द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात करो।

Solution : चूंकि दोनों कण x-अक्ष पर स्थित है। इसलिए द्रव्यमान केन्द्र भी x-अक्ष पर ही होगा। माना COM, x = x,पर स्थित है तब

r_1 = 1 kg द्रव्यमान के कण से द्रव्यमान केन्द्र की दूरी = x



व r_2 = 2 kg द्रव्यमान के कण से द्रव्यमान केन्द्र की दूरी = (3 – x)

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}$ का प्रयोग करने पर

या $\frac{x}{3-x} = \frac{2}{1}$ or x = 2 m इस प्रकार दोनों कणों का द्रव्समान केन्द्र x = 2 m पर होगा। **Ans.**

Example 2. m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg व m_3 = 3 kg द्रव्यमान के तीन कणों के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1 = (\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k})m$, $\vec{r}_2 = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})m$ तथा $\vec{r}_3 = (2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})m$ है। इसके द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

Solution : कणों के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश निम्न प्रकार व्यक्त किया जाता है।

$$\vec{r}_{COM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

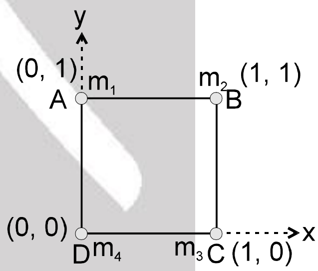
मान रखने पर

$$\vec{r}_{COM} = \frac{(1)\ (\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) + (2)(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + (3)(2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})}{1+2+3} = \frac{9\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}}{6}$$

$$\vec{r}_{COM} = \frac{1}{2}(3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})m$$ **Ans.**

Example 3. क्रमशः 1 kg, 2 kg, 3 kg व 4 kg द्रव्यमान के चार कण 1m भुजा वाले वर्ग के चारो कोनों A, B, C तथा D पर स्थित है। D को मूल बिन्दु लेते हुए द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए।

Solution : D को मूल बिन्दु DC को x-अक्ष व DA को y-अक्ष मानने पर

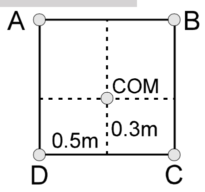


m_1 = 1 kg, (x_1, y_1) = (0, 1m)
m_2 = 2 kg, (x_2, y_2) = (1m, 1m)
m_3 = 3 kg, (x_3, y_3) = (1m, 0)
व m_4 = 4 kg, (x_4, y_4) = (0, 0)

इनके COM के निर्देशांक

$$x_{COM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3m_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{(1)(0) + 2(1) + 3(1) + 4(0)}{1+2+3+4} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\text{ m} = 0.5\text{ m}$$



इसी प्रकार $y_{COM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$

$$= \frac{(1)(1) + 2(1) + 3(0) + 4(0)}{1+2+3+4}$$

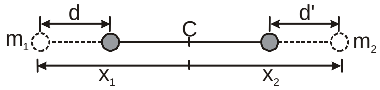
$$= \frac{3}{10}\text{ m} = 0.3\text{ m}$$

$\therefore$ (x_{COM}, y_{COM}) = (0.5 m, 0.3 m)

इस प्रकार चारों कणों के COM की स्थिति चित्र में दर्शाये अनुसार होगी।

Example 4. m_1 व m_2 द्रव्यमानों वाले दो कणों का निकाय लें। यदि प्रथम कण को द्रव्यमान केन्द्र की ओर d दूरी तक विस्थापित किया जाये तो द्रव्यमान केन्द्र को उसी स्थिति पर रखने के लिए दूसरे कण को कितना विस्थापित करना पड़ेगा ?

Solution : चित्र देंखे। माना द्रव्यमान केन्द्र की m_1 से दूरी x_1 व x_2 से दूरी m_2 है। माना द्रव्यमान केन्द्र को C पर बनाये रखने के लिये m_2 को C की ओर d दूरी तक विस्थापित किया जाता है।



तब $m_1x_2 = m_2x_2$ ....(i)

व $m_1 (x_1 – d) = m_2 (x_2 – d')$. ....(ii)

(ii) में से (i) को घटाने पर

$m_1d = m_2 d'$

या $d' = \frac{m_1}{m_2} d$

द्रव्यमान के सतत् वितरण का द्रव्यमान केन्द्र

द्रव्यमान के सतत् वितरण के लिये द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति योग के चिन्ह को समाकलन चिन्ह से प्रतिस्थापित करके बताई जा सकती है। दी गयी परिस्थिति के अनुसार समाकलन के लिये सीमाओं का चयन किया जाता है।

$$x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm},\ y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{\int dm},\ z_{cm} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

$\int dm = M$ (वस्तु का द्रव्यमान) ; $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$

नोट : यदि कोई वस्तु x अक्ष के प्रति सममिती रखती है तो COM का y निर्देशांक शून्य होता है व वस्तु यदि y अक्ष के प्रति सममिती रखती है तो COM का x निर्देशांक शून्य होता है।

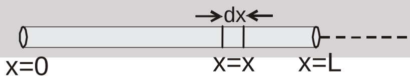
समरूप दृढ़ छड़ का द्रव्यमान केन्द्र

माना M द्रव्यमान L लम्बाई की एक छड़ x-अक्ष के अनुदिश इस प्रकार रखी है कि इसका एक सिरा x = 0 पर व दूसरा सिरा x = L पर है।

छड़ की प्रति एकांक लम्बाई का द्रव्यमान $= \frac{M}{L}$

अतः dm, (x = x पर स्थित अल्पांश का द्रव्यमान) $= \frac{M}{L}dx$

अल्पांश PQ के निर्देशांक (x, 0, 0) है। इस प्रकार छड़ के COM का x-निर्देशांक होगा :



$$x_{COM} = \frac{\int_0^L x\,dm}{\int dm}$$

$$= \frac{\int_0^L (x)\left(\frac{M}{L}dx\right)}{M} = \frac{1}{L}\int_0^L x\,dx = \frac{L}{2}$$

COM का y-निर्देशांक है –

$$y_{COM} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = 0$$

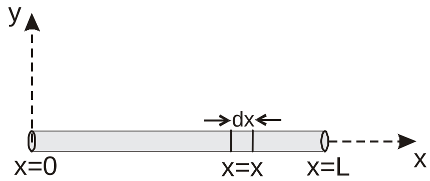
इसी प्रकार $z_{COM} = 0$

अर्थात् COM के निर्देशांक $\left(\frac{L}{2}, 0, 0\right)$ है या यह छड़ के केन्द्र पर स्थित है।

Solved Example

Example 5. L लम्बाई की एक छड़ x-अक्ष के अनुदिश x = 0 व x = L के बीच स्थित है। छड़ का रैखिक घनत्व (द्रव्यमान/लम्बाई) λ मूल बिन्दु से दूरी x के साथ सम्बन्ध $\lambda = Rx$ के अनुसार परिवर्तित होता है। यहाँ R धनात्मक नियतांक है। छड़ के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।

Solution : x = x पर स्थित अल्पांश का द्रव्यमान



$dm = \lambda\, dx = Rx\, dx$

अल्पांश के COM के निर्देशांक (x, 0, 0) है।

इस प्रकार छड़ के COM का x-निर्देशांक होगा

$$x_{COM} = \frac{\int_0^L x\,dm}{\int_0^L dm} = \frac{\int_0^L (x)(Rx)dx}{\int_0^L (Rx)dx}$$

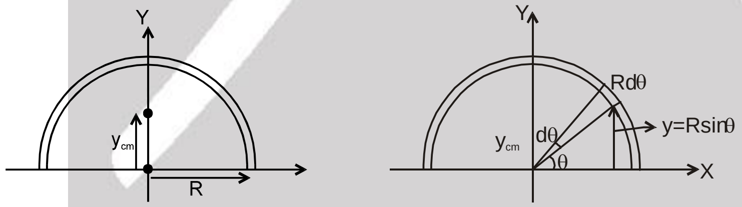
$$= \frac{R\int_0^L x^2 dx}{R\int_0^L x\,dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L} = \frac{2L}{3}$$

छड़ के COM का y-निर्देशांक $y_{COM} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} = 0$ (चूंकि y = 0)

इसी प्रकार $z_{COM} = 0$ अतः छड़ का द्रव्यमान केन्द्र $\left[\frac{2L}{3}, 0, 0\right]$ **Ans.**

अर्द्धवृत्ताकार वलय का द्रव्यमान केन्द्र

चित्र में अर्द्धवृत्ताकार वलय को दर्शाया गया है। प्रेक्षण से हम कह सकते है कि वलय के द्रव्यमान केन्द्र का x-निर्देशांक शून्य है। क्योंकि यह वलय मूल बिन्दु के दोनों ओर सममित है। हमें केवल y-निर्देशांक ज्ञात करना है।



y_{cm} को ज्ञात करने के लिये हम $y_{cm} = \frac{1}{M}\int dm\ y$ ...(i)

यहां dm के लिये हम x के साथ θ कोण पर $d\theta$ कोणीय चौड़ाई का एक चाप अल्पांश लेते है। यदि वलय की त्रिज्या R है तो इसका y निर्देशांक $R\sin\theta$, होगा।

$$dm = \frac{M}{\pi R} \times R\,d\theta$$

अतः समीकरण (i) से

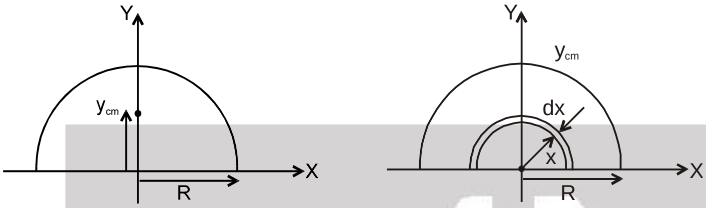
$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} \frac{M}{\pi R}\ R d\theta\ (R\sin\theta) = \int_0^{\pi} \sin\theta\ \ d\theta$$

$$y_{cm} = \frac{2R}{\pi} \qquad ...(ii)$$

अर्द्धवृत्ताकार चकती का द्रव्यमान केन्द्र

चित्र में M द्रव्यमान व R त्रिज्या की आधी चकती को दर्शाया गया है। चूंकि इस चकती का द्रव्यमान केन्द्र इसके उर्ध्वाधर अर्ध व्यास पर ही स्थित होगा। इसलिए हमें केवल द्रव्यमान केन्द्र का केवल y-निर्देशांक ही ज्ञात करना है। y_{cm} ज्ञात करने के लिये हम x त्रिज्या व dm द्रव्यमान की एक अल्पांश वलय लेते है। चकती को इस प्रकार की बढ़ती हुयी त्रिज्या की अनन्त वलयों से मिलकर बना हुआ माना जा सकता है। जिसे 0 से R तक समाकलित किया जायेगा।

$$dm = \frac{2M}{\pi R^2}(\pi x)dx$$



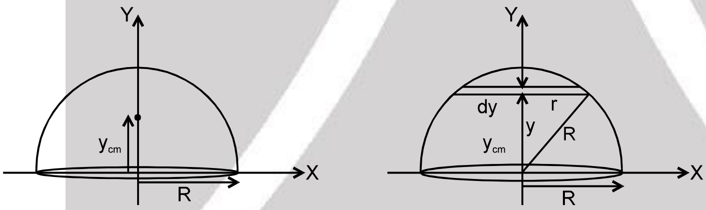
अब अल्पांश के द्रव्यमान केन्द्र का y-निर्देशांक $\frac{2x}{\pi}$ होगा जैसा कि पिछले खण्ड में हमने व्युत्पन्न किया है।

यहां $$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^R dm\,\frac{2x}{\pi} = \frac{1}{M}\int_0^R \frac{4M}{\pi R^2}x^2dx$$

$$y_{cm} = \frac{4R}{3\pi}$$

ठोस अर्धगोले का द्रव्यमान केन्द्र

अर्धगोले का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है। इसका द्रव्यमान केन्द्र (y-निर्देशांक) ज्ञात करने के लिए हम एक चकती अल्पांश लेते है जिसकी मोटाई dy व द्रव्यमान केन्द्र से दूरी y है। इस अल्पांश की त्रिज्या r = $\sqrt{R^2 - y^2}$



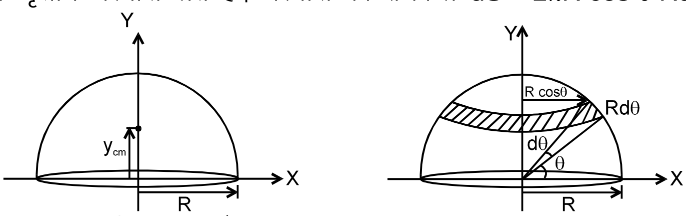
$$dm = \frac{3M}{2\pi R^3} \times \pi r^2\,dy = \frac{3M}{2R^3}(R^2 - y^2)\,dy$$

अर्धगोले का y–निर्देशांक $$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^R dmy = \frac{1}{M}\int_0^R \frac{3\ M}{2R^3}(R^2 - y^2)\,dy\,y = \frac{3}{2R^3}\int_0^R (R^2 - y^2)ydy$$

$$y_{cm} = \frac{3R}{8}$$

एक खोखले अर्धगोले का द्रव्यमान केन्द्र

माना M द्रव्यमान व R त्रिज्या का एक खोखला अर्ध गोला है। अब हम अर्ध गोले के आधार से θ कोणीय स्थिति पर dθ कोणीय चौड़ाई का एक वृत्तीय अल्पांश लेते है। अल्पांश का क्षेत्रफल $dS = 2\pi R \cos\theta\, Rd\theta$



इसका द्रव्यमान dm निम्न प्रकार दिया गया है

$$dm = \frac{M}{2\pi R^2}\,2\pi R\cos\theta\,Rd\theta$$

यहां अल्पांश के द्रव्यमान केन्द्र का y-निर्देशांक R sinθ लिया जा सकता है। अब हम निकाय का द्रव्यमान केन्द्र निम्न प्रकार ज्ञात करते है।

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dm R\sin\theta = \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{M}{2\pi R^2} 2\pi R^2 \cos\theta d\theta\right) R \sin\theta$$

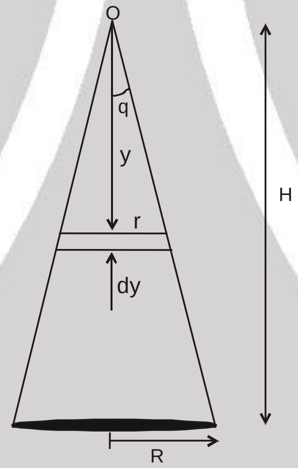
$$= R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad y_{cm} = \frac{R}{2}$$

एक ठोस शंकु का द्रव्यमान केन्द्र

माना M द्रव्यमान, H ऊचाँई व आधार त्रिज्या R का एक ठोस शंकु है। स्पष्ट है कि इसका द्रव्यमान केन्द्र इसके अक्ष पर कहीं H/2 से कम ऊचाँई पर होगा। द्रव्यमान केन्द्र को प्राप्त करने के लिये हम शंकु के आधार से y दूरी पर r त्रिज्या व dy मोटाई की एक अल्पांश चकती लेते है। इस चकती का द्रव्यमान

$$dm = \frac{3M}{\pi R^2 H} \times \pi r^2 \, dy$$

यहाँ $$y_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^H y dm = \frac{1}{M}\int_0^R\left(\frac{3M}{\pi R^2 H}\pi\left(\frac{Ry}{H}\right)^2 dy\right)y = \frac{3}{H^3}\int_0^H y^3 dy = \frac{3H}{4}$$



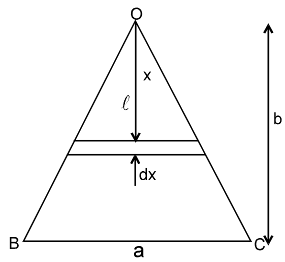
Solved Example

Example 6. एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसकी आधार लम्बाई a व ऊचाँई b है, का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए। मानें कि त्रिभुज इसके क्षेत्रफल पर एक समान रूप से वितरित है।

Solution : द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति पता करने के लिये हम त्रिभुज के शीर्ष से x दूरी पर dx चौड़ाई की एक अल्पांश पट्टी लेते है। इस पट्टी की लम्बाई समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म से निम्न प्रकार प्राप्त होती है।

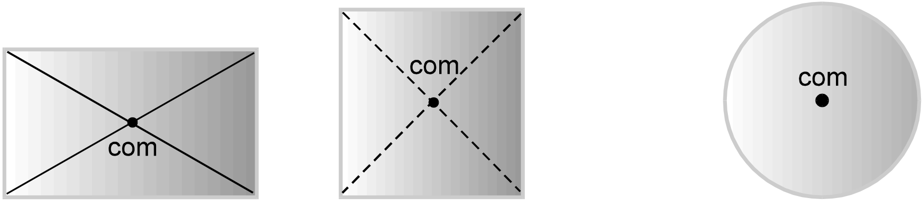
$\ell = x.\,(a/b)$ पट्टी का द्रव्यमान $dm = \frac{2M}{ab}\ell dx$

त्रिभुज के शीर्ष से द्रव्यमान केन्द्र की दूरी $x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm = \int_0^b \frac{2x^2}{b^2}dx = \frac{2}{3}b$



इसी प्रकार हम अन्य दृढ़ वस्तुओं का COM ज्ञात कर सकते है। कुछ दृढ़ वस्तुओं का द्रव्यमान केन्द्र निम्न प्रकार है।

1. समरूप आयताकार, वर्गाकार या वृत्ताकार प्लेट का द्रव्यमान केन्द्र इनके केन्द्र पर स्थित होता है। (सममित अक्ष, सममित तल)



2. पटलित वस्तुओं (2-विमीय) के लिये द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात करने के सूत्र निम्न प्रकार है।

$$\vec{r}_{COM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ...}{m_1 + m_2 + ...} = \frac{\rho A_1 t\vec{r}_1 + \rho A_2 t\vec{r}_2 + ...}{\rho A_1 t + \rho A_2 t + ...} \qquad (\because m = \rho A t)$$

या $\vec{r}_{COM} = \dfrac{A_1\vec{r}_1 + A_2\vec{r}_2 + ...}{A_1 + A_2 + ...}$

यहां, A क्षेत्रफल के लिये है।

3. यदि एक दृढ़ वस्तु के कुछ क्षेत्रफल का द्रव्यमान अलग कर दिया जाये तो शेष बचे भाग का द्रव्यमान केन्द्र निम्न सूत्रों से ज्ञात किया जाता है।

(i) $\vec{r}_{COM} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_2}{m_1 - m_2}$ या $\vec{r}_{COM} = \dfrac{A_1\vec{r}_1 - A_2\vec{r}_2}{A_1 - A_2}$

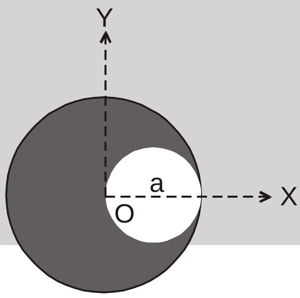
(ii) $x_{COM} = \dfrac{m_1x_1 - m_2x_2}{m_1 - m_2}$ या $x_{COM} = \dfrac{A_1x_1 - A_2x_2}{A_1 - A_2}$

$y_{COM} = \dfrac{m_1y_1 - m_2y_2}{m_1 - m_2}$ या $y_{COM} = \dfrac{A_1y_1 - A_2y_2}{A_1 - A_2}$

तथा $z_{COM} = \dfrac{m_1z_1 - m_2z_2}{m_1 - m_2}$ या $z_{COM} = \dfrac{A_1z_1 - A_2z_2}{A_1 - A_2}$

यहां m_1, A_1, $\vec{r}_1$, x_1, y_1 व z_1 सम्पूर्ण द्रव्यमान के लिये मान है। जबकि m_2, A_2, $\vec{r}_2$, $\vec{x}_2$, y_2 व z_2 हटाये गये द्रव्यमान के लिये मान है। अब हम उपरोक्त सिद्धान्त पर आधारित दो उदाहरण लेते है।

Example 7. चित्र में प्रदर्शित समरूप वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।



Solution : यहाँ

A_1 = सम्पूर्ण वृत्त का क्षेत्रफल = πa^2

A_2 = छोटे वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$

(x_1, y_1) = बड़े वृत्त के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक = (0, 0)

तथा (x_2, y_2) = छोटे वृत्त के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक = $\left(\dfrac{a}{2}, 0\right)$

$x_{COM} = \dfrac{A_1x_1 - A_2x_2}{A_1 - A_2}$ का उपयोग करने पर हम प्राप्त करते है।

$$x_{COM} = \frac{-\frac{\pi a^2}{4}\left(\frac{a}{2}\right)}{\pi a^2 - \frac{\pi a^2}{4}} = \frac{-\left(\frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} a = -\frac{a}{6}$$

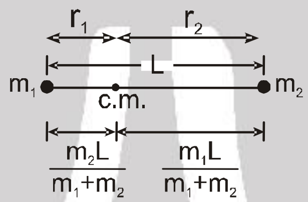
तथा $y_{COM} = 0$ चूंकि y_1 व y_2 दोनों शून्य है।

इस प्रकार, दी गयी वस्तु का COM $\left(-\frac{a}{6},\ 0\right)$ पर स्थित है। **Ans.**

प्रचलित निकायों का द्रव्यमान केन्द्र

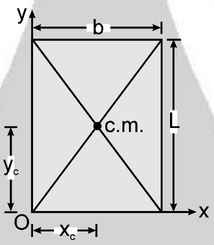
⇒ दो बिन्दु द्रव्यमानों का निकाय $m_1 r_1 = m_2 r_2$

द्रव्यमान केन्द्र अधिक द्रव्यमान वाले भाग के निकट होता है।



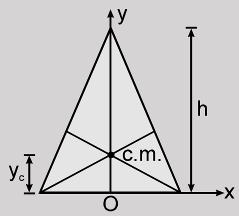
⇒ आयताकार प्लेट (सममितता से)

$x_c = \frac{b}{2}$ $y_c = \frac{L}{2}$

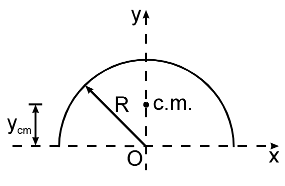


⇒ त्रिकोणीय प्लेट (संख्यात्मक विवेचना द्वारा)

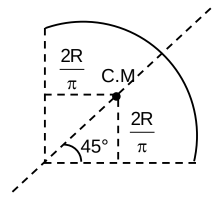
केन्द्रक पर : $y_c = \frac{h}{3}$



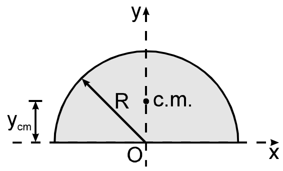
⇒ एक अर्द्ध वृत्ताकार वलय $y_c = \frac{2R}{\pi}$ $x_c = O$



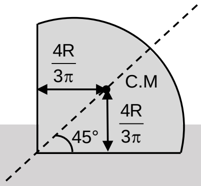
⇒ एक–चौथाई वलय



⇒ अर्द्ध वृत्ताकार चकती $y_c = \frac{4R}{3\pi}$ $x_c = O$

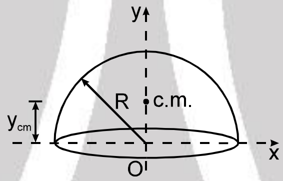


⇒ एक–चौथाई चकती



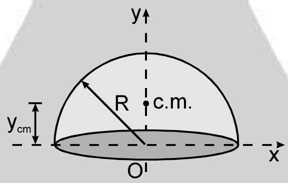
⇒ अर्द्ध गोलीय कोश

$y_c = \frac{R}{2}$ $x_c = O$

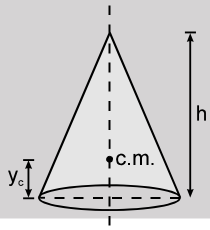


⇒ ठोस अर्द्ध गोला

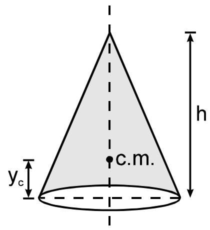
$y_c = \frac{3R}{8}$ $x_c = O$



⇒ वृत्ताकार शंकु (ठोस) $y_c = \frac{h}{4}$



⇒ एक वृत्ताकर शंकु (खोखला) $y_c = \frac{h}{3}$



द्रव्यमान केन्द्र की गति तथा संवेग संरक्षण :

द्रव्यमान केन्द्र का वेग :

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\frac{\overrightarrow{dr_1}}{dt} + m_2\frac{\overrightarrow{dr_2}}{dt} + m_3\frac{\overrightarrow{dr_3}}{dt}.............+m_n\frac{\overrightarrow{dr_n}}{dt}}{M} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 \;.........+m_n\vec{v}_n}{M}$$

उपरोक्त समीकरण के दाहिनी तरफ का अंश भाग निकाय के कुल संवेग को प्रदर्शित करता है। अर्थात् यह निकाय के प्रत्येक कण के संवेगों का योग है।

अतः किसी निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का वेग निकाय के संवेग तथा निकाय के प्रति एकांक द्रव्यमान का अनुपात होता है।

$\therefore \quad \vec{P}_{\text{निकाय}} = M\,\vec{v}_{cm}$

निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1\frac{\overrightarrow{dv_1}}{dt} + m_2\frac{\overrightarrow{dv_2}}{dt} + m_3\frac{\overrightarrow{dv_3}}{dt}.............+m_n\frac{\overrightarrow{dv_n}}{dt}}{M} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3.........+m_n\vec{a}_n}{M}$$

$$= \frac{\text{निकाय पर कुल बल}}{M} = \frac{\text{निकाय पर कुल बल + कुल बाह्य बल}}{M} = \frac{\text{कुल बाह्य बल}}{M}$$

($\because$ क्रिया तथा प्रतिक्रिया आन्तरिक बल है, अतः यह निकाय के अन्दर होने चाहिए। सभी आन्तरिक बलों का सदिश योग एक दूसरे को निरस्त कर देगा। अतः निकाय पर कुल आन्तरिक बल शून्य होता है।)

$\therefore \quad \vec{F}_{\text{बाह्य}} = M\,\vec{a}_{\text{द्रव्यमान केन्द्र}}$

निकाय के कण एक दूसरे पर जो आन्तरिक बल आरोपित करते है, वे द्रव्यमान केन्द्र की गति में कोई भूमिका नहीं निभाते।

यदि निकाय (कणों का समूह) पर बाह्य बल कार्यरत नहीं हो तो, निकाय का त्वरण शून्य होता है। यदि $a_c = 0$ है, तो v_{cm} नियत होगा। यदि v_{cm} नियत है तो निकाय का कुल संवेग नियत रहेगा। अतः यह बाह्य बलों की अनुपस्थिति मे निकाय के संवेग संरक्षण के सिद्धान्त को दर्शाता है।

यदि $\vec{F}_{\text{बाह्य}} = 0$ तो $\vec{v}_{\text{द्रव्यमान केन्द्र}}$ = नियत

" यदि निकाय पर बाह्य बल अनुपस्थित हो तो, निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है। "

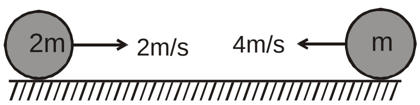
गतिमान कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की गति

(1) जब द्रव्यमान केन्द्र विरामावस्था में हो : यदि $F_{\text{बाह्य}} = 0$ तथा $V_{\text{द्रव्यमान केन्द्र}} = 0$ हो तो द्रव्यमान केन्द्र विरामावस्था में रहता है। अन्योन्य (आन्तरिक) बलों के कारण अलग–अलग कणों का संवेग अशून्य हो सकता है, लेकिन निकाय का कुल संवेग शून्य रहता है।

(i) निकाय के सभी कण विरामावस्था में होते है।

(ii) कण इस प्रकार गति करते है कि उनका कुल संवेग शून्य रहता है।

उदाहरण :



(iii) एक बम विरामावस्था में है और अचानक विभिन्न छोटे टुकड़ों में विस्फोटित हो जाता है, सभी विभिन्न दिशाओं में गति करते है। चूंकि विस्फोटित बल आन्तरिक है तथा निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है। इसलिए द्रव्यमान केन्द्र अपनी वास्तविक स्थिति में रहता है तथा बम के टुकड़े इस प्रकार बिखरते है कि कुल संवेग शून्य रहता है।

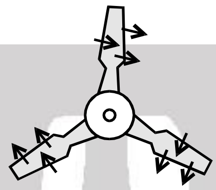
(iv) दो व्यक्ति घर्षण रहित प्लेट फॉर्म पर खड़े है, ये दोनों एक दूसरे को धक्का दे रहे है, तो भी इनका कुल संवेग शून्य रहता है। क्योंकि धक्का देने वाला बल दो व्यक्तियों के निकाय के लिए आन्तरिक है।

(v) एक झील में नौका तैर रही है। नौका पर स्थित व्यक्ति अपनी स्थिति बदलते है। इनको गति करने के लिए आवश्यक घर्षण बल नौका निकाय के लिए आन्तरिक बल होता है। अतः नौका का कुल संवेग शून्य रहता है।

(vi) यदि वस्तुएं प्रारम्भ में विरामावस्था में हो तथा फिर अन्योन्य बलों (स्थिर वैद्युतिकी या गुरूत्वाकर्षण) के प्रभाव में गति करने लगे तो भी इनका संवेग शून्य होता है।

(vii) एक k बल नियतांक वाली हल्की स्प्रिंग m_1 तथा m_2 द्रव्यमानों के मध्य सम्पीड़ित अवस्था में चिकनी क्षैतिज सतह पर रखी है। जब इसे मुक्त किया जाता है तो दोनों ब्लॉक विपरीत दिशा में इस प्रकार वेग प्राप्त करते है कि उनका कुल संवेग शून्य रहता है।

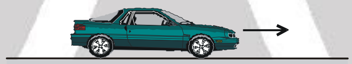
(viii) किसी पंखे के सभी कण गति करते है लेकिन द्रव्यमान केन्द्र विरामावस्था में रहता है।



(2) द्रव्यमान केन्द्र की नियत वेग से गति : यदि $F_{बाह्य} = 0$, तो V_{cm} नियत रहता है। इसलिए निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है। अन्योन्य (आन्तरिक), बलों के कारण निकाय के विभिन्न घटकों का वेग तथा संवेग परिवर्तित हो सकता है, लेकिन निकाय का कुल संवेग नियत रहता है और द्रव्यमान केन्द्र अपने आरम्भिक वेग से गति करता रहता है।

(i) निकाय के सभी कण समान वेग से गति करते है।

उदाहरण : एक कार एक समान वेग से सीधी सड़क पर गति कर रही है तो इसका द्रव्यमान केन्द्र नियत वेग से गति करता है।



(ii) आन्तरिक विस्फोट / टुटना आदि प्रक्रिया में द्रव्यमान केन्द्र की गति परिवर्तित नहीं होती है तथा कुल संवेग संरक्षित रहता है। एक बम सीधी रेखा में गति कर रहा है। यह अचानक विभिन्न छोटे टुकड़ो मे विभक्त हो जाता है और सभी टुकड़े विभिन्न दिशाओं में गति करते है चूंकि विस्फोटित बल आन्तरिक बल होते है तथा विस्फोट के लिए निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है। इसलिए द्रव्यमान केन्द्र उसकी वास्तविक गति की दिशा में गतिशील रहता है तथा बम के टुकड़े इस प्रकार उड़ते है कि कुल संवेग संरक्षित रहता है।

(iii) कोई व्यक्ति गाड़ी या बग्गी से कूदते समय आन्तरिक बल आरोपित करता है। इसलिए निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहता है। अतः द्रव्यमान केन्द्र की गति संरक्षित रहती है।

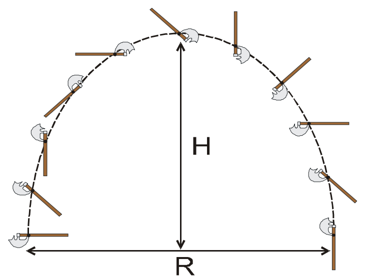
(iv) एक चिकने क्षैतिज सतह पर हल्की स्प्रिंग से जुड़े दो ब्लॉक गति कर रहे है। यदि आरोपित बल केवल स्प्रिंग के कारण है तो द्रव्यमान केन्द्र की गति वही रहती है तथा संवेग संरक्षित रहता है।

(v) बाह्य आवेग बलों की अनुपस्थिति में टकराने वाले कणों का संवेग संरक्षित रहता है।

(3) त्वरण से गतिशील द्रव्यमान केन्द्र : यदि बाह्य बल उपस्थित हो तो द्रव्यमान केन्द्र अपनी मौलिक गति बनाये रहता है, मानों सम्पूर्ण बाह्य बल इसके द्रव्यमान केन्द्र पर कार्यरत हो, आन्तरिक बलों का कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।

उदाहरण :

प्रक्षेप्य गति : एक कुल्हाड़ी को क्षैतिज से θ कोण पर हवा में फैंकने पर यह गुरूत्वाकर्षण के प्रभाव में घूर्णन गति के साथ–साथ परवलीय गति भी करती है।



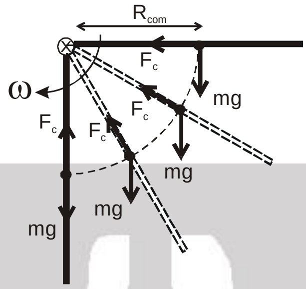
कुल्हाड़ी की गति जटिल है लेकिन द्रव्यमान केन्द्र परवलीय गति करता रहता है

$H_{द्रव्यमान\ केन्द्र} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$ $R_{द्रव्यमान\ केन्द्र} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{g}$ $T = \frac{2u\sin\theta}{g}$

उदाहरण :

वृत्तीय गति : एक छड़ एक सिरे से कीलकित है तथा घूर्णन कर रही है तो इसका द्रव्यमान केन्द्र वृत्तीय गति करता है। यहाँ वृत्तीय गति के लिए , आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल (F_c) द्रव्यमान केन्द्र पर कार्यरत है।

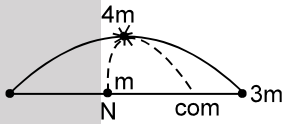
$F_c = m\omega^2 R_{com}$



Solved Example

Example 8. एक प्रक्षेप्य क्षैतिज से 37° के कोण पर 100 मी०/सैकण्ड़ के वेग से दागा जाता है। यह पथ की अधिकतम ऊँचाई पर दो भागों में विभक्त हो जाता है तथा द्रव्यमानों का अनुपात 1 : 3 है, छोटा भाग विरामावस्था में आ जाता है। प्रक्षेप्य बिन्दु से जिस स्थान पर बड़ा भाग गिरा है, उसकी दूरी ज्ञात करो।

Solution : आन्तरिक बल द्रव्यमान केन्द्र की गति कर प्रभाव नहीं डालते, द्रव्यमान केन्द्र धरातल पर उसी स्थान पर टकरता है जहां वास्तविक प्रक्षेप की परास



$x_{द्रव्यमान\ केन्द्र} = \frac{2u^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{2\times10^4\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}}{10} m = 960m$

द्रव्यमान केन्द्र इस स्थान पर टकराता है। चूंकि छोटा भाग विभक्त होने के बाद विरामावस्था में आ जाता है। अतः यह ऊर्ध्वाधर नीचे गिरेगा तथा परास की आधी दूरी अर्थात् x = 480 मीटर पर टकराता है। यदि भारी भाग धरातल पर x_2 पर टकराता है तो

$x_{द्रव्यमान\ केन्द्र} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ $960 = \frac{(m)(480) + (3m)(x_2)}{(m + 3m)}$

x_2 = 1120 m **Ans.**

संवेग संरक्षण :

किसी निकाय के सभी कणों का कुल रेखीय संवेग, निकाय का कुल द्रव्यमान तथा इसके द्रव्यमान केन्द्र की गति के गुणनफल के बराबर होता है। $\vec{P} = M\vec{v}_{cm}$

$\vec{F}_{बाह्य} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

यदि $\vec{F}_{बाह्य} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$; $\vec{P}$ = नियतांक

यदि किसी निकाय पर आरोपित बाह्य बलों का सदिश योग शून्य हो तो निकाय का कुल रेखीय संवेग संरक्षित रहता है।

$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + . \ . \ . \ . + \vec{P}_n$ = नियत

Solved Example

Example 9. एक तोप द्वारा क्षैतिज (धनात्मक x दिशा) से 60º के कोण पर 100 मी०/सै० के वेग से गोला दागा जाता है। पथ के शीर्ष बिन्दु पर गोला दो बराबर भागों में विभक्त हो जाता है। उनमें से एक भाग ऋणात्मक x दिशा में 50 मी०/सै० के वेग से जाता है। विस्फोट के समय दूसरे भाग की चाल ज्ञात करो।

Solution : हम जानते है कि बाह्य बलों की अनुपस्थिति में द्रव्यमान केन्द्र अप्रभावी रहता है। अतः यहां दोनों टुकड़ो का द्रव्यमान केन्द्र लगातार प्रक्षेप के वास्तविक पथ पर ही गति करता रहता है। पथ के शीर्ष बिन्दु पर गोले का वेग

$v_M = u\cos\theta = 100 \times \cos 60^o = 50$ मी०/सै०

माना ऋणात्मक x–दिशा के अनुदिश गति करने वाले टुकड़े का वेग v_1 तथा दूसरे टुकड़ा जिसको की +ve, x–दिशा में गति करना चाहिए, का वेग v_2 है। अब संवेग संरक्षण से

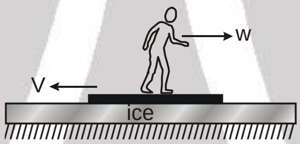
$$mv = \frac{-m}{2} v_1 + \frac{m}{2} v_2$$

या $2v = v_2 - v_1$

या $v_2 = 2v + v_1 = (2 \times 50) + 50 = 150$ मी०/सै०

Example 10. किसी बर्फ पर M द्रव्यमान का प्लेटफार्म रखा है इस पर m द्रव्यमान का व्यक्ति खड़ा है। यदि व्यक्ति प्लेटफार्म पर प्लेटफार्म के सापेक्ष v चाल से गति करना प्रारम्भ कर दें तो प्लेटफार्म का प्रतिक्षेप वेग क्या होगा ?

Solution : चित्रानुसार माना व्यक्ति w वेग से दाहिनी ओर गति करता है तथा प्लेटफार्म V वेग से बांयी ओर विस्थापित होता है, दोनों बर्फ के सापेक्ष गति कर रहे है। अतः व्यक्ति का प्लेटफार्म के सापेक्ष वेग V + w होगा, समीकरण से



$V + w = v$, or $w = v - V$ .....(i)

प्लेटफार्म तथा व्यक्ति को एक निकाय मानने पर, इस निकाय पर क्षैतिज दिशा में बाह्य बल शून्य है। अतः निकाय का संवेग संरक्षित रहेगा। प्रारम्भ में व्यक्ति तथा प्लेटफार्म दोनों स्थिरावस्था में है।

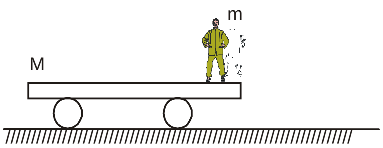
$0 = MV - mw$

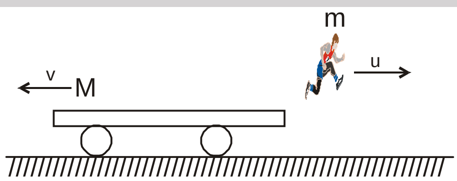
या $MV = m(v - V)$ [समीकरण (i) का उपयोग करने पर]

या $V = \dfrac{mv}{M+m}$

Example 11. एक M द्रव्यमान की समतल कार घर्षण रहित सतह पर विरामावस्था में है। इसके एक किनारे पर m द्रव्यमान का लड़का खड़ा है। यह कार के दाहिनी ओर कूदता है। इसका कार के सापेक्ष प्रारम्भिक वेग u है तो लड़के के कूदने के पश्चात् कार का वेग ज्ञात करो।

Solution : माना कार का वेग v हो जाता है तो लड़के का धरातल के सापेक्ष वेग u – v, होगा। u लड़के का कार के सापेक्ष प्रारम्भिक वेग है।



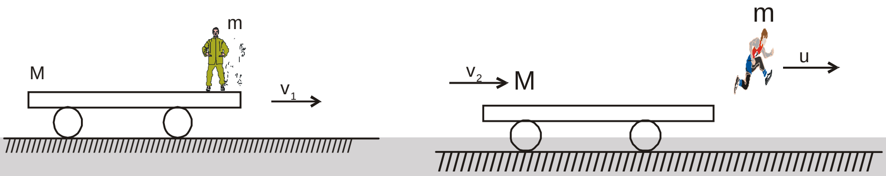


प्रारम्भ मे निकाय विरामावस्था में था। अतः संवेग संरक्षण नियम से कूदने के पश्चात् संवेग होना चाहिए।

$m(u - v) = Mv \Rightarrow v = \dfrac{mu}{m+M}$

Example 12. एक समतल कार पर एक लड़का खड़ा है, समतल कार v_1 वेग से गति कर रही है। दोनों के द्रव्यमान क्रमशः M व m है। लड़का कार की गति की दिशा में कार के सापेक्ष u वेग से कूदता है। लड़के के कूदने के पश्चात् लड़के तथा कार का अन्तिम वेग ज्ञात कीजिए।

Solution : यह स्थिति पहले वाले उदाहरण के समान है लेकिन इसमें लड़के के कूदने से पहले कार का कुछ वेग है। यहाँ निकाय पर क्षैतिज दिशा में बाह्य बल शून्य है। अतः इस दिशा में संवेग संरक्षित रहता है। लड़का कूदने के लिए कार को पीछे की तरफ धक्का देता है इससे कार का उसी दिशा में वेग v_2 हो जाता है। यह मान v_1 से कम है। कूदने के पश्चात् लड़के का कार की दिशा में धरातल के सापेक्ष वेग $u + v_2$ है।

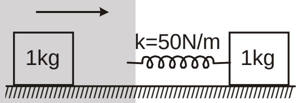


संवेग संरक्षण के आधार पर $(M + m)v_1 = Mv_2 + m\,(u + v_2)$

कूदने के पश्चात् कार का वेग $v_2 = \dfrac{(M+m)v_1 - mu}{M+m}$

लड़के का कूदने के पश्चात् वेग $u + v_2 = \dfrac{(M+m)v_1 + (M)u}{M+m}$

Example 13. चित्रानुसार प्रत्येक ब्लॉक का द्रव्यमान 1 किग्रा० है। पीछे वाला ब्लॉक 2 मी०/सै० के वेग से सामने विरामावस्था मे रखे ब्लॉक की तरफ गति कर रहा है। आगे वाले ब्लॉक से एक हल्की स्प्रिंग जुड़ी हुई है। इसका स्प्रिंग नियतांक 50 न्यूटन/मी० है। स्प्रिंग में अधिकतम संपीड़न ज्ञात करो।



Solution : जब दोनों ब्लॉक समान वेग से गति करते है तो स्प्रिंग में सम्पीड़न अधिकतम होता है। दोनों ब्लॉक के निकाय पर क्षैतिज दिशा में कार्यरत बाह्य बल शून्य है। अतः निकाय का कुल संवेग संरक्षित रहेगा। यदि अधिकतम सम्पीड़न के समय दोनों तरफ ब्लॉक की चाल V हो तो

(1 किग्रा०) (2 मी०/सै०) = (1 kg)V + (1 kg)V

या V = 1 मी०/सै०

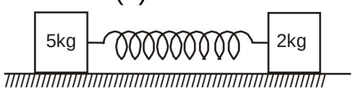
प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा $= \dfrac{1}{2}$ (1 kg) $(2\ m/s)^2$ = 2 J.

अन्तिम गतिज ऊर्जा $= \dfrac{1}{2}$ (1 kg) $(1 m/s)^2 + \dfrac{1}{2}$ (1 kg) $(1\ m/s)^2$ = 1 J

गतिज ऊर्जा में हानि स्प्रिंग में संग्रहित प्रत्यास्थ ऊर्जा होती है।

अतः $\dfrac{1}{2}$ (50 N/m) x^2 = 2J – 1J = 1 J   या   x = 0.2 मीटर

Example 14. चित्रानुसार घर्षण रहित सतह पर 5 किग्रा० तथा 2 किग्रा० द्रव्यमान के दो ब्लॉक स्प्रिंग से जुड़े हुए है तथा सतह पर रखे है। भारी ब्लॉक को हल्के ब्लॉक की दिशा में 14 मी०/सै० का वेग दिया जाता है। तो ज्ञात करो (a) द्रव्यमान केन्द्र द्वारा प्राप्त वेग तथा (b) भारी ब्लॉक को धक्का देने के पश्चात् दोनों ब्लॉक के वेग।



Solution : (a) द्रव्यमान केन्द्र की गति $v_{cm} = \dfrac{5\times14+2\times0}{5+2}$ = 10 मी०/सै०

(b) 5 किग्रा० को धक्का देने के बाद यह तुरन्त 14 मी०/सै० वेग से गति करने लगता है लेकिन इस समय 2 किग्रा० का ब्लॉक जड़त्व के कारण स्थिर रहता है।
5 किग्रा० ब्लॉक का द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष वेग v_1 = 14 – 10 = 4 मी०/सै०
तथा 2 किग्रा० ब्लॉक का द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष वेग v_2 = 0 – 10 = –10 मी०/सै०

Example 15. एक चिकने क्षैतिज सतह पर k स्प्रिंग नियतांक वाली स्प्रिंग M तथा m द्रव्यमानों वाले ब्लॉक के मध्य सम्पीड़ित है। जब इसे मुक्त किया जाता है तो दोनों ब्लॉक विपरीत दिशा में गति करते है। जब स्प्रिंग अपनी वास्तविक लम्बाई को प्राप्त कर लेती है तो ब्लॉक का स्प्रिंग से सम्पर्क नहीं रहता। यदि स्प्रिंग प्रारम्भ में x दूरी तक सम्पीड़ित थी। तो दोनों ब्लॉक के अन्तिम वेग ज्ञात करो।

Solution : दोनों ब्लॉक व स्प्रिंग को एक निकाय मानने पर, इस निकाय पर क्षैतिज दिशा में कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं है। अतः निकाय का रेखीय संवेग नियत रहता है। माना स्प्रिंग से सम्पर्क हटने पर M द्रव्यमान के ब्लॉक का वेग V तथा m द्रव्यमान के ब्लॉक का वेग v है। अतः क्षैतिज दिशा में रेखीय संरक्षण के नियम से

$$MV - mv = 0 \quad \text{or} \quad V = \frac{m}{M}v, \qquad .....(i)$$

प्रारम्भ में निकाय की ऊर्जा = $\frac{1}{2}kx^2$

निकाय की अन्तिम ऊर्जा = $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$

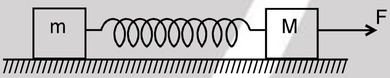
क्योंकि यहां घर्षण नहीं है। अतः निकाय की यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहेगी।

इसलिए, $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kx^2$ .....(ii)

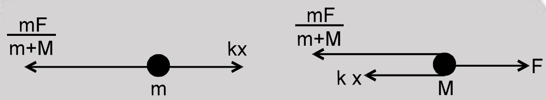
समीकरण (i) तथा (ii), को हल करने पर

या $V = \left[\frac{kM}{m(M+m)}\right]^{1/2} x$ तथा $V = \left[\frac{km}{M(M+m)}\right]^{1/2} x$ **Ans.**

Example 16. एक m द्रव्यमान का ब्लॉक K स्प्रिंग नियतांक वाली हल्की स्प्रिंग द्वारा M द्रव्यमान के ब्लॉक से जुड़ा है। यह ब्लॉक चिकने क्षैतिज तल पर विरामावस्था में रखे है। जब M द्रव्यमान के ब्लॉक पर F बल लगाया जाता है। उस क्षण स्प्रिंग सामान्य (अविस्तारित) स्थिति मे थी। तो स्प्रिंग में अधिकतम विस्तार ज्ञात करो।



Solution : इस प्रश्न को हम द्रव्यमान केन्द्र के निर्देश तंत्र में हल करेंगे। निकाय पर केवल F बाह्य बल आरोपित है। इस बल के कारण द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण F/(M + m) है। द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष दोनों द्रव्यमानों पर विपरीत दिशा में आभासी बल कार्य कर रहा है। द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष m व M द्रव्यमान का मुक्त पिण्ड आरेख (F.B.D.) चित्र में प्रदर्शित है। (द्रव्यमान केन्द्र विरामावस्था में है)



द्रव्यमान केन्द्र विरामावस्था में है, यदि m द्रव्यमान अधिकतम x_1 दूरी तथा M द्रव्यमान अधिकतम x_2 दूरी तक गति करता है तो बाह्य बल (आभासी बल सहित) द्वारा किया गया कार्य होगा।

$$W = \frac{mF}{m+M} . x_1 + \left(F - \frac{MF}{m+M}\right) . x_2 = \frac{mF}{m+M} . (x_1 + x_2)$$

यह कार्य स्प्रिंग की प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के रूप में संग्रहित होगा।

$$U = \frac{1}{2} k(x_1 + x_2)^2$$

समीकरणों को बराबर करने पर स्प्रिंग में अधिकतम विस्तार ज्ञात होगा। इस क्षण के बाद स्प्रिंग में संकुचन प्रारम्भ होगा।

$$\frac{1}{2} k(x_1 + x_2)^2 = \frac{mF}{m+M} . (x_1 + x_2) \ ; \ x_{max} = x_1 + x_2 = \frac{2mF}{k(m+M)}$$

आवेग :

किसी वस्तु पर आरोपित बल F का आवेग है –

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad \Rightarrow \quad \vec{I} = \int \vec{F}dt = \int m\frac{d\vec{v}}{dt}dt = \int m d\vec{v}$$

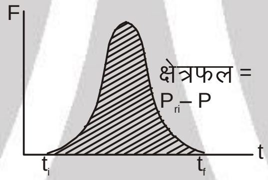
$\vec{I} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \Delta\vec{P}$ = यह संवेग में परिवर्तन के बराबर भी होता है।

$$\vec{I}_{Res} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{Res}dt = \Delta\vec{P}$$ **(आवेग - संवेग प्रमेय)**

नोट : किसी वस्तु पर किसी समयान्तराल में लगने वाला आवेग की गणना, उसी समयान्तराल में बल–समय (F-t) ग्राफ के क्षेत्रफल से की जा सकती है।

तात्क्षणिक आवेग : कई बार बल बहुत अल्प समय के लिए कार्य करता है। इस प्रभाव को तात्क्षणिक आवेग कहते है। उदाहरण बल्ले से गेंद को मारना। बहुत सी स्थितियों में, बल का परिमाण तथा जितने समय के लिए यह कार्यकारी है, दोनों अज्ञात हो तब भी अन्तिम तथा प्रारम्भिक संवेग को माप करके दोनों के गुणनफल (अर्थात् आवेग) को ज्ञात किया जा सकता है। अतः $\vec{J} = \int \vec{F}\ dt = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$

दिये गये समयान्तराल में किसी वस्तु पर आरोपित आवेग उसी अन्तराल में बल–समय वक्र के क्षेत्रफल के बराबर होता है।



मुख्य बिन्दु :

(1) यह एक सदिश है।
(2) विमा = $[MLT^{-1}]$
(3) SI इकाई = किग्रा० मी०/सै०
(4) इसकी दिशा संवेग परिवर्तन के अनुदिश होती है।
(5) परिमाण F-t.वक्र के क्षेत्रफल के बराबर होता है।
(6) $J = \int F dt = F_{av}\int dt = F_{av}\Delta t$
(7) यह कण का गुण नहीं है। बल्कि इससे हम यह ज्ञात करते है कि कोई बाह्य बल किसी कण के संवेग में परिवर्तन कर सकता है।

Solved Example

Example 17. एक स्टंट फिल्म का हीरो मशीनगन से गोलियां चला रहा है। प्रत्येक गोली का द्रव्यमान 50 ग्राम व वेग 1.0 किमी०/सै० है। वह 4 सैकण्ड में 20 गोलियां दाग सकता है। इस दौरान हीरो द्वारा मशीन गन पर आरोपित औसत बल ज्ञात करो।

Solution : प्रत्येक गोली का संवेग किग्रा० = (0.050 किग्रा०) (1000 मी०/सै०) = 50 किग्रा०–मी०/सै०

प्रत्येक गोली बन्दूक पर इतना संवेग आरोपित करती है। अतः बन्दूक के संवेग में परिवर्तन

$$= \frac{(50 \text{ किग्रा०} - \text{मी०/सै०}) \times 20}{4\ s} = 250 \text{ न्यूटन}$$

मशीन गन को पकड़े रहने के लिए हीरो को मशीन गन के विरूद्व 250 न्यूटन का बल लगाना चाहिए।

आवेगी बल :

जब एक बहुत अधिक परिमाण का बल बहुत अल्प समय के लिए कार्यकारी होता है तो यह आवेगी बल कहलाता है। एक आवेगी बल बहुत अल्प समय में वस्तु के संवेग में निश्चित परिमाण का परिवर्तन कर देता है। आवेगी एक सापेक्ष राशि है। आवेगी व अनआवेगी बलों के मध्य कोई स्पष्ट परिसीमा नहीं है।

नोट : सभी टकराने वाले बलों की प्रकृत्ति आवेगी होती है, चूंकि आरोपित समय बहुत अल्प होता है। अतः कण की गति अत्यल्प होती है।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु :

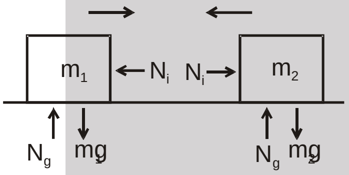
1. गुरूत्वाकर्षण तथा स्प्रिंग बल हमेशा अनावेगी होते है।

2. अभिलम्ब, तनाव तथा घर्षण स्थितियों पर निर्भर करते है।

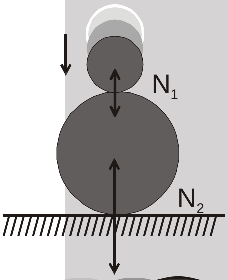
3. एक आवेगी बल हमेशा अन्य आवेगी बल से ही सन्तुलित हो सकता है।

1. आवेगी अभिलम्ब : टक्करों में, टक्कर सतह पर अभिलम्ब बल हमेशा आवेगीय होते है।

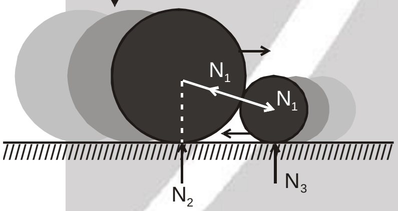
eq.



N_i = आवेगी ; N_g = अनआवेगी

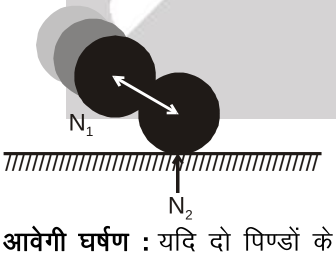


दोनों अभिलम्ब आवेगी है

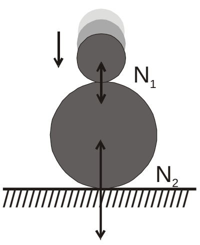


N_1, N_3 = आवेगी ; N_2 = अनावेगी

दोनों अभिलम्ब आवेगी है

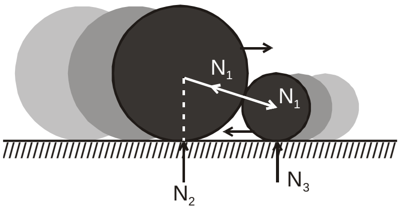


2. आवेगी घर्षण : यदि दो पिण्डों के मध्य अभिलम्ब प्रतिक्रिया आवेगी है, तो उनके मध्य घर्षण भी आवेगी होगा।



दोनों अभिलम्ब प्रतिक्रिया आवेगी है।

दोनों सतह पर घर्षण आवेगी है

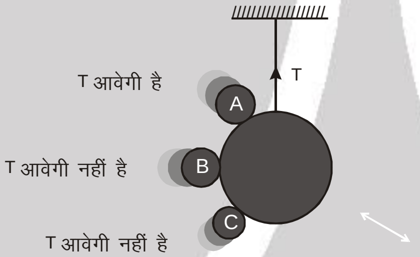


N_2 के कारण घर्षण आवेगी नहीं है एवं N_3 के कारण घर्षण आवेगी है।

3. आवेगी तनाव : जब एक डोरी पर झटका लगता है, बराबर व विपरीत तनाव प्रत्येक सिरे पर अचानक कार्य करता है। साथ ही समान व विपरीत आवेग डोरी से जुड़ी वस्तुओं पर डोरी की दिशा में कार्य करते है। विचार करने के लिए दो स्थितियाँ है।

(a) डोरी एक सिरा स्थिर है : आवेग जो डोरी के स्थिर सिरे पर कार्य करता है, वहां पर स्थिर वस्तु का संवेग परिवर्तित नहीं कर सकता। परन्तु डोरी के मुक्त सिरे पर जुड़ी वस्तु का संवेग डोरी की दिशा में परिवर्तित होता है। डोरी के लम्बवत् दिशा में जहां कोई आवेगीय बल कार्य नहीं करते, संवेग अपरिवर्तित रहता है।

(b) डोरी के दोनों सिरे गति करने योग्य वस्तुओं से जुड़े है: इस स्थिति में दोनों वस्तुओं पर बराबर व विपरीत आवेग कार्य करते है। बराबर व विपरीत संवेग परिवर्तन उत्पन्न करते हुए इसलिए निकाय का कुल संवेग नियत रहता है। यद्यपि प्रत्येक वस्तु का संवेग डोरी की दिशा में परिवर्तित होता है। डोरी के लम्बवत् कोई आवेग कार्य नहीं करता और इस दिशा में प्रत्येक कण का संवेग अपरिवर्तित रहता है।

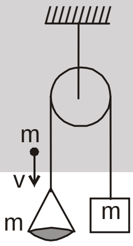


सभी अभिलम्ब प्रतिक्रिया आवेगी है परन्तु तनाव T_A केवल गेंद के लिये आवेगी है

इस उदाहरण के लिए : छड़ के लिए तनाव सदैव आवेगी है। स्प्रिंग के लिए तनाव सदैव अनावेगी है।

Solved Examples

Example 18. एक चिकनी हल्की घिरनी से गुजर रही एक डोरी के द्वारा m द्रव्यमान का एक गुटका व एक पलड़ा जुड़े है। प्रारम्भ में निकाय विराम पर है जब m द्रव्यमान का एक कण पलड़े पर गिरता है व इससे चिपक जाता है। यदि कण पलड़े पर v चाल से टकराता है तो टक्कर के तुरन्त बाद निकाय की चाल ज्ञात करो।



Solution : माना कि अभीष्ट चाल V है।

फिर से माना J_1 = कण व पलड़े के मध्य आवेग

तथा J_2 = डोरी के द्वारा गुटके व पलड़े को दिया गया आवेग

उपयोग किया गया आवेग = संवेग में परिवर्तन

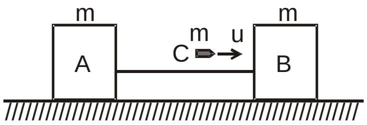
कण के लिये $J_1 = mv - mV$ .....(i)

पलड़े के लिये $J_1 - J_2 = mV$ .....(ii)

गुटके के लिये $J_2 = mV$ .....(iii)

इन तीन समीकरणों को हल करने पर हम पाते है। $V = \frac{v}{3}$ **Ans.**

Example 19. दो एक जैसे गुटके A व B एक द्रव्यमानहीन डोरी से जुड़े एक क्षैतिज घर्षणरहित सतह पर रखे है। समान द्रव्यमान की एक गोली u चाल से चलती हुई गुटके B पर चित्रानुसार पीछे से टकराती है। यदि गोली गुटके B में धंस जाती है तो ज्ञात करो –



(a) टक्कर के बाद A, B, C के वेग

(b) डोरी में तनाव के कारण A पर आवेग

(c) टक्कर के अभिलम्ब बल के कारण C पर आवेग

(d) टक्कर के अभिलम्ब बल के कारण B पर आवेग

Solution : (a) रेखीय संवेग के संरक्षण द्वारा $v = \frac{u}{3}$ टक्कर

(b) $\int T\,dt = \frac{mu}{3}$

(c) $\int N\,dt = m\left(\frac{u}{3} - u\right) = \frac{-2mu}{3}$

(d) $\int (N - T)dt = \int Ndt - \int T \;\; dt = \frac{mu}{3} \quad \Rightarrow \quad \int Ndt = \frac{2mu}{3}$

टक्कर :

टक्कर एक ऐसी परिघटना है जिसमें एक शक्तिशाली बल दो या अधिक वस्तुओं पर अल्प समय के लिए कार्य करता है जिसके कारण उनके वेगों में परिवर्तन होता है।

नोट :

(a) टक्कर में कण भौतिक सम्पर्क में आ भी सकते है या नहीं भी।

(b) गति के प्रेक्षण के सामान्य समयान्तरालों की तुलना में टक्कर में समयान्तराल Δt नगण्य होता है।

(c) एक टक्कर मे बाह्य अनावेगी बलों का प्रभाव जैसे कि गुरूत्व आदि पर विचार नहीं किया जाता है क्योंकि टक्कर का समयान्तराल (Δt) बहुत कम है, इसलिए टक्कर के लिए उत्तरदायी आवेगी बल, निकाय पर कार्यरत अन्य बाह्य बलों की तुलना में बहुत अधिक है।

टक्कर वास्तव में कणों के कुल संवेग का पुर्नवितरण है : इस प्रकार, संवेग संरक्षण का नियम कणों के मध्य टक्कर के अध्ययन मे उपयोगी है।

टक्कर की रेखा

टक्कर के दौरान सम्पर्क सतह के उभयनिष्ठ अभिलम्ब से गुजर रही रेखा। टक्कर के दौरान दोनों वस्तुओं पर बल इस रेखा पर कार्य करता है। टक्कर की रेखा की दिशा निम्न के द्वारा ज्ञात की जा सकती है :

(a) टक्कर करने वाली वस्तुओं की ज्यामिति पर (जैसे गोला,चकती,वेज आदि)।

(b) संवेग में परिवर्तन की दिशा।

यदि टक्कर से पहले एक कण स्थिर है तो इसकी टक्कर की रेखा, टक्कर के बाद इसकी गति के अनुदिश होगी।

टक्कर के प्रकार

(a) टक्कर की रेखा के अनुसार :

(i) सम्मुख टक्कर : अगर कण का वेग टक्कर के पहले और बाद में एक ही रेखा के अनुदिश हो तो यह सम्मुख टक्कर कहलाती हैं।

(ii) तिर्यक टक्कर : अगर टक्कर के पहले और बाद में वेग की दिशा अलग–अलग रेखाओं में हो तो टक्कर तिर्यक टक्कर कहलाती है।

(b) ऊर्जा के आधार पर :

(i) प्रत्यास्थ टक्कर : प्रत्यास्थ टक्कर में कण टक्कर के बाद उसकी आकृत्ति व आकार पुनः पूर्णतया प्राप्त कर लेता है, अर्थात् यांत्रिक ऊर्जा का कोई भाग वस्तु में संग्रहीत विरूपण स्थितिज ऊर्जा के रूप में नहीं होता। टक्कर के दौरान अगर निकाय की कुल गतिज ऊर्जा टक्कर के बाद की गतिज ऊर्जा के बराबर हो तो यह प्रत्यास्थ टक्कर कहलाती है।

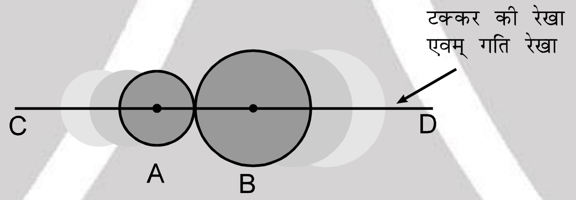
(ii) अप्रत्यास्थ टक्कर : अप्रत्यास्थ टक्कर में कण टक्कर के बाद पुनः उसकी आकृत्ति व आकार पूर्णतया प्राप्त नहीं करता। यांत्रिक ऊर्जा का कुछ भाग टकराने वाले कणों की विरूपण स्थितिज ऊर्जा के रूप में बचा रहता है। अगर किसी टक्कर के दौरान टक्कर के पहले की गतिज ऊर्जा, टक्कर के बाद की गतिज ऊर्जा के बराबर नही हो तो यह अप्रत्यास्थ टक्कर कहलाती है।

(iii) पूर्ण अप्रत्यास्थ : अगर टक्कर के बाद टक्कर रेखा के अनुदिश अलगाव का वेग शून्य हो तो पूर्ण अप्रत्यास्थ टक्कर कहलाती है। टक्कर पूर्ण अप्रत्यास्थ होगी, यदि टक्कर के बाद दोनों कण एक दूसरे से चिपक जाते है एवं समान वेग से गति करते है।

नोट : वास्तव में सभी वास्तविक वस्तुओं के बीच टक्कर ना तो पूर्ण रूप से प्रत्यास्थ और ना ही पूर्ण रूप से अप्रस्त्यास्थ होती है बल्कि अप्रत्यास्थ होती है।

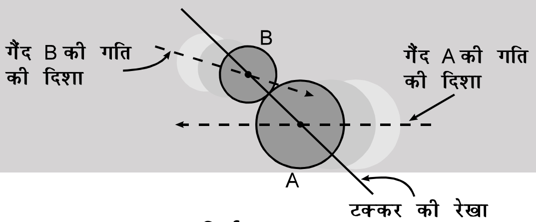
टक्कर की रेखा एवम् टक्कर की रेखा पर आधारित टक्करों के उदाहरण

(i) दो गेंद A तथा B एक दूसरे की ओर बढ़ते हुए इस तरह टक्कर करें कि उनके केंद्र रेखा CD के अनुदिश गति कर रहे हैं।



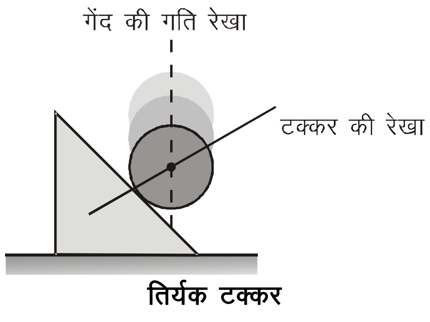
सम्मुख टक्कर

(ii) दो गेंद A तथा B एक दूसरे की ओर पहुंच रही हो लेकिन उनके केन्द्र बिन्दु रेखा के अनुदिश गति कर रहे हो। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।



तिर्यक टक्कर

(iii) एक गेंद स्थिर वेज से टकराती है।



तिर्यक टक्कर

प्रत्यावस्थान गुणांक

प्रत्यावस्थान गुणांक किसी भी वस्तु के आकृति वापिस प्राप्त करने के एवम् आकृति बिगड़ने के आवेग के अनुपात के बराबर होता हैं।

$$e = \frac{\text{पुनर्निर्माण का आवेग}}{\text{विरूपण का आवेग}} = \frac{\int F_r dt}{\int F_d dt} = \frac{\text{टक्कर की रेखा के अनुदिश अलगाव का वेग}}{\text{टक्कर की रेखा के अनुदिश पहुँच का वेग}}$$

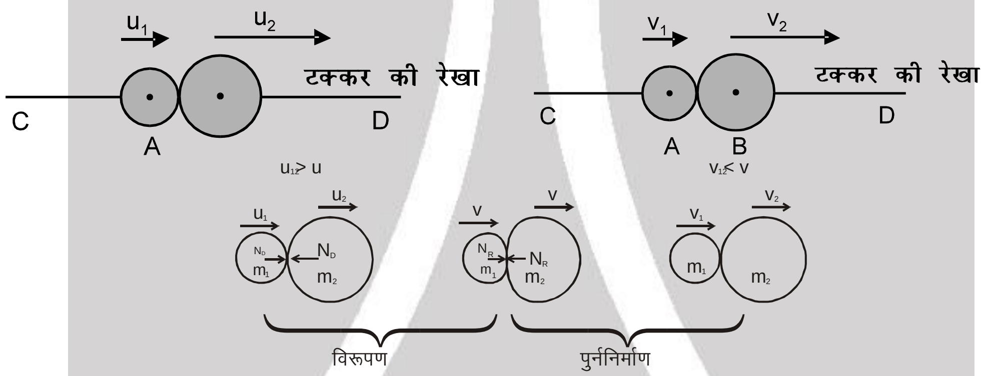
प्रत्यावस्थान गुणांक के लिए सर्वाधिक उपयोगी सूत्र :

$$e = \frac{\text{टक्कर की रेखा के अनुदिश सम्पर्क बिन्दु के अलगाव का वेग}}{\text{टक्कर की रेखा के अनुदिश सम्पर्क बिन्दु के पहुँच का वेग}}$$

e की गणना के उदाहरण

दो चिकनी गेंद A तथा B एक दूसरे की ओर पहुँच रही है इस तरह ताकि उनके केन्द्र CD रेखा, अनुदिश के अनुरूप गति करे। टक्कर के पहले A तथा B के वेग क्रमशः u_1 तथा u_2 है। टक्कर के तुरन्त बाद A तथा B के वेग v_1 तथा v_2 है।

टक्कर के पूर्व **टक्कर के बाद**



$\because$ $F_{ext} = 0$ निकाय के लिए संवेग संरक्षित है।

$\Rightarrow$ $m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v = m_1v_1 + m_2v_2$

$\Rightarrow$ $v = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$ ....(1)

विरूपण का आवेग :

J_D = विरूपण के दौरान किसी एक वस्तु के संवेग में परिवर्तन

$= m_2 (v - u_2)$ m_2 के लिए

$= m_1 (-v + u_1)$ m_1 के लिए

पुनर्निर्माण का आवेग :

J_R = पुनर्निर्माण के दौरान किसी एक वस्तु के संवेग में परिवर्तन

$= m_2 (v_2 - v)$ m_2 के लिए

$= m_1 (v - v_1)$ m_1 के लिए

$$e = \frac{\text{पुर्ननिर्माण का आवेग } (\vec{J}_R)}{\text{विरूपण का आवेग } (\vec{J}_D)} = \frac{v_2 - v}{v - v_1} = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$ ((1) से v का मान रखने पर)

$$= \frac{\text{टक्कर की रेखा के अनुदिश अलगाव का वेग}}{\text{टक्कर की रेखा के अनुदिश पास आने का वेग}}$$

Note : e, वस्तु के आकार व द्रव्यमान से स्वतंत्र है परन्तु पदार्थ पर निर्भर करता है। दो विशेष वस्तुओं के लिए प्रत्यावस्थान गुणांक नियत है।

(a) e = 1 $\Rightarrow$ पुनर्निर्माण का आवेग = विरूपण का आवेग

$\Rightarrow$ अलगाव का वेग = पहुँच का वेग

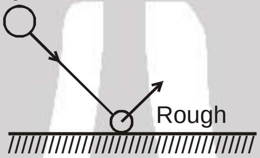
⇒ गतिज ऊर्जा संरक्षित हो सकती है।
⇒ प्रत्यास्थ टक्कर

(b) $e = 0$ ⇒ पुनर्निर्माण का आवेग = 0
⇒ अलगाव का वेग = 0
⇒ गतिज ऊर्जा असंरक्षित
⇒ पूर्णतया अप्रत्यास्थ टक्कर

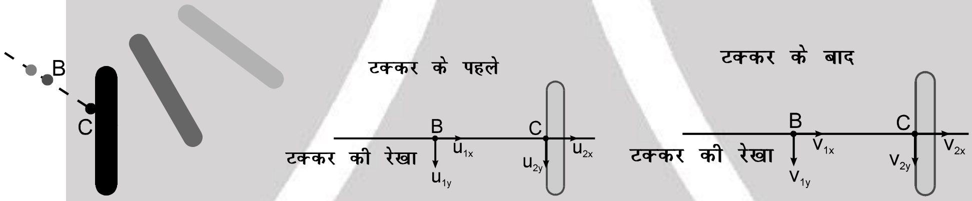
(c) $0 < e < 1$ ⇒ पुनर्निर्माण का आवेग < विरूपण का आवेग
⇒ अलगाव का वेग < पहुँच का वेग
⇒ गतिज ऊर्जा असंरक्षित
⇒ अप्रत्यास्थ टक्कर

नोट : सम्पर्क टक्करों में e सदैव एक से कम ∴ $0 \le e \le 1$

महत्त्वपूर्ण बिन्दु : प्रत्यास्थ टक्कर में यदि खुरदरी सतह उपस्थित है तो $k_f < k_i$ (क्योंकि घर्षण आवेगी है)

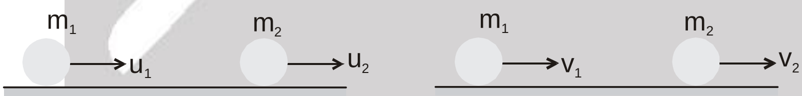


(ii) एक कण B बिन्दुवत रेखा के अनुदिश छड़ से टक्कर करता है, छड़ भी चित्रानुसार गति की अवस्था में है। कण B छड़ के बिन्दु C पर सम्पर्क मे आता है।
प्रत्यावस्थान गुणांक e का व्यंजक लिखने के लिए सबसे पहले हम टक्कर की रेखा खीचते है। फिर हम टक्कर से पूर्व तथा बाद में, दोनों वस्तुओं के सम्पर्क बिन्दुओं के वेगों के घटक, टक्कर की रेखा के अनुदिश वियोजित करते है।



तब $e = \dfrac{v_{2x} - v_{1x}}{u_{1x} - u_{2x}}$

एक विमीय (सीधी) टक्कर



(a) टक्कर से पहले (b) टक्कर के बाद

$u_1 > u_2$ $v_2 > v_1$

$e = \dfrac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$ ⇒ $(u_1 - u_2)e = (v_2 - v_1)$

संवेग संरक्षण के नियम से

$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$

$v_2 = v_1 + e(u_1 - u_2)$

व $v_1 = \dfrac{m_1u_1 + m_2u_2 - m_2e(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}$ $v_2 = \dfrac{m_1u_1 + m_2u_2 + m_1e(u_1 - u_2)}{m_1 + m_2}$

विशेष स्थिति :

(1) $e = 0$ ⇒ $v_1 = v_2$

⇒ पूर्ण अप्रत्यास्थ टक्कर में टक्कर के बाद दोनों पिण्ड समान वेग से गति करते है।

(2) $e = 1$

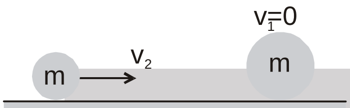
व $m_1 = m_2 = m$,

हम प्राप्त करते है $v_1 = u_2$ तथा $v_2 = u_1$

उदाहरण : जब समान द्रव्यमान के दो कण प्रत्यास्थ टक्कर करते है व टक्कर सीधी हो तो वे अपने वेग आपस में बदल लेते है,

टक्कर से पहले

टक्कर के बाद



टक्कर से पहले

टक्कर के बाद

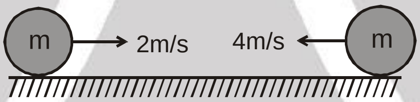
(3) $m_1 >>>> m_2$

$m_1 + m_2 \;\; m_1$ तथा $\dfrac{m_2}{m_1} \approx 0$

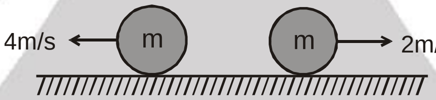
$\Rightarrow$ $v_1 = u_1$ कोई परिवर्तन नहीं तथा $v_2 = u_1 + e(u_1 - u_2)$

Solved Example

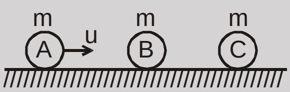
Example 20. दो समान गेंदे एक दूसरे की ओर सीधी रेखा में वेग 2 मी०/सैक० तथा 4 मी०/सैक० से गतिशील है। उनके मध्य प्रत्यास्थ टक्कर के बाद अन्तिम वेग ज्ञात करो।



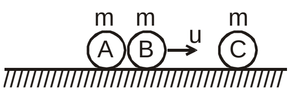
Solution : दोनों वेग आपस में बदल जाएंगे एवं दोनों के लिए अन्तिम गति , प्रारम्भिक गति की विपरीत होगी।



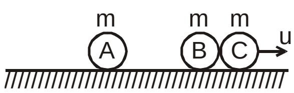
Example 21. समान द्रव्यमान m की तीन गेंदे A, B व C एक घर्षणरहित क्षैतिज तल पर एक सरल रेखा में चित्रानुसार रखी है। गेंदे A, u वेग से मध्य गेंद B की ओर चलाई जाती है। यदि सभी टक्कर प्रत्यास्थ है तो सभी गेंदो के अन्तिम वेग ज्ञात करो।



Solution : A, B से टकराकर रूक जाती है परन्तु B, u वेग से चलती है।

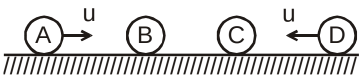


इसके बाद B,C से टकराकर रूक जाती है परन्तु C,u वेग से चलना प्रारम्भ करती है।

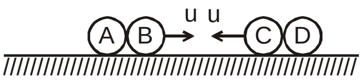


$\therefore$ अन्तिम वेग $V_A = 0$; $V_B = 0$ तथा $V_C = u$ **Ans.**

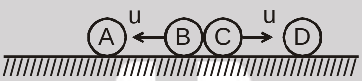
Example 22. चार समान गेंदे A, B, C व D एक सरल रेखा में घर्षण रहित क्षैतिज सतह पर रखी है। A व D समान चाल 'u' से मध्य की ओर चित्रानुसार चलाई जाती है। प्रत्यास्थ टक्कर मानते हुए अन्तिम वेग ज्ञात करो।



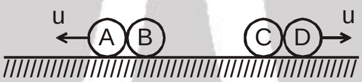
Solution : A व D प्रत्यास्थ रूप से क्रमशः B व C से टकराती है एवं रूक जाती है परन्तु B व C एक दूसरे की ओर चित्रानुसार u वेग से चलना प्रारम्भ करती है।



B व C प्रत्यास्थ रूप से टकराती है व अपने वेग परिवर्तित कर विपरीत दिशा में चलती है।

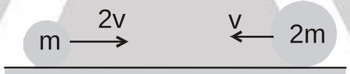


अब, B व C प्रत्यास्थ रूप से क्रमशः A व D से टकराती है व रूक जाती है परन्तु A व D वेग u से एक दूसरे से दूर चलना प्रारम्भ करती है।

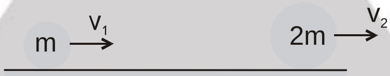


∴ अन्तिम वेग $V_A = u\ (\leftarrow)$; $V_B = 0$; $V_C = 0$ तथा $V_D = u\ (\rightarrow)$ **Ans.**

Example 23. द्रव्यमान m तथा 2m के दो कण विपरीत दिशाओं मे क्रमशः वेग v व 2v से गतिशील है, प्रत्यास्थ रूप से टकराते है। टक्कर के बाद उनके वेग ज्ञात करो।



Solution : माना m व 2m के अन्तिम वेग क्रमशः v_1 व v_2 है (चित्रानुसार) :



संवेग संरक्षण से

$m(2v) + 2m(-v) = m(v_1) + 2m\ (v_2)$

या $0 = mv_1 + 2mv_2$

या $v_1 + 2v_2 = 0$ ....(1)

व चूंकि टक्कर प्रत्यास्थ है :

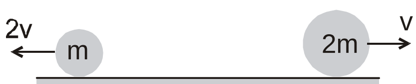
$v_2 - v_1 = 2v - (-v)$

या $v_2 - v_1 = 3v$ ....(2)

उपरोक्त दो समीकरणों को हल करने पर हम पाते है कि

$v_2 = v$ तथा $v_1 = -2v$ **Ans.**

अर्थात् द्रव्यमान 2m, v वेग से द्रव्यमान m, 2v वेग से चित्र में दिखाई दिशा में वापस लौटते है।

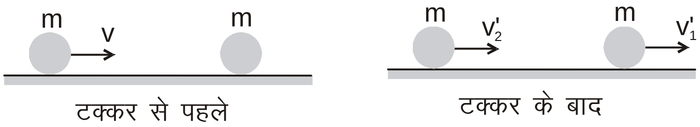


टक्कर प्रत्यास्थ है अतः यहाँ गतिज ऊर्जा का ह्रास (कमी) नहीं होगा। गतिज ऊर्जा में कमी = $KE_i - KE_f$

या, $\left(\frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}(2m)(-v)^2\right) - \left(\frac{1}{2}m(-2v)^2 + \frac{1}{2}(2m)v^2\right) = 0$

Example 24. m द्रव्यमान की एक गेंद v चाल से गतिशील है व रूकी हुई समान गेंद से सीधी टक्कर करती है। टक्कर के बाद गेंदों की गतिज ऊर्जा, प्रारम्भिक की 3/4th है। प्रत्यावस्थान गुणांक ज्ञात कीजिए।

Solution : जैसा कि हम उपरोक्त प्रश्न में देख चुके है कि दी गई स्थितियों में–



$v_1' = \left(\frac{1+e}{2}\right)v$ तथा $v_2' = \left(\frac{1-e}{2}\right)v$

दिया है $K_f = \frac{3}{4}K_i$

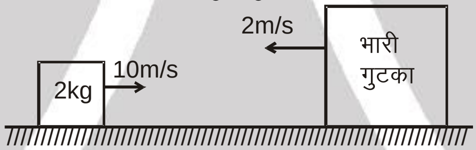
या $\frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

मान रखने पर हम पाते है कि $\left(\frac{1+e}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-e}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

या $(1 + e)^2 + (1 - e)^2 = 3$ या $2 + 2e^2 = 3$

या $e^2 = \frac{1}{2}$ या $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Ans.**

Example 25. 2 kg द्रव्यमान का एक गुटका 2 m/s से पास आ रहे (चित्रानुसार) एक भारी गुटके की ओर धकेला जाता है। प्रत्यास्थ टक्कर व घर्षणरहित सतह मानते हुए गुटकों के अंतिम वेग ज्ञात करो।

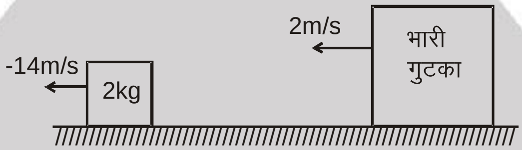


Solution : माना v_1 व v_2 क्रमशः 2kg गुटके व भारी गुटके के अंतिम वेग है तो,

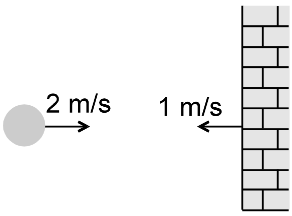
$v_1 = u_1 + 1\,(u_1 - u_2) = 2u_1 - u_2$

$= -14$ m/s

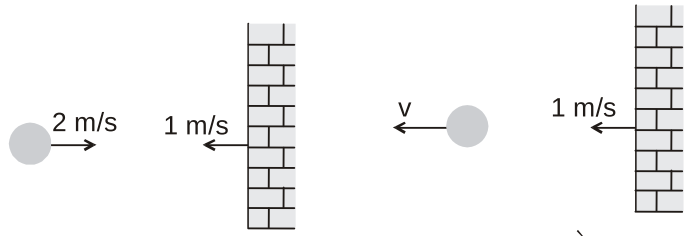
$v_2 = -2$m/s



Example 26. एक गेंद 2 m/s के वेग से, एक भारी दीवार की ओर आ रही है। जो चित्रानुसार 1m/s की चाल से गेंद की ओर गतिशील है। टक्कर को प्रत्यास्थ मानते हुए, टक्कर के तुरन्त बाद गेंद का वेग ज्ञात करो।



Solution : टक्कर के बाद दीवार की चाल परिवर्तित नहीं होती है। इसलिए माना चित्र में दिखाई दिशा में टक्कर के बाद गेंद का वेग v है। चूंकि टक्कर प्रत्यास्थ है (e = 1),



टक्कर से पहले   टक्कर के बाद

अलगाव की चाल = पहँच की चाल

या $v - 1 = 2 + 1$ या $v = 4$ m/s **Ans.**

Example 27. द्रव्यमान 2 kg व 4 kg की दो गेंदें एक दूसरे की ओर क्रमशः 4 m/s व 2 m/s की चाल से घर्षणरहित सतह पर चलाई जाती है। टकराने के बाद 2 kg की गेंद 2m/s की चाल से वापस लौटती है। तो ज्ञात करोः

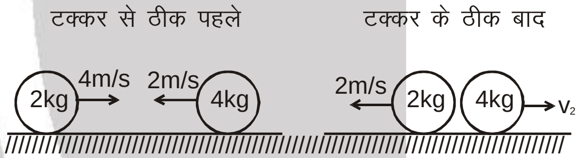
(a) टक्कर के बाद 4 kg की गेंद का वेग v_2

(b) प्रत्यावस्थान गुणांक e.

(c) विरूपण आवेग J_D.

(d) विरूपण की अधिकतम स्थितिज ऊर्जा

(e) पुनर्निर्माण का आवेग J_R.



Solution : (a) संवेग संरक्षण से –

$2(4) - 4(2) = 2(-2) + 4(v_2)$

$\Rightarrow$ $v_2 = 1$ m/s

(b) $e = \dfrac{\text{अलगाव का वेग}}{\text{पहुँच का वेग}} = \dfrac{1-(-2)}{4-(-2)} = \dfrac{3}{6} = 0.5$

(c) अधिकतम विरूपित अवस्था पर संवेग संरक्षण से, उभयनिष्ठ वेग v = 0.

$J_D = m_1(v - u_1) = m_2(v - u_2)$

$= 2(0 - 4) = -8$ N-s $= 4(0 - 2) = -8$ N-s or $= 4(0 - 2) = -8$ N-s

(d) अधिकतम विरूपित अवस्था पर स्थितिज ऊर्जा U = विरूपण के दौरान गतिज ऊर्जा में हानि

या $U = \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \left(\frac{1}{2}2(4)^2 + \frac{1}{2}4(2)^2\right) - \frac{1}{2}(2 + 4)(0)^2$

या U = 24 Joule

(e) $J_R = m_1(v_1 - v) = m_2(v - v_2) = 2(-2 - 0) = -4$ N-s

or $= 4(0 - 1) = -4$ N-s or $e = \dfrac{J_R}{J_D}$

$\Rightarrow$ $J_R = eJ_D = (0.5)(-8) = -4$ N-s

द्विविमीय (तिर्यक) टक्कर :

1. समान व विपरीत आवेगों का एक युग्म एक उभयनिष्ठ अभिलम्ब दिशा में कार्य करता है। इसलिए अलग–अलग कणों का रेखीय संवेग उभयनिष्ठ अभिलम्ब दिशा में परिवर्तित नहीं होता है। यदि टक्कर के दौरान टक्कर करने वाले कणों का द्रव्यमान नियत रहता है तो, हम कह सकते हैं कि अलग–अलग कणों का रेखीय वेग टक्कर के दौरान इस दिशा में परिवर्तित होता है।

2. उभयनिष्ठ स्पर्शज्या दिशा के अनुदिश आवेग का कोई घटक कार्य नहीं करता है। इस प्रकार अलग–अलग कणों का रेखीय संवेग या रेखीय वेग (यदि द्रव्यमान नियत हो) इस दिशा के अनुदिश अपरिवर्तित रहता हे।

3. टक्कर के दौरान दोंनों कणों पर कुल आवेग शून्य होता है। इसलिए दोंनों कणों का कुल संवेग टक्कर से पहले व बाद में किसी भी दिशा में संरक्षित रहता है।

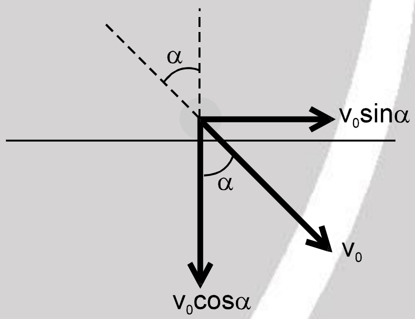
4. प्रत्यावस्थान गुणांक की परिभाषा, उभयनिष्ठ अभिलम्ब दिशा के अनुदिश हम लिख सकते है।

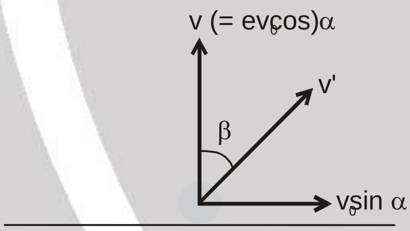
अलगाव का सापेक्ष वेग = e (पहुँच का सापेक्ष वेग)

Solved Examples

Example 28. m द्रव्यमान की एक गेंद फर्श पर अभिलम्ब से α आपतन कोण बनाती हुई v_0 चाल से टकराती है। प्रत्यावस्थान गुणांक e है। परावर्तित गेंद की चाल व परावर्तन कोण ज्ञात कीजिए।

Solution : उभयनिष्ठ स्पर्शज्या दिशा के अनुदिश वेग v_0 का घटक $v_0 \sin \alpha$ अपरिवर्तित रहेगा। माना v टक्कर के बाद उभयनिष्ठ अभिलम्ब दिशा के अनुदिश घटक है। निम्न का उपयोग करते हुए–

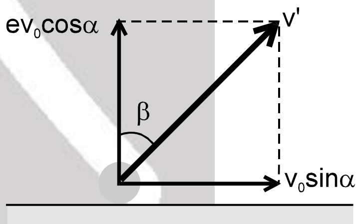




अलगाव के लिए सापेक्ष चाल = e (सामीप्य के लिए सापेक्ष चाल) उभयनिष्ठ अभिलम्ब रेखा के अनुदिश, हम प्राप्त करते है।

$v = ev_0 \cos \alpha$

अतः, टक्कर के पश्चात् v' के घटक क्रमशः $v_0 \sin \alpha$ और $ev_0 \cos \alpha$ होंगे।



$\therefore \quad v' = \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 + (ev_0 \cos\alpha)^2}$ **Ans.**

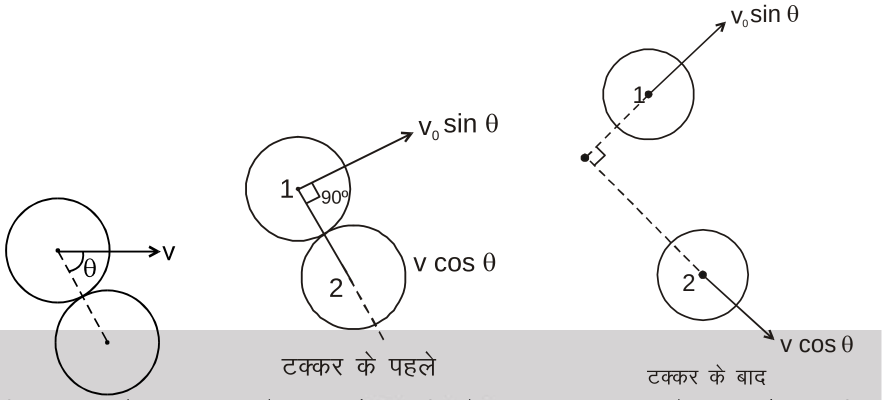
और $\tan \beta = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{ev_0 \cos\alpha}$ या $\tan \beta = \dfrac{\tan\alpha}{e}$ **Ans.**

नोट : प्रत्यास्थ टक्कर के लिए, e = 1

$\therefore \quad v' = v_0$ और $\beta = \alpha$

Example 29. एक m द्रव्यमान की गेंद, दूसरी समरूप स्थिर गेंद से प्रत्यास्थ टक्कर करती है। सिद्ध करो कि यदि टक्कर त्रिर्यक हो तो टक्कर के पश्चात् दोनों गेंदे एक–दूसरे के लम्बवत् गति करेगी।

Solution : दो कणों के बीच सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर में, ये कण आपस में अपने वेगों का आदान–प्रदान करते है। इस स्थिति मे, उभयनिष्ठ अभिलम्ब दिशा के अनुदिश गेंद 1 का घटक v cos θ है।



जो कि टक्कर के बाद शून्य हो जाता है, जबकि गेंद 2 का v cos θ हो जाता है। जबकि उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा के अनुदिश दोनों गेंदो के घटक अपरिवर्तित रहते है। इस प्रकार, स्पर्श रेखा के अनुदिश घटक तथा अभिलम्ब रेखा के अनुदिश घटक सारणी में प्रदर्शित है।

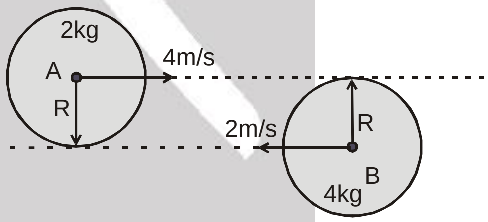
गेंद	**उभयनिष्ठ स्पर्शज्या दिशा के अनुदिश घटक**		**उभयनिष्ठ अभिलम्ब दिशा के अनुदिश घटक**	
	टक्कर के पहले	टक्कर के बाद	टक्कर के पहले	टक्कर के बाद
1	v sin θ	v sin θ	v cos θ	0
2	0	0	0	v cos θ

सारणी व चित्र से हम देखते है कि दोनों गेंदे टक्कर के पश्चात् एक–दूसरे के लम्बवत् v sin θ तथा v cos θ वेग से गति करेगी।

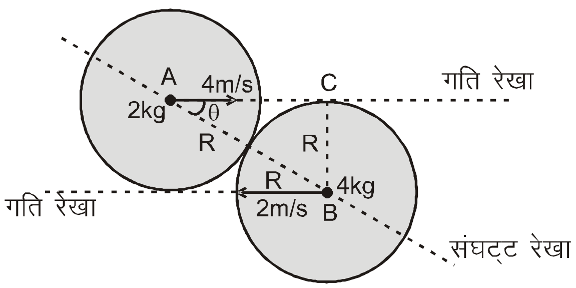
नोट : जब दो समरूप वस्तुऐं एक–दूसरे से त्रिर्यक टक्कर करती है , एक वस्तु टक्कर के पहले स्थिर है, तो टक्कर के बाद दोनों वस्तुऐं लम्बवत् दिशा में गति करती है।

Example 30. दो गोले एक–दूसरे की तरफ गतिशील है। दोनों की त्रिज्या समान परन्तु इनके द्रव्यमान 2 किग्रा० तथा 4 किग्रा० है। यदि वेग क्रमशः 4 मी०/सैकण्ड़ तथा 2 मी०/सैकण्ड़ तथा प्रत्यासथान गुणांक e = 1/3, हो तो ज्ञात करो–

(a) टक्कर की रेखा के अनुदिश उभयनिष्ठ वेग
(b) टक्कर की रेखा के अनुदिश अन्तिम वेग
(c) विरूपण का आवेग
(d) पुर्नः निर्माण का आवेग
(e) विरूपण की अधिकतम स्थितिज ऊर्जा
(f) टक्कर के कारण गतिज ऊर्जा में कमी।



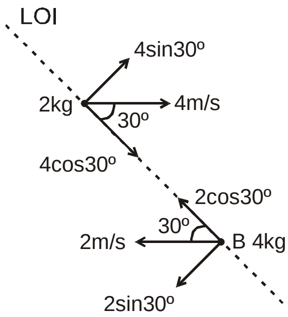
Solution :



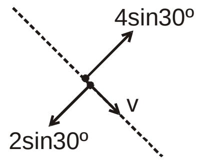
ΔABC में $\sin\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

या $\theta = 30^o$

(a) टक्कर की रेखा के अनुदिश संवेग संरक्षण से ,



टक्कर की रेखा के अनुदिश टक्कर के पहले



अधिकतम विरूपण की स्थिति

$2(4\cos 30^o) - 4(2\cos 30^o) = (2 + 4)v$

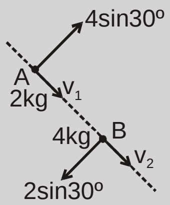
या $v = 0$ (टक्कर की रेखा के अनुदिश उभयनिष्ठ वेग)

(b) माना A व B के अन्तिम वेग क्रमशः v_1 तथा v_2 है,

टक्कर की रेखा के अनुदिश संवेग संरक्षण से

$2(4\cos 30^o) - 4(2\cos 30^o) = 2(v_1) + 4(v_2)$

या $0 = v_1 + 2v_2$ ....(1)



टक्कर की रेखा के अनुदिश टक्कर के

प्रत्यावस्थान गुणांक से

$$e = \frac{\text{LOI के अनुदिश अलगाव वेग}}{\text{LOI के अनुदिश सामीप्य वेग}}$$

या $\dfrac{1}{3} = \dfrac{v_2 - v_1}{4\cos 30^o + 2\cos 30^o}$

या $v_2 - v_1 = \sqrt{3}$ .... (2)

उपरोक्त दोनों समीकरणों से $v_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,m/s$ तथा $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,m/s$

(c) $J_D = m_1(v - u_1) = 2(0 - 4\cos 30^o) = -\,4\sqrt{3}$ N-s

(d) $J_R = eJ_D = \dfrac{1}{3}(-4\sqrt{3}) = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ N-s

(e) विरूपण की अधिकतम स्थितिज ऊर्जा, विरूपण के दौरान गतिज ऊर्जा में हानि के बराबर होती है।

$U = \dfrac{1}{2}m_1(u_1\cos\theta)^2 + \dfrac{1}{2}m_2(u_2\cos\theta)^2 - (m_1 + m_2)v^2$

$= \dfrac{1}{2}2(4\cos 30^o)^2 + \dfrac{1}{2}4(-2\cos 30^o)^2 - (2 + 4)(0)^2$

या $U = 18$ जूल

(f) गतिज ऊर्जा में हानि $\Delta KE = \dfrac{1}{2}m_1(u_1\cos\theta)^2 + m_2(u_2\cos\theta)^2 - \left(\dfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2v_2^2\right)$

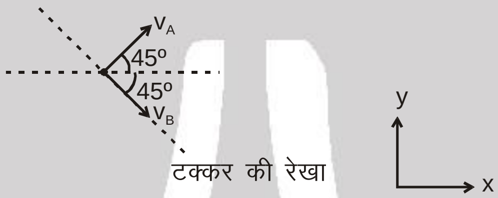
$= 2(4\cos 30^o)^2 + 4(-2\cos 30^o)^2 - \left(\dfrac{1}{2}2\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \dfrac{1}{2}4\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$

$\Delta KE = 16$ जूल

Example 31. दो बिन्दुवत कण A व B घर्षण रहित क्षैतिज तल पर एक रेखा में स्थित है। यदि कण A (द्रव्यमान 1 किग्रा०) 10 मी०/सैक० वेग से स्थिर कण B (द्रव्यमान 2 किग्रा०) की तरफ गति करता है तथा टक्कर के पश्चात् दोनों कण, गति की प्रारम्भिक दिशा से 45^o के कोण पर गति करें तो ज्ञात करो।

(a) टक्कर के पश्चात् A व B के वेग (b) प्रत्यावस्थान गुणांक

Solution : इस प्रकार के प्रश्न को हल करने के लिए सबसे पहले टक्कर की रेखा को ज्ञात करते है। जो कि A द्वारा B पर लगाये गये बल की दिशा के अनुदिश होती है। जिसके परिणामस्वरूप B गति करता है। इस प्रकार, B की गति की दिशा को देखते हुए टक्कर की रेखा की दिशा ज्ञात करते है। इस स्थिति में टक्कर की रेखा B की गति की दिशा के समान है अर्थात् A की प्रारम्भिक गति की दिशा से 45^o पर है।



(a) x– दिशा के अनुदिश संवेग संरक्षण से : $m_A u_A = m_A v_A \cos 45^o + m_B v_B \cos 45^o$

या $1(10) = 1(v_A \cos 45^o) + 2(v_B (\cos 45^o)$

या $v_A + 2v_B = 10\sqrt{2}$ ......(1)

y– दिशा के अनुदिश

$0 = m_A v_A \sin 45^o + m_B v_B \sin 45^o$

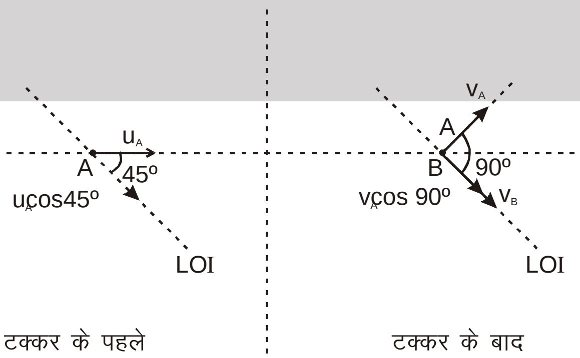
या $0 = 1(v_A \sin 45^o) - 2(v_B \sin 45^o)$

या $v_A = 2v_B$ ......(2)

दोनों समीकरणों को हल करने पर

$v_A = \frac{10}{\sqrt{2}}$ मी०/सैक० तथा $v_B = \frac{5}{\sqrt{2}}$ मी०/सैकण्ड

(b) $e = \frac{\text{LOI के अनुदिश अलगाव वेग}}{\text{LOI के अनुदिश सामीप्य वेग}}$



या $e = \frac{v_B - v_A \cos 90^o}{u_A \cos 45^o} = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} - 0}{\frac{10}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}$ **Ans.**

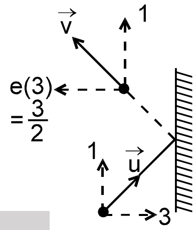
Example 32. m द्रव्यमान का चिकना गोला क्षैतिज तल पर $3\hat{i}+\hat{j}$ वेग से गति कर रहा है। यह $\hat{j}$ दिशा के समान्तर स्थित उर्ध्वाधर दीवार से टकराता है। दीवार व गोले के मध्य प्रत्यावस्थान गुणांक $\frac{1}{2}$ है, तो ज्ञात करो

(a) टक्कर के पश्चात् गोले का वेग, (b) टक्कर के कारण गतिज ऊर्जा में हानि

(c) गोले पर कार्यरत आवेग $\vec{J}$

Solution : माना टक्कर के पश्चात् गोले का वेग $\vec{v}$ है।

$\vec{v}$ को ज्ञात करने के लिए हम वेग के दीवार के अनुदिश व लम्बवत् घटक करते है। प्रत्यावस्थान के नियम के प्रयोग से दीवार के अनुदिश वेग के घटक अपरिवर्तित रहते है जबकि दीवार के लम्बवत् वेग के घटक विपरीत दिशा में e गुना हो जाते है।



इस प्रकार, $\vec{v}=-\frac{3}{2}\hat{i}+\hat{j}$

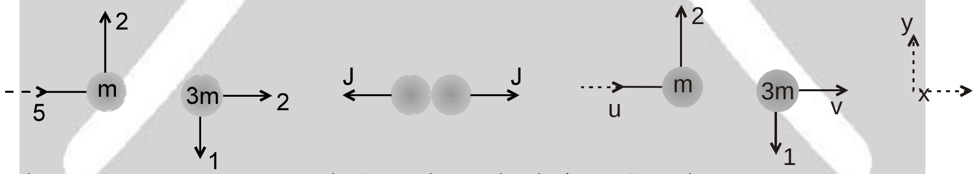
(a) अतः टक्कर के पश्चात् गोले का वेग $= -\frac{3}{2}\hat{i}+\hat{j}$ **Ans.**

(b) गतिज ऊर्जा में हानि $= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m(3^2+1^2) - \frac{1}{2}m\left(\left\{\frac{3}{2}\right\}^2+1^2\right) = \frac{27}{8}m$ **Ans.**

(c) $\vec{J} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = m(\vec{v}) - m(\vec{u}) = m\left(-\frac{3}{2}\hat{i}+\hat{j}\right) - m\left(3\hat{i}+\hat{j}\right) = -\frac{9}{2}m\hat{i}$ **Ans.**

Example 33. दो चिकने गोले A व B, जिनकी त्रिज्याऐं समान है, क्षैतिज मेज पर स्थित है। A का द्रव्यमान m तथा B का द्रव्यमान 3m है। गोलों को एक–दूसरे की तरफ क्रमशः $5\hat{i}+2\hat{j}$ तथा $2\hat{i}-\hat{j}$ वेग सदिशों के साथ फेंका जाता है तथा जब ये दोनों टकराते है, तो इनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा $\hat{i}$ सदिश के समान्तर है। यदि A व B के बीच प्रत्यावस्थान गुणांक $\frac{1}{3}$ है तो टक्कर के पश्चात् वेग तथा टक्कर के कारण गतिज ऊर्जा में हानि ज्ञात करो? टक्कर के दौरान कार्यरत आवेगों के परिमाण भी ज्ञात करो।

Solution : टक्कर के समय केन्द्रों की रेखा सदिश $\hat{i}$ के समान्तर होगी, $\hat{i}$ के लम्बवत् A व B के वेगो के घटक टक्कर के कारण अपरिवर्तित रहेगें।



संवेग संरक्षण तथा प्रत्यावस्थान के नियम से हम देखते है x– दिशा में

$$5m + (3m)(2) = mu + 3mv \quad .....(i)$$

तथा $$\frac{1}{3}(5-2) = v - u \quad .....(ii)$$

इन समीकरणों को हल करने पर हम प्राप्त करते है u = 2 और v = 3

टक्कर के पहले व पश्चात् A व B के वेग क्रमशः इस प्रकार है।

क्रमशः $2\hat{i}+2\hat{j}$ और $3\hat{i}-\hat{j}$ **Ans.**

टक्कर के पहले A की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}m(5^2+2^2) = \frac{29}{2}m$

और B की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}(3m)(2^2+1^2) = \frac{15}{2}m$

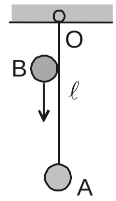
टक्कर के बाद A की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}m(2^2+2^2) = 4m$

और B की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}(3m)(3^2+1^2) = 15\,m$

अतः टक्कर के दौरान K.E. में हानि $\frac{29}{2}m + \frac{15}{2}m - 4m - 15m = 3m$ **Ans.**

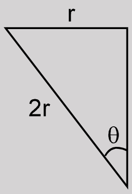
J का मान ज्ञात करने के लिए हम $\hat{i}$ के अनुदिश एक गोले के संवेग परिवर्तन की कल्पना करते है। गोले B के लिए J = 3m (3 – 2) या J = 3m **Ans.**

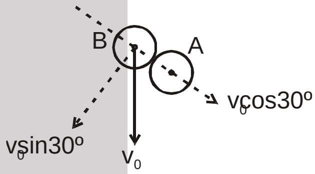
Example 34. एक स्टील की छोटी गेंद A अविस्तारित ℓ = 1.5 लम्बाई की डोरी की सहायता से O बिन्दु से चित्रानुसार लटकी हुई है। दूसरी समरूप गेंद नीचे की तरफ इस प्रकार फैंकी जाती है कि ऊर्ध्व नीचे की तरफ गति के दौरान गेंद डोरी के सम्पर्क में रहती है तथा लटकी हुई गेंद से प्रत्यास्थ रूप से टकराती है। यदि टकराने के पश्चात् लटकी हुई गेंद ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति पूर्ण कर पाती है तो टकराने के पूर्व गिरने वाली गेंद का वेग ज्ञात करो। ($g = 10\ ms^{-2}$)



Solution : गेंद A का टक्कर के बाद वेग $\sqrt{5g\ell}$

माना प्रत्येक गेंद की त्रिज्या r तथा इनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा ऊर्ध्वाधर से टक्कर के समय θ कोण बनाती है।





$\sin\theta = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$ or θ = 30°

माना गेंद B का वेग (टक्कर के पहले) v_0 है। इस वेग को दो घटकों में वियोजित कर सकते है। (i) $v_0 \cos 30^o$, दोनों गेंदो के केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश तथा (ii) $v_0 \sin 30^o$ इस रेखा के लम्बवत् $v_0 \cos 30^o$ के कारण सम्मुख टक्कर होगी तथा गेंद का वेग घटक $v_0 \sin 30^o$ अपरिवर्तित रहेगा।

चूंकि, गेंद A अवितान्य डोरी से लटकी हुई है। अतः टक्कर के पश्चात् यह केवल क्षैतिज दिशा में गति करेगी। अतः डोरी के द्वारा ऊर्ध्वाधर ऊपर की तरफ गेंद A को आवेग दिया जाता है। अर्थात् टक्कर के दौरान गेंद A पर दो आवेग साथ–साथ कार्यरत होते है। पहला आवेग J दोनों गेंदों के बीच तथा दूसरा आवेग प्रतिक्रिया डोरी के कारण।

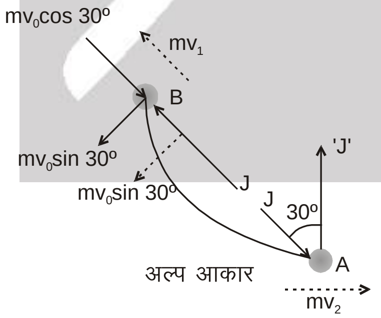
गेंद B का टक्कर की रेखा के अनुदिश वेग दिया जाता है–

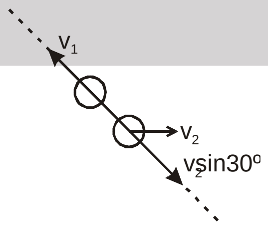
$J - mv_0 \cos 30^o = mv_1$

या $v_1 = \frac{J}{m} - v_0 \cos 30^o$ .....(i)

गेंद A का क्षैतिज वेग v_2 दिया जाता है $J \sin 30^o = mv_2$

या $v_2 = \frac{J}{2\ m}$ .....(ii)





चूंकि गेंदे प्रत्यास्थ टकराती है। अतः प्रत्यावस्थान गुणांक e = 1

अतः $e = \frac{v_2 \sin 30^o - (-v_1)}{v_0 \cos 30^o - 0} = 1$ .....(iii)

समीकरण (i), (ii), तथा (iii) के हल से ; $J = 1.6\ mv_0 \cos 30^o$

$\therefore$ $v_1 = 0.6\ v_0 \cos 30^o$ तथा $v_2 = 0.8\ v_0 \cos 30^o$

चूंकि गेंद A ऊर्ध्व वृत्त को पूर्ण करती है। इसलिए $v_2 = \sqrt{5g\ell}$

$\therefore$ $0.8v_0 \cos 30^o = \sqrt{5g\ell}$ या $v_0 = 12.5\ ms^{-1}$ **Ans.**

परिवर्ती द्रव्यमान निकाय :

यदि निकाय में μ kg/s की दर से तथा सापेक्ष वेग $\vec{v}_{rel}$ (निकाय के सापेक्ष), से किसी द्रव्यमान को जोड़ा या घटाया जाय तो इस द्रव्यमान द्वारा निकाय पर लगाये गये बल का परिमाण $\mu|\vec{v}_{rel}|$ होता है।

प्रणोद (उछाल) बल ($\vec{F}_t$)

$$\vec{F}_t = \vec{v}_{rel} \left(\frac{dm}{dt}\right)$$

माना किसी समय t पर वस्तु का द्रव्यमान m तथा इसका वेग $\vec{v}$ है। कुछ समय पश्चात् t = t + dt समय पर द्रव्यमान (m – dm) तथा वेग $\vec{v} + d\vec{v}$ हो जाता है। द्रव्यमान dm, सापेक्ष वेग $\vec{v}_r$ से अलग होता है। द्रव्यमान 'dm' का वास्तविक वेग ($\vec{v} + \vec{v}_r$) होगा। यदि निकाय पर कोई भी बाह्य बल कार्यरत नहीं हो तो निकाय का रेखीय संवेग संरक्षित रहेगा।

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

या $m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + \vec{v}_r)$

या $m\vec{v} = m\vec{v} + md\vec{v} - (dm)\vec{v} - (dm)(d\vec{v}) + (dm)\vec{v} + \vec{v}_r\, dm$

(dm) ($d\vec{v}$) पद अत्यल्प है, अतः इसको नगण्य मान सकते है।

$\therefore$ $md\vec{v} = -\vec{v}_r\, dm$

या $m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \vec{v}_r\left(-\frac{dm}{dt}\right)$

यहाँ $m\left(-\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$ = उछाल बल $(\vec{F}_t)$

तथा $-\frac{dm}{dt}$ = दर जिससे द्रव्यमान बाहर निकलता है।

या $\vec{F}_t = \vec{v}_r\left(\frac{dm}{dt}\right)$

परिवर्ती द्रव्यमान वाले प्रश्नों को निम्नलिखित चार पदों द्वारा हल करते है।

1. मुख्य वस्तु पर कार्यरत सभी बलों को सारणीबद्ध करो तथा इनको इस पर लागू करो।

2. वस्तु पर एक अतिरिक्त उछाल बल $\vec{F}_t$ लगाओ, इसका परिमाण $\left|\vec{v}_r\left(\pm\frac{dm}{dt}\right)\right|$ तथा दिशा, $\vec{v}_r$ (द्रव्यमान में वृद्धि की स्थिति में) कि दिशा द्वारा दी जाती है। अन्यथा द्रव्यमान में ह्रास की स्थिति में $-\vec{v}_r$ दिशा द्वारा दी जाती है।

3. वस्तु पर कार्यरत कुल बल ज्ञात करो तथा इनको लागू करो।

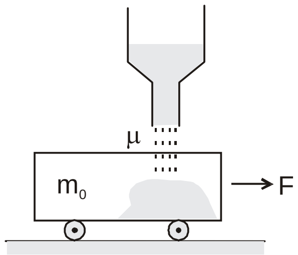
$$\vec{F}_{net} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{(m = किसी क्षण द्रव्यमान)}$$

4. इसको उपयुक्त सीमा तक समाकलित करके किसी समय t पर वेग ज्ञात करो।

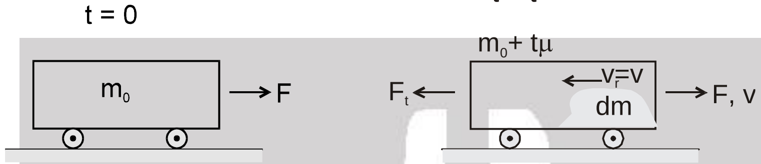
नोट : एक विमिय गति के प्रश्नों (जोकि JEE मे मुख्यतः पूछे जाते है) को सरल तरीके से हल कर सकते है। इनको हल करने के लिए सभी सदिश राशियों के लिए धनात्मक व ऋणात्मक चिन्हों का प्रयोग करते है। उपरोक्त सिद्धान्त को समझाने के लिए कुछ उदाहरण नीचे दिये गये है।

Solved Examples

Example 35. m_0 द्रव्यमान की समतल कार दांयी तरफ नियत क्षैतिज बल F का कारण गति प्रारम्भ करती है। स्थिर हुपर (hopper) द्वारा समतल कार में रेत भरी जाती है। रेत डालने की दर नियत तथा μ किग्रा०/सै० के बराबर है तो रेत भरने के दौरान समय पर निर्भर वेग तथा समतल कार का त्वरण ज्ञात करो। घर्षण नगण्य है।



Solution : समतल कार का प्रारम्भिक वेग शून्य है। माना t समय पर वेग v है तथा इस क्षण द्रव्यमान m है तो



t = 0, v = 0 व m = m_0 है तथा t = t पर v = v तथा m = m_0 + μt

यहाँ v_r = v (पीछे की तरफ)

$$\frac{dm}{dt} = \mu$$

$$\therefore \quad F_t = v_r \frac{dm}{dt} = \mu v \qquad \text{(पीछे की तरफ)}$$

t समय पर कार पर कुल बल $F_{net} = F - F_t$

या $m\frac{dv}{dt} = F - \mu v$ .....(i)

या $(m_0 + \mu t)\frac{dv}{dt} = F - \mu v$

या $\int_0^v \frac{dv}{F-\mu v} = \int_0^t \frac{dt}{m_0+\mu t}$

$$\therefore \quad -\frac{1}{\mu}[\ell n(F-\mu v)]_0^v = \frac{1}{\mu}\left[\ln(m_0+\mu t)\right]_0^t \quad \Rightarrow \quad \ell n\left(\frac{F}{F-\mu v}\right) = \ell n\left(\frac{m_0+\mu t}{m_0}\right)$$

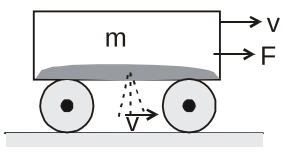
$$\therefore \quad \frac{F}{F-\mu v} = \frac{m_0+\mu t}{m_0} \quad \text{या} \quad v = \frac{Ft}{m_0+\mu t}$$ **Ans.**

समीकरण (i) से $\frac{dv}{dt}$ = t समय पर कार का त्वरण है।

या $= \frac{F-\mu v}{m}$; $a = \frac{\left(F - \frac{F\mu t}{m_0+\mu t}\right)}{m_0+\mu t}$ या $a = \frac{Fm_0}{(m_0+\mu t)^2}$ **Ans.**

Example 36. रेत से भरी हुई गाड़ी नियत बल F के अधीन, बल की दिशा में v वेग से क्षैतिज तल पर गति कर रही है। इस दौरान गाड़ी के तल में स्थित छिद्र द्वारा नियत दर μkg/s से रेत बाहर निकल रही है। t समय पर गाड़ी का वेग व त्वरण ज्ञात करो, यदि प्रारम्भ में t = 0 पर रेत से भरी हुई गाड़ी का द्रव्यमान m_0 तथा इसका वेग शून्य के बराबर है। घर्षण नगण्य है।

Solution : इस प्रश्न रेत में गाड़ी तल पर स्थित छिद्र से बाहर निकलती है। अतः रेत का सापेक्ष वेग v_r शून्य होगा क्योंकि यह गाड़ी के वेग के बराबर, वेग पर गतिशील है।



$v_r = 0$

अतः, $F_t = 0$ $\left(\text{चूंकि } F_t = v_r \dfrac{dm}{dt}\right)$ तथा कुल बल केवल F होगा

$\therefore \quad F_{net} = F$

या $m\left(\dfrac{dv}{dt}\right) = F$ ....(i)

परन्तु यहाँ $m = m_0 - \mu t$

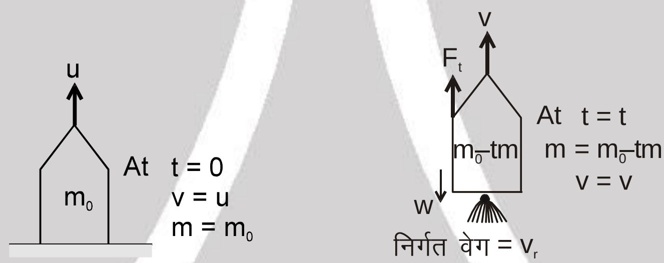
$\therefore \quad (m_0 - \mu t)\dfrac{dv}{dt} = F$ या $\displaystyle\int_0^v dv = \int_0^t \frac{Fdt}{m_0 - \mu t}$

$\therefore \quad v = \dfrac{F}{-\mu}[\ln(m_0 - \mu t)]_0^t$ या $v = \dfrac{F}{\mu}\ln\left(\dfrac{m_0}{m_0 - \mu t}\right)$ **Ans.**

समीकरण (i),से गाड़ी का त्वरण $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{F}{m}$ या $a = \dfrac{F}{m_0 - \mu t}$ **Ans.**

रॉकेट की गति :

माना t = 0 पर रॉकेट का द्रव्यमान m_0 है। t समय पर इसका द्रव्यमान m व वेग v हो जाता है। प्रारम्भ में, माना रॉकेट का वेग u है।



इसी प्रकार, माना $\left(\dfrac{-dm}{dt}\right)$ एकांक समय में बाहर निकलने वाली गैसों का द्रव्यमान तथा रॉकेट के सापेक्ष गैसों का निर्गत वेग v_r है। साधारणतया $\left(\dfrac{-dm}{dt}\right)$ तथा v_r को रॉकेट की यात्रा के दौरान नियत माना जाता है। अब रॉकेट की गति के लिए t = t समय पर कुछ समीकरण लिखते है।

1. रॉकेट पर उछाल बल $F_t = v_r\left(\dfrac{-dm}{dt}\right)$ (ऊपर की तरफ)
2. रॉकेट का भार W = mg (नीचे की तरफ)
3. रॉकेट का कुल बल $F_{net} = F_t - W$ (ऊपर की तरफ) या $F_{net} = v_r\left(\dfrac{-dm}{dt}\right) - mg$
4. रॉकेट का कुल त्वरण $a = \dfrac{F}{m}$

   या $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{v_r}{m}\left(\dfrac{-dm}{dt}\right) - g$ या $dv\dfrac{v_r}{m}(-dm) = -g\,dt$

   या $\displaystyle\int_u^v dv = v_r\int_{m_0}^{m}\frac{-dm}{m} - g\int_0^t dt$ अतः $v = u - gt + v_r\,\ell n\left(\dfrac{m_0}{m}\right)$ ...(i)

नोट :

1. $F_t = v_r\left(-\dfrac{dm}{dt}\right)$ ऊपर की तरफ जब v_r नीचे की तरफ है तथा $\dfrac{dm}{dt}$ ऋणात्मक है।
2. यदि गुरूत्व को छोड़ दे और रॉकेट का प्रारम्भिक वेग u = 0, हो तो समीकरण (i) $v = v_r \ln\left(\dfrac{m_0}{m}\right)$ हो जाएगी।

Solved Examples

Example 37. एक रॉकेट, जिसका प्रारम्भिक द्रव्यमान 1000 किग्रा० है, को स्थिरावस्था से ऊपर की तरफ गुरूत्व में प्रक्षेपित किया जाता है। रॉकेट मे गैसे 10 किग्रा० प्रति सैकण्ड की दर से जल रही है। जला हुआ पदार्थ रॉकेट के सापेक्ष नीचे की तरफ 2000 ms^{-1} की चाल से बाहर निकलता है। गैसों के जलने के एक सैकण्ड पश्चात् रॉकेट का अधिकतम वेग ज्ञात करो। ($g = 10\ ms^{-2}$ लों।)

Solution : वेग समीकरण के प्रयोग से

$$v = u - gt + v_r \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

यहां $u = 0$, $t = 60s$, $g = 10\ m/s^2$, $v_r = 2000\ m/s$, $m_0 = 1000\ kg$

तथा $m = 1000 - 10 \times 60 = 400\ kg$

हम प्राप्त करते है $v = 0 - 600 + 2000 \ln\left(\frac{1000}{400}\right)$

या $v = 2000 \ln 2.5 - 600$

रॉकेट का अधिकतम वेग $200(10 \ln 2.5 - 3) = 1232.6\ ms^{-1}$ **Ans.**

बाह्य बलों की उपस्थिति में रेखीय संवेग संरक्षण

$$F_{ext} = \frac{dp}{dt}$$

$\Rightarrow$ $F_{ext}\, dt = dP$ $\Rightarrow$ $dP = (F_{\text{बाह्य}})_{\text{आवेग बल}}$

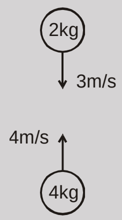
$\therefore$ यदि $(F_{\text{बाह्य}})_{\text{आवेग बल}} = 0$ $\Rightarrow$ $dP = 0$

या P नियत है।

नोट : यदि उपस्थित बाह्य बल, आवेग बल के रूप में नहीं है तो संवेग संरक्षित रहेगा। उदाहरण : गुरूत्वाकर्षण या स्प्रिंग।

Solved Examples

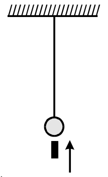
Example 38. ऊर्ध्वाधर रेखा पर एक–दूसरे की तरफ चलती हुई दो गेंदे चित्रानुसार टकराती है। टक्कर के पश्चात् दोनों के वेग ज्ञात करो।



Solution : माना 4 किग्रा० गेंद का टक्कर के पश्चात् अन्तिम वेग v है। चूंकि बाह्य बल गुरूत्वाकर्षण है जो कि आवेग बल नहीं है। अतः रेखीय संवेग संरक्षित रहेगा।

रेखीय संवेग संरक्षण से : $2(-3) + 4(4) = 2(4) + 4(v)$ या $v = \frac{1}{2}$ मी०/सैक०

Example 39. 50 ग्राम द्रव्यमान की गोली को लम्बे सरल लोलक के 450 ग्राम के गोलक के ठीक नीचे से चित्रानसुार दागा जाता है। गोली गोलक फँस जाती है तथा गोलक 1.8 मीटर ऊचाँई तक ऊपर उठता है। गोली की चाल ज्ञात करो। $g = 10\ m/s^2$ लो।

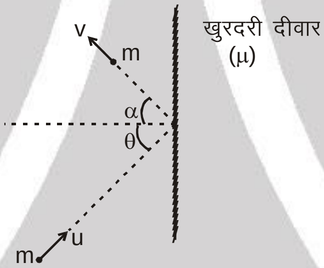


Solution : माना गोली की चाल v है। माना टक्कर के पश्चात् गोली व गोलक का उभयनिष्ठ वेग V है। रेखीय संवेग संरक्षण के सिद्धान्त से $V = \frac{(0.05kg)v}{0.45kg + 0.05kg} = \frac{v}{10}$

डोरी ढिली पड़ जाती है तथा गोलक ऊपर की तरफ g = 10 मी०/सैकण्ड² मंदन से गति करता है। चूंकि यह 1.8 मीटर, ऊँचाई पर स्थिर हो जाता है। अतः $v^2 = u^2 + 2ax$ से

$$1.8\ m = \frac{(v/10)^2}{2 \times 10 m/s^2} \quad \text{या} \quad v = 60 \text{ मी०/सै०}$$

Example 40. m द्रव्यमान की छोटी गेंद घर्षण गुणांक μ की खुरदरी दीवार से, दीवार के अभिलम्ब से θ कोण पर टकराती है। यदि टक्कर के पश्चात् गेंद दीवार के अभिलम्ब से α कोण पर गति करें तथा प्रत्यावस्थान गुणांक e हो तो टक्कर के पश्चात् गेंद का परावर्तित वेग v ज्ञात करो।



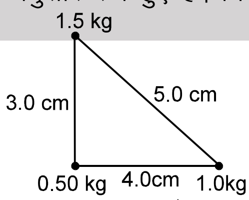
Solution : $mv \cos\alpha - (m(-u\cos\theta)) = \int N dt \quad mv \sin\alpha - mu \sin\theta = -\mu \int N dt$

तथा $e = \frac{v\cos\alpha}{u\cos\theta} \Rightarrow v\cos\alpha = eu\cos\theta$ या $mv\sin\alpha - mu\sin\theta = -\mu(mv\cos\alpha + mu\cos\theta)$

या $v = \frac{u}{\sin\alpha}[\sin\theta - \mu\cos\theta(e+1)]$ **Ans.**

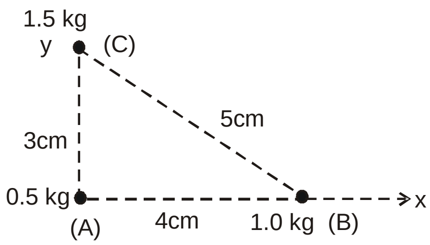
Solved Miscellaneous Problems

Problem 1. 0.5 kg, 1.0 kg व 1.5 kg द्रव्यमान के तीन कण 3.0 cm, 4.0 cm व 5.0 cm भुजाओं वाले एक समकोण त्रिभुज के तीनों कोनों पर चित्र में दर्शाये अनुसार रखे हुए है। निकाय का द्रव्यमान केन्द्र दर्शाइये।



Answer : द्रव्यमान केन्द्र 0.5 kg वाले कण से 1.3 cm दांयी ओर व 1.5 cm ऊपर है।

Solution : दर्शाये अनुसार x और y अक्ष लेने पर



वस्तु A के निर्देशांक = (0,0)

वस्तु B के निर्देशांक = (4,0)

वस्तु C के निर्देशांक = (0,3)

निर्देशांक केन्द्र के x - निर्देशांक $= \frac{m_A x_A + m_B x_B + M_C r_C}{m_A + m_B + m_C}$

$$= \frac{0.5\times0+1.0\times4+1.5\times0}{0.5+1.0+1.5} = \frac{4}{3}\ \frac{kg-cm}{kg} = 1.33cm$$

इसी प्रकार द्रव्यमान केन्द्र के y - निर्देशांक $= \frac{0.5\times0+1.0\times0+1.5\times3}{0.5+1.0+1.5} = \frac{4.5}{3}\ \frac{kg-cm}{kg} = 1.5$ cm

अतः द्रव्यमान केन्द्र कण A से 1.33 cm दायीं तरफ तथा 1.5 cm ऊपर की तरफ है।

Problem 2. L लम्बाई की सीधी छड़ का घनत्व सम्बन्ध ρ = A + Bx है। यहाँ x, बांये सिरे से दूरी है। द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति बताइये।

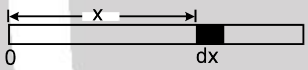
Answer : $\frac{3AL+2BL^2}{3(2A+BL)}$

Solution : माना एक सीरे से x-दूरी पर `dx` चौड़ाई का एक अल्पांश लेने पर -

dm = अल्पांश `dx` का द्रव्यमान = P dx

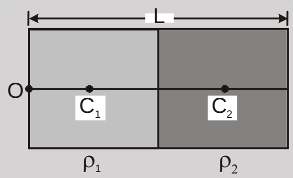
dm = (A+Bx)dx ......(1)

परिभाषा से $X_{com} = \frac{\int_O^L x\,dm}{\int_O^L dm}$



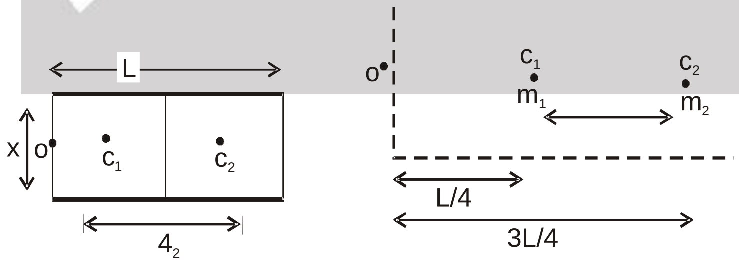
समीकरण (1) से $\Rightarrow$ $X_{com} = \frac{\int_O^L x(A+Bx)dx}{\int_O^L (A+Bx)dx} = \frac{\int_O^L (Ax+Bx^2)dx}{\int_O^L (A+Bx)dx} = \frac{\frac{AL^2}{2}+\frac{BL^3}{3}}{AL+\frac{BL^2}{2}} = \frac{3AL+2BL^2}{3(2A+BL)}$ **Ans.**

Problem 3 चित्र में प्रदर्शित आयताकार प्लेट का आधा भाग ρ_1 घनत्व वाले पदार्थ का तथा शेष आधा भाग ρ_2 घनत्व वाले पदार्थ का बना हुआ है। प्लेट की लम्बाई L है। प्लेट के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति बताइये।



Answer : $X = \frac{(\rho_1+3\rho_2)}{4\ (\rho_1+\rho_2)} L$

Solution :



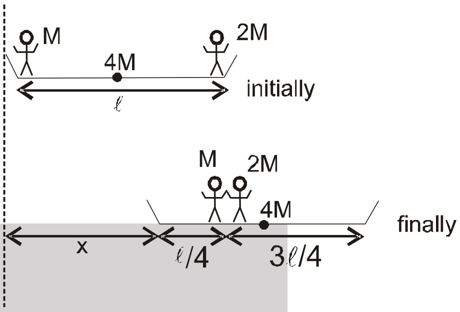
चित्रानुसार आयताकार प्लेट के आधे भाग को उसके द्रव्यमान केन्द्र पर बिन्दु द्रव्यमान से प्रतिस्थापित करने से–

$M_1 = \frac{f_1 L}{g} x$ $\quad M_2 = f_2 = \frac{L}{g} x$

$$X_{com} = \frac{m_1\frac{L}{4} + m_2 3\frac{L}{4}}{m_1+m_2} = \frac{f_1\frac{L}{2}x_x\frac{2}{4} + f_2\frac{L}{2}x_y\frac{3L}{4}}{f_1\frac{L}{2}x + f_2\frac{L}{2}x} = \frac{f_1\frac{L}{4} + f_2\frac{3L}{4}}{f_1+f_2} = \frac{(f_1+3f_2)}{4(f_1+f_2)}L$$ बिन्दु O से

Problem 4. एक नौका जिसका द्रव्यमान 4 M तथा लम्बाई ℓ है। घर्षणरहित पानी की सतह पर रखी है, इसके दोनों सिरों पर दो व्यक्ति A (द्रव्यमान = M) तथा B (द्रव्यमान 2M) खड़े है। अब A नौका के सापेक्ष केन्द्र की ओर $\ell/4$ दूरी चलता है तथा B नौका के सापेक्ष $3\ell/4$ दूरी चलता है तथा A से मिलता है। जब A तथा B मिलेंगे तब तक नौका पानी में कितनी दूरी तय कर लेगी ?

Solution : माना नाव द्वारा तय की गयी दूरी x है।



द्रव्यमान केन्द्र की प्रारम्भिक स्थिति

$$= \frac{M_{Boat}X_{Boat} + M_A X_A + M_B X_B}{M_{Boat} + M_A + M_B}$$

$$= \frac{4M\frac{\ell}{2} + M.0 + 2M.\ell}{4M + M + 2M} = \frac{4M\ell}{7M} = \frac{4}{7}\ell$$

द्रव्यमान केन्द्र की अन्तिम स्थिति

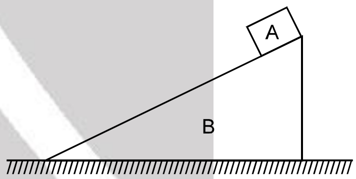
$$= \frac{4M\left\{\frac{\ell}{2} + x\right\} + M\left\{x + \frac{\ell}{4}\right\} + 2M\left\{x + \frac{\ell}{4}\right\}}{7M}$$

$$= \frac{2M\ell + \frac{M\ell}{4} + \frac{M\ell}{2} + 7\ Mx}{7M} = \frac{\frac{11\,M\ell}{4} + 7\ Mx}{7M} = \frac{\frac{11\,M\ell}{4} + 7x}{7}$$

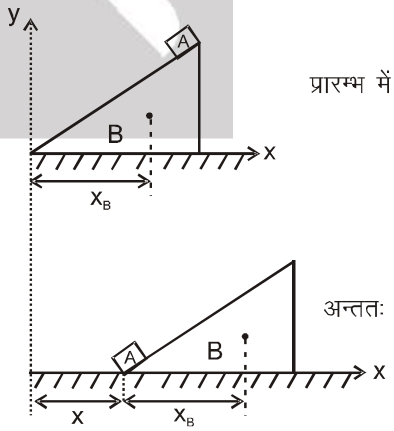
क्योंकि क्षैतिज में कोई बल नहीं है, अतः द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति अपरिवर्तित रहेगी। द्रव्यमान केन्द्र की प्रारम्भिक स्थिति = द्रव्यमान केन्द्र की अन्तिम स्थिति

$$\Rightarrow \frac{4}{7}\ell = \frac{\frac{11\ell}{4} + 7x}{7} \quad ; \quad 4\ell = \frac{11\ell}{4} + 7x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5\ell}{28}$$

Problem 5 चित्रानुसार एक ब्लॉक A (द्रव्यमान = 4M) आनत तल B के ऊपरी सिरे पर रखा है। आनत तल के आधार की लम्बाई ℓ (द्रव्यमान = 20 M) है सभी सतह घर्षण रहित है। जब निकाय को विरामावस्था से छोड़ा जाता है तो A के धरातल पर पहुँचने पर आनततल B कितनी दूरी तय कर लेगा ?



Solution : द्रव्यमान केन्द्र की प्रारम्भिक स्थिति $= \frac{X_B M_B + X_A M_A}{M_B + M_B}$



$$= \frac{X_B.20\ \ M + \ell.4M}{24M} = \frac{5X_B + \ell}{6}$$

द्रव्यमान केन्द्र की अन्तिम स्थिति

$$= \frac{(X_B + x)20M + 4Mx}{24M} = \frac{5(X_B + x) + x}{6}$$

क्योंकि निकाय पर कोई क्षैतिज बल नहीं है

द्रव्यमान केन्द्र प्रारम्भ में = द्रव्यमान केन्द्र अन्त में

$5X_B + \ell = 5X_B + 5x + x$

$\ell = 6x$

$$\boxed{x = \frac{\ell}{6}}$$

Problem 6. एक m द्रव्यमान का विलगित कण xy तल में, x-अक्ष के अनुदिश धरातल से निश्चित ऊचाँई पर गति कर रहा है। यह अचानक m/4 तथा 3m/4 के कणों में विभक्त हो जाता है। कुछ क्षण बाद छोटा कण y = + 15 सेमी० पर होता है तो इस क्षण भारी कण की स्थिति ज्ञात करो।

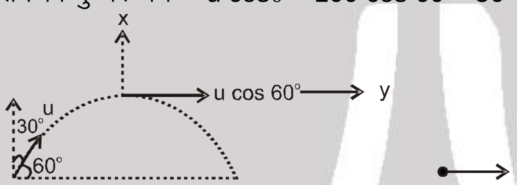
Solution : क्योंकि कण x-अक्ष के अनुदिश गति कर रहा है, इसलिये द्रव्यमान केन्द्र का y-निर्देशांक शून्य होगा

$$Y_M\, M = Y_{\frac{M}{4}}\left(\frac{M}{4}\right) + Y_{\frac{3M}{4}}\left(\frac{3M}{4}\right)$$

$$\Rightarrow\ 0 \times M = 15\left(\frac{M}{4}\right) + Y_{\frac{3M}{4}}\left(\frac{3M}{4}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{Y_{3M}}{4} = -5\text{cm}}$$

Problem 7. एक तोप द्वारा ऊर्ध्वाधर से 30º के कोण पर 100 मी०/सैकण्ड़ के वेग से गोला दागा जाता है। पथ के शीर्ष बिन्दु पर गोला दो भागों में विभक्त हो जाता है। इनके द्रव्यमानों का अनुपात 1 : 2 है। इनमें से भारी 200 मी०/ सैकण्ड़ के वेग से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर गति करता है तो विस्फोट के समय भारी टुकड़े की चाल ज्ञात करो।

Solution : उच्चतम बिन्दु पर वेग = u cosθ = 100 cos 60 = 50



$$u \cos 60° = \frac{u}{g} = 50 \text{ m / sec}$$

चित्रानुसार x और y अक्ष लेने पर,

m का वेग = 50 m / sec $\hat{i}$

m का वेग $\frac{m}{3}$ और $\frac{2m}{3}$ में , $\frac{m}{3}$ का वेग = 200 m/sec $\hat{j}$

माना, $\frac{2m}{3}$ का वेग = $\vec{V}$

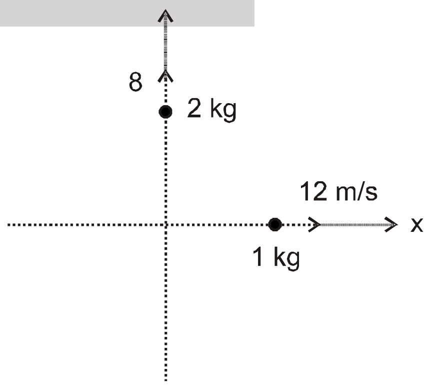
संवेग संरक्षण लगाने पर

$$m \times 50\hat{i} = \frac{m}{3} \times 200\hat{j} + \frac{2m}{3}\vec{V} \quad \Rightarrow \quad 50\hat{i} - \frac{200}{3}\hat{j} = \frac{2}{3}\vec{V} \quad \Rightarrow \quad \vec{V} = 75\hat{i} - 100\hat{j}$$

चाल = $|\vec{V}| = \sqrt{(75)^2 + (100)^2} = 25\sqrt{9+16} = 125$ m/sec **Ans.**

Problem 8. मूल बिन्दु पर एक खोल विरामावस्था में रखा है। यह अचानक तीन द्रव्यमानों 1 किग्रा०, 2 किग्रा० तथा m किग्रा० में विभक्त हो जाता है। 1 किग्रा० तथा 2 किग्रा० के टुकड़े क्रमशः 12 मी०/सैकण्ड़ वेग से x-अक्ष के अनुदिश तथा 8मी०/सैकण्ड़ वेग से y-अक्ष के अनुदिश गति करते है। यदि m किग्रा० का टुकड़ा 40 मी०/सैकण्ड़ वेग से गति करें तो खोल का कुल द्रव्यमान ज्ञात करो।

Solution : क्योंकि प्रारम्भिक वेग = (1+2+m)×0 = 0 प्रारम्भिक संवेग = 0



अंत में माना M का वेग = $\vec{V}$ हम जानते हैं कि $|\vec{V}|$= 40 m/s.

प्रारम्भिक संवेग = अंतिम संवेग

$$0 = 1 \times 10\hat{i} + 2\hat{j} \times 8 + m\vec{V} \qquad \vec{V} = \frac{(12\hat{i} + 16\hat{j})}{m}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{\frac{(12)^2 + (16)^2}{m^2}} = \frac{1}{m}\sqrt{(12)^2 + (16)^2}$$

= 40 {दिया गया है।}

$$m = \sqrt{\frac{(12)^2 + (16)^2}{40}} = 0.5 \text{ kg}$$

कुल द्रव्यमान = 1 + 2 + 0.5 = 3.5 kg

Problem 9.

प्रारम्भ में स्थिर नाभिक (द्रव्यमान संख्या 238), एक α कण जिसकी द्रव्यमान संख्या 4 तथा चाल 1.17×10^7 m/sec. है, से उत्सर्जित कर एक अन्य नाभिक (द्रव्यमान संख्या 234) में क्षयित हो जाता है। शेष नाभिक की प्रतिक्षेप चाल ज्ञात कीजिये। **[AMT. Sir HCV_Modified] [HCV - I]**

Ans. 2.0×10^5 m/s

Sol. $238 \times 0 = 4 \times 1.17 \times 10^7 + 234 \times v_2$

$V_2 = -2 \times 10^5$ m/ses

Problem 10. एक ब्लॉक विरामावस्था में रखा है तथा अचानक तीन बराबर भागों मे विभक्त हो जाता है। दो भाग X तथा Y अक्ष के अनुदिश क्रमशः 10 मी०/सैकण्ड़ की चाल से गति करते है। तो तीसरे भाग की प्रारम्भिक चाल ज्ञात करो।

Answer : $10\sqrt{2}$ मी०/सैकण्ड़

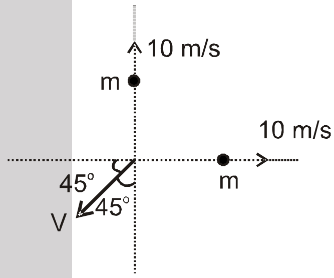
Solution : माना कुल द्रव्यमान = 3 m , प्रारम्भिक रेखिक संवेग = $3m \times 0$

माना तीसरे भाग का वेग = $\vec{V}$

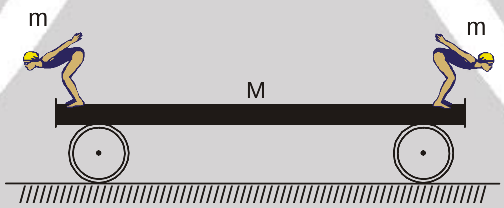
रेखीय संवेग संरक्षण का उपयोग करने पर :

$= m \times 10\hat{i} + m \times 10\hat{j} + m\vec{V}$ $\quad \vec{V} = (-10\hat{i} - 10\hat{j})$ m/sec.

$|\vec{V}| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{2}$, x-अक्ष से नीचे 135° का कोण बनाते हुए।

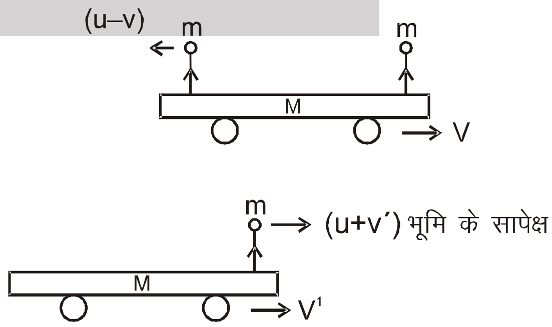


Problem 11. एक M द्रव्यमान की rail-road कार पर के किनारों पर दो समान द्रव्यमान m के व्यक्ति A तथा B खड़े है। व्यक्ति A कार के सापेक्ष u वेग से बांयी ओर कूदता है। इसके पश्चात् B कार के सापेक्ष दायीं ओर उसी क्षैतिज वेग u से कूदता है। दोनों व्यक्तियों के कूदने के पश्चात् कार का वेग ज्ञात कीजिए।



Solution : जब व्यक्ति A कूदता है तो, माना कार आगे की ओर V वेग प्राप्त करती है। अतः, A का धरातल के सापेक्ष वेग = (u – v) विपरीत दिशा में

संवेग संरक्षण का उपयोग करने पर



$(M + m)v - m(u - v) = 0$

$(M + m)v + mv = mu$

$V = \dfrac{m}{M + 2m} u$

जब व्यक्ति B कूदता है तब माना कार का वेग V´ आगे की ओर हैं

अतः B का धरातल के सापेक्ष वेग = u + v´

संवेग सरंक्षण का उपयोग करने पर :

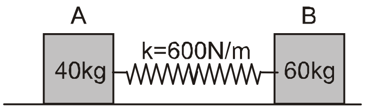
$(m + M)V = MV' + m(u + V')$

$\dfrac{(m+M)mu}{M+2m} = (m + M)V' + mu$

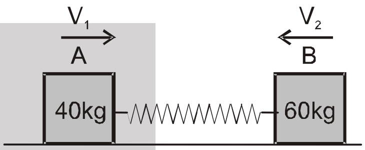
$V' = \dfrac{-m^2u}{(M+m)(M+2m)}$; $V' = \dfrac{-m^2u}{(M+m)(M+2m)}$ 'पीछे की ओर' {–ve चिन्ह. ऋणात्मक दिशा को बताता है}

$\dfrac{m^2u}{(M\ \ +2m)(M+m)}$ **Ans.**

Problem 12. A तथा B ब्लॉक के द्रव्यमान क्रमशः 40 किग्रा० तथा 60 किग्रा० है। ये दोनों ब्लॉक चिकनी सतह पर रखे है, इन दोनों के मध्य जुड़ी हुई स्प्रिंग 2 मीटर खिंची हुई है। यदि ब्लॉक को विरामावस्था से मुक्त किया जाता है तो स्प्रिंग के अविस्तारित (या सामान्य) स्थिति में पहुँचने पर दोनों ब्लॉकों का वेग द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष ज्ञात करो।



Solution : माना ब्लॉक, चित्रानुसार वेग V_1 और V_2 से गति करना प्रारम्भ करता है। माना निकाय पर कोई क्षैतिज बल नहीं लग रहा है। अतः संवेग संरक्षण का उपयोग करने पर



$0 = 40\,V_1 - 60\,V_2$ $\boxed{2V_1 = 3V_2}$ ....(1)

अब ऊर्जा संरक्षण का उपयोग करने पर स्थितिज ऊर्जा में कमी = गतिज ऊर्जा में लाभ

$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2$

$\frac{1}{2} \times 600 \times (1.5)^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times V_1^2 + \frac{1}{2} \times 60 \times V_2^2$ ....(2)

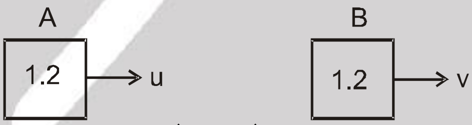
समीकरण (1) और (2) को हल करने पर

$V_1 = 4.5$ m/s, $V_2 = 3$ m/s.

Problem 13. 20 cm/s की चाल से गतिशील 1.2 kg द्रव्यमान का एक गुटका विराम पर रखे एक समान गुटके से सीधी टक्कर करता है। प्रत्यावस्थान गुणांक 3/5 है। टक्कर के दौरान गतिज ऊर्जा में हानि ज्ञात करो।

Solution : टक्कर से पूर्व :

टक्कर के बाद : माना 'A' और 'B' का अन्तिम वेग क्रमशः u और V है।



संवेग संरक्षण का उपयोग करने पर :

$1.2 \times 0.2 = 1.2\,u + 1.2\,V$

$0.24 = 1.2\,(u + V)$ ....(1)

प्रत्यावस्थान गुणांक

$e = \dfrac{V-u}{0.2} = \dfrac{3}{5}$ ....(2)

संवेग संरक्षण का उपयोग करने पर :

$1.24 + 1.2\,V = 0.2u \;\; u + V - 0.2$ m/s ....(2)

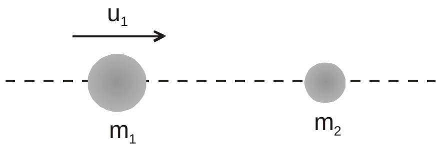
समीकरण (1) और (2) को हल करने पर, $V = \dfrac{4}{25}$ m/sec और $u = \dfrac{1}{25}$ m/sec

गतिज ऊर्जा में कमी = (प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा) – (अंतिम गतिज ऊर्जा)

$= \dfrac{1}{2} \times 1.2 \times (0.2)^2 - \left\{\dfrac{1}{2} \times 1.2 \times \left(\dfrac{4}{25}\right)^2 + \dfrac{1}{2} \times (1.2) \times \left(\dfrac{1}{25}\right)^2\right\} = 0.6\left\{0.04 - \dfrac{16}{625} - \dfrac{1}{625}\right\}$

$= 0.6\{0.04 \times 0.0256 \times 0.0016\} = 0.6\{0.0128\} = 0.00768$ J $= 7.7 \times 10_{-3}$ J

Problem 14. प्रारम्भिक वेग u_1 से गतिशील m_1 द्रव्यमान का एक गोला चित्र में दिखायें अनुसार m_2 द्रव्यमान के स्थिर गोले से सीधी टक्कर करता है। दिये गये प्रत्यावस्थान गुणांक e के लिये, द्रव्यमान अनुपात $\frac{m_1}{m_2}$ की किस शर्त पर m_2 का अंतिम वेग u_1 से अधिक होगा?



Solution : माना m_1 और m_2 का टक्कर के बाद वेग क्रमशः u और V है।

प्रत्यावस्थान गुणांक $= e = \frac{\text{अलगाव वेग}}{\text{सामीप्य वेग}} = \frac{V-u}{u_1}$ ....(1)

संवेग संरक्षण से, प्रारम्भिक संवेग = अंतिम संवेग

$m_1u_1 = m_1u + m_2V$ ....(2)

$m_1u_1 = m_1 (V - eu_1) + m_2V$

$\frac{V}{u_1} = \frac{m,(1+e)}{m_1+m_2} = \frac{(1+e)}{1+\frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow \frac{(1+e)}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{V}{u_1} > 1$ {दिया है} $\boxed{\frac{m_1}{m_2} > \frac{1}{e}}$ **Ans.**

Problem 15. यदि राकेट जिस त्वरण a से किसी बाह्य बल की अनुपस्थिति में गति कर रहा है तब राकेट का द्रव्यमान ज्ञात करो? यदि गैस राकेट के सापेक्ष नियत वेग u से बाहर निकल रही है और इसका प्रारम्भिक द्रव्यमान m_0 है।

Solution : $F_{\text{कुल}} = V_0\left(\frac{-dm}{dt}\right)$ का उपयोग करने पर –

$F_{\text{कुल}} = -\frac{dm}{dt}$ ....(1)

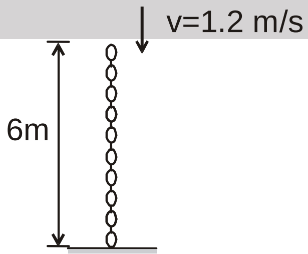
$F_{\text{कुल}} = ma$ ......(2)

समीकरण (1) और (2) को हल करने पर $ma = -u\frac{dm}{dt}$

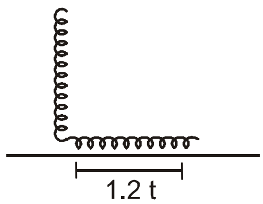
$\int_{m_o}^{m} \frac{dm}{m} = \int_{o}^{t} \frac{-adt}{u}$ $\quad \ell n \frac{m}{m_o} = \frac{-at}{u}$

$\frac{m}{m_o} = e^{-at/u}$ $\quad \boxed{m = m_o e^{\frac{-at}{u}}}$ **Ans.**

Problem 16. यदि श्रृंखला (chain) समान चाल v = 1.2 m/s से गिर रही हैं तब धरातल पर लगने वाले अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल को समय के फलन के रूप में ज्ञात करो? यदि श्रृंखला का द्रव्यमान 80 kg और कुल लम्बाई 6 m है।



Solution : 't' समय बाद



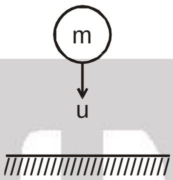
श्रृंखला (chain) का रेखीय द्रव्यमान घनत्व = $\frac{80}{6} = \frac{40}{3}$ kg/m = λ

श्रृंखला (chain) का धरातल पर रखे भाग का भार = mg = $\frac{40}{3} \times 1.2$ t $\quad \frac{40}{3} \times 1.2$ t = 16 t N

प्रतिबल = $F_t = V \times \frac{dm}{dt} = 1.2 \times \lambda v = 1.2 \lambda v = 1.2 \times \frac{40}{3} \times 1.2 = 1.2 \times 40 \times 0.4 = 19.2$N

तल पर लगने वाला लम्बवत् प्रतिक्रिया = W + F_t = (16t + 19.2) N लम्बवत् नीचे की ओर

Problem 17. एक गेंद u चाल से धरातल की तरफ आ रही है। यदि प्रत्यावस्थान गुणांक e है तब ज्ञात करो।



(a) टक्कर के तुरन्त बाद वेग

(b) गेंद पर धरातल के कारण लगने वाले अभिलम्बवत् बल के द्वारा लगा आवेग

Answer : (a) v = eu ; (b) J = mu(1 + e)

Solution : e = $\frac{\text{अलगाव वेग}}{\text{सामीप्य वेग}} = \frac{v}{u}$

(a) गेंद के संवेग में परिवर्तन = V = eu ....(1)

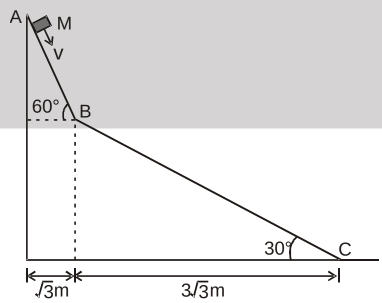
(b) गेंद पर धरातल के कारण लगने वाले अभिलम्बवत् बल के द्वारा लगा आवेग

{प्रारम्भिक संवेग } – { अन्तिम संवेग } {m v} – {– mu} = mv + mu = m {u + eu} = mu {1 + e} **Ans.**

Problem 18.

एक छोटा–ब्लॉक, जिसका द्रव्यमान M है, एक घर्षणरहित (frictionless) नत समतल (inclined plane) पर गतिमान है। (चित्र देखें)। बिन्दु B पर, नत समतल का नत कोण अचानक 60° से 30° हो जाता है। ब्लॉक शुरू में A पर विराम की अवस्था में है। मान लें कि ब्लॉक तथा नत समतल के बीच की टक्कर पूर्णतया अप्रत्यास्थ (inelastic) है। ($g = 10\ m/s^2$)

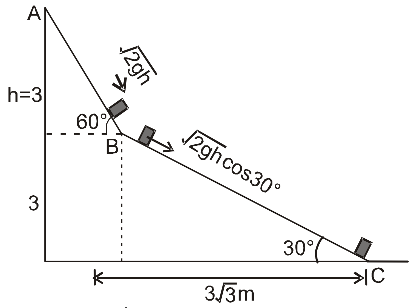
चित्र : **[JEE-2008, 12/163]**



1. दूसरे नत समतल से टकराने के तुरन्त बाद, बिन्दु B पर ब्लॉक की चाल है

(A) $\sqrt{60}$ m/s (B*) $\sqrt{45}$ m/s (C) $\sqrt{30}$ m/s (D) $\sqrt{15}$ m/s

Sol. बिन्दु B पर पूर्णतया अप्रत्यास्थ टक्कर है इसलिये नत तल के लम्बवत् वेग का घटक शून्य हो जाता है एवं दूसरी सतह के समान्तर घटक अपरिवर्तित रहता है।



इसके दूसरे नत तल पर टकराने के ठीक बाद वेग

$$V = \sqrt{2gh}\cos30° = \sqrt{2\times10\times3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{2\times10\times9}{4}}$$

$$V = \sqrt{45} \text{ m/s}$$

2. दूसरे नत समतल को छोड़ने के तुरन्त पहले , बिन्दु C पर ब्लॉक की गति है

(A) $\sqrt{120}$ m/s (B*) $\sqrt{105}$ m/s (C) $\sqrt{90}$ m/s (D) $\sqrt{75}$ m/s

Sol. बिन्दु 'C' पर

$V_C^2 = V_B^2 + 2gh$

$V_C^2 = 45 + 2 \times 10 \times 3$

$V_C = \sqrt{105}$ m/s **Ans. (B)**

3. यदि ब्लॉक तथा नत समतल के बीच की टक्कर पूरी तरह से प्रत्यास्थ (elastic) है, तब B बिन्दु पर दूसरे नत समतल से टकराने के तुरन्त बाद, ब्लॉक के वेग का ऊर्ध्वाधर घटक (ऊपर की ओर) है

(A) $\sqrt{30}$ m/s (B) $\sqrt{15}$ m/s (C*) 0 (D) – $\sqrt{15}$ m/s

Sol. नत तल AB से नीचे आ रहा गुटका नत तल BC के साथ 30° का कोण बनाता है। यदि गुटका नततल BC से प्रत्यास्थ रूप से टकराता है तो नततल से टकराने के बाद गुटके का कोण 30° होगा।
अतः नत तल BC से टक्कर के ठीक बाद गुटके का वेग क्षैतिज होगा। गुटके के दूसरे नततल से टकराने के ठीक बाद इसके वेग का ऊर्ध्वाधर घटक शून्य होगा। **Ans. (C)**