स्थिरविद्युतिकी (ELECTROSTATICS)

1. प्रस्तावना

भौतिकी की वह शाखा जिसमें स्थैतिक आवेशों के वैद्युत प्रभावों का अध्ययन किया जाता है, स्थिर वैद्युतिकी कहलाती है।

2. विद्युत आवेश

किसी वस्तु के पदार्थ या कण का आवेश, वह प्रकृति (ग्रहण की गयी या प्राकृतिक) है जिसके कारण यह वैद्युत व चुम्बकीय प्रभाव उत्पन्न एवम् अनुभव करता है। कुछ प्राकृतिक आवेशित कणों के उदाहरण : इलेक्ट्रॉन, प्रोटॉन, α-कण आदि।

आवेश एक व्युत्पन्न भौतिक राशि है। S.I. पद्धति में आवेश कूलॉम में मापा जाता है। अभ्यास में इसे mC (10^{-3}C), μC (10^{-6}C), nC(10^{-9}C) आदि काम में लेते हैं।

आवेश का C.G.S. मात्रक = स्थिर वैद्युत इकाई = esu.

1 कूलॉम = 3×10^9 स्थिर वैद्युत इकाई का आवेश

आवेश की विमा = $M^0L^0T^1I^1$

2.1 आवेश के गुण :

(i) आवेश एक अदिश राशि है : इसे बीजगणितीय रूप से जोड़ा जाता है तथा इलेक्ट्रॉनों की न्यूनता या अधिकता को प्रदर्शित करता है।

(ii) आवेश दो प्रकार का है : (i) धनात्मक आवेश (ii) ऋणात्मक आवेश। किसी वस्तु का आवेशन एक वस्तु से दूसरी वस्तु में आवेश का स्थानान्तरण है। धनात्मक आवेश से तात्पर्य इलेक्ट्रॉनों की हानि से है अर्थात् इलेक्ट्रॉनों की न्यूनता। ऋणात्मक आवेशित वस्तु से तात्पर्य इलेक्ट्रॉनों की अधिकता है। इससे यह भी प्रदर्शित होता है कि **एक ऋण आवेशित वस्तु का द्रव्यमान > समान धन आवेशित वस्तु का द्रव्यमान।**

(iii) आवेश संरक्षित रहता है : एक विलगित निकाय में कुल आवेश (धनात्मक व ऋणात्मक का जोड़) नियत रहता है, चाहे उस निकाय में कुछ भी परिवर्तन हो।

(iv) आवेश क्वांटीकृत है : किसी भी आवेशित वस्तु पर आवेश सदैव वैद्युत आवेश की मूल इकाई का पूर्ण गुणज होता है। यह इकाई एक इलेक्टॉन के आवेश के परिमाण के बराबर है। ($1e = 1.6 \times 10^{-19}$ कूलॉम) अतः किसी वस्तु पर आवेश $Q = \pm ne$, जहाँ n एक पूर्णांक है तथा e एक इलेक्ट्रॉन पर आवेश है। **मिलिकन के तेल बूंद प्रयोग** से आवेश का क्वान्टीकरण या आवेश की परमाणुकता सिद्ध होती है।

नोट : हाल ही में $\pm\frac{1}{3}e$ व $\pm\frac{2}{3}e$ आवेश के कणों की परिकल्पना की गयी है। इन कणों को क्वार्क्स कहते है किन्तु इसे आवेश का क्वान्टम नहीं माना गया है क्योंकि यह अस्थायी है।

(v) समान प्रकृति के आवेश एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं जबकि विपरीत प्रकृति के आवेश परस्पर आकर्षित होते हैं।

(vi) आवेश सदैव द्रव्यमान से सम्बद्ध होता है अर्थात् द्रव्यमान के बिना आवेश का अस्तित्व नहीं होता यद्यपि आवेश के बिना द्रव्यमान का अस्तित्व सम्भव है। कुछ कण जैसे फोटॉन, न्यूट्रीनों इनका द्रव्यमान (विराम) नहीं होता, अतः इन पर कोई आवेश भी नहीं होता है।

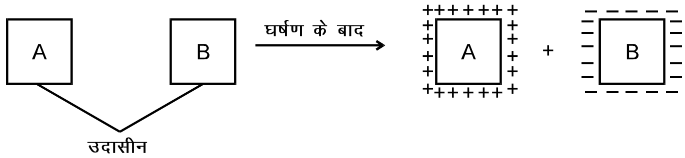
(vii) आपेक्षिकता के सन्दर्भ में अपरिवर्तित है : इसका तात्पर्य यह है कि आवेश निर्देश तन्त्र पर निर्भर नहीं करता है अर्थात् किसी वस्तु का आवेश परिवर्तित नहीं होता है, चाहे इसकी चाल कुछ भी हो, इसके विपरीत वस्तु का द्रव्यमान इसकी चाल पर निर्भर करता है और चाल के साथ बढ़ता है।

(viii) एक स्थिर आवेश इसके चारों ओर केवल विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करता है। एक समान रूप से गति करने वाला आवेश इसके चारों ओर विद्युत क्षेत्र व चुम्बकीय क्षेत्र उत्पन्न करता है जबकि त्वरित गति करता हुआ एक आवेश विद्युत क्षेत्र, चुम्बकीय क्षेत्र व विद्युत चुम्बकीय तरंगे उत्पन्न करता है।

2.3 किसी वस्तु को आवेशित करने की विधियां :

एक वस्तु को (a) घर्षण (b) चालन, (c) प्रेरण, (d) ऊष्मीय उत्सर्जन, (e) प्रकाश वैद्युत प्रभाव व (f) क्षेत्र उत्सर्जन द्वारा आवेशित किया जा सकता है।

(a) घर्षण द्वारा आवेशन : जब किसी उदासीन वस्तु को किसी दूसरी उदासीन वस्तु के साथ रगड़ा जाता है। तो कुछ इलेक्ट्रॉन एक वस्तु से दूसरी वस्तु की ओर चले जाते हैं। जो वस्तु इलेक्ट्रॉन ग्रहण करती है ऋणावेशित हो जाती है जबकि दूसरी धनावेशित हो जाती है। यह वस्तुऐं किसी भी पदार्थ की हो सकती हैं। उदाहरण के लिए जब कंघे को बालों में चलाया जाता है तो यह आयनित हो जाता है।



उदाहण के लिए : जब एक सिल्क के कपड़े को कांच की छड़ से रगड़ते हैं, तो कांच की छड़ धनावेशित हो जाती है। क्योंकि सिल्क में इलैक्ट्रॉन ज्यादा मजबूती से बंदे रहते है और ग्लास में कम मजबूती से बंदे रहते हैं। (इनकी रसायनिक गुण के कारण), कुछ इलैक्ट्रॉन सिल्क से छड़ में चले जाते है। इसलिए कांच की छड़ में इलेक्ट्रान की कमी हो जाती है तथा सिल्क के कपड़े में इलैक्ट्रॉन अधिकता में हो जाते है अतः कांच की धनावेशित तथा सिल्क का कपड़ा ऋणावेशित हो जाता हैं।

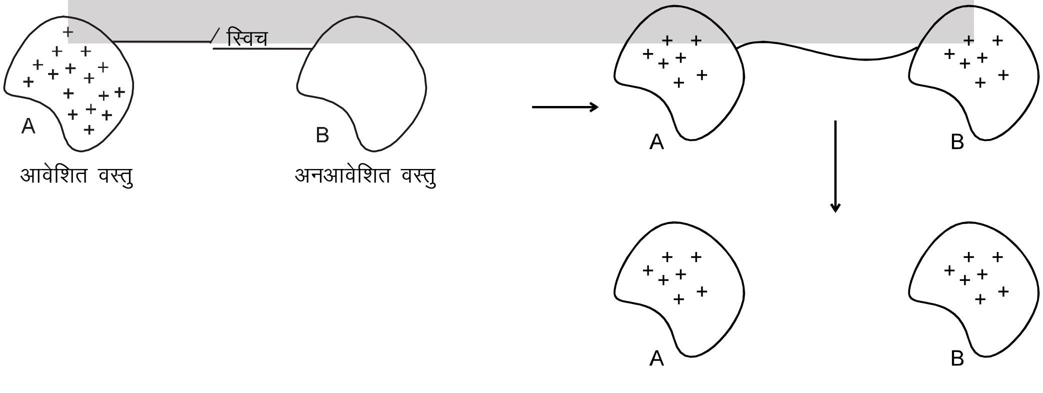
(b) चालन (प्रवाह) : प्रकृति में तीन प्रकार के पदार्थ हैं

(i) चालक : चालक वे पदार्थ है जिनमें बाह्य इलैक्टॉन बहुत ढीले बंधे होते है इसलिए वे गति के लिए मुक्त होते हैं। वे पदार्थ जिनमें अधिक संख्या में मुक्त इलेक्ट्रॉन होते हैं। उदाहरण के लिए : धातुएँ
Ex. Cu, Ag, Fe, Al............

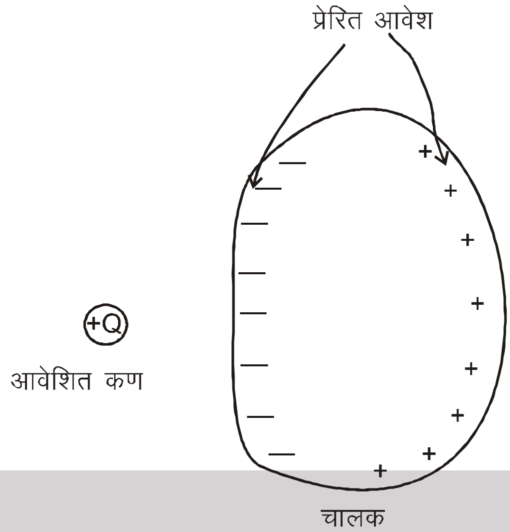
(ii) कुचालक या परावैद्युत : कुचालक वे पदार्थ हैं जिनमें बाह्य इलेक्ट्रॉन बहुत मजबूती से बंधे होते है इसलिए वे गति नही कर सकते हैं। वे पदार्थ जिनमें मुक्त इलेक्ट्रॉन नहीं होते हैं।
उदाहरण के लिए : प्लास्टिक, रबर और लकड़ी

(iii) अर्द्ध चालक : वह पदार्थ जिनमें मुक्त इलेक्ट्रॉन होते हैं, परन्तु कम होते हैं।

अब हम देखते हैं कि चालन से किस तरह आवेशन होता है। इस प्रक्रिया में हम एक आवेशित चालक 'A' तथा एक उदासीन चालक 'B' लेते हैं। जब दोनों को जोड़ा जाता है तो कुछ आवेश आवेशित चालक से उदासीन चालक में प्रवाह होता है। यदि दोनों चालक समान तथा अधिक दूरी पर हैं तो दोनों पर आवेश बराबर वितरित होगा वरना जब तक दोनों का विभव समान न हो जाये तब तक प्रवाह होता है।



(c) प्रेरण के द्वारा आवेशन: इसको समझने के लिए एक प्रयोग करते हैं।



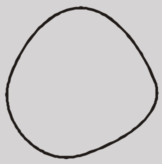
हम यह पढ़ चुके हैं कि चालक में बहुत अधिक संख्या में मुक्त इलेक्ट्रॉन होते हैं। माना एक +Q आवेश उदासीन चालक के पास लाया जाता है। +Q आवेश के आकर्षण के कारण कई इलेक्ट्रॉन (ऋणावेश) निकटवर्ती सतह पर आ जाते हैं।

दूसरी तरफ इलेक्ट्रॉन की कमी के कारण +ve आवेश उत्पन्न होता है। यह प्रवाह जब तक चलता है जब तक चालक के मुक्त इलेक्ट्रॉन पर परिणामी बल शून्य न हो जाये। इसको प्रेरण कहा जाता है तथा उत्पन्न आवेश प्रेरित आवेश कहलाता है।

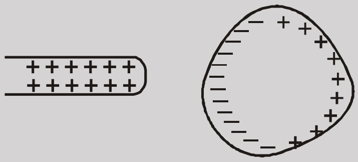
एक वस्तु को निम्न दो तरीके से प्रेरण द्वारा आवेशित कर सकते हैं।

Method I :

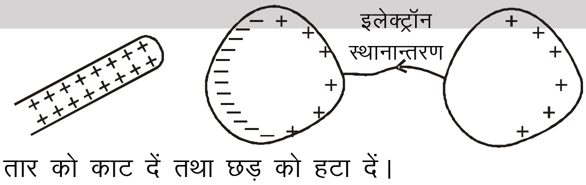
1. एक उदासीन विलगित चालक गोला लो



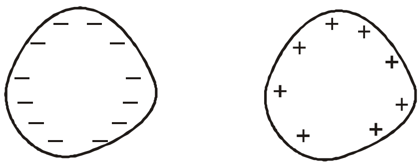
2. आवेशित छड़ इसके पास लाओ। आवेशित छड़ के कारण गोले पर आवेश प्रेरित होगा।



3. एक दूसरे उदासीन चालक गोले को इससे जोड़ते हैं। छड़ के आकर्षण के कारण मुक्त इलेक्ट्रॉन दांये गोले से बांयी तरफ जायेंगे तथा इलेक्ट्रॉन की कमी के कारण दांये गोले पर धनात्मक आवेश आयेगा तथा बायें गोले पर दायें गोले से इलेक्ट्रॉन के स्थानान्तरण के कारण इलेक्ट्रॉन अधिक होंगे।



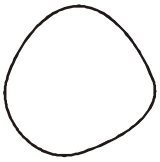
4. अब जोड़ने वाले तार को काट दें तथा छड़ को हटा दें।



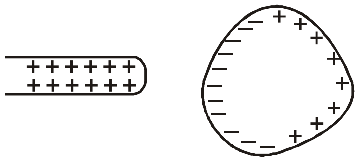
पहला गोला ऋणात्मक तथा दूसरा गोला धनात्मक आवेशित होगा।

Method II

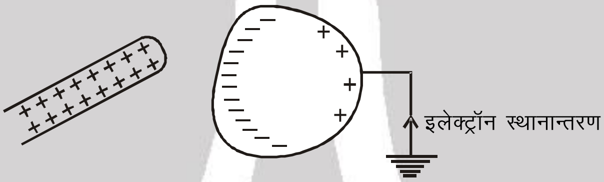
1. एक उदासीन विलगित चालक गोला लो।



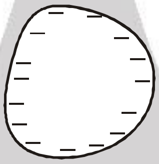
2. आवेशित छड़ इसके पास लाओ। आवेशित छड़ के कारण गोले पर प्रेरण होगा।



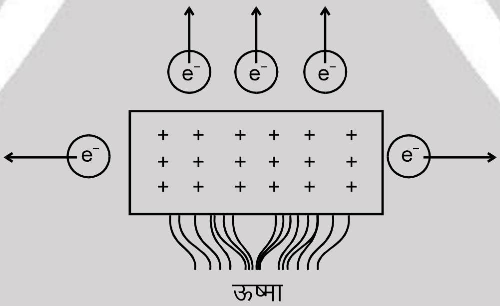
3. गोले को पृथ्वी से जोड़ो। इस प्रक्रिया को भूसम्पर्कित करना कहते हैं। छड़ के आकर्षण के कारण कुछ मुक्त इलेक्ट्रॉन पृथ्वी से चालक पर आयेंगे इसलिए चालक पर इलेक्ट्रॉन अधिक होंगे इसलिये चालक पर ऋणात्मक आवेश होगा।



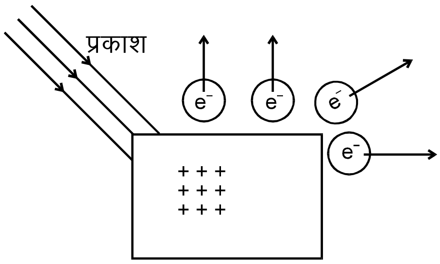
4. अब तार को काट दो व छड़ को हटा दो, अब गोले पर कुल ऋणात्मक आवेश होगा।



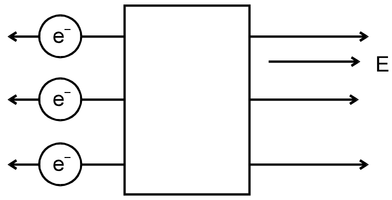
(d) ऊष्मीय उत्सर्जन : जब धातु को उच्च ताप तक गर्म किया जाता है तो धातु के कुछ इलेक्ट्रॉन धातु के बाहर चले जाते है। जिससे धातु धनावेशित हो जाती है।



(e) प्रकाशवैद्युत प्रभाव : जब उपयुक्त आवृत्ति की विद्युत चुम्बकीय किरणों को किसी धातु पृष्ठ पर गिराया जाता है तो कुछ इलेक्ट्रॉन बाहर निकल आते हैं। जिससे धातु धनावेशित हो जाती है।



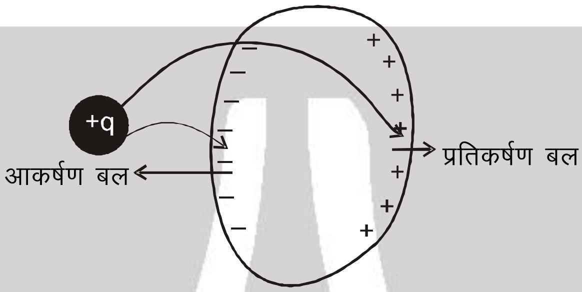
(f) क्षेत्र उत्सर्जन : जब उच्च परिमाण का विद्युत क्षेत्र धातु पृष्ठ के निकट आरोपित किया जाता है तो धातु पृष्ठ से कुछ इलेक्ट्रॉन बाहर आ जाते हैं और इस प्रकार धातु धनावेशित हो जाती है।



Solved Examples

Example 1. यदि एक आवेशित वस्तु को उदासीन चालक के पास रखा जाता है तो यह इसको आकर्षित या प्रतिकर्षित करेगा?

Solution :



यदि एक आवेशित वस्तु (धनात्मक) को उदासीन चालक के पास बांयी ओर रखा जाता है तो चालक की बांयी सतह पर ऋणावेश तथा दांयी सतह पर धनावेश प्रेरित होगा। +q आवेश के कारण प्रेरित ऋणावेश आकर्षण तथा धनावेश प्रतिकर्षण महसूस करेगा। परन्तु ऋणावेश ज्यादा पास है, अतः आकर्षण बल प्रतिकर्षण बल की तुलना में अधिक होगा। इसलिए चालक पर +q आवेश के कारण परिणामी बल आकर्षण बल होगा।

उपरोक्त उदाहरण से हम यह कह सकते है एक आवेशित वस्तु उदासीन चालक को आकर्षित कर सकती है। यदि दो वस्तुओं के बीच में आकर्षण बल है तो एक वस्तु उदासीन भी हो सकती है। परन्तु यदि दो वस्तुओं के बीच प्रतिकर्षण बल है तो दोनों वस्तु समान प्रकार के आवेश से आवेशित होनी चाहिए।

इसलिए **"प्रतिकर्षण ही आवेशन का सही परीक्षण है".**

Example 2. एक धनावेशित वस्तु 'A' वस्तु 'B' को आकर्षित करती है तब वस्तु B पर आवेश हो सकता है :

(A) धनात्मक (B) ऋणात्मक (C) शून्य (D) कह नहीं सकते

Solution : B, C

Example 3. पांच गेंद A, B, C, D और E को एक परीक्षण में उपयोग किया जता है गेदों पर कई परीक्षण किये जाते हैं तथा निम्न परिणाम प्राप्त किये जाते हैं।

(i) गेंद A, C को प्रतिकर्षित तथा B को आकर्षित करती है।

(ii) गेंद D, B को आकर्षित तथा E पर कोई प्रभाव नहीं डालती।

(iii) एक ऋणात्मक छड़ A तथा E को आकर्षित करती है।

आपकी जानकारी के लिये एक उदासीन गेंद आवेश प्रेरण के लिये संवेदनशील है तथा आकर्षित होती है यदि आवेशित वस्तु के पास रखी जाये। प्रत्येक गेंद पर यदि आवेश है तो कौनसा है।

	A	B	C	D	E
(A)	+	–	+	0	+
(B)	+	–	+	+	0
(C)	+	–	+	0	0
(D)	–	+	–	0	0

Answer : C

Solution : (i) से, क्योंकि A, C को प्रतिकर्षित करती है। इसलिए A व C पर समान आवेश होना चाहिए या तो दोनों +ve या दोनों –ve होगी। क्योंकि A, B को आकर्षित करता है। अतः B पर A का विपरीत आवेश हो सकता है या B उदासीन हो सकता है।

(ii) से, क्योंकि D, E पर कोई प्रभाव नहीं डालता अतः D व E दोनों उदासीन होनी चाहिए और क्योंकि B, D को आकर्षित करती है। अतः B आवेशित होनी चाहिए तथा D उदासीन होनी चाहिए।

(iii) से, एक –ve आवेशित छड़ A को आकर्षित करती है। अतः A पर +ve आवेश होना चाहिए तथा (i) से C भी +ve होनी चाहिए तथा B, –ve होनी चाहिए।.

Example 4. आवेश संरक्षण का सिद्धान्त हमेशा लागू रहता है। क्या यह द्रव्यमान के लिए सत्य है ?

Solution : नहीं, द्रव्यमान संरक्षण के लिए हमेशा लागू नहीं होता है। कुछ नाभिकीय अभिक्रियाओं में द्रव्यमान को ऊर्जा में बदला जा सकता है।

Example 5. प्रेरण द्वारा आवेशन एवं चालन द्वारा आवेशन में क्या अन्तर है ?

Solution : दोनों विधियों में मुख्य अन्तर निम्न हैं –

(i) प्रेरण में, दो वस्तुऐं बिना सम्पर्क के एक दूसरे के पास होती हैं जबकि चालन में उनका सम्पर्क होता है।

(ii) प्रेरण में, वस्तु का कुल आवेश अपरिवर्तित होता है जबकि चालन में यह बदल जाता है।

(iii) प्रेरण में, प्रेरित आवेश हमेशा स्रोत आवेश के विपरीत प्रकृति का होता है जब कि चालन में दोनों वस्तुओं पर आवेश की प्रकृति समान होती है।

Example 6. यदि काँच की छड़ को सिल्क पर रगड़ा जाये तो यह धनावेशित होती है क्योंकि –

(A) इसमें प्रोटॉन जुड़ जाते हैं। (B) इससे प्रोटॉन अलग हो जाते हैं।

(C) इसमें इलेक्ट्रॉन जुड़ जाते हैं। (D) इससे इलेक्ट्रॉन अलग हो जाते हैं।

Answer : D

3. कूलॉम का नियम (व्युत्क्रम वर्ग नियम)

प्रयोगों के आधार पर कूलॉम ने निम्न परिणाम दिये जिन्हें सम्मिलित रूप से कूलॉम का नियम कहते हैं। दो बिन्दुवत आवेशों के बीच लगने वाले स्थिर वैद्युत बल का परिमाण दोनों आवेशों के गुणनफल के समानुपाती व दोनों के बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

$$F \propto q_1q_2 \quad ; \quad F \propto \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow F \propto \frac{q_1q_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{Kq_1q_2}{r^2}$$

(i) यह केवल बिन्दु आवेशों पर ही लागू होता है।

(ii) समानुपाती नियतांक का मान निर्वात् में SI पद्धति में $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ द्वारा दिया जाता है और किसी अन्य माध्यम में $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$ द्वारा। यदि आवेशों को किसी माध्यम में रखा जाये तो किसी एक आवेश पर स्थिर वैद्युत बल $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1q_2}{r^2}$ होगा। जहां ε_0 व ε क्रमशः निर्वात एवं माध्यम की विद्युत शीलता है। अनुपात $\varepsilon/\varepsilon_0 = \varepsilon_r$ को माध्यम की आपेक्षिक विद्युत शीलता कहते हैं जोकि एक विमाहीन राशि है।

(iii) आपेक्षिक विद्युत शीलता ε_r का मान 1 से ∞ के बीच होता है। परिभाषा से निर्वात् के लिए यह 1 होता है। हवा के लिए लगभग 1 (गणनाओं के लिए 1 के बराबर लिया जा सकता है।) धातुओं के लिए ε_r का मान ∞ होता है। तथा पानी के लिए 81 होता है। जिस पदार्थ में अधिक आवेश प्रेरित हो सकता है उसका ε_r अधिक होगा।

(iv) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ का मान = 9×10^9 $Nm^2\ coul^{-2}$

$\Rightarrow$ $\varepsilon_0 = 8.855 \times 10^{-12}\ C^2/Nm^2$.

ε का विमिय सूत्र $[M^{-1}\ L^{-3}\ T^4\ A^2]$ है।

(v) किसी एक आवेश द्वारा दूसरे आवेश पर बल सदैव दोनों आवेशों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश होता है। यह दोनों आवेशों पर समान परिमाण में किन्तु विपरीत दिशा में लगता है। दिशा उस माध्यम पर आधारित नहीं है जिसमें वे दोनों रहते हैं।

(vi) बल संरक्षी है अर्थात् किसी भी आकृति के बन्द लूप के अनुदिश एक बिन्दुवत् आवेश को गति कराने में स्थिर विद्युतिकी बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

(vii) चूंकि यह बल केन्द्रीय बल है अतः बाह्य बलों की उपस्थिति में एक कण का दूसरे कण के सापेक्ष कोणीय संवेग (द्वि–कण निकाय) संरक्षित रहता है।

(viii) सदिश रूप में सूत्र को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

यहाँ $\vec{r}$ = स्त्रोत आवेश (जिसके कारण बल ज्ञात करना है) के सापेक्ष परीक्षण आवेश (जिस पर बल ज्ञात करना है) का स्थिति सदिश।

Solved Examples

Example 7. वायु में 1 मी की दूरी पर रखे धनावेशों (प्रत्येक 1 C) के मध्य लगने वाला बल ज्ञात करो।

Solution : $F_e = \frac{kq_1q_2}{r^2} = \frac{9\times10^9\times1\times1}{1^2} = 9 \times 10^9 N$

☞ इस परिणाम से हम कह सकते हैं कि 1C आवेश बल अनुभव करने के लिए बहुत बड़ा है। प्रकृति में आवेश μC की कोटि में होता है।

Example 8. द्रव्यमान m एवं q_1 आवेश का एक कण, एक जड़त्व आवेश $-q_2$ के चारों ओर r त्रिज्या के वृत्तीय पथ में चक्कर लगा रहा है। इसका परिक्रमण काल तथा चाल ज्ञात करो –

Solution: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2} = mr\omega^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$,

$T^2 = \frac{(4\pi\varepsilon_0)r^2(4\pi^2 mr)}{q_1q_2}$ or $T = 4\pi r\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mr}{q_1q_2}}$

और हम यह भी कह सकते हैं

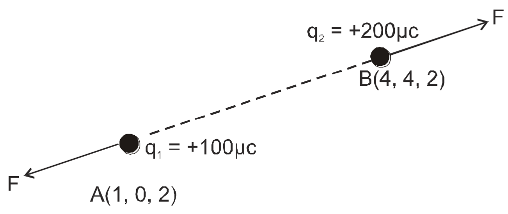
$\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}$ $\Rightarrow$ $V = \sqrt{\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 mr}}$

Example 9. कोई बिन्दु आवेश q_1 = + 100 μC बिन्दु A (1, 0, 2) पर दूसरा बिन्दु आवेश q_2 = +200μC बिन्दु B (4, 4, 2) पर है तो

(i) दोनों के मध्य लगने वाला स्थिर वैद्युत बल ज्ञात करो।

(ii) $\vec{F}_A$ (B के कारण A पर बल) व $\vec{F}_B$ (A के कारण B पर बल) सदिश रूप में ज्ञात करो।

Solution :



F का मान : $|F| = \frac{kq_Aq_B}{r^2} = \frac{(9\times10^9)(100\times10^{-6})(200\times10^{-6})}{\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2+(2-2)^2}^{\,2}} = 7.2\ N$

(ii) B पर बल $\vec{F}_B = \frac{kq_Aq_B}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = \frac{(9\times10^9)(100\times10^{-6})(200\times10^{-6})}{\sqrt{(4-1)^2+(4-0)^2+(2-2)^2}}\left[(4-1)\hat{i}+(4-0)\hat{j}+(2-2)\hat{k}\right]$

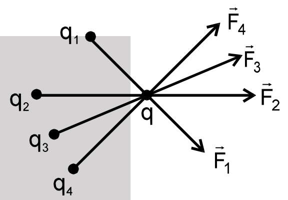
$= 7.2\left(\frac{3}{5}\hat{i}+\frac{4}{5}\hat{j}\right)$ N

इसी प्रकार $\vec{F}_A = 7.2\left(-\frac{3}{5}\hat{i}-\frac{4}{5}\hat{j}\right)$ N

क्रिया ($\vec{F}_A$) और प्रतिक्रिया ($\vec{F}_B$) समान लेकिन विपरीत दिशा में होते हैं।

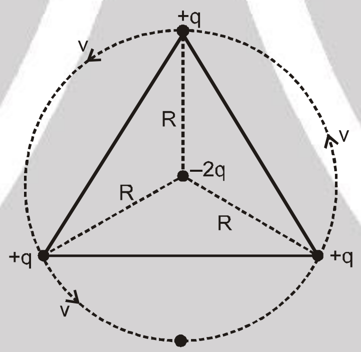
4. अध्यारोपण का सिद्धान्त PRINCIPLE OF SUPERPOSITION

स्थिर वैद्युत बल दो वस्तुओं के बीच अन्योन्य बल है अर्थात् दो बिन्दुवत् आवेशों के बीच लगने वाला बल अन्य आवेशों की उपस्थिति या अनुपस्थिति पर निर्भर नहीं करता है। इसीलिए अध्यारोपण का सिद्धान्त लागू होता है अर्थात् निकाय के कारण किसी एक आवेश पर बल व्यक्तिगत आवेशों के कारण लगे बलों का परिणामी होता है अर्थात् अनेक आवेशों के कारण एक बिन्दुवत् परीक्षण आवेश पर बल $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ द्वारा दिया जाता है।

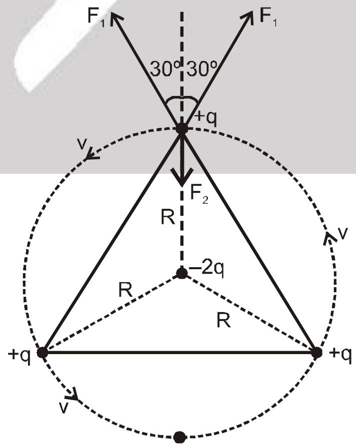


Solved Examples

Example 10 तीन समान आवेशित कण जिनका आवेश +q है, R त्रिज्या के वृत्त में समान चाल से गति कर रहे हैं, तथा एक बिन्दु आवेश –2q वृत्त के केन्द्र पर (चित्रानुसार) रखा है। यदि आवेश नियत तथा समान चाल से घूम रहे हैं, तो उनकी चाल ज्ञात करो।



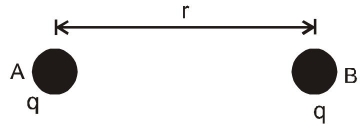
Solution :



$F_2 - 2F_1\cos 30^\circ = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \frac{K(q)\ (2q)}{R^2} - \frac{2(Kq^2)}{(\sqrt{3}R)^2}\cos 30 = \frac{mv^2}{R}$; $v = \sqrt{\frac{kq^2}{Rm}\left[2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]}$

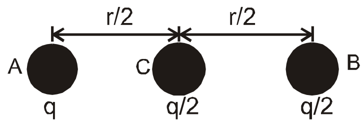
Example 11. वायु में रखे दो समान आवेशित समरूप धातु के छोटे गोले A तथा B एक दूसरे को 2×10^{-5}N के बल से प्रतिकर्षित करते हैं (गुरूत्वाकर्षण नगण्य माने)। अन्य समान अनावेशित गोले C को B से स्पर्श कराते हैं तथा A तथा B के मध्य बिन्दु पर रखते हैं। C पर परिणामी स्थिर विद्युत बल क्या होगा?

Solution : माना प्रारम्भ में प्रत्येक गोले पर आवेश q तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी r है तो दिये गये प्रश्न के अनुसार –



$F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q \times q}{r^2} = 2 \times 10^{-5}$ N

जब गोले C को B से स्पर्श कराते हैं तो q आवेश B तथा C पर समान रूप से वितरित होगा अर्थात् अब गोलों पर आवेश–



$q_B = q_C = (q/2)$

अतः गोला C बल अनुभव करेगा

$F_{CA} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q(q/2)}{(r/2)^2} = 2F$, $\overrightarrow{AB}$ के अनुदिश आवेश A के कारण

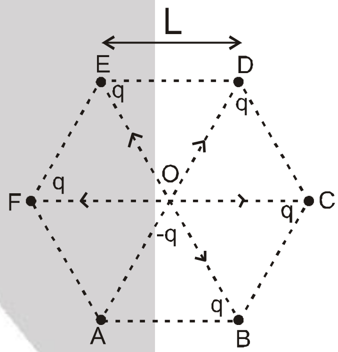
और $F_{CB} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(q/2)(q/2)}{(r/2)^2} = F$, $\overrightarrow{BA}$ के अनुदिश आवेश B के कारण

अतः C पर A तथा B के कारण परिणामी बल F_C है –

$F_C = F_{CA} - F_{CB} = 2F - F = 2 \times 10^{-5}$ N $\overrightarrow{AB}$. के अनुदिश

Example 12 पाँच बिन्दुवत् आवेश q, L भुजा के समषट्भुज के शीर्षो पर रखे हैं। षट्भुज के केन्द्र पर रखे आवेश –q पर बल क्या होगा?

Solution : **Method : I**



षट्भुज बचे हुए शीर्ष पर यदि छठा आवेश होता तो –q आवेश पर परिणामी बल शून्य होता (क्योंकि अलग–अलग आवेशों द्वारा लगाये गये बल सन्तुलित होंगे)

अब यदि $\vec{f}$ छठे आवेश के कारण बल है तथा $\vec{F}$ शेष पाँच आवेश के कारण बल है तो :

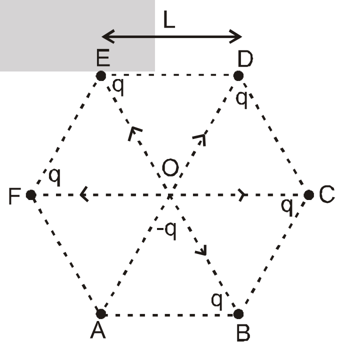
$\vec{F} + \vec{f} = 0$ i.e., $\vec{F} = -\vec{f}$ अर्थात् $|F| = |f| = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q \times q}{L^2}$

$= \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{L^2}$

$\vec{F}_{Net} = \vec{F}_{OD} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{L^2}$ OD के अनुदिश

Method : II

चित्र में हम देख सकते हैं कि F तथा C द्वारा लगाये बल एक दूसरे के विपरीत हैं



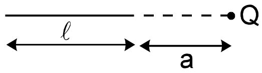
$\vec{F}_{OF} + \vec{F}_{OC} = 0$ .....(i)

इसी प्रकार $\vec{F}_{OB} + \vec{F}_{OE} = 0$ .....(ii)

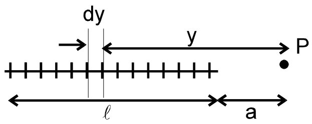
अतः $\vec{F}_{OF} + \vec{F}_{OB} + \vec{F}_{OC} + \vec{F}_{OD} + \vec{F}_{OE} = \vec{F}_{Net}$

(i) व (ii) का उपयोग करने पर, $\vec{F}_{Net} = \vec{F}_{OD} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{L^2}$ OD के अनुदिश

Example 13 निर्वात में रखी ℓ लम्बाई की एक पतली छड़ पर q आवेश एक समान रूप से वितरित है। चित्र में दिखाये अनुसार बिन्दुवत् आवेश 'Q' पर लगने वाले वैद्युत बल का परिमाण ज्ञात करो।



Solution : चूंकि छड़ का आवेश बिन्दुवत् आवेश नहीं है अतः पहले हम छड़ के अल्प भाग 'dy' द्वारा आवेश Q पर लगने वाले बल की गणना करेंगे। इस अल्प भाग 'dy' को अल्पांश कहते हैं तथा इसे बिन्दुवत् आवेश मानते हैं।



अल्पांश पर आवेश $dq = \lambda dy = \frac{q}{\ell}dy$

'Q' पर अल्पांश के कारण विद्युत बल = $\frac{K.dq.Q}{y^2} = \frac{K.Q.q.dy}{y^2.\ell}$

सभी बल एक ही दिशा में हैं

$\therefore \quad F = \sum dF$ इस योग को हम समाकलन विधि द्वारा ज्ञात कर सकते हैं अतः $F = \int_{y=a}^{a+\ell} \frac{KQqdy}{y^2\ell}$

$$= \frac{KqQ}{\ell}\left[-\frac{1}{y}\right]_a^{a+\ell} = \frac{KQ.q}{\ell}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\ell}\right] = \frac{KQq}{a(a+\ell)}$$

Note : (1) जिस तरह यांत्रिकी में द्रव्यमान को छड़ के केन्द्र पर मान लेते हैं। उस तरह यहाँ सम्पूर्ण आवेश को छड़ के केन्द्र पर नहीं माना जा सकता है।

Note : (2) यदि $a >> \ell$ तब $F = \frac{KQq}{a^2}$ अर्थात् छड़ का व्यवहार बिन्दुवत आवेश सदृश्य होगा।

5. स्थिर वैद्युत साम्यावस्था

वह बिन्दु जहाँ आवेशित कण पर परिणामी बल शून्य हो जाता है, साम्यावस्था या सन्तुलन अवस्था कहलाती है।

5.1 स्थायी सन्तुलन :

यदि आवेश को थोड़ा विस्थापित करने पर यह पुनः उसी साम्यावस्था पर आने की कोशिश करे तो यह स्थायी संतुलन कहलाता है।

5.2 अस्थायी संतुलन :

यदि आवेश को थोड़ा विस्थापित करने पर यह उसी साम्यावस्था पर न आये व माध्य स्थिति से दूर चला जाये तो यह सन्तुलन अस्थायी सन्तुलन कहलाता है।

5.3 उदासीन साम्यावस्था :

यदि आवेश को अल्प दूरी तक विस्थापित किया जाए और यह फिर भी साम्यावस्था में रहे तो इस स्थिति को उदासीन साम्यावस्था कहते हैं।

Solved Examples

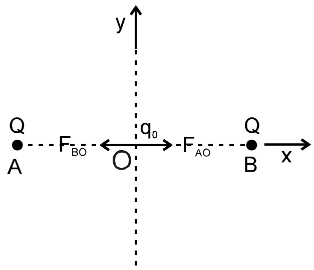
Example 14 दो बराबर धनात्मक बिन्दुवत् आवेश 'Q' बिन्दु A(a, 0) तथा बिन्दु B(–a, 0) पर रखे हैं। अन्य परीक्षण आवेश q_0 भी बिन्दु O(0, 0) पर रखा है। दर्शाये कि बिन्दु 'O' पर साम्यावस्था है –

(i) X-अक्ष के अनुदिश विस्थापन के लिए स्थायी।

(ii) Y-अक्ष के अनुदिश विस्थापन के लिए अस्थायी।

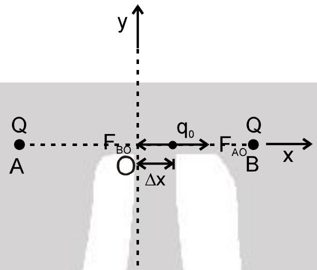
Solution :

(i)



प्रारम्भ में $\vec{F}_{AO} + \vec{F}_{BO} = 0 \Rightarrow |\vec{F}_{AO}| = |\vec{F}_{BO}| = \frac{KQq_0}{a^2}$

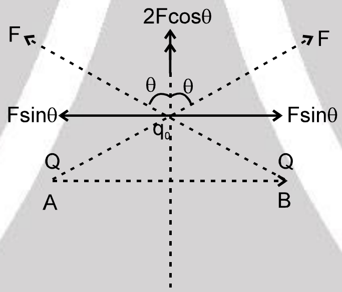
जब आवेश को + x अक्ष के अनुदिश थोड़ी दूरी Δx से विस्थापित करते हैं, तब –



$|\vec{F}_{AO}| < |\vec{F}_{BO}|$

अतः कण मूल बिन्दु (प्रारम्भिक स्थिति) की तरफ गतिमान होगा, अतः साम्यावस्था स्थायी है।

(ii) जब आवेश को y अक्ष के अनुदिश विस्थापित करते हैं।



सभी घटक करने के पश्चात् परिणामी बल y अक्ष की ओर है अतः कण अपनी प्रारम्भिक स्थिति में नहीं लौटेगा। अतः यह अस्थायी साम्यावस्था है। अन्त में आवेश अनन्त तक गतिमान होगा।

Example 15. दो बिन्दुवत् आवेश q_1 तथा q_2 (समान प्रकृति) तथा प्रत्येक का द्रव्यमान m, को इस प्रकार रखा गया है कि गुरूत्वाकर्षण वैद्युत प्रतिकर्षण को संतुलित कर देता है। क्या वे स्थायी साम्यावस्था में है ? यदि नहीं तो साम्यावस्था की प्रकृति क्या है?

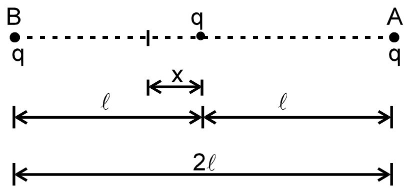
Solution : दिये गये उदाहरण में : $\frac{Kq_1q_2}{r^2} = \frac{Gm^2}{r^2}$

दूरी पर अनिर्भर आवेश हमेशा साम्यावस्था में रहेंगे। यदि अब दूरी बढ़ा या घटा दी जाये तो साम्यावस्था पर कोई फर्क नहीं पड़ेगा। अतः यह उदासीन साम्यावस्था है।

Example 16. m द्रव्यमान तथा q आवेश का एक कण 2ℓ दूरी पर रखे दो स्थिर आवेशित कणों (प्रत्येक का आवेश q) के मध्य रखा है। सिद्ध करें कि यदि मध्यवर्ती कण को थोड़ा सा उनको जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश विस्थापित करके छोड़ दें तो वह सरल आवर्त गति करेगा। आवर्त गति में लगने वाला समय भी ज्ञात करो।

Solution : माना आवेश q को मध्य बिन्दु से बार्यी तरफ विस्थापित करते हैं विस्थापित आवेश q पर A पर स्थित आवेश q द्वारा बल

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{(\ell + x)^2}$$



विस्थापित आवेश q पर B पर आवेश q द्वारा बल

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{(\ell - x)^2}$$

विस्थापित आवेश पर परिणामी प्रत्यानयन बल

$$F = F_2 - F_1 \text{ या } F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{(\ell - x)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{(\ell + x)^2}$$

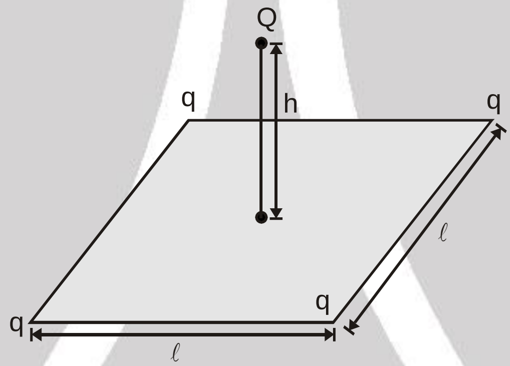
या $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{(\ell - x)^2} - \dfrac{1}{(\ell + x)^2}\right] = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{4\ell x}{(\ell^2 - x^2)^2}$

चूंकि $\ell >> x$, $\quad \therefore \quad F = \dfrac{q^2 \ell x}{\pi\varepsilon_0 \ell^4}$ या $\quad F = \dfrac{q^2 x}{\pi\varepsilon_0 \ell^3}$

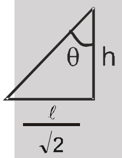
हम देखते हैं कि $F \propto x$ तथा यह विस्थापन के विपरीत है। अतः गति सरल आवर्त गति है।

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, यहाँ $k = \dfrac{q^2}{\pi \in_0 \ell^3}$, $\quad \therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\pi \in_0 \ell^3}{q^2}}$

Example 17. आवेश Q का द्रव्यमान ज्ञात करो, जिससे वह निम्न अभिविन्यास के लिये साम्यावस्था में रह सके।



Solution :



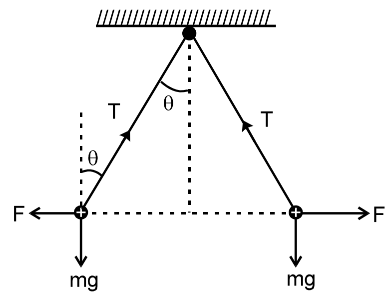
$\Rightarrow 4\,F\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad \dfrac{KQq}{\left(\dfrac{\ell^2}{2} + h^2\right)^{3/2}}\; 4 \times h = mg \quad \therefore \quad m = \dfrac{4KQqh}{g\left(\dfrac{\ell^2}{2} + h^2\right)^{3/2}}$

Example 18. दो समरूप आवेशित गोलों को बराबर लम्बाई के धागों द्वारा लटकाया जाता है। प्रत्येक धागा ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाता है। जब इसे घनत्व $\sigma = 0.8$ ग्राम/सेमी.^{3} के द्रव में लटकाते हैं, तो कोण समान रहता है। द्रव का परावैद्युतांक क्या है? (गोले के पदार्थ का घनत्व 1.6 ग्राम/सेमी.^{3} है।)

Solution : प्रारम्भ में प्रत्येक गेंद पर तनाव T,

भार mg तथा वैद्युत बल F कार्यरत है। इसकी ऊर्ध्वाधर दिशा में साम्यावस्था के लिए –

$$T\cos\theta = mg \qquad .....(1)$$



तथा क्षैतिज के अनुदिश

$$T\sin\theta = F \qquad .....(2)$$

समीकरण (2) को (1) से भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} \qquad .....(3)$$

जब गेंदों को σ घनत्व तथा K परावैद्युतांक वाले द्रव में लटकाते हैं तो विद्युत बल (1/K) गुना होता है अर्थात्, F' = (F/K) जबकि भार

$mg' = mg - F_B = mg - V\sigma g$ [जहाँ $F_B = V\sigma g$, जहाँ σ गोले के पदार्थ का घनत्व है।]

i.e., $mg' = mg\left[1-\frac{\sigma}{\rho}\right]$ $\left[\text{चूंकि } V = \frac{m}{\rho}\right]$

अतः गेंदों की साम्यावस्था के लिए – $\tan\theta' = \frac{F'}{mg'} = \frac{F}{Kmg[1-(\sigma/\rho)]}$ ... (4)

दी गई सूचना के आधार पर θ' = θ; अतः समी० (4) तथा (3) से – $K = \frac{\rho}{(\rho-\sigma)} = \frac{1.6}{(1.6-0.8)} = 2$ **Ans.**

6. विद्युत क्षेत्र

विद्युत क्षेत्र किसी आवेशित कण के चारों ओर वह क्षेत्र है जिसमें अन्य आवेश वैद्युत बल अनुभव करते हैं। एक बिन्दुवत् आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र अनन्त तक होता है।

6.1 विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$:

किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता उस बिन्दु पर रखे एक इकाई धनात्मक बिन्दु आवेश द्वारा अनुभव किये गये स्थिर वैद्युत बल के बराबर (परिमाण व दिशा दोनों में) होती है।

विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु पर परीक्षण आवेश q_0 रखा है। तथा यह कुछ आवेशों (स्त्रोत आवेश) द्वारा बल $\vec{F}$ अनुभव करता है तो उस बिन्दु पर स्त्रोत आवेशों के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\vec{E}$

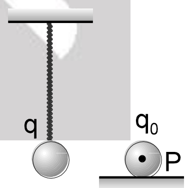
$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ होती है।

यदि $\vec{E}$ को प्रायोगिक रूप से ज्ञात करना हो तो परीक्षण आवेश q_0 बहुत छोटा होना चाहिये अन्यथा यह विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करने वाले स्त्रोत आवेश के वितरण को प्रभावित करेगा तथा जिस राशि को प्रेक्षित करना है उसकों परिवर्तित कर देगा।

Solved Examples

Example 19. एक धनावेशित गेंद रेशम की एक लम्बी डोरी से लटकी हुई है। हम उसी क्षैतिज तल जिसमें गेंद लटकी हुई है, किसी एक बिन्दु पर E ज्ञात करना चाहते है। ऐसा करने के लिए हम उस बिन्दु पर एक परीक्षण आवेश q_0 रखते हैं तथा F/q_0 का मान ज्ञात करते हैं। क्या F/q_0 का मान प्रश्न में दिये गये बिन्दु पर E के बराबर होगा ?

Solution : जब हम P बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करते है तो P पर परीक्षण आवेश को रखने के पश्चात् यह स्रोत आवेश (लटका हुआ आवेश) को प्रतिकर्षित करता है और ज्ञात किए गए विद्युत क्षेत्र का मान $E_{\text{प्रेक्षित}} = \frac{F}{q_0}$, वास्तविक मान $E_{\text{वास्तविक}}$ जिसे हम ज्ञात करना चाहते है, से कम होगा।



6.2 विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के गुण :

(i) यह सदिश राशि है। इसकी दिशा धनात्मक आवेश द्वारा अनुभव किये गये बल की दिशा के समान होती है।

(ii) धनात्मक आवेश द्वारा विद्युत क्षेत्र की दिशा सदैव इससे दूर जबकि ऋणावेश के कारण सदैव इसकी ओर होती है।

(iii) इसका S.I. पद्धति में मात्रक न्यूटन/कूलाम है।

(iv) इसका विमीय सूत्र $[MLT^{-3}A^{-1}]$ है।

(v) किसी स्त्रोत आवेश द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में किसी बिन्दु पर रखे q आवेश पर वैद्युत बल $\vec{F} = q\vec{E}$ होता है। धनात्मक आवेश पर वैद्युत बल विद्युत क्षेत्र की दिशा में होता है तथा ऋणावेश पर विपरीत दिशा में होता है।

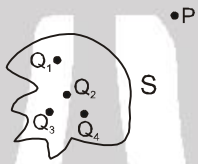
(vi) यह अध्यारोपण सिद्धान्त का पालन करता है। किसी बिन्दु पर किसी आवेश निकाय के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता आवेशों के कारण क्षेत्र तीव्रताओं के सदिश योग के बराबर होती है।

अर्थात् $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots .$

(vii) यह स्त्रोत आवेश द्वारा उत्पन्न होती है। किसी बिन्दु पर विद्युत क्षैत्र का मान तब तक स्थिर रहेगा है, जब तक की हम स्त्रोत आवेशों का वितरण परिवर्तित न कर दें।

Solved Examples

Example 20. बिन्दुवत आवेशों वाले किसी निकाय S के कारण P बिन्दु पर स्थित $-3\mu C$ आवेश द्वारा अनुभव किया गया बल $\vec{F} = (21\hat{i} + 9\hat{j})\mu N$ है।



(i) S के कारण P बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

(ii) अब यदि $-3\mu C$ को हटाकर बिन्दु P पर 2 μC आवेश रख दिया जाये तो इसके द्वारा अनुभव किया गया बल होगा –

Solution : (i) $\vec{F} = q\vec{E}$

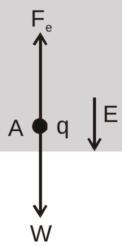
$(21\hat{i} + 9\hat{j})\mu N = -3\mu C(\vec{E}) \Rightarrow \vec{E} = -7\hat{i} - 3\hat{j}\ \frac{N}{C}$

(ii) चूंकि स्रोत आवेश विस्थापित नहीं हुये हैं। इसलिए 'P' पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता वही रहेगी।

$\vec{F}_{2\mu C} = +2(\vec{E}) = 2(-7\hat{i} - 3\hat{j}) = (-14\hat{i} - 6\hat{j})\ \mu N$

Example 21. $-10\ \mu c$ आवेश व 10 mg द्रव्यमान वाले एक कण के भार को सन्तुलित करने के लिए पर्याप्त विद्युत क्षेत्र की तीव्रता की गणना कीजिए।

Solution : विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में आवेश q पर बल



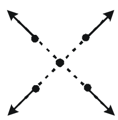
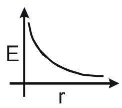
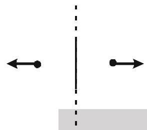
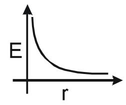
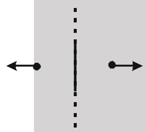
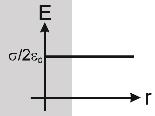
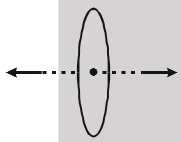
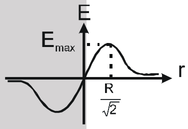
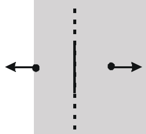
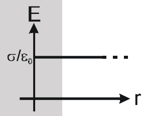
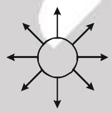
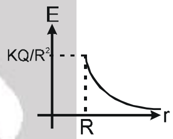
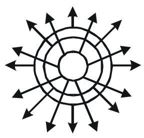
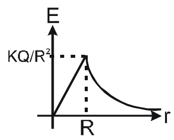
$\vec{F}_q = q\vec{E}$

अतः प्रश्नानुसार $|\vec{F}_q| = |\vec{W}|$ (W = कण का भार)

i.e., $|q|E = mg$

अर्थात् $E = \frac{mg}{|q|}$ = 10 N/C., नीचे की ओर

विभिन्न आवेश वितरणों के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रताऐं सारणी में दी गयी हैं।

नाम/प्रकार	सूत्र	नोट	ग्राफ
बिन्दु आवेश 	$\vec{E}=\frac{Kq}{\|\vec{r}\|^2}\cdot\hat{r}$	* q स्त्रोत आवेश है. * $\vec{r}$ स्त्रोत आवेश से परीक्षण आवेश की ओर स्थिति सदिश है असमरूप विद्युत क्षेत्र, धनावेश के कारण त्रिज्यीय बाहर की ओर तथा ऋणावेश के कारण अंदर की ओर	
अनन्त लम्बाई का रेखीय आवेश 	$\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}=\frac{2K\lambda\hat{r}}{r}$	* λ रेखिक आवेश घनत्व है (एक समान मानिए) * r बिन्दु की रेखिक आवेश से लम्बवत् दूरी है। * r स्त्रोत आवेश से परीक्षण आवेश की ओर त्रिज्यीय एकांक सदिश है।	
अनन्त विस्तार की पतली कुचालक प्लेट 	$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}$	* σ, पृष्ठ आवेश घनत्व है। (समरूप मानना है।) * $\hat{n}$ अभिलम्ब इकाई सदिश है * विद्युत क्षेत्र तीव्रता, दूरी पर निर्भर नहीं करती है।	
एक समान रूप से आवेशित वलय 	$E=\frac{KQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$ $E_{centre}=0$	* Q, वलय का कुल आवेश है। * x = वलय के केन्द्र से अक्ष पर स्थित बिन्दु की दूरी * विद्युत क्षेत्र सदैव अक्ष के अनुदिश होता है।	
अनन्त विस्तार की आवेशित चालक प्लेट 	$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$	* σ पृष्ठ आवेश घनत्व है। (एक समान मानिये) * $\hat{n}$ अभिलम्ब इकाई सदिश है। * विद्युत क्षेत्र की तीव्रता दूरी पर निर्भर नहीं करती है	
एक समान रूप से आवेशित खोखला चालक/ कुचालक ठोस चालक गोला 	(i) $r \geq R$ के लिए $\vec{E}=\frac{kQ}{\|\vec{r}\|^2}\hat{r}$ (ii) $r < R$ के लिए $E = 0$	* R, गोले की त्रिज्या है * $\vec{r}$ गोले के केन्द्र से बिन्दु तक सदिश है। * गोले के बाहर स्थित बिन्दुओं के लिये गोला, केन्द्र पर रखे बिन्दु आवेश की भांति व्यवहार करता है। * $\vec{E}$ सदैव त्रिज्य दिशा में है। * Q कुल आवेश ($=\sigma 4\pi R^2$) है। (σ = पृष्ठ आवेश घनत्व)	
एक समान रूप से आवेशित ठोस कुचालक गोला (कुचालक पदार्थ) 	(i) $r \geq R$ के लिए $\vec{E}=\frac{kQ}{\|\vec{r}\|^2}\hat{r}$ (ii) $r \leq R$ के लिए $\vec{E}=\frac{kQ}{R^3}\vec{r}$	* $\vec{r}$ गोले के केन्द्र से बिन्दु तक सदिश है। * बाहर स्थित बिन्दुओं के लिये गोला, केन्द्र पर रखे आवेश की भांति व्यवहार करता है। * $\vec{E}$ सदैव त्रिज्य दिशा में है। * Q कुल आवेश ($\rho.\frac{4}{3}\pi R^3$). ρ = आयतन आवेश घनत्व) * गोले के अन्दर $E \propto r$. * गोले के बाहर $E \propto 1/r^2$.	

Example 22. B($\sqrt{2}$ m, 0, 1m) बिन्दु पर स्थित –20μC बिन्दु आवेश के कारण बिन्दु A (0, 1m, 2m) पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

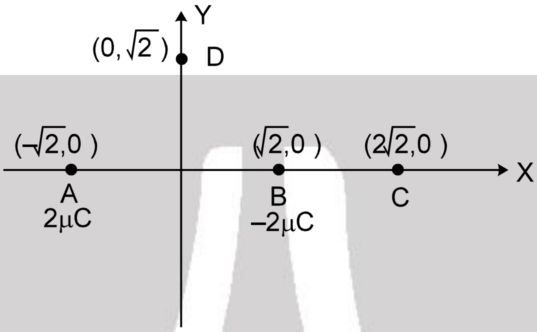
Solution : $E = \frac{KQ}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = \frac{KQ}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$

$\vec{r}$ = P.V. of A – P.V. of B (P.V. = स्थिति सदिश) = $(-\sqrt{2}\ \hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

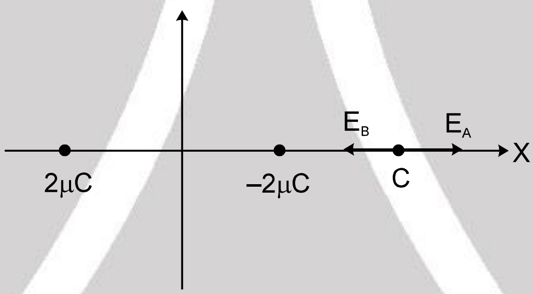
$|\vec{r}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2 + (1)^2} = 2$

$E = \frac{9\times10^9 \times (-20\times10^{-6})}{8}\ (-\sqrt{2}\ \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = -22.5 \times 10^3\ (-\sqrt{2}\ \hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ N/C.

Example 23. दो बिन्दु आवेश 2μc व – 2μc चित्र में दर्शाये अनुसार बिन्दु A व B पर रखे हुए हैं। C व D बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए। [सभी दूरियाँ मीटर में मापी जाती हैं।]



Solution : C पर विद्युत क्षेत्र (E_A व E_B केवल परिमाण है व तीर के चिन्ह दिशा को व्यक्त करते हैं।)

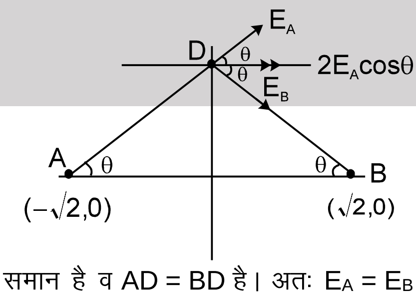


धनात्मक आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र इससे दूर जबकि ऋणात्मक आवेश के कारण यह आवेश की ओर होता है। यह स्पष्ट है कि $E_B > E_A$

$\therefore$ $E_{नेट} = (E_B - E_A)$ ऋणात्मक X-अक्ष की ओर

$= \frac{K(2\mu c)}{(\sqrt{2})^2} - \frac{K(2\mu c)}{(3\sqrt{2})^2}$ ऋणात्मक X-अक्ष की ओर $= 8000\ (-\hat{i})$ N/C

D पर विद्युत क्षेत्र :



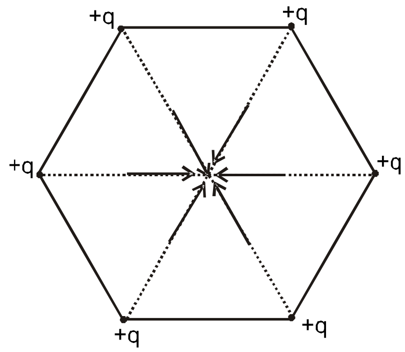
चूंकि आवेशों के परिमाण समान है व AD = BD है। अतः $E_A = E_B$

$\vec{E}_A$ व $\vec{E}_B$ के ऊर्ध्वाधर घटक एक दूसरे को निरस्त कर देते हैं।

जबकि क्षैतिज घटक एक ही दिशा में हैं।

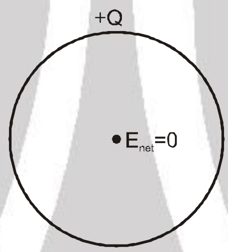
अतः $E_{नेट} = 2E_A \cos\theta = \frac{2.K(2\mu c)}{2^2}\cos 45° = \frac{K\times10^{-6}}{\sqrt{2}} = \frac{9000}{\sqrt{2}}\hat{i}$ N/C.

Example 24 किसी नियमित षटकोण के सभी किनारो पर छः आवेश स्थित है। केन्द्र पर E ज्ञात करो।



Solution : शून्य (सममिती से)

समान आवेशित वलय के कारण केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र :



Note : (i) **चालक पर कुल आवेश केवल चालक के बाह्य पृष्ठ पर ही रहता है। इस गुण पर चालक के लेख (लेख न.17) में चर्चा की जायेगी।**

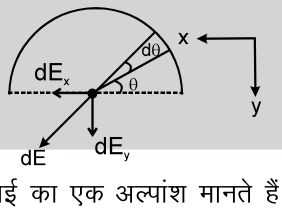
(ii) **विलगित गोलीय चालक की सतह पर आवेश एक समान रूप से वितरित रहता है।**

6.3 समान आवेशित वलय तथा चाप के कारण विद्युत क्षेत्र

Solved Examples

Example 25. रेखिक आवेश घनत्व λ व R त्रिज्या की एक समान रूप से आवेशित अर्धवृत्ताकार वलय के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिये।

Solution : λ = रेखिक आवेश घनत्व तथा चाप असंख्य बिन्दुवत् आवेशों का एक संग्रह है।



वलय के एक भाग को $Rd\theta$ लम्बाई का एक अल्पांश मानते हैं जो वलय के केन्द्र पर $d\theta$ कोण बनाता है तथा यह θ व $\theta + d\theta$ के बीच आता है।

$\vec{dE} = dE_x\hat{i} + dE_y\hat{j}$

$E_x = \int dE_x = 0$ (सममिती के कारण)

$E_y = \int dE_y = \int_0^{\pi} dE\sin\theta$

$E_y = \frac{K\lambda}{R}\int_0^{\pi}\sin\theta.d\theta = \frac{2K\lambda}{R}$

Example 26. रेखिक आवेश घनत्व λ व R त्रिज्या की समान रूप से आवेशित एक वृत्ताकार चाप (चौथाई वलय) के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

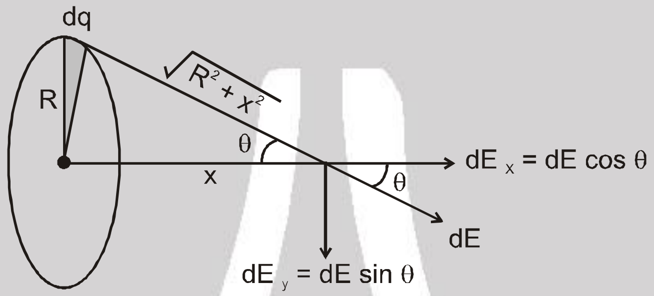
Solution : पिछली समीकरण

$\vec{dE} = dE_x\hat{i} + dE_y\hat{j}$ के अनुसार हल करने पर

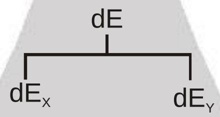
$E_{net} = \frac{K\lambda}{R}(\hat{i}+\hat{j})$,

सममित का उपयोग करके और आधी वलय द्वारा विद्युत क्षेत्र के सूत्र से इसका जवाब दिया जा सकता है।

(ii) समान आवेशित R त्रिज्या की वलय, जिसका मूल आवेश Q है के अक्ष पर केन्द्र से x दूरी पर किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना–.

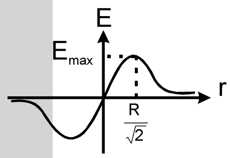


आवेश dq का कोई अवयव मानते है इस अवयव के कारण अक्ष पर केन्द्र से x दूरी पर किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र dE है। इस विद्युत क्षेत्र के दो घटक है।



सभी अवयवों के कारण विद्युत क्षेत्र का y-घटक, एक–दूसरे को निरस्त कर देंगे। अतः इस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, केवल सभी अवयवों के x-घटक के कारण होगा।

$E_{net} = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \int_0^Q \frac{K(dq)}{R^2+x^2} \times \frac{x}{\sqrt{R^2+X^2}}$



$E_{net} = \frac{KQx}{[R^2+x^2]^{3/2}}$

E व r के मध्य ग्राफ

E अधिकतम होगा जब $\frac{dE}{dx} = 0$, जो कि $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ पर है और $E_{max} = \frac{2KQ}{3\sqrt{3}\,R^2}$

Case (i) : यदि $x >> R$, $E = \frac{KQ}{x^2}$ अतः वलय एक बिन्दु आवेश की तरह कार्य करेगी।

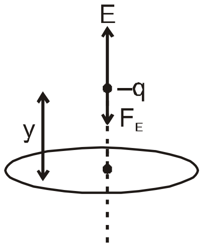
Case (ii) : यदि $x << R$, $E = \frac{KQ\,x}{R^3}$

Solved Examples

Example 27 a त्रिज्या की एक वृत्ताकार वलय पर धनावेश Q एक समान रूप से वितरित है। m द्रव्यमान व ऋणावेश –q वाला एक बिन्दुवत् कण वलय की अक्ष के अनुदिश केन्द्र से y दूरी पर स्थित है। यदि इसे वहाँ से छोड़ा जाता है, तो कण पर लगने वाला बल ज्ञात कीजिए। y << a मानते हुए कण के दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए (गुरूत्व को नगण्य मानें)

Solution : जब ऋणावेश को वलय की अक्ष के अनुदिश केन्द्र से x दूरी पर विस्थापित किया जाता है। तो वलय के कारण ऋणावेश पर लगने वाला बल $F_E = qE$ (केन्द्र की ओर)

$$= q\left[\frac{KQy}{(a^2+y^2)^{3/2}}\right]$$



यदि a >>y तब $a^2 + y^2 \simeq a^2$

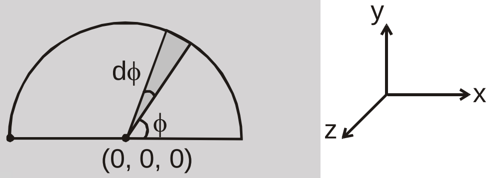
$$\therefore \quad F_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qqy}{a^3} \quad \text{(केन्द्र की ओर)}$$

चूंकि प्रत्यानयन बल $F_E \propto y$, इसलिए कण की गति सरल आवर्त गति होगी। स०आ०गति का आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)}} = \left[\frac{16\pi^3\varepsilon_0 m a^3}{Qq}\right]^{1/2}$$

Example 28. आधी वलय जिस पर कुल आवेश Q, समान रूप से वितरित है, के अक्ष पर किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करो। आधीवलय की त्रिज्या R है।

Solution : चित्रानुसार कोण ϕ पर छोटा अवयव $d\phi$ मानते हैं। इस अवयव के निर्देशांक : $(R\cos\phi, R\sin\phi, 0)$
बिन्दु के निर्देशांक : (0, 0, x)
अब इस अवयव के कारण विद्युत क्षेत्र :



$$\overrightarrow{dE} = \frac{K(\lambda R d\phi)\cdot[-R\cos\phi\hat{i} - R\sin\phi\hat{j} + x\hat{k}]}{(R^2\cos^2\phi + R^2\sin^2\phi + x^2)^{3/2}}$$

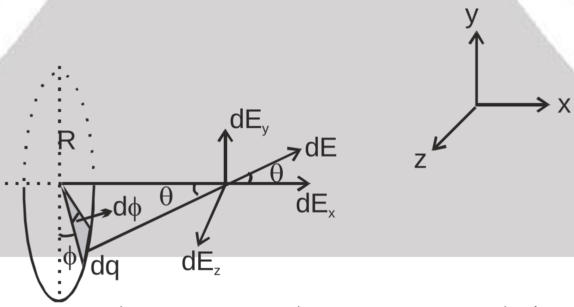
$$\Rightarrow \quad E_x = \Sigma dE_x = -\int_0^{\pi}\frac{K\lambda R^2\cos\phi d\phi}{(R^2+x^2)^{3/2}} = 0$$

$$E_y = \Sigma dE_y = -\int_0^{\pi}\frac{K\lambda R^2\sin\phi d\phi}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2K\lambda R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{2KQR}{\pi(R^2+x^2)^{3/2}}$$

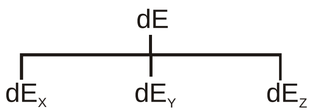
$$E_z = \Sigma dE_z = \int_0^{\pi}\frac{K\lambda Rx d\phi}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{KQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$E_{net} = \sqrt{E_x^2+E_y^2+E_z^2} = \frac{KQ}{(R^2+x^2)^{3/2}}\sqrt{\frac{4R^2}{\pi^2}+x^2}$$

Alternate solution



आधी वलय की परिधि पर, कोण ϕ पर dq आवेश का अवयव मानते हैं। इस अवयव के कारण अक्ष पर किसी बिन्दु, जो कि वलय के केन्द्र से x दूरी पर है, विद्युत क्षेत्र dE है। इस विद्युत क्षेत्र को तीन घटकों में विभाजित कर सकते हैं।



$$E_Z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE\sin\theta\sin\phi = 0$$

$E_X = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE\cos\theta = \frac{KQx}{[R^2+x^2]^{3/2}}$ ....(1)

$E_Y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE\sin\theta\cos\phi = \int \frac{Kdq}{R^2+x^2}\sin\theta.\cos\phi = \frac{2K\lambda R\sin\theta}{R^2+x^2}$ .... (2)

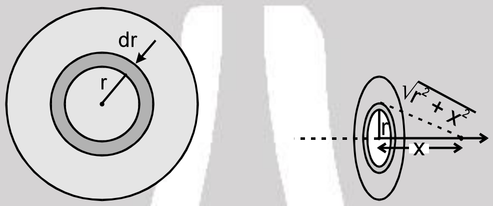
$dq = \lambda R d\phi$, $\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$

$\Rightarrow E_{net} = \sqrt{E_X^2 + E_Y^2}$

Example 29 बिन्दु 'P' पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिये जो σ पृष्ठ आवेश घनत्व व R त्रिज्या की एक समान रूप से आवेशित चकती के अक्ष पर x दूरी पर स्थित है। निम्न विशेष परिस्थितियों के लिये भी परिणाम व्युत्पन्न कीजिये।

(i) $x >> R$ व (ii) $x << R$

Solution : चकती को असंख्य संकेन्द्रीय वलयों का संग्रह माना जा सकता है। त्रिज्या r व dr चौड़ाई की वलय की आकृति का एक अल्पांश लें। इस वलय के कारण P पर विद्युत क्षेत्र है।



$dE = \frac{K.\sigma 2\pi r.dr.x}{(r^2+x^2)^{3/2}}$

$r^2 + x^2 = y^2$ रखने पर

$2rdr = 2ydy$

$dE = \frac{K.\sigma 2\pi y.dy.x}{y^3} = 2K\sigma\pi.x\ \frac{ydy}{y^3}$

सभी वलयों के कारण P पर विद्युत क्षेत्र अक्ष के अनुदिश है :

$\therefore\ E = \int dE \quad \Rightarrow E = 2K\sigma\pi x \int_x^{\sqrt{R^2+x^2}} \frac{1}{y^2}dy = 2K\rho\pi x.\left[-\frac{1}{y}\right]_x^{\sqrt{R^2+x^2}}$

$= 2K\sigma\pi x\left[+\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right] = 2K\sigma\pi\left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]$, अक्ष के अनुदिश

स्थिति : (i) यदि $x >> R$

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{x\sqrt{\frac{R^2}{x^2}+1}}\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2}\right]$

$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}\right.$ + उच्च कोटि के पद$\left.\right] = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R^2}{x^2} = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

अर्थात् चकती का व्यवहार बिन्दुवत् आवेश की भांति है।

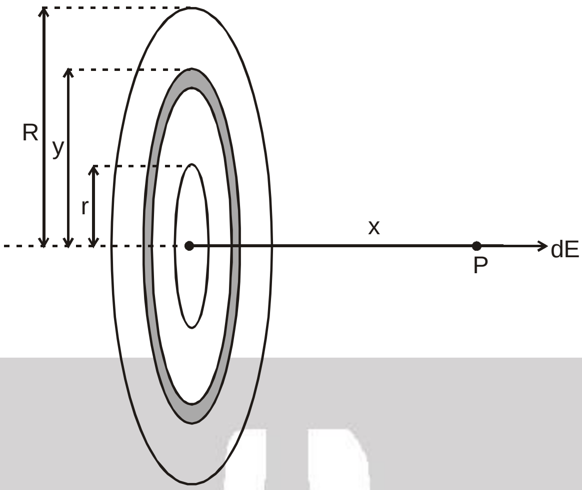
(ii) यदि $x << R$

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[1 - 0] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

अर्थात् चकती का व्यवहार अनन्त प्लेट की भांति है।

Example 30 समान आवेशित चकती, जिसका क्षेत्रफल घनत्व σ और त्रिज्या R है के केन्द्र से x दूरी पर किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करो? चकती में सकेन्द्रीय r त्रिज्या का एक छेद भी है।

Solution : $y(r < y < R)$ त्रिज्या की dy चौड़ाई की, सकेन्द्रीय तथा चकती के समतल में एक वलय मानते है। इस वलय के कारण किसी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र :



$$dE = \frac{K(dq)x}{[X^2 + Y^2]^{3/2}}$$

$$E_{net} = \int_r^R \frac{Kx.\sigma(2\pi y)dy}{[x^2 + y^2]^{3/2}} \qquad [\because dq = \sigma 2\pi y dy]$$

$$E_{net} = \frac{2\pi\sigma kx}{2} \int_{x^2+r^2}^{x^2+R^2} \frac{dt}{t^{3/2}}$$ रखने पर $x^2 + y^2 = t$, $2y.\, dy = dt$

$$= \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$ केन्द्र से दूर

Alternate method

हम इस प्रश्न को अध्यारोपण सिद्धान्त से भी हल कर सकते है।

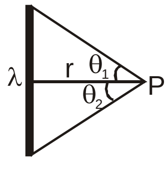
(i) बिना छेद की, R त्रिज्या और क्षेत्रफल आवेश घनत्व $+\sigma$ की एक चकती मानते है।

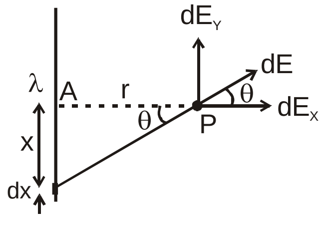
(ii) पहली चकती के समतल में ही सकेन्द्रीय r त्रिज्या और क्षेत्रफल आवेश घनत्व $-\sigma$ वाली एक ओर चकती मानते है।

$$\vec{E}_{net} = \vec{E}_R + \vec{E}_r = \frac{\sigma\ \ x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]$$ केन्द्र से दूर

6.4 समान आवेशित तार के कारण विद्युत क्षेत्र

(i) परिमित लम्बाई के कारण रेखीय आवेश : समान रेखीय आवेश घनत्व λ वाले, परिमित आकार के रेखीय आवेश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के व्यंजन को व्युत्पन्न करते हैं। रेखीय आवेश से बिन्दु की लम्बवत् दूरी r है ओर रेखीय आवेश विभाजन के अन्तिम किनारों को मिलाने वाली रेखा, लम्बवत् रेखा से θ_1 और θ_2 कोण बनाती है।

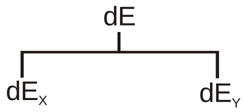




रेखीय आवेश वितरण के बिन्दु A से, x दूरी पर छोटा अवयव dx मानते हैं। इस अवयव का आवेश $dq = \lambda dx$. है। इस आवेश के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता dE है।

तब $dE = \dfrac{K(dq)}{r^2 + x^2} = \dfrac{K(\lambda dx)}{r^2 + x^2}$

इस क्षेत्र के दो घटक होंगे–



$E_x = \int dE_x = \int dE \cos\theta = \int \dfrac{K\lambda dx}{r^2 + x^2} . \cos\theta$

माना $x = r\tan\theta \Rightarrow dx = r\sec^2\theta .\, d\theta$ So $E_x = \displaystyle\int_{-\theta_2}^{+\theta_1} \dfrac{K \quad \lambda r \sec^2\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta}{r^2 + r^2\tan^2\theta}$

$= \dfrac{K\lambda}{r} \displaystyle\int_{-\theta_2}^{+\theta_1} \cos\theta . d\theta = \dfrac{K\lambda}{r} [\sin\theta_1 + \sin\theta_2]$ .....(1)

इसी तरह y-घटक

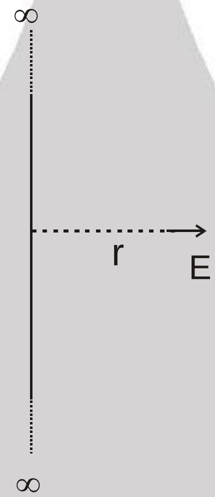
$E_y = \dfrac{K\lambda}{r} \displaystyle\int_{-\theta_2}^{+\theta_1} \sin\theta . d\theta = \dfrac{K\lambda}{r} [\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$

इस बिन्दु पर कुल विद्युत क्षेत्र $E_{net} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$

(ii) अनन्त लम्बाई के रेखीय आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र परिमाण का व्युत्पन्न :

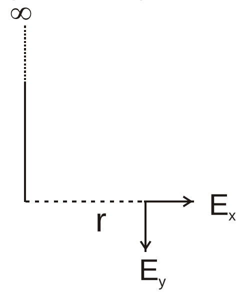
समीकरण (1) & (2) में $\theta_1 = \theta_2 = 90^o$ रखने पर हमें आवश्यक परिणाम मिल जाता है।

$E_{net} = E_x = \dfrac{2K\lambda}{r}$



(iii) आधे अनन्त तार के लिये

$\theta_1 = 90^o$ तथा $\theta_2 = 0^o$ So, $E_x = \dfrac{K\lambda}{r}$, $E_y = \dfrac{K\lambda}{r}$

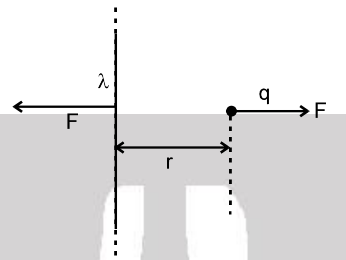


Solved Examples

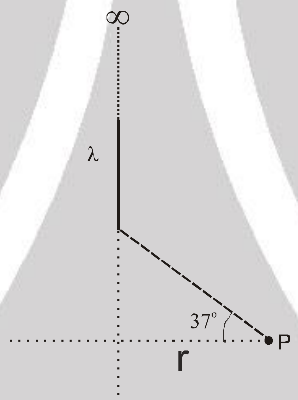
Example 31. एक समान रेखिक आवेश घनत्व λ वाली बहुत लम्बी, आवेशित डोरी से r दूरी पर एक बिन्दु आवेश q स्थित है। इस बिन्दु आवेश के कारण रेखिक आवेश द्वारा अनुभव किया गया कुल वैद्युत बल ज्ञात कीजिए। (गुरूत्व को नगण्य मानें।)

Solution : डोरी के कारण आवेश q पर बल $F = \left(\frac{2K\lambda}{r}\right).q$

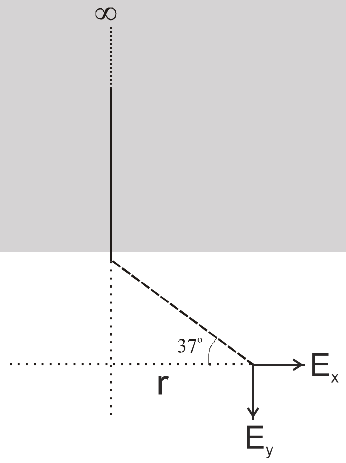
न्यूटन के तृतीय नियमानुसार प्रत्येक क्रिया की बराबर व विपरीत प्रतिक्रिया होती है। अतः डोरी पर बल = $\frac{2K\lambda}{r}.q$ (बिन्दु आवेश से दूर)



Example 32 बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करो।

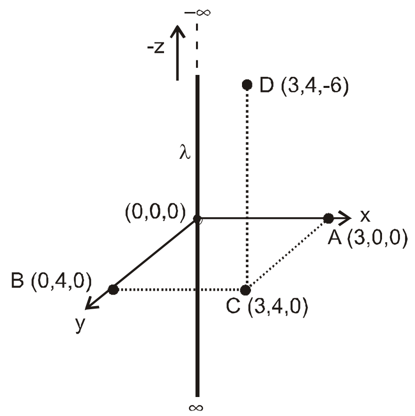


Solution : $\theta_1 = 90^o$ और $\theta_2 = 360^o + 37^o$

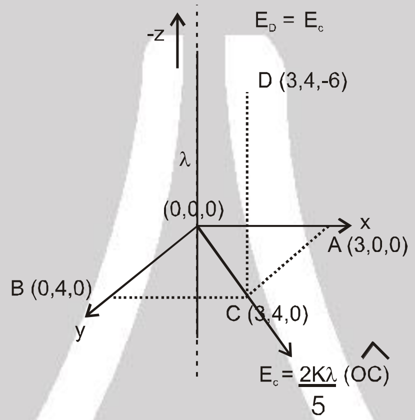


so $E_x = \frac{K\lambda}{r}[\sin\theta_1 + \sin\theta_2]$; $E_y = \frac{K\lambda}{r}[\cos\theta_2 - \cos\theta_1]$

Example 33 अनन्त समान आवेशित तार, जिसका रेखीय आवेश घनत्व λ है और z-अक्ष के अनुदिश रखा है में बिन्दु A, B, C, D पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करो।



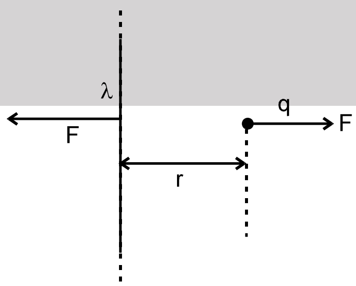
Solution :



$$E_A = \frac{2K\lambda}{3}(\hat{i}) \Rightarrow E_B = \frac{2K\lambda}{4}(\hat{j}) \; ; \; E_C = \frac{2K\lambda}{5}\widehat{OC} = \frac{2K\lambda}{5}\left(\frac{3\hat{i}+4\hat{j}}{5}\right) \Rightarrow E_D = E_C$$

Example 34 एक समान रेखिक आवेश घनत्व λ वाली बहुत लम्बी, आवेशित डोरी से r दूरी पर एक बिन्दु आवेश q स्थित है। इस बिन्दु आवेश के कारण रैखिक आवेश द्वारा अनुभव किया गया कुल वैद्युत बल ज्ञात कीजिए। (गुरूत्व को नगण्य मानें।)

Solution : डोरी के कारण आवेश q पर बल $F = \left(\frac{2K\lambda}{r}\right).q$

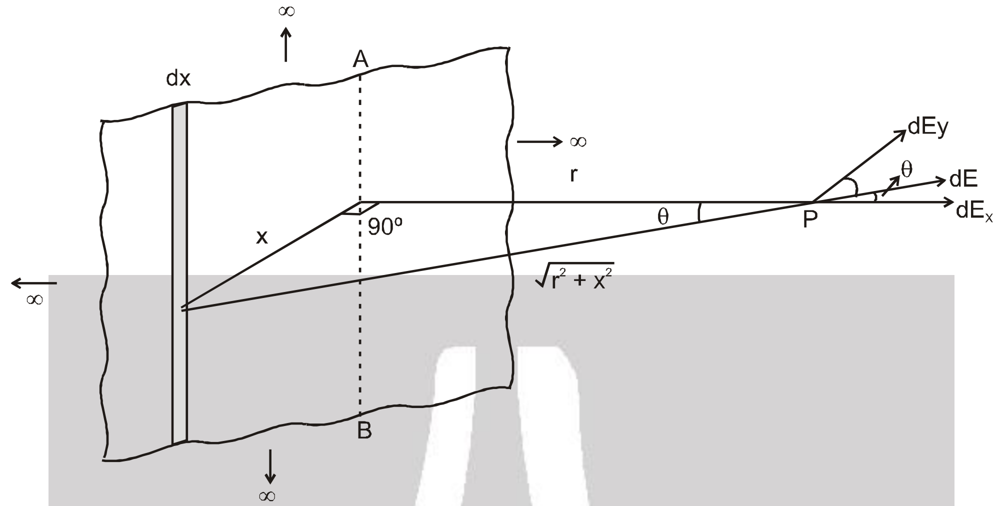


न्यूटन के तृतीय नियमानुसार प्रत्येक क्रिया की बराबर व विपरीत प्रतिक्रिया होती है। अतः डोरी पर बल $= \frac{2K\lambda}{r}.q$ (बिन्दु आवेश से दूर)

6.5 समान आवेशित अनन्त परत के कारण विद्युत क्षेत्र

$E_{net} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$ लम्बवत् दिशा में

अनन्त लम्बाई के समरूप आवेशित परत के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता



एक अनन्त लम्बाई की समरूप आवेशित परत लेते हैं जिसका पृष्ठ आवेश घनत्व σ = (आवेश / क्षेत्रफल) हैं। हमे इस परत से लम्बवत् दूरी '**r**' पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना है।

इसके लिये हम इस परत को पतली लम्बवत् छड़ों में विभाजित करते हैं। चित्रानुसार एक dx चौड़ाई की पतली छड़ मध्य रेखा AB से, x दूरी पर लेते हैं। पतली छड़ को एक अनन्त रेखीय आवेश (आवेशित तार) मान सकते हैं। अतः इस पतली छड़ के कारण किसी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र है :

$$dE = \frac{2k\lambda}{(\text{छड से बिन्दु P की सीधी दूरी})}$$

जहाँ λ = (आवेश / लम्बाई) छड़ का = $\dfrac{\text{छड का आवेश}}{\text{छड की लम्बाई}} = \lim\limits_{\ell \to \infty} \dfrac{\sigma(\ell dx)}{\ell} = \sigma\, dx$

अतः $dE = \dfrac{2k(\sigma dx)}{\sqrt{r^2 + x^2}}$

अब dE के घटक, dE cosθ और dE sinθ है।

यदि हम दूसरी समान छड़, दूसरी ओर लेते हैं, तो dE sinθ घटक, विपरीत दिशा में होगा।

अतः dE sinθ वाले घटक परस्पर निरस्त हो जायेगे और dE cosθ वाले घटक परस्पर जुड़ जाते हैं।

अतः बिन्दु P पर

$$E_{net} = \int dE\cos\theta \text{ लम्बवत् दिशा में}$$

$$E_{net} = \int_{x\to-\infty}^{x\to\infty} \frac{2k(\sigma dx)}{\sqrt{r^2+x^2}} \times \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}} \quad \Rightarrow \quad E_{net} = 2 \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}(\sigma r)\int_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} \frac{dx}{r^2+x^2}$$

$$E_{net} = \frac{\sigma r}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r}\tan^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)\right)_{x\to-\infty}^{x\to\infty} \quad \Rightarrow \quad E_{net} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$$

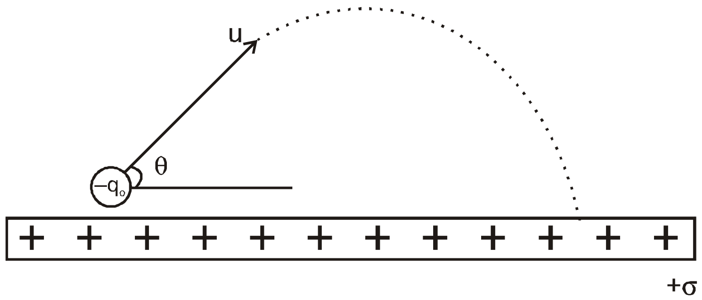
$$E_{net} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \text{ लम्बवत् दिशा की ओर}$$

Note : (i) विद्युत क्षेत्र की दिशा सदैव आवेशित परत के लम्बवत् होती है।

(ii) अपरिमित (अनन्त) समरूप आवेशित परत के कारण विद्युत क्षेत्र समान होता है, यह दूरी पर निर्भर नहीं करता।

Solved Examples

Example 35 एक पृष्ठ आवेश घनत्व + σ की अपरिमित प्लेट क्षैतिज xy तल में रखी है। एक $-q_0$ आवेश और द्रव्यमान m वाले कण को तल से u वेग से क्षैतिज के साथ θ कोण बनाते हुये, प्रक्षेपित किया जाता है, तब निम्न को ज्ञात करो?

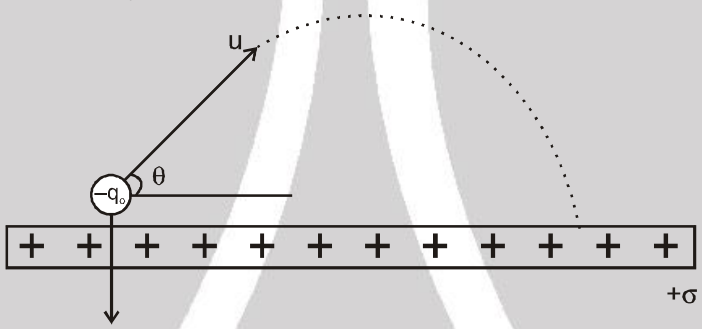


(i) कण द्वारा प्लेट पर वापस पहुचने में लगा समय।

(ii) कण कितनी अधिकतम ऊचांई तक पहुँचेगा।

(iii) यह प्लेट को कितनी दूरी पर आकर टकरायेगा। (कण पर लगने वाले गुरूत्वीय बल को नगण्य मानना है।)

Solution : कण पर लगने वाला विद्युत बल $F = q_0E$



$F = q_o E = (q_o)(\frac{\sigma}{2\varepsilon_o})$

$F = (q_0)\left(\dfrac{\sigma}{2e_o}\right)$ (नीचे की ओर)

अतः, कण का त्वरण $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{q_o\sigma}{2\varepsilon_o m}$ = समान

यह त्वरण 'g' (गुरूत्वीयत्वरण के समान काम करता है।)

अतः, कण प्रक्षेप्य गति करेगा।

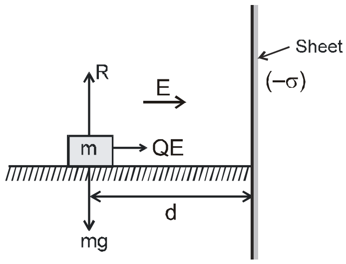
(i) $T = \dfrac{2u\sin\theta}{g} = \dfrac{2u\sin\theta}{\left(\dfrac{q_o\sigma}{2\varepsilon_o m}\right)}$ (ii) $H = \dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g} = \dfrac{u^2\sin^2\theta}{2\left(\dfrac{q_o\sigma}{2\varepsilon_o m}\right)}$

(iii) $R = \dfrac{u^2\sin 2\theta}{g} = \dfrac{u^2\sin 2\theta}{\left(\dfrac{q_o\sigma}{2\varepsilon_o m}\right)}$

Example 36 एक m द्रव्यमान तथा Q आवेश के ब्लॉक को एक स्थिर लम्बी कुचालक अनन्त चादर जिस पर आवेश घनत्व $-\sigma$ है, से d दूरी पर घर्षण रहित तल पर चित्रानुसार रखा है। ब्लॉक की गति की व्याख्या कीजिये, यह मानते हुए की ब्लॉक तथा चादर के मध्य टक्कर पूर्णतया प्रत्यास्थ है। क्या गति स.आ.ग. है ?

Solution : स्थिति को चित्र में दर्शाया गया है। चादर द्वारा उत्पन्न किये गये विद्युत क्षेत्र के कारण ब्लॉक चादर की ओर त्वरित होता है। त्वरण एक समान होगा क्योंकि चादर के कारण विद्युत क्षेत्र E एक समान है।

$a = \frac{F}{m} = \frac{QE}{m}$, जहां $E = \sigma/2\varepsilon_0$



प्रारम्भ में ब्लॉक विरामावस्था में है तथा त्वरण नियत है, गति की दूसरी समीकरण से ब्लॉक को दीवार तक पहुँचने में लगा समय

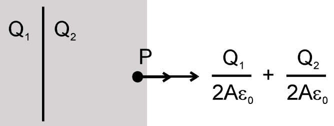
$d = \frac{1}{2}at^2$ i.e., $t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2md}{QE}} = \sqrt{\frac{4md\varepsilon_0}{Q\sigma}}$

क्योंकि दीवार के साथ टक्कर प्रत्यास्थ है। इसलिए ब्लॉक उसी समान चाल से विपरीत दिशा में चलेगा तथा अब इसकी गति त्वरण के विपरीत है, यह समान दूरी L समान समय t में रूकेगा। अब यह दुबारा दीवार की ओर त्वरित गति करेगा अतः ब्लॉक दोलन गति करेगा जिसकी लम्बाई L तथा आवर्त काल $T = 2t = 2\sqrt{\frac{2md}{QE}} = 2\sqrt{\frac{4md\varepsilon_0}{Q\sigma}}$

क्योंकि प्रत्यानयन बल F = QE नियत है तथा विस्थापन x के समानुपाती नहीं है इसलिये गति सरल आवर्त गति नहीं है।

Example 37. यदि किसी विलगित अनन्त परत की एक सतह पर आवेश Q_1 है और दूसरी सतह पर आवेश Q_2 है। परत के सामने किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\frac{Q}{2A\varepsilon_O}$ होगी जहाँ $Q = Q_1 + Q_2$ है।

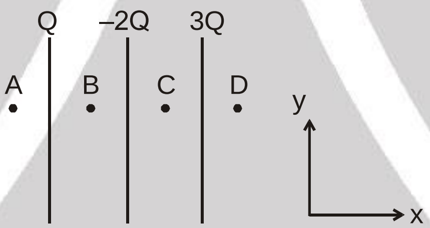
Solution : बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र :



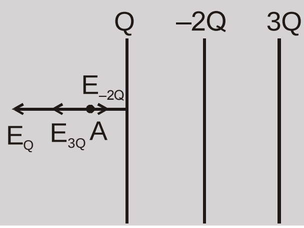
$\vec{E} = \vec{E}_{Q_1} + \vec{E}_{Q_2} = \frac{Q_1}{2A\varepsilon_0}\hat{n} + \frac{Q_2}{2A\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{Q_1 + Q_2}{2A\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{Q}{2A\varepsilon_0}\hat{n}$; $P \to \frac{Q_1}{2A\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{2A\varepsilon_0}$

[यह दर्शाता है कि परत के कारण परिणामी क्षेत्र केवल कुल आवेश पर निर्भर करता है और इस बात पर निर्भर नहीं करता है कि सतह विशेष पर आवेश का विभाजन किस प्रकार है।

Example 38. चित्रानुसार तीन बड़ी समान्तर चालक पट्टिकाएं एक दूसरे से परिमित दूरी पर रखी है। तो बिन्दु A, B, C तथा D पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करो ?

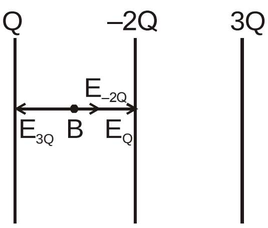


Solution : **बिन्दु A के लिए**



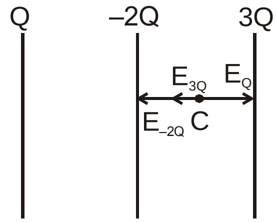
$\vec{E}_{net} = \vec{E}_Q + \vec{E}_{3Q} + \vec{E}_{-2Q} = -\frac{Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} - \frac{3Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} + \frac{2Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} = -\frac{Q}{A\varepsilon_0}\hat{i}$

बिन्दु B के लिए



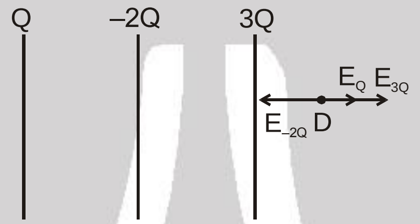
$$\vec{E}_{net} = \vec{E}_{3Q} + \vec{E}_{-2Q} + \vec{E}_{Q} = -\frac{3Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} + \frac{2Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} + \frac{Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} = 0$$

बिन्दु C के लिए



$$\vec{E}_{net} = \vec{E}_{Q} + \vec{E}_{3Q} + \vec{E}_{-2Q} = +\frac{Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} - \frac{3Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} - \frac{2Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} = -\frac{2Q}{A\varepsilon_0}\hat{i}$$

बिन्दु D के लिए

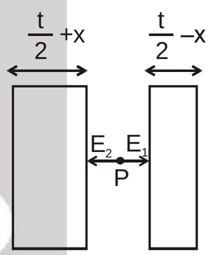


$$\vec{E}_{net} = \vec{E}_{Q} + \vec{E}_{3Q} + \vec{E}_{-2Q} = +\frac{Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} + \frac{3Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} - \frac{2Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}\hat{i}$$

Example 39. दर्शाइये की t मोटाई तथा ρ समरूप आयतन आवेश घनत्व वाली अचालक पट्टिका के कारण विद्युत क्षेत्र (सममित तल से) दूरी x का फलन है तथा इसका ग्राफ भी बनाइये।

(a) $x \le \frac{t}{2}$ (b) $x \ge \frac{t}{2}$

Solution : $\left(\frac{t}{2} - x\right)$ तथा $\left(\frac{t}{2} + x\right)$ मोटाई की दो पट्टिका मानते हैं। जब बिन्दु पट्टिका के अंदर हो।

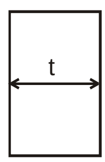


P बिन्दु पर कुल विद्युत क्षेत्र : $E = E_1 - E_2$

$= \frac{Q_1}{2A\varepsilon_0} - \frac{Q_2}{2A\varepsilon_0}$ [Q_1:बांयी पट्टिका पर आवेश ; Q_2 : दांयी पट्टिका पर आवेश]

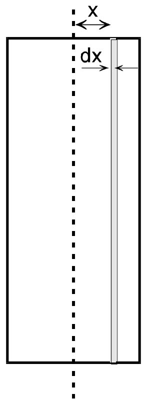
$$= \frac{A\rho\left(\frac{t}{2} + x\right) - \rho A\left(\frac{t}{2} - x\right)}{2A\varepsilon_0} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

पट्टिका के बाहरी बिन्दु के लिए हम t मोटाई की सम्पूर्ण पट्टिका को मानते हैं



$\longrightarrow \frac{Q}{2A\varepsilon_0}$

$$E = \frac{\sigma t A}{2A\varepsilon_0} = \frac{\sigma t}{2\varepsilon_0}$$



वैकल्पिक : हम यह मान सकते हैं कि चादर अधिक संख्या की पतली चादर से मिलकर बनी है। dx मोटाई की एक पतली पट्टिका मानते हैं। जिसकी सममित तल से दूरी x है।

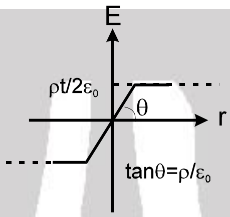
पट्टिका में आवेश = $\rho A dx$ (A : पट्टिका का क्षेत्र)

पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma = \frac{\rho A dx}{A}$

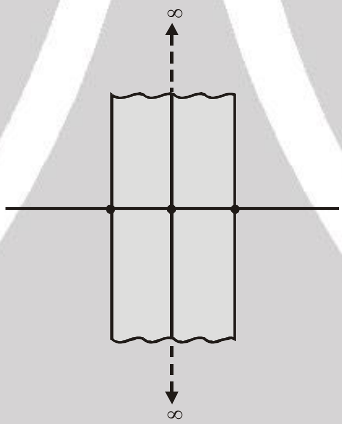
अतः अल्पांश पट्टिका के कारण वि. क्षे. की तीव्रता $dE = \frac{\rho dx}{2\varepsilon_0}$

(a) जब $x < \frac{t}{2}$ $\Rightarrow$ $E_{\text{नैट}} = \int_{-t/2}^{x} \frac{\rho dx}{2\varepsilon_0} - \int_{x}^{t/2} \frac{\rho dx}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$

(b) जब $x > \frac{t}{2}$; $E_{Net} = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\rho dx}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho t}{2\varepsilon_0}$



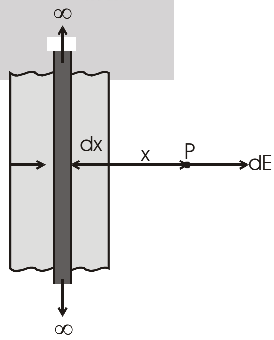
Example 40. पतली अनन्त परत जिसकी चौड़ाई w है और समान आवेश वितरण σ है। निम्न बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करो।



(a) किसी बिन्दु जो कि इसके एक किनारे से d दूरी पर समान तल में स्थित है।

(b) परत के तल के, सममित तल में परत से लम्बवत् दूरी d पर स्थित किसी बिन्दु पर

Solution : (a) dx चौड़ाई की एक पतली पट्‌टी मानते हैं।



इस पट्‌टी का रेखीय आवेश घनत्व :

$\lambda = \sigma dx$

अतः इस पट्‌टी के कारण किसी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र

$dE = \frac{2k\sigma dx}{x}$

$\therefore \quad E_{net} = \int_{d}^{d+w} \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{x} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \ell n\left(\frac{d+w}{d}\right)$

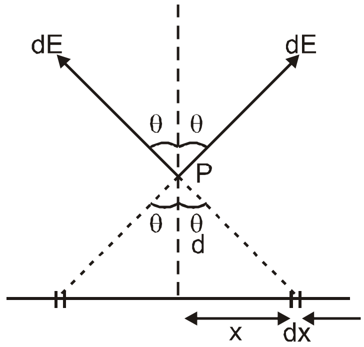
(b) dx चौड़ाई की एक पतली पट्टी मानते हैं।

पट्टी का रेखीय आवेश घनत्व : $\lambda = \sigma dx$

$\therefore \quad E_p = \int 2dE\cos\theta$

$$2.\int_0^{w/2}\frac{\sigma dx}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+x^2}}.\frac{d}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

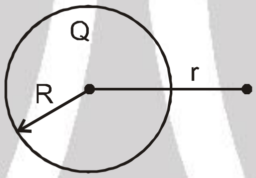
$$= \frac{\sigma d}{\pi\varepsilon_0}\int_0^{w/2}\frac{dx}{d^2+x^2} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\frac{w}{2d}$$



6.6 समान आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र

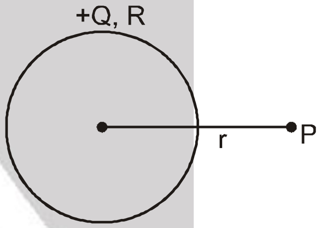
$E = \frac{KQ}{r^2}$; $r \ge R$ $\Rightarrow$ **बाहर स्थित बिन्दुओं और सतह पर स्थित बिन्दु के लिये समान आवेशित गोलीय कोश को केन्द्र पर स्थित बिन्दु आवेश के समान मान सकते हैं।**

$E = 0$; $r < R$



गोलीय कोश के बाहर विद्युत क्षेत्र, हमेशा रेखीय दिशा में होता है।

समरूप आवेशित गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र

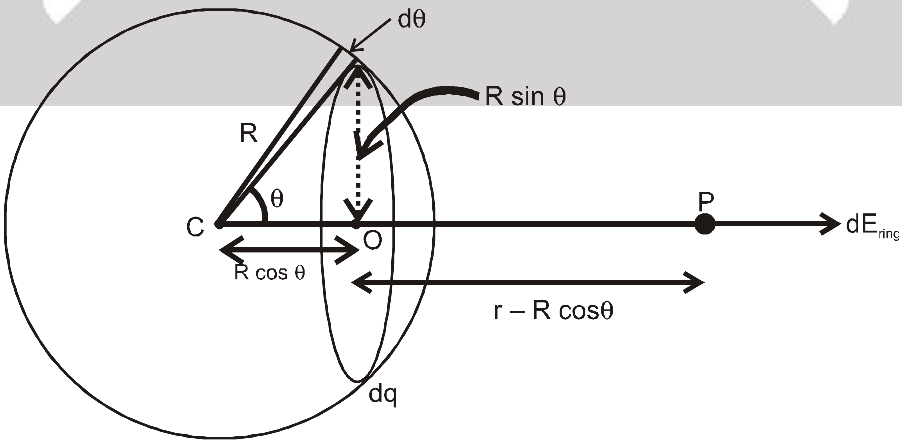


माना कि R त्रिज्या के गोलीय कोश में पृष्ठ पर +Q आवेश समान रूप से वितरित है। जिस बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना है, वह गोले के केन्द्र से 'r' दूरी पर है।

इसके लिये हम गोलीय कोश को पतली वलयों में विभाजित कर सकते हैं। माना एक वलय अक्ष के साथ θ कोण बनाते हुये लेते हैं और एक छोटा कोण dθ बनाते हैं।

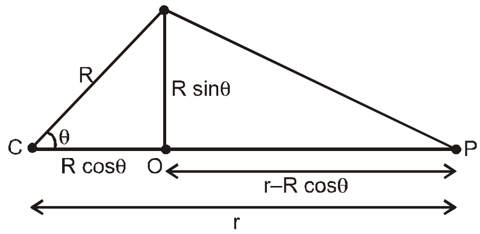
इस वलय की चौड़ाई Rdθ होगी (चाप = त्रिज्या × कोण = Rdθ).

जब बिन्दु गोलीय कोश के बाहर (r > R) स्थित है :



अवयवी वलय के कारण विद्युत क्षेत्र

$$dE = \frac{Kdqx}{[(\text{वलय की त्रिज्या})^2 + x^2]^{3/2}} \quad .....(1)$$



अतः, कुल विद्युत क्षेत्र $E_{net} = \int \frac{Kdqx}{[(\text{वलय की त्रिज्या})^2 + x^2]^{3/2}}$

इस अवयवी वलय की त्रिज्या = R sinθ

x = वलय से बिन्दु P की अक्षीय दूरी = r – R cos θ

अवयवी वलय का क्षेत्रफल = (लम्बाई) (चौड़ाई) = (2π (वलय की त्रिज्या)) Rdθ = (2πR sinθ)Rdθ

dq = अवयवी वलय का आवेश

अब ऐकिक नियम से dq निकाल सकते हैं।

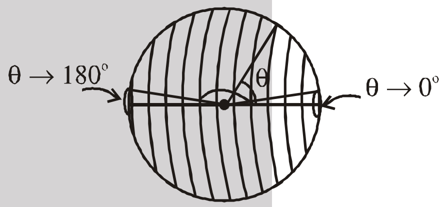
क्षेत्रफल $4\pi R^2$ में, आवेश Q है।

एकांक क्षेत्रफल, में आवेश $\frac{Q}{4\pi R^2}$.

अतः (2πR sinθ) Rdθ क्षेत्रफल में, आवेश = $\frac{Q}{4\pi R^2} \times (2\pi R \sin\theta)\, Rd\theta = dq$

x और dq का मान equation ..(1) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$E_{out} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{K\left(\frac{Q}{4\pi R^2} \times 2\pi(R\sin\theta)Rd\theta\right)(r - R\cos\theta)}{\left[(R\sin\theta)^2 + (r - R\cos\theta)^2\right]^{3/2}}$$



(पहली वलय θ = 0 कोण बनाती है और अन्तिम वलय θ = 180º कोण बनाती है।

अतः सीमा का मान θ = 0 से θ = 180º तक होगा।)

समाकलन के पद :

दिये गये समाकल से

$$E_{out} = \frac{KQ}{2}\int_0^{\pi} \frac{(r - R\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{3/2}}$$

माना $z^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta \quad \Rightarrow \quad 2\,zdz = 0 + 0 - 2Rr\,(-\sin\theta)\,d\theta \qquad \therefore \quad zdz = Rr\sin\theta\, d\theta$

एवं $\cos\theta = \frac{R^2 + r^2 - z^2}{zRr}$

जब $\theta = 0 \quad \rightarrow \quad z = (r - R)$

$\theta = \pi \quad \rightarrow \quad z = r + R$

$$E_{out} = \frac{KQ}{2}\int_{r-R}^{r+R} \frac{\left[r - R\frac{(R^2 + r^2 - z^2)}{2Rr}\right]\frac{zdz}{Rr}}{z^3} = \frac{KQ}{2}\int_{r-R}^{r+R} \frac{(zRr^2 - R^3 - Rr^2 + Rz^2)dz}{2R^2r^2z}$$

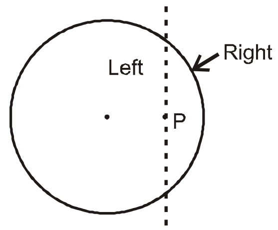
$$= \frac{KQ}{4R^2\ \ r^2}\left[\int_{r-R}^{r+R} \frac{Rr^2dz}{z^2} - \int_{r-R}^{r+R} \frac{R^3dz}{z^2} + \int_{r-R}^{r+R} Rdz\right] = \frac{KQ}{4R^2\ \ r^2}\left[-\frac{Rr^2}{z} + \frac{R^3}{z} + Rz\right]_{R-r}^{R+r}$$

इसे हल करने पर

$$E_{out} = \frac{KQ}{r^2} \quad \text{if } r > R$$

गोले के अन्दर स्थित बिन्दु के लिए

माना आवेशित ठोस गोले के अन्दर केन्द्र से r दूरी पर अभीष्ट बिन्दु 'P' स्थित है जिस पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना है। इसके लिए गोले को दो भागों में विभाजित करते हैं। बिन्दु 'P' के बायीं ओर स्थित वलयें, दायीं ओर विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करती हैं और दायीं ओर स्थित वलयें, बायीं ओर विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करती है। अतः $E_{net} = E_{right} - E_{left}$. इसके लिये, समाकलन की सीमा को दो भागों में विभाजित किया गया है।



$$E_{net} = \int_{\theta=0}^{\theta=\cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)} \begin{pmatrix}\text{दांयी ओर} \\ \text{स्थित वलयों} \\ \text{के कारण} \\ \text{विद्युत क्षेत्र}\end{pmatrix} - \int_{\theta=\cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)}^{\theta=\pi} \begin{pmatrix}\text{बांयी ओर} \\ \text{स्थित वलयों} \\ \text{ने काट} \\ \text{विद्युत क्षेत्र}\end{pmatrix}$$

As $z^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta$

जब $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{R^2 - r^2}$

जब $\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad z = R - r$

जब $\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad z = R + r$

प्रथम परिणाम से ओर केवल सीमाओं का परिवर्तित करने पर

$$E_{in} = \left[-\frac{Rr^2}{z} + \frac{R^3}{z} + Rz\right]_{R-r}^{\sqrt{R^2-r^2}} - \left[-\frac{Rr^2}{z} + \frac{R^3}{z} + Rz\right]_{\sqrt{R^2-r^2}}^{R+r}$$

इसे हल करने पर हमें विद्युत क्षेत्र प्राप्त होता है और यदि $r < R$, $E = 0$

कोश के कारण विद्युत क्षेत्र को समाकलन द्वारा प्राप्त करने पर method बहुत बड़ा होता है।

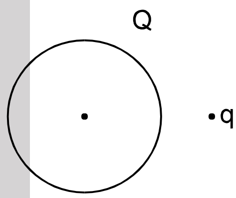
अतः हम इस method को उपयोग में नहीं लेंगे। दिया गया Hand-out केवल जानकारी के लिये है। गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र निकालने के लिए, गॉस प्रमेय का उपयोग करेंगे, जिसका अध्ययन हम बाद में करेंगे।

Solved Examples

Example 41. चित्र में R त्रिज्या तथा Q आवेश से समान रूप से आवेशित गोले को दर्शाया गया है। एक बिन्दु आवेश गोले के बाहर इसके केन्द्र से r दूरी पर रखा है तो निम्न को बताइये।

(i) गोले के कारण बिन्दु आवेश q पर बल

(ii) बिन्दु आवेश के कारण गोले पर बल

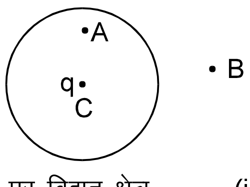


Solution : (i) बिन्दु आवेश की स्थिति पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = \frac{KQ}{r^2}\hat{r}$ अतः, $\vec{F} = \frac{KqQ}{r^2}\hat{r}$ $\quad |\vec{F}| = \frac{KqQ}{r^2}$

(ii) क्योंकि हम जानते हैं कि प्रत्येक क्रिया के बराबर तथा विपरीत प्रतिक्रिया होती है।

$\vec{F}_{\text{गोला}} = -\frac{KqQ}{r^2}\hat{r} \qquad |\vec{F}_{\text{गोला}}| = \frac{KqQ}{r^2}$.

Example 42. चित्र में R त्रिज्या तथा Q आवेश के समान रूप से आवेशित गोले को दर्शाया है। एक बिन्दु आवेश q भी गोले के केन्द्र पर रखा है। निम्न को बताइये।



(i) q आवेश पर बल (ii) A पर विद्युत क्षेत्र (iii) B पर विद्युत क्षेत्र

Solution : (i) समान रूप से आवेशित खोखले गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र = 0
इसलिये q आवेश पर बल F = 0

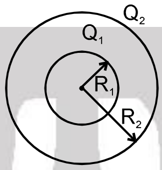
(ii) A पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}_A = \vec{E}_{\text{गोला}} + \vec{E}_q = 0 + \dfrac{Kq}{r^2}$; r = CA

गोले के कारण E = 0, क्योंकि बिन्दु आवेशित खोखले गोले के अन्दर है।

(iii) B बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}_B = \vec{E}_{\text{गोला}} + \vec{E}_q = \dfrac{KQ}{r^2}.\hat{r} + \dfrac{Kq}{r^2}.\hat{r} = \dfrac{K(Q+q)}{r^2}.\hat{r}$; r = CB

Note : B पर विद्युत क्षेत्र की गणना के लिये हम कुल आवेश को केन्द्र पर मान सकते हैं।

Example 43. दो R_1 व R_2 त्रिज्या वाली संकेन्द्रीय गोलीय कोशों पर क्रमशः आवेश Q_1 व Q_2 है। निम्न स्थितियों में विद्युत क्षेत्र का व्यंजक r के फलन में व्युत्पन्न कीजिये।



(i) $r < R_1$ (ii) $R_1 \le r < R_2$ (iii) $r \ge R_2$

Solution : (i) $r < R_1$, के लिए
इसलिये बिन्दु दोनों गोलों के अन्दर है
$E_{\text{नैट}} = E_{\text{आन्तरिक}} + E_{\text{बाह्य}} = 0 + 0$

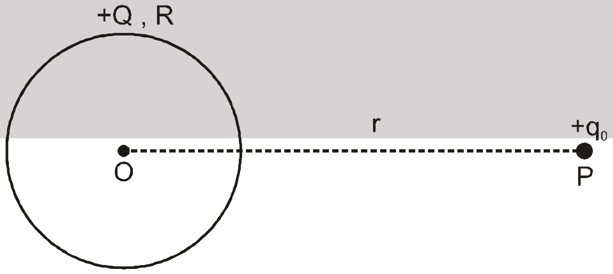
(ii) $R_1 \le r < R_2$, के लिए
इसलिये बिन्दु बाहरी गोले के अन्दर परन्तु अन्दर वाले गोले के बाहर है

$E_{\text{नैट}} = E_{\text{आन्तरिक}} + E_{\text{बाह्य}} = \dfrac{KQ_1}{r^2} + 0 = \dfrac{KQ_1}{r^2}\hat{r}$

(iii) $r \ge R_2$ के लिए
बिन्दु दोनों गोलों के बाहर है

$E_{\text{नैट}} = E_{\text{आन्तरिक}} + E_{\text{बाह्य}} = \dfrac{KQ_1}{r^2}\hat{r} + \dfrac{KQ_2}{r^2}\hat{r} = \dfrac{K(Q_1+Q_2)}{r^2}\hat{r}$

Example 44 चित्रानुसार +Q आवेश वाले गोलीय कोश और + q_0 वाले बिन्दु आवेश रखे हुये हैं। गोलीय कोश और बिन्दु आवेश के मध्य बल ज्ञात करो?



(i) कोश के कारण बिन्दु आवेश पर + q_0 पर लगने वाला बल

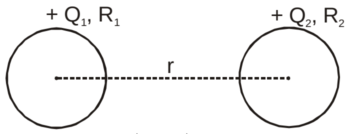
$= q_0\vec{E}_{\text{shell}} = (q_0)\left(\dfrac{KQ}{r^2}\right)\hat{r} = \dfrac{KQq_0}{r^2}\hat{r}$, जहाँ $\hat{r}$ OP के अनुदिश इकाई सदिश है

⇒ क्रिया प्रतिक्रिया नियम से, बिन्दु आवेश के कारण गोलीय कोश पर लगने वाला बल :

$F_{\text{shell}} = \dfrac{KQq_0}{r^2}(-\hat{r})$ होगा।

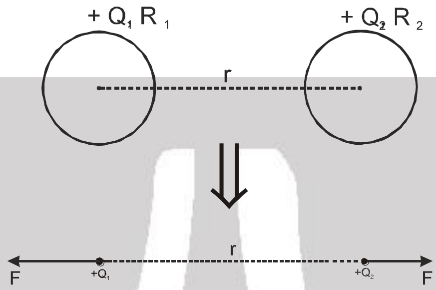
निष्कर्ष : बाहरी आवेश के कारण खोखले गोले पर बल ज्ञात करने के लिये, गोले को केन्द्र पर बिन्दु आवेश के समान मानकर कर सकते है।

Example 45. R_1 व R_2 के दो गोलीय कोश, जिन पर समरूप वितरित आवेश क्रमशः Q_1 व Q_2 है तथा इनके केन्द्रों के मध्य दूरी r है, इनके मध्य कार्यरत बल ज्ञात करो।



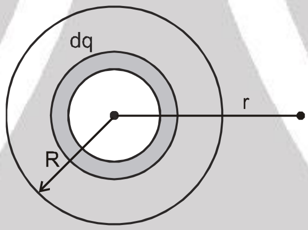
Solution : कोशों को इन के केन्द्र पर स्थित बिन्दु आवेश से स्थानान्तरित कर सकते हैं अतः उनके मध्य लगने वाला बल।

$F = \frac{KQ_1Q_2}{r^2}$



6.7 ठोस गोले के कारण विद्युत क्षेत्र

(i) समान आवेशित गोले के लिये : R त्रिज्या के ठोस गोले, जिसका आवेश Q है जो कि आयतन में समान रूप से वितरित है, के केन्द्र से r दूरी पर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र के व्यंजन की व्युत्पत्ति, निम्न दो स्थितियों के लिये

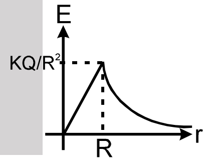


(i) $r \geq R$ (ii) $r \leq R$

dq आवेश का सकेन्द्रीय कोश मानते हैं। इस कोश के कारण किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र ($r \geq R$) है

$dE = \frac{Kdq}{r^2}$ [खोखले गोले के परिणाम से]

$\Rightarrow E_{net} = \int \frac{Kdq}{r^2} = \frac{K}{r^2}\int dq \Rightarrow E_{net} = \frac{KQ}{r^2}$



$r \leq R$, जब कोश की त्रिज्या, r से ज्यादा है तब कोश के कारण कोई विद्युत क्षेत्र नहीं होगा, अतः कोश की त्रिज्या, r से कम है तब किसी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र स्थित होगा।

$E'_{net} = \frac{KQ'}{r^2}$ यहाँ Q' (r त्रिज्या के गोले का आवेश) $= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3} = \rho \times \frac{4}{2}\pi r^3$

जहाँ $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow E'_{net} = \frac{KQ'}{r^2} = \frac{KQr}{R^3}$ केन्द्र से दूर $\vec{E} = \frac{KQ}{R^3}\vec{r} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}$

Note : गोले के अन्दर और बाहर विद्युत क्षेत्र हमेशा त्रिज्यीय दिशा में होता है।

Solved Examples

Example 46. एक ठोस R त्रिज्या तथा एक समान आयतन आवेश घनत्व ρ वाले कुचालक गोले का केन्द्र मूल बिन्दु पर है। निम्न स्थितियों में विद्युत क्षेत्र सदिश रूप में ज्ञात करो।

(i) (R/2, 0, 0) (ii) $\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, 0\right)$ (iii) (R, R, 0)

Solution : (i) (R/2, 0, 0) पर : केन्द्र से दूरी = $\sqrt{(R/2)^2 + 0^2 + 0^2}$ = R/2 < R, इसलिये बिन्दु गोले के अन्दर है।

$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R}{2}\hat{i}\right]$

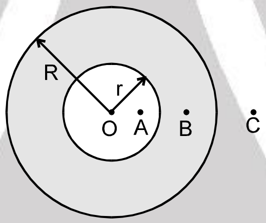
(ii) $\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, 0\right)$ पर ; केन्द्र से दूरी = $\sqrt{(R/\sqrt{2})^2 + (R/\sqrt{2})^2 + 0^2}$ = R = R, इसलिये बिन्दु गोले की सतह पर है।

$$\vec{E} = \frac{KQ}{R^3}\vec{r} = \frac{K\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{R^3}\left[\frac{R}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{R}{\sqrt{2}}\hat{j}\right] = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{R}{\sqrt{2}}\hat{j}\right]$$

(iii) बिन्दु गोले के बाहर है

इसलिये $\vec{E} = \frac{KQ}{r^3}\vec{r} = \frac{K\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{(\sqrt{2}R)^3}\left[R\hat{i} + R\hat{j}\right] = \frac{\rho}{6\sqrt{2}\varepsilon_0}\left[R\hat{i} + R\hat{j}\right]$

Example 47. एक समान रूप से आवेशित R त्रिज्या तथा एक समान आयतन आवेश घनत्व ρ वाले कुचालक गोले में r त्रिज्या की संकेन्द्रीय गुहा है। चित्रानुसार दर्शाये निम्न बिन्दुओं पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करो :



(i) बिन्दु A (ii) बिन्दु B (iii) बिन्दु C (iv) गोले के केन्द्र

Solution : **विधि I :**

(i) A के लिये : हम यह मान सकते हैं गोले का ठोस भाग बहुत सारे संकेन्द्रीय गोलीय कोशों से मिलकर बना है जिनकी सतह पर आवेश एक समान रूप से वितरित है। अब क्योंकि A सभी गोलीय कोश के अन्दर स्थित है इसलिये इस पर सभी गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र शून्य होगा।

$\overrightarrow{E_A} = 0$

(ii) B बिन्दु के लिये : वह सभी गोलीय कोश जिसके लिये बिन्दु B अन्दर की ओर होगा वह बिन्दु B पर विद्युत क्षेत्र शून्य कर देगा। इसलिये विद्युत क्षेत्र त्रिज्या r से OB तक उपस्थित आवेश के कारण होगा।

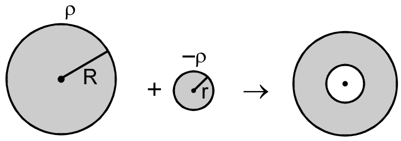
अतः $\overrightarrow{E_B} = \frac{K\frac{4}{3}\pi(OB^3 - r^3)\rho}{OB^3}\overrightarrow{OB} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{[OB^3 - r^3]}{OB^3}\overrightarrow{OB}$

(iii) इस तरह हम C के लिये कह सकते है कि बिन्दु C सभी गोलीय कोश के बाहर स्थित है।

$$\overrightarrow{E_C} = \frac{\rho K\left[\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\right]}{[OC]^3}\overrightarrow{OC} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3 - r^3}{[OC]^3}\overrightarrow{OC}$$

विधि : II

हम यह मान सकते है कि गोलीय गुहा को ρ तथा $-\rho$ आवेश घनत्व से भरा जाता है परिणाम स्वरूप दोनों को मिलाने के बाद कुल आवेश घनत्व शून्य हो। हम यह मान सकते हैं कि दो ठोस गोले एक की त्रिज्या R व आवेश घनत्व ρ तथा दूसरे की त्रिज्या r तथा आवेश घनत्व $-\rho$ है।



(i) $\overrightarrow{E_A} = \overrightarrow{E_\rho} + \overrightarrow{E_{-\rho}} = \dfrac{\rho(\overrightarrow{OA})}{3\varepsilon_0} + \dfrac{[-\rho(\overrightarrow{OA})]}{3\varepsilon_0} = 0$

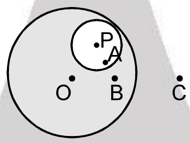
(ii) $\overrightarrow{E_B} = \overrightarrow{E_\rho} + \overrightarrow{E_{-\rho}} = \dfrac{\rho(\overrightarrow{OB})}{3\varepsilon_0} + \dfrac{K\left[\frac{4}{3}\pi r^3(-\rho)\right]}{(OB)^3}\overrightarrow{OB} = \left[\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} - \dfrac{r^3\rho}{3\varepsilon_0(OB)^3}\right]\overrightarrow{OB} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[1 - \dfrac{r^3}{OB^3}\right]\overrightarrow{OB}$

(iii) $\overrightarrow{E_C} = \overrightarrow{E_\rho} + \overrightarrow{E_{-\rho}} = \dfrac{K\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)}{OC^3}\overrightarrow{OC} + \dfrac{K\left(\frac{4}{3}\pi r^3(-\rho)\right)}{OC^3}\overrightarrow{OC} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0(OC)^3}[R^3 - r^3]\overrightarrow{OC}$

(iv) $\overrightarrow{E_O} = \overrightarrow{E_\rho} + \overrightarrow{E_{-\rho}} = 0 + 0 = 0$

Example 48. उपरोक्त प्रश्न में यदि गुहा संकेन्द्रीय न हो और इसका केंद्र P पर हो तो सभी पदों को दोहराइये।

Solution : पुनः गुहा में ρ और $-\rho$ मानें (पूर्व उदाहरण की तरह)



(i) $\overrightarrow{E_A} = \overrightarrow{E_\rho} + \overrightarrow{E_{-\rho}} = \dfrac{\rho[\overrightarrow{OA}]}{3\varepsilon_0} + \dfrac{(-\rho)\overrightarrow{PA}}{3\varepsilon_0} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}[\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{PA}] = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}[\overrightarrow{OP}]$

नोट : हम यहाँ देख सकते है कि बिन्दु A पर विद्युत क्षेत्र गुहा में बिन्दु A की स्थिति पर निर्भर नहीं करता। विद्युत क्षेत्र की दिशा गोले के केन्द्र तथा गोलीय गुहा के केन्द्र को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश है।

(ii) $\overrightarrow{E_B} = \overrightarrow{E_\rho} + \overrightarrow{E_{-\rho}} = \dfrac{\rho(\overrightarrow{OB})}{3\varepsilon_0} + \dfrac{K[\frac{4}{3}\pi r^3(-\rho)]}{[PB]^3}\overrightarrow{PB}$

(iii) $\overrightarrow{E_C} = \overrightarrow{E_\rho} + \overrightarrow{E_{-\rho}} = \dfrac{K[\frac{4}{3}\pi R^3\rho]}{[OC]^3}\overrightarrow{OC} + \dfrac{K[\frac{4}{3}\pi r^3(-\rho)]}{[PC]^3}\overrightarrow{PC}$

(iv) $\overrightarrow{E_O} = \overrightarrow{E_\rho} + \overrightarrow{E_{-\rho}} = 0 + \dfrac{K[\frac{4}{3}\pi r^3(-\rho)]}{[PO]^3}\overrightarrow{PO}$

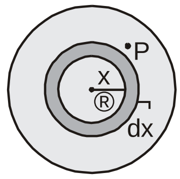
Example 49 एक कुचालक गोले का आयतन आवेश घनत्व $\rho = \rho_0 r$, के अनुसार परिवर्तित होता है जहाँ ρ_0 नियतांक है तथा r केंद्र से दूरी है। निम्न स्थितियों में विद्युत क्षेत्र ज्ञात करो।

(i) $r < R$ (ii) $r \geq R$

Solution : **विधि I :**

(i) $r < R$ के लिये

गोले को अधिक संख्या में गोलीय कोश से मिलकर बना मान सकते हैं। प्रत्येक कोश की सतह पर एक समान आवेश घनत्व है। इसलिये हम गोलीय कोश का पहले निकाला गया परिणाम उपयोग में ले सकते हैं। एक x त्रिज्या तथा dx मोटाई का गोलीय कोश मानें तो कोश पर आवेश $dq = (4\pi x^2 dx)\rho_0 x$



बिन्दु P पर कोश के कारण विद्युत क्षेत्र

$dE = \frac{Kdq}{x^2}$

क्योंकि सभी कोश का विद्युत क्षेत्र एक दिशा में होगा।

$$E = \int_0^R dE = \int_0^r dE + \int_r^R dE$$

क्षेत्र $r < x \le R$ के मध्य उपस्थित कोश के कारण P बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र शून्य होगा।

$$\vec{E} = \int_0^r \frac{Kdq}{r^2} + 0 = \int_0^r \frac{K.4\pi x^2 dx \rho_0 x}{r^2} = \frac{4\pi K\rho_0}{r^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0}\hat{r}$$

(ii) $r \ge R$ $\quad E = \int_0^R dE = \int_0^R \frac{K.4\pi x^2 dx \rho_0 x}{r^2} = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

विधि II :

(i) गोले को अधिक संख्या में गोलीय कोश से मिलकर बना मान सकते हैं। प्रत्येक कोश की सतह पर एक समान आवेश घनत्व है। इसलिये हम गोलीय कोश का पहले निकाला गया परिणाम उपयोग में ले सकते है। हम कह सकते है कि सभी कोश जिनके लिये बिन्दु अन्दर स्थित है विद्युत क्षेत्र उस बिन्दु पर शून्य होगा।

अतः $\vec{E}_{(r<R)} = \frac{K\int_0^r (4\pi x^2 dx)\rho_0 x}{r^2} = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0}\hat{r}$

(ii) इसी प्रकार $r \ge R$ के लिये सभी कोश वि. क्षे. में योगदान देंगे,

अतः $\vec{E}_{(r<R)} = \frac{K\int_0^R (4\pi x^2 dx)\rho_0 x}{r^2} = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

7. विद्युत विभव (ELECTRIC POTENTIAL)

स्थिर विद्युत क्षेत्र में किसी बिन्दु पर विद्युत विभव (आवेश स्त्रोतों के कारण), एकांक धन आवेश को निर्देश बिन्दु (साधारणतया अनन्त पर माना जाता है।) से उस बिन्दु तक, बिना त्वरित किए लाने में बाह्य कर्त्ता द्वारा किया गया कार्य उस बिन्दु का विद्युत विभव कहलाता है।

7.1 गणितीय निरूपण :

यदि किसी बिन्दु आवेश q **को अनन्त से** P **बिन्दु तक ले जाने में आवश्यक कार्य** $(W_{\infty P})_{बाह्य}$ **हो तो बिन्दु** P **पर विद्युत विभव है।**

$$V_p = \left.\frac{W_{\infty\to p})_{ext}}{q}\right]_{\Delta K=0} = \frac{-W_{ele})_{\infty\to p}}{q}$$

Note : (i) $(W_{\infty\to P})_{ext}$ **को स्त्रोत आवेशों द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र के विरूद्ध बाह्य कारक द्वारा किया गया कार्य भी कहा जा सकता है।**

(ii) W **व** q **दोनों को चिन्ह के साथ लिखें।**

7.2 गुण :

(i) विभव एक अदिश राशि है, इसका मान धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

(ii) विभव का S.I. मात्रक वोल्ट = $\frac{\text{जूल}}{\text{कूलॉम}}$ है तथा इसका विमीय सूत्र $[M^1L^2T^{-3}I^{-1}]$ है।

(iii) किसी बिन्दु पर विद्युत विभव निर्देश बिन्दु (अनन्त) से उस बिन्दु तक इकाई धनावेश को ले जाने में विद्युत क्षेत्र द्वारा किये गये कार्य के ऋणात्मक के बराबर भी होता है।

(iv) एक धनावेश के कारण विभव सदैव धनात्मक तथा ऋणावेश के कारण सदैव ऋणात्मक (अनन्त पर छोड़कर) होता है। ($v_\infty = 0$ लेते हुये).

(v) विद्युत क्षेत्र की दिशा में विभव घटता है।

(vi) $V = V_1 + V_2 + V_3 + ...$

7.3 विभव का उपयोग :

यदि किसी बिन्दु पर हमें विभव ज्ञात हो (आंकिक मान या सूत्र के रूप में) तो हम निम्न सूत्र द्वारा q आवेश को 'P' बिन्दु से अनन्त तक ले जाने में विद्युत बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात कर सकते है।

$$\mathbf{W_{el}\,)_{p\to\infty} = qV_p}$$

Solved Examples

Example 50. एक 2μC आवेश को विद्युत क्षेत्र में अनन्त से किसी बिन्दु तक बिना वेग में परिवर्तन के लाया जाता है। यदि स्थिर वैद्युत बल के विरूद्ध किया गया कार्य –40μJ है तो इस बिन्दु पर विद्युत विभव ज्ञात करो।

Solution : $V = \frac{W_{ext}}{q} = \frac{-40\mu J}{2\mu C} = -20\ V$

Example 51. एक 10 μC आवेश को विद्युत क्षेत्र में अनन्त से किसी बिन्दु तक लाने में किया गया कार्य 10 μJ है। यदि इससे दुगने आवेश को अनन्त से उसी बिन्दु तक बिना त्वरण के लाया जाता है तो विद्युत क्षेत्र के द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : $W_{ext})_{\infty\to p} = -W_{el})_{\infty\to p} = W_{el})_{p\to\infty} = 10\ \mu J$

क्योंकि $\Delta KE = 0$

$V_p = \frac{W_{\text{बाह्य}})_{\infty\to p}}{q} = \frac{10\mu J}{10\mu C} = 1V$

इसलिये यदि अब दुगने आवेश को अनन्त से लाया जाता है

$1 = \frac{W_{ext})_{\infty\to p}}{20\mu C}$

$\Rightarrow\ W_{ext})_{\infty\to p} = 20\ \mu J \quad \Rightarrow\ W_{el})_{\infty\to p} = -20\ \mu J$

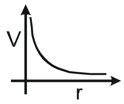
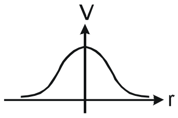
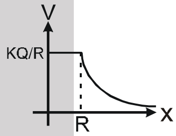
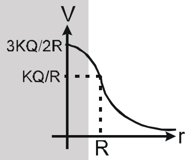
Example 52. एक 3μC आवेश को बिन्दु P जहाँ विद्युत विभव 20 V है, से मुक्त किया जाता है तो जब यह अनन्त पर पहुँचता है तो इसकी गतिज ऊर्जा है।

Solution : $W_{el} = \Delta K = K_f - 0$

$W_{el})_{P\to\infty} = qV_P = 60\ \mu J$

अतः, $K_f = 60\ \mu J$

विभिन्न आवेश वितरण के कारण विद्युत विभव सारणी में दिये गये है :

नाम / प्रकार	सूत्र	नोट	ग्राफ
बिन्दु आवेश	$\frac{Kq}{r}$	* q स्त्रोत आवेश है। * r स्त्रोत आवेश से परीक्षण बिन्दु की दूरी है।	
वलय (समरूप / असमरूप आवेश वितरण) वलय (समरूप)	केन्द्र पर $\frac{KQ}{R}$ अक्ष पर $\frac{KQ}{\sqrt{R^2+x^2}}$	* Q स्त्रोत आवेश है। * x केन्द्र से बिन्दु की दूरी है।	
समरूप आवेशित खोखला चालक/अचालक / ठोस चालक गोला	$r \geq R$ के लिए $V = \frac{kQ}{r}$ $r \leq R$ के लिए $V = \frac{kQ}{R}$	* R गोले की त्रिज्या है। * r गोले में केन्द्र से बिन्दु की दूरी है। * Q कुल आवेश = $\sigma 4\pi R^2$.	
एक समान रूप से आवेशित ठोस अचालक गोला (अचालक पदार्थ)	$r \geq R$ के लिए $V = \frac{kQ}{r}$ $r \leq R$ के लिए $\frac{KQ(3R^2 - r^2)}{2R^3}$ $= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}$ $(3R^2 - r^2)$	* R गोले की त्रिज्या है। * r बन्दु की केन्द्र से दूरी है। * $V_{केन्द्र} = \frac{3}{2} V_{सतह}$. * Q कुल आवेश = $\rho \frac{4}{3} \pi R^3$. * गोले के अन्दर विभव परवलयिक रूप से बदलता है। * गोले के बाहर अतिपरवलयिक रूप से बदलता है।	
अनन्त लम्बाई का रेखीय आवेश	परिभाषित नहीं	* निरपेक्ष विभव परिभाषित नही। * किन्ही दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है। $V_B - V_A = -2K\lambda \ln(r_B / r_A)$	
अनन्त विस्तार की कुचालक पट्टिका	परिभाषित नहीं	* निरपेक्ष विभव परिभाषित नही * किन्ही दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है। $v_B - v_A = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r_B - r_A)$	
अनन्त आवेशित पतली चालक पट्टिका	परिभाषित नहीं	* निरपेक्ष विभव परिभाषित नही * किन्ही दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है। $v_B - v_A = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(r_B - r_A)$	

7.4 किसी बिन्दु आवेश के कारण विभव :

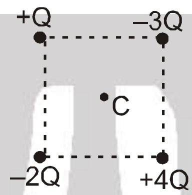
किसी बिन्दु आवेश Q, के कारण इस बिन्दु आवेश से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु P पर विभव के व्यंजन का व्युत्पन्न

विभव की परिभाषा से

$$V = \frac{W_{ext(\infty \to p)}}{q_o} = \frac{-\int_{\infty}^{r} (q_0\vec{E}) \cdot d\vec{r}}{q_o} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \vec{dr} \;\Rightarrow\; V = -\int_{\infty}^{r} \frac{KQ}{r^2}.dr = \frac{KQ}{r}$$

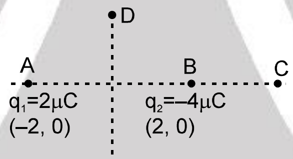
Solved Examples

Example 53. ℓ भुजा वाले वर्ग के कोनों पर चार बिन्दु आवेश रखे हैं वर्ग के केन्द्र पर विभव ज्ञात करो?



Solution : V = 0 at 'C'. $\left(V = \frac{kq}{r}\right.$ का उपयोग करके)

Example 54. दो बिन्दु आवेश 2μC और – 4μC क्रमशः (–2m, 0m) तथा (2 m, 0 m) पर स्थित है। बिन्दु C (4 m, 0 m) तथा D (0 m, $\sqrt{5}$ m) पर विभव ज्ञात करो।



Solution : C बिन्दु पर विभव

$$V_C = V_{q_1} + V_{q_2} = \frac{K(2\mu C)}{6} + \frac{K(-4\mu C)}{2} = \frac{9\times10^9 \times 2\times10^{-6}}{6} - \frac{9\times10^9 \times 4\times10^{-6}}{2} = -15000 \text{ V.}$$

इसी प्रकार, $V_D = V_{q_1} + V_{q_2} = \frac{K(2\mu C)}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2}} + \frac{K(-4\mu C)}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2}} = \frac{K(2\mu C)}{3} + \frac{K(-4\mu C)}{3} = -6000$ V.

सतत् आवेश के कारण विभव ज्ञात करना

यदि E का सूत्र कठिन है तब एक छोटा अवयव मानते हैं और समाकलन करते हैं

$V = \int dv$

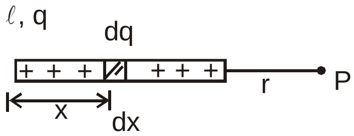
यदि E का सूत्र सरल है तब

$$V = -\int_{r \to \infty}^{r = r} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

(उदाहरण के लिए गोला, प्लेट, अनन्त तार आदि)

Solved Example

Example 55. आवेशित छड़ के कारण किसी बिन्दु P पर :

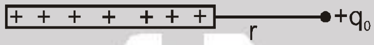


बायें सिरे से x दूरी पर, एक छोटा अवयव लेते हैं। इस छोटे अवयव के कारण विभव

$dV = \dfrac{K(dq)}{(\ell - x + r)}$ $\quad \therefore$ कुल विभव $V = \displaystyle\int_{x=0}^{x=\ell} \dfrac{kdq}{(\ell - x + r)}$

जहाँ $dq = \dfrac{q}{\ell}dx$ $\quad \Rightarrow \quad V = \displaystyle\int_{x=0}^{x=\ell} \dfrac{K\left(\dfrac{q}{\ell}dx\right)}{(\ell - x + r)} = \dfrac{Kq}{\ell}\log_e\left(\dfrac{\ell + r}{r}\right)$

यदि बिन्दु P पर q_0 आवेश रखा है, तब इसकी स्थितिज ऊर्जा

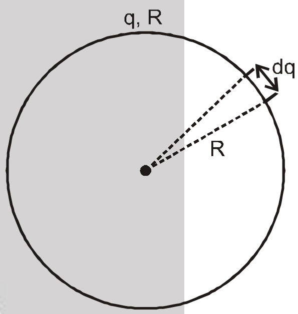


$U = q_0V = (q_0)\ \dfrac{Kq}{\ell}\ \log\left(\dfrac{\ell + r}{r}\right)$

7.5 वलय के कारण विभव :

(i) समान आवेशित वलय के केन्द्र पर विभव :

छोटे अवयव dq के कारण विभव

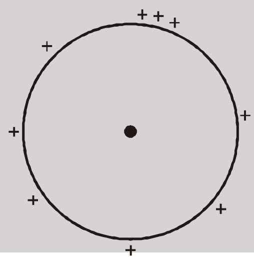


$dV = \dfrac{Kdq}{R}$

कुल विभव $\quad V = \displaystyle\int \dfrac{Kdq}{R}$

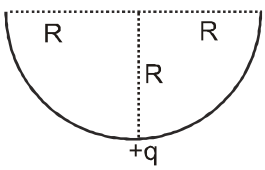
$V = \dfrac{K}{R}\displaystyle\int dq = \dfrac{Kq}{R}$

(ii) असमान आवेशित वलय के केन्द्र पर विभव



$V = \dfrac{Kq_{\text{कुल}}}{R}$

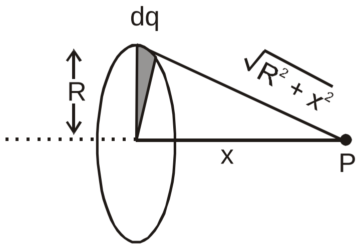
(iii) आधी वलय के केन्द्र पर विभव :



$V = \dfrac{Kq}{R}$

(iv) वलय के अक्ष पर विभव :

R त्रिज्या की समान आवेशित वलय जिसका कुल आवेश Q है के केन्द्र से दूरी x दूरी पर अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु पर विभव की गणना करते हैं।



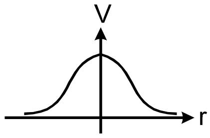
वलय पर कोई dq आवेश का छोटा अवयव मानते हैं।

बिन्दु P पर आवेश dq के कारण विभव है –

$$dV = \frac{K(dq)}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

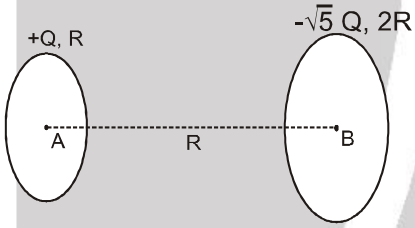
$\therefore$ बिन्दु P पर इन सभी अवयवों के कारण कुल विभव होगा :

$$V = \int dv = \frac{KQ}{\sqrt{R^2+x^2}}$$



Solved Examples

Example 56.



(AB = R)

A और B के बीच विभवान्तर ज्ञात करो? : $V_A - V_B$

Solution : $V_A = \frac{KQ}{R} + \frac{K(-\sqrt{5}Q)}{\sqrt{(2R)^2+(R)^2}}$; $V_B = \frac{K(-\sqrt{5}Q)}{2R} + \frac{K(Q)}{\sqrt{(R)^2+(R)^2}}$

इससे हम सरलता से $V_A - V_B$ प्राप्त कर सकते हैं।

Example 57. एक बिन्दु आवेश q_0 को Q आवेश से एक समान रूप से आवेशित R त्रिज्या वाली वलय के केन्द्र पर रखा जाता है यदि बिन्दु आवेश को वलय की अक्ष के अनुदिश नगण्य बल से थोड़ा सा सरकाया जाता है तो जब यह केन्द्र से बहुत अधिक दूरी पर पहुँचता है तो इसकी चाल ज्ञात करो।

Solution : q_0 पर केवल विद्युत बल लग रहा है

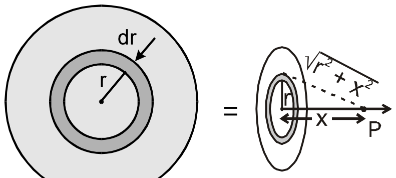
$\therefore \quad W_{el} = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \quad \Rightarrow \quad$ अब $W_{el})_{c\to\infty} = q_0 V_c = q_0 . \frac{KQ}{R}$

$\therefore \quad \frac{Kq_0Q}{R} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Kq_0Q}{mR}}$

7.6 समान आवेशित चकती के कारण विभव : (Derivation is given in hand out)

$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)$, जहाँ σ आवेश घनत्व है और R, चकती की त्रिज्या है। x, अक्ष पर चकती के केन्द्र से बिन्दु की दूरी है।

समरूप आवेशित चकती के कारण विभव :



'R' त्रिज्या और पृष्ठ आवेश घनत्व (आवेश/क्षेत्रफल) = σ वाली एक चकती है। हमें इस चकती की अक्ष से बिन्दु 'P' पर विभव ज्ञात करना है जोकि चकती के केन्द्र से x दूरी पर है।

इसके लिये हम चकती को पतली वलयों में विभाजित करते हैं और 'R' त्रिज्या तथा dr मोटाई की एक पतली वलय लेते हैं। माना इस अवयवी वलय पर आवेश dq है। इस वलय के कारण बिन्दु 'P' पर विभव है।

$dV = \dfrac{Kdq}{\sqrt{r^2 + x^2}}$ अतः कुल विभव : $V_{net} = \int \dfrac{Kdq}{\sqrt{r^2+x^2}}$

यहाँ, σ = आवेश/क्षेत्रफल = $\dfrac{dq}{d(\text{क्षेत्रफल})}$ अतः, dq = σ × d (क्षेत्रफल) = $\sigma(2\pi r dr)$

(यहाँ d (क्षेत्रफल) = अवयवी वलय का क्षेत्रफल = (वलय की लम्बाई) × (वलय की चौड़ाई) = $(2\pi r).(dr)$

अतः, $V_{net} = \displaystyle\int_{r=0}^{r=R} \frac{K\sigma(2\pi r\, dr)}{\sqrt{r^2 + x^2}}$

इसे समाकलित करने के लिए $r^2 + x^2 = y^2$

   $2r\, dr = 2y\, dy$, मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$V_{net} = \int_{r=0}^{r=R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma(2\pi) y dy}{y} \Rightarrow V_{net} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[y\right]_{r=0}^{r=R}$$

$$V_{net} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r^2+x^2}\right)_{r=0}^{r=R} \qquad \Rightarrow \quad V_{net} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)$$

यदि बिन्दु P पर एक एकांक आवेश q_0 रखा जाये , तब चकती के कारण इस आवेश q_0 की स्थितिज ऊर्जा $U = q_0V$

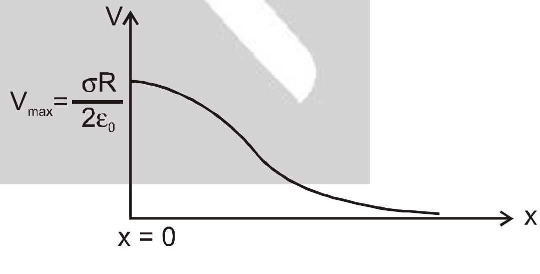
$$\Rightarrow \; U = q_0\left[\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right)\right]$$

विभव V और x के मध्य ग्राफ :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right) \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ पर } V = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

विभव V, x के साथ बढ़ रहा है या घट रहा है। इसे जानने के लिए, संयुग्मी से गुणा व भाग करने पर

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2} - x\right) \times \frac{\left(\sqrt{R^2+x^2} + x\right)}{\left(\sqrt{R^2+x^2} + x\right)}$$



$$\Rightarrow \; V = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{R^2+x^2} + x\right)}\right)$$

अतः अब हम कह सकते हैं कि $x \uparrow \Rightarrow V \downarrow$

अतः (ग्राफ) इस तरह से होगा।

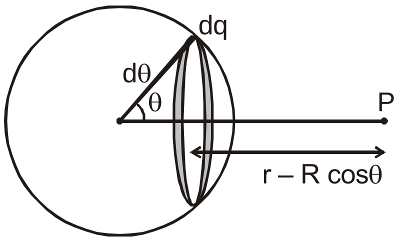
7.7 समरूप आवेशित गोलीय कोश के कारण विभव :

निम्न स्थितियों के लिए केन्द्र से r दूरी पर किसी बिन्दु पर समरूप आवेशित खोखले गोले जिसकी त्रिज्या R व कुल आवेश Q है के कारण विभव के व्यंजक का व्युत्पन्न।

(i) r > R   **(ii) r < R**

x अक्ष से θ कोण पर Rdθ चौड़ाई की एक वलय मानते हैं (चित्रानुसार)

वलय के कारण बिन्दु P पर विभव होगा :



$$dV = \frac{K(dq)}{\sqrt{(r - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}}$$

जहाँ $dq = 2\pi R \sin\theta \, (Rd\theta)\sigma$

जहाँ $Q, = 4\pi R^2\sigma$

तब परिणामी विभव $V = \int dV = \frac{KQ}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta . d\theta}{\sqrt{(r - R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2}}$

इस समीकरण को हल करने पर हम प्राप्त करते है।

$$V = \frac{KQ}{r} \text{ (for } r > R) \quad \& \quad V = \frac{KQ}{R} \text{ for } (r < R)$$

क्योंकि E का सूत्र सरल है अतः हम कह सकते हैं – $V = -\int_{r \to \infty}^{r = r} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

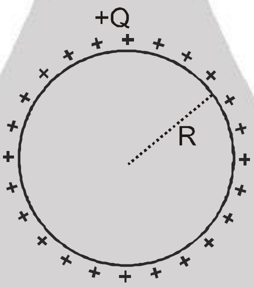
(i) बाहर स्थित बिन्दु के लिये ($r \geq R$) :

$$V = \int_0^R \frac{K \cdot 4\pi x^2 dx\rho}{r} = \frac{KQ}{r} \Rightarrow V_{out} = \frac{KQ}{r} = \frac{KQ}{(\text{केन्द्र से दूरी})}$$

बाहर स्थित बिन्दु के लिये खोखला गोला, एक बिन्दु आवेश की तरह काम करता है।

(ii) गोले के केन्द्र पर विभव (r = 0) :

क्योंकि सभी आवेश केन्द्र से R दूरी पर हैं अतः, $V_{\text{केन्द्र}} = \frac{KQ}{R} = \frac{KQ}{(\text{गोले की त्रिज्या})}$

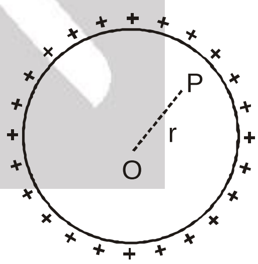


(iii) गोले के अन्दर स्थित बिन्दु पर विभव **(r < R) :**

माना हमें गोले के अन्दर स्थित बिन्दु P पर विभव निकालना है।

P और O के मध्य विभवान्तर :

$$V_P - V_O = -\int_O^P \vec{E}_{in}\, d\vec{r} \quad \text{जहाँ } E_{in} = 0$$



अतः $V_P - V_O = 0$

$$\Rightarrow V_P = V_O = \frac{KQ}{R} \quad \Rightarrow \quad V_{IN} = \frac{KQ}{R} = \frac{KQ}{(\text{गोले की त्रिज्या})}$$

7.8 समरूप आवेशित ठोस गोले के कारण विभव :

समान आवेशित ठोस गोला जिसकी त्रिज्या R है और कुल आवेश Q है जो कि सम्पूर्ण आयतन में विभाजित है, के केन्द्र से r दूरी पर स्थित निम्न दो स्थितियों के लिये विभव के व्यंजक को व्युत्पन्न करते हैं -

x त्रिज्या और dx मोटाई की एक अवयवी कोश की कल्पना करते हैं।

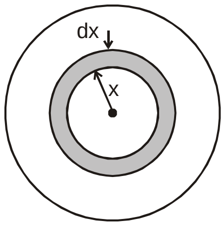
(i) $r \geq R$ **(ii)** $r \leq R$

(i) $r \geq R$ के लिए

x त्रिज्या और dx मोटाई की एक अवयवी कोश की कल्पना करते हैं स्थितियों।

$$V = \int_0^R \frac{K \cdot 4\pi x^2 dx\rho}{r} = \frac{KQ}{r}$$

(ii) $r \leq R$ के लिए



$$V = \int_0^r \frac{K \cdot 4\pi x^2 dx\rho}{r} + \int_r^R \frac{K 4\pi x^2 dx\rho}{x} = \frac{KQ}{2R^3}(3R^2 - r^2)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

विभव की परिभाषानुसार

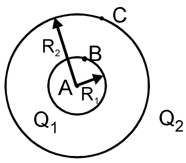
(i) $r \geq R$; $V = -\int_\infty^r \frac{KQ}{r^2}\hat{r} \cdot dr = \frac{KQ}{r}$

(ii) $r \leq R$

$$V = -\int_\infty^R \frac{KQ}{r^2}.dr - \int_R^r \frac{KQr}{R^3}dr \Rightarrow V = \frac{KQ}{R} - \frac{KQ}{2R^3}[r^2 - R^2] = \frac{KQ}{2R^3}[2R^2 - r^2 + R^2] = \frac{KQ}{2R^3}(3R^2 - r^2)$$

Solved Examples

Example 58. दो R_1 व R_2 ($R_2 > R_1$) त्रिज्या के सकेन्द्रीय गोलीय कोशों पर एक समान रूप से क्रमशः Q_1 और Q_2 आवेश वितरित हैं। तो निम्न बिन्दुओं पर विभव ज्ञात करो।



(i) बिन्दु A पर (ii) छोटे कोश की सतह पर (बिन्दु B पर)

(iii) बड़े कोश की सतह पर (बिन्दु C पर) (iv) $r \leq R_1$ पर

(v) $R_1 \leq r \leq R_2$ पर (vi) $r \geq R_2$ पर

Solution : सारणी 7.4 में दिये गये खोखले गोले के परिणामों का उपयोग करने पर

(i) $V_A = \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{KQ_2}{R_2}$ (ii) $V_B = \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{KQ_2}{R_2}$

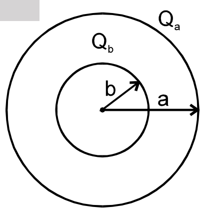
(iii) $V_C = \frac{KQ_1}{R_2} + \frac{KQ_2}{R_2}$ (iv) $r \leq R_1$ के लिए $V = \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{KQ_2}{R_2}$

(v) $R_1 \leq r \leq R_2$ के लिए $V = \frac{KQ_1}{r} + \frac{KQ_2}{R_2}$

(vi) $r \geq R_2$ के लिए $V = \frac{KQ_1}{r} + \frac{KQ_2}{r}$

Example 59. दो a व b (a > b) त्रिज्या के दो संकेन्द्रीय कुचालक गोलों पर आवेश क्रमशः Q_a और Q_b हैं। सिद्ध कीजिये कि दोनों गोलों के मध्य विद्युत विभवान्तर बाहर वाले गोले के आवेश पर निर्भर नहीं करता। यदि बाह्य गोले को अतिरिक्त आवेश दिया जाये तो क्या विद्युत विभवान्तर में कोई अन्तर आता है।

Solution : $V_{\text{आन्तरिक गोला}} = \frac{KQ_b}{b} + \frac{KQ_a}{a}$ $V_{\text{बाह्य गोला}} = \frac{KQ_b}{a} + \frac{KQ_a}{a}$



$V_{\text{आन्तरिक गोला}} - V_{\text{बाह्य गोला}} = \frac{KQ_b}{b} - \frac{KQ_b}{a}$

$\Delta V = KQ_b \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right]$

जो कि बाह्य गोले के आवेश पर निर्भर नहीं करता। यदि बाह्य गोले को अतिरिक्त आवेश दिया जाये तो इससे विद्युत विभवान्तर में कोई अन्तर नही आएगा।

8. विभवान्तर

दो बिन्दुओं A व B के बीच विभवान्तर एक इकाई धनावेश को A से B तक बिना त्वरण के (या KE नियत रखते हुए या $K_i = K_f$) विद्युत क्षेत्र के विरूद्ध बाह्य कारक द्वारा ले जाने में किए गए कार्य के बराबर होता है।

(a) गणितीय निरूपण : यदि $(W_{BA})_{बाह्य}$ = एक इकाई धनावेश q को A से B तक विद्युत क्षेत्र के विरूद्ध ले जाने में बाह्य कारक द्वारा किया गया कार्य हो तो

$$V_B - V_A = \left.\frac{(W_{A\to B})_{ext}}{q}\right)_{\Delta K=0} = \frac{-(W_{A\to B})_{electric}}{q} = \frac{U_B - U_A}{q} = \frac{-\int_A^B \vec{F}_e.\vec{dr}}{q} = -\int_A^B \vec{E}.\vec{dr}$$

नोट : W व q दोनों को चिन्ह सहित लिखें।

(b) गुण :

(a) दो बिन्दुओं के बीच विभवों का अन्तर विभवान्तर कहलाता है। इसे वोल्टता भी कहते है।

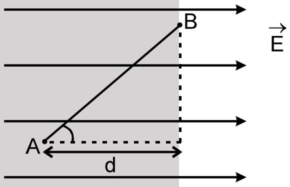
(b) विभवान्तर एक अदिश राशि है। इसका मात्रक भी वोल्ट है।

(c) यदि V_A व V_B दो बिन्दुओं A व B, के विभव है तो आवेश q को बाह्य कारक द्वारा A से B तक ले जाने में किया गया कार्य है।

$(W_{बाह्य})_{AB} = q\,(V_B - V_A)$ या $(W_{क्षेत्र})_{AB} = q\,(V_A - V_B)$.

(d) दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर निर्देश बिन्दु पर निर्भर नहीं करता है।

8.1 एक समान विद्युत क्षेत्र में विभवान्तर :



$V_B - V_A = -\,\vec{E}\cdot\overrightarrow{AB}$

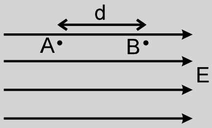
$\Rightarrow\ V_B - V_A = -|E|\,|AB|\cos\theta = -|E|\,d = -Ed$

जहाँ d = विद्युत क्षेत्र के अनुदिश A व B के बीच प्रभावी दूरी।

हम यह भी कह सकते हैं $E = \dfrac{\Delta V}{\Delta d}$

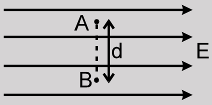
विशेष परिस्थितियाँ :

स्थिति 1. रेखा AB विद्युत क्षेत्र के समान्तर है।



$\therefore\ V_A - V_B = Ed$

स्थिति 2. रेखा AB विद्युत क्षेत्र के लम्बवत् है



$\therefore\ V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B$

नोट : विद्युत क्षेत्र की दिशा में विभव सदैव घटता है।

Solved Examples

Example 60. एक 1μC आवेश को A से B तक ले जाने में बाह्य बल द्वारा स्थिर विद्युत बल के विपरीत किया गया कार्य 40μJ है तो $V_A - V_B$ विभवान्तर ज्ञात करो।

Solution : $(W_{AB})_{ext} = q(V_B - V_A)$

$40\ \mu J = 1\mu C\,(V_B - V_A) \Rightarrow V_A - V_B = -40$

Example 61. x-दिशा में एक समान विद्युत क्षेत्र उपस्थित है। यदि इसकी तीव्रता 5 N/C है तो बिन्दु A (0m, 2 m) तथा B(5 m ,3 m) के मध्य विभवान्तर ज्ञात करो।

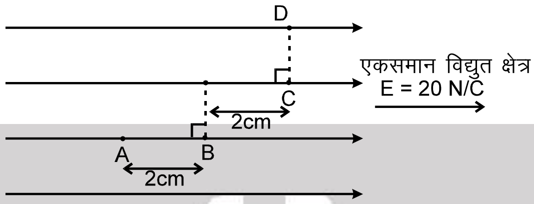
Solution : $V_B - V_A = -\vec{E}\,.\,\vec{AB} = -(5\hat{i})\,.\,(5\hat{i}+\hat{j}) = -25V.$

एक समान विद्युत क्षेत्र में क्षेत्र की तीव्रता $E = \frac{\Delta V}{\Delta d}$

जहाँ ΔV = दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर

Δd = दो बिन्दुओं के मध्य वास्तविक दूरी (विद्युत क्षेत्र की दिशा में विस्थापन का घटक)

Example 62. निम्न ज्ञात करो।



(i) $V_A - V_B$ (ii) $V_B - V_C$ (iii) $V_C - V_A$ (iv) $V_D - V_C$

(v) $V_A - V_D$ (vi) A, B, C और D के विभव को क्रम में बताइये।

Solution : (i) $|\Delta V_{AB}| = Ed = 20 \times 2 \times 10^{-2} = 0.4$

अतः $V_A - V_B = 0.4$ V

क्योंकि **विद्युत क्षेत्र की दिशा में विभव हमेशा घटता है।**

(ii) $|\Delta V_{BC}| = Ed = 20 \times 2 \times 10^{-2} = 0.4$ अतः $V_B - V_C = 0.4$ V

(iii) $|\Delta V_{CA}| = Ed = 20 \times 4 \times 10^{-2} = 0.8$ अतः $V_C - V_A = -0.8$ V

क्योंकि **विद्युत क्षेत्र की दिशा में विभव हमेशा घटता है।**

(iv) $|\Delta V_{DC}| = Ed = 20 \times 0 = 0$ अतः $V_D - V_C = 0$

क्योंकि D और C के बीच प्रभावी दूरी शून्य है।

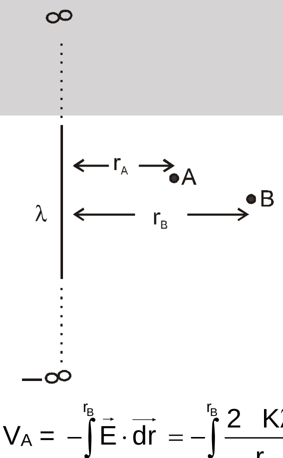
(v) $|\Delta V_{AD}| = Ed = 20 \times 4 \times 10^{-2} = 0.8$ अतः $V_A - V_D = 0.8$ V

क्योंकि विद्युत क्षेत्र की दिशा में विभव हमेशा घटता है।

(vi) विभव का क्रम अतः $V_A > V_B > V_C = V_D$.

8.2 अनन्त लम्बाई के तार के कारण विभवान्तर

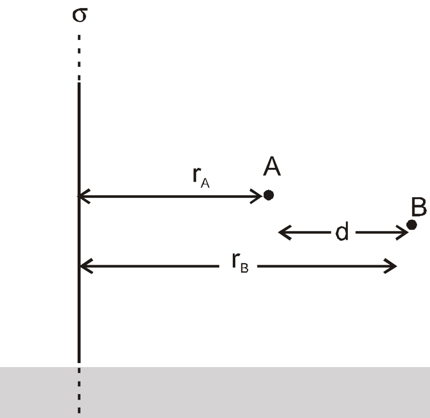
समान रेखीय आवेश घनत्व λ वाले लम्बे रेखीय आवेश से लम्बवत् दूरी r_A और r_B पर स्थित दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर के व्यजंक का व्युत्पन्न करना –



विभवान्तर की परिभाषा से $V_{AB} = V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}\cdot\vec{dr} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{2\ K\lambda}{r}\hat{r}\cdot\vec{dr}$; $V_{AB} = -2K\lambda\ \ell n\left(\frac{r_B}{r_A}\right)$

8.3 अनन्त लम्बी पतली परत के कारण विभवान्तर

लम्बी समान आवेशित पतली परत जिसका एक समान पृष्ठ आवेश घनत्व σ है के लम्बवत d दूरी पर स्थित किन्ही दो बिन्दुओ के मध्य विभवान्तर के व्यंजक को व्युत्पन्न करना है।



माना बिन्दु A और B की लम्बवत् दूरी r_A और r_B है तब विभवान्तर की परिभाषानुसार

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}\cdot\vec{dr} = -\int_{r_A}^{r_B} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{r}\cdot\vec{dr} \Rightarrow V_{AB} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}(r_B - r_A) = -\frac{\sigma d}{2\varepsilon_o}$$

9. समविभव पृष्ठ :

9.1 परिभाषा : यदि सम्पूर्ण पृष्ठ पर विभव एक समान है तो ऐसे पृष्ठ को समविभव पृष्ठ कहते हैं।

9.2 समविभव पृष्ठ के गुण

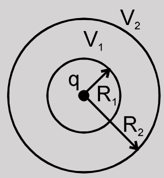
(a) जब समविभव पृष्ठ पर किसी आवेश को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक विस्थापित किया जाता है तो स्थिर वैद्युत बल के विरूद्ध किया गया कार्य शून्य होता है।

(b) विद्युत क्षेत्र समविभव पृष्ठ के लम्बवत् होता है।

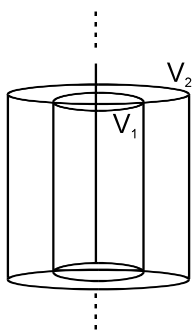
(c) दो समविभव पृष्ठ कभी–भी एक–दूसरे को नहीं काटते हैं।

9.3 समविभव पृष्ठ के उदाहरण :

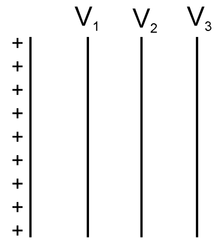
(i) बिन्दु आवेश : चित्रानुसार गोलीय तथा सकेन्द्रीय समविभव पृष्ठ प्रदर्शित है। चित्र में हम देख सकते हैं कि R_1 त्रिज्या के गोले के पूरे पृष्ठ पर विभव V_1 है तथा इसी प्रकार अन्य संकेन्द्रीय गोले के लिए भी विभव समान है।



(ii) रेखीय आवेश : रैखिय आवेश के लिए समविभव पृष्ठ अलग–अलग त्रिज्याओं के समाक्षीय बेलन होते हैं।



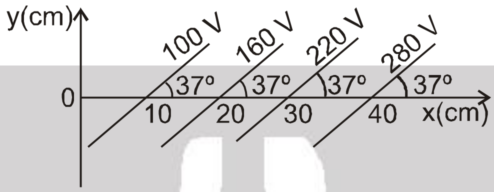
(iii) एक समान रूप से आवेशित बड़ी चालक/कुचालक पट्टिका : समविभव पृष्ठ समानान्तर तल होते हैं।



नोट : एक समान विद्युत क्षेत्र मे समविभव पृष्ठ सदैव समान्तर तल होते है।

Solved Examples

Example 63 कुछ समविभव सतह चित्र में प्रदर्शित हैं तो हम विद्युत क्षेत्र के परिमाण व दिशा के बारे में क्या कह सकते हैं ?



Solution : यहां हम कह सकते हैं कि विद्युत क्षेत्र की दिशा समविभव सतह के लम्बवत् होती है।

एवम् $|\vec{E}| = \dfrac{\Delta V}{\Delta d}$

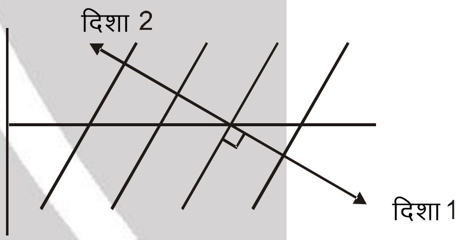
जहाँ ΔV = दो समविभव सतहों के मध्य विभवान्तर है।

Δd = दो समविभव सतहों के मध्य लम्बवत् दूरी।

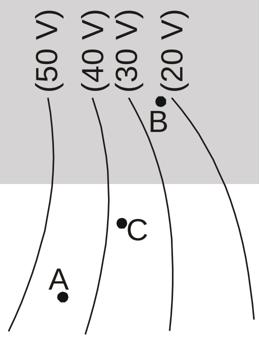
अतः $|\vec{E}| = \dfrac{60}{(10\sin 37^o)\times 10^{-2}} = 1000$ V/m

चित्र में दो लम्बवत् दिशायें 1 तथा 2 प्रदर्शित हैं। दिशा 1 और 2 जो कि चित्र में प्रदर्शित है। परन्तु हम जानते हैं कि विद्युत क्षेत्र की दिशा में विद्युत विभव घटता है। अतः विद्युत क्षेत्र की सही दिशा नम्बर 2 दिशा होगी।

अतः E = 1000 V/m, x-अक्ष से 127° के कोण पर है।



Example 64. चित्र में कुछ आवेशों द्वारा उत्पन्न समविभव पृष्ठें प्रदर्शित हैं। तो किस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र अधिकतम होगा?

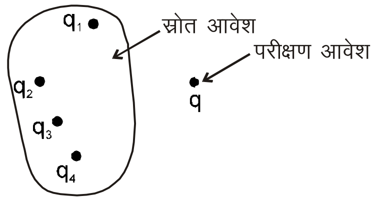


Solution : जहाँ पर समविभव सतह पास–पास होती हैं। वहां पर विद्युत क्षेत्र अधिकतम होता है। विद्युत बल रेखाऐं (ELOF) समविभव सतहों के लम्बवत् होती हैं। चित्र में हम देख सकते है कि बिन्दु B पर ये पास–पास हैं। अतः बिन्दु B पर E अधिकतम होगा।

10. विद्युत स्थितिज ऊर्जा

10.1 अनेक आवेशों के कारण किसी बिन्दु आवेश की विद्युत स्थितिज ऊर्जा :

विद्युत क्षेत्र मे किसी बिन्दु पर एक बिन्दु आवेश की स्थितिज ऊर्जा, आवेश को त्वरित किये बिना (KE को नियत रखते हुए या $K_i = K_f$) निर्देश बिन्दु (अनन्त पर) से उस बिन्दु तक ले जाने में किये गये कार्य के बराबर होता है। इसका गणितीय सूत्र है।



$U = W_{\infty \to P)ext}|_{\Delta K = 0} = qV = -W_{P \to \infty)ele}$

यहां q वह आवेश है जिसकी वैद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करनी है तथा V आवेश q की स्थिति पर स्रोत आवेशों के कारण विद्युत विभव है।

Note : q व V को चिन्ह सहित लिखें।

10.2 गुण :

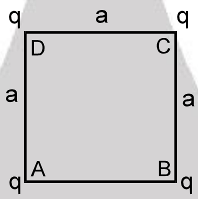
(i) वैद्युत स्थितिज ऊर्जा एक अदिश राशि है। किन्तु यह धनात्मक,ऋणात्मक या शून्य हो सकती है।

(ii) इसका मात्रक कार्य या ऊर्जा के मात्रक के समान होता है अर्थात् जूल (S.I. पद्धति) होता है। कई बार ऊर्जा इलेक्ट्रॉन–वोल्ट में दी होती है। $1eV = 1.6 \times 10^{-19}$ J

(iii) वैद्युत स्थितिज ऊर्जा निर्देश बिन्दु पर निर्भर करती है। (सामान्यतः $r = \infty$ पर स्थितिज ऊर्जा शून्य ली जाती है।)

Solved Examples

Example 65. a भुजा वाले वर्ग के कोनों पर चार समरूप आवेश q स्थित हैं। किसी एक आवेश की अन्य आवेशों के कारण स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो ?



Solution : बिन्दु A पर स्थित आवेश पर बिन्दुओं B, C और D पर आवेशों के कारण विद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{q}{a}$$

$\therefore$ बिन्दु A पर स्थित आवेश की स्थितिज ऊर्जा $= qV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{q^2}{a}$.

Example 66 एक कण का द्रव्यमान 40 mg और आवेश 5×10^{-9} C है यह 10^{-8} C परिमाण के स्थिर बिन्दुवत आवेश की तरफ गतिशील है। जब इसकी स्थिर आवेश से दूरी 10 cm है तब इसकी चाल 50 cm/s है। स्थिर आवेश से कितनी दूरी पर आकर यह कण कुछ देर के लिए रूक जायेगा ? क्या गति के दौरान त्वरण नियत रहेगा?

Solution : यदि स्थिर आवेश से r दूरी पर कण कुछ देर के लिए रूक जाता हो तो ऊर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r}$$

दिये गये मान रखने पर $\frac{1}{2} \times 40 \times 10^{-6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-8} \times 10^{-9}\left[\frac{1}{r} - 10\right]$

या $\frac{1}{r} - 10 = \frac{5 \times 10^{-6}}{9 \times 5 \times 10^{-8}} = \frac{100}{9} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{190}{9} \Rightarrow r = \frac{9}{190}$ m

या i.e., $r = 4.7 \times 10^{-2}$ m और $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$ इसलिए त्वरण $= \frac{F}{m} \propto \frac{1}{r^2}$

अर्थात गति के दौरान त्वरण नियत नहीं रहता है।

Example 67. एक प्रोटॉन u m/s चाल से अत्यधिक दूरी से मुक्त स्थिर प्रोटॉन की तरफ गतिशील है तो दोनों प्रोटॉन की अधिकतम पहुंच की दूरी द्रव्यमान और इसके आवेश e के पदों में ज्ञात करो।

Solution : यहाँ पर स्थिर आवेश गति करने के लिए स्वतन्त्र है। जब एक कण दूसरे के पास आ रहा होगा तो स्थिर विद्युत प्रतिकर्षण के कारण दूसरा गति करना प्रारम्भ कर देता है। इस कारण पहले कण का वेग घटने लगता है और दूसरे कण का वेग बढ़ने लगता है और उनके बीच पहुंच की निकटतम दूरी के बाद दोनों समान वेग से गति करते हैं। इस प्रकार यदि v संयुक्त वेग हो तो दोनों प्रोटॉन निकायों के संवेग संरक्षण से –

$mu = mv + mv$ i.e., $v = 1/2\, u$

और ऊर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 - m\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \quad [\text{as } v = \frac{u}{2}]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}mu^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow r = \frac{e^2}{\pi m\varepsilon_0 u^2}$$

11. आवेशों के निकाय की वैद्युत स्थितिज ऊर्जा

(इसका उपयोग तब किया जायेगा जबकि एक से अधिक आवेश गति करते हैं)

यह आवेशों के एक निकाय को अनन्त पृथक्करण से किसी एक विशेष विन्यास में गातिज ऊर्जा में परिवर्तन किये बिना लाने के लिए आन्तरिक विद्युत क्षेत्र के विरूद्ध बाह्य कारक के द्वारा किये गये कार्य के बराबर होता है।

11.1 आवेशों के निकाय के प्रकार

(i) बिन्दु आवेश निकाय (ii) सतत् आवेशित निकाय

11.2 बिन्दु आवेशों के निकाय के लिए व्युत्पत्ति :

Method : 1

सभी आवेशों को अनन्त पर रखें। अब एक–एक करके आवेशों को इनकी स्थिति पर लाते हैं और आवश्यक कार्य ज्ञात करते हैं। निकाय की स्थितिज ऊर्जा सभी कार्यो के बीजगणितीय योग के बराबर होती है।

W_1 = प्रथम आवेश को लाने मे किया गया कार्य।

W_2 = प्रथम आवेश के कारण बल के विरूद्ध द्वितीय आवेश को लाने में किया गया कार्य।

W_3 = प्रथम व द्वितीय आवेशों के कारण बल के विरूद्ध तृतीय आवेश को लाने में किया गया कार्य

$PE = W_1 + W_2 + W_3 + ...$. (इसमें $\frac{n(n-1)}{2} = {}^nC_2$ पद है।)

Solved Examples

Example 68 एक दूसरे से r दूरी पर स्थित दो बिन्दुवत् आवेशों q_1 व q_2 के निकाय के लिए स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो।

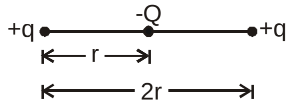
Solution : माना प्रारम्भ में दोनों अत्यधिक दूरी पर रखे हैं।

$W_1 = q_2$ की अनुपस्थिति में आवेश q_1 को लाने में किया गया कार्य $= q\,(V_f - V_i) = 0$

$W_2 = q_1$ की उपस्थिति में q_2 आवेश को लाने में किया गया कार्य $= q(V_f - V_i) = q_1(Kq_2/r - 0)$

स्थितिज ऊर्जा $= W_1 + W_2 = 0 + Kq_1q_2 / r = Kq_1q_2 / r$

Example 69. तीन बिन्दुवत् आवेशों की स्थिति चित्र में प्रदर्शित है। इस व्यवस्था की कुल स्थितिज ऊर्जा शून्य है। $\frac{q}{Q}$ का अनुपात ज्ञात करो।

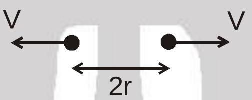


Solution : $U_{निकाय} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-qQ}{r} + \frac{(+q)(+q)}{2r} + \frac{Q(-q)}{r}\right] = 0$

$-Q + \frac{q}{2} - Q = 0$ या $2Q = \frac{q}{2}$ या $\frac{q}{Q} = \frac{4}{1}$.

Example 70. m द्रव्यमान तथा q आवेश के दो बिन्दु आवेश के मध्य की दूरी r है, इन्हें यहाँ से मुक्त किया जाता है। जब दोनों बिन्दु आवेशों के मध्य दूरी 2r है तो प्रत्येक आवेश का वेग क्या होगा?

Solution : संवेग संरक्षण के नियमानुसार दोनों आवेश समान चाल से गति करेंगे ऊर्जा संरक्षण के नियम से



$0 + 0 + \frac{Kq^2}{r} = 2\frac{1}{2}mv^2 + \frac{Kq^2}{2r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Kq^2}{2rm}}$

Example 71. 2×10^{-6} C वाले दो सम आवेशित कणों को अनन्त से 10 cm दूरी तक लाया जाता है। इस प्रक्रम के लिए आवश्यक कार्य व स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि ज्ञात करो

Solution : $\Delta U = U_f - U_i = U_f - 0 = U_f$

दिये गये आवेशों के निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा की सरल तरीके से गणना करते हैं।

$\Delta U = U_f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r} = \frac{9\times10^9\times2\times10^{-5}\times2\times10^{-5}\times100}{10}$ J = 36 J

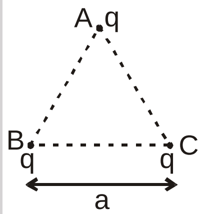
$\therefore$ आवश्यक कार्य = 36 J. निकाय की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर

Example 72. a भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के कोनों पर समान आवेश q स्थित है।

(i) आवेश निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो।

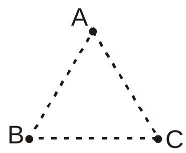
(ii) त्रिभुज की भुजा को a/2 करने के लिए आवश्यक कार्य ज्ञात करो।

(iii) यदि आवेशों को प्रदर्शित स्थिति से छोड़ा जाये और प्रत्येक का द्रव्यमान m हो तो 2a भुजा का त्रिभुज बनने पर इनकी चाल ज्ञात करो।



Solution : **(i)** विधि **I** (व्युत्पन्न)

माना सभी आवेश प्रारम्भ में अनन्त पर है।



आवेश q को कोने A पर रखने में किया गया कार्य है।

$W_1 = q\,(v_f - v_i) = q\,(0 - 0)$

चूंकि आवेशों की अनुपस्थिति में A बिन्दु पर विभव शून्य होता है।

A पर आवेश की उपस्थिति में q आवेश को कोने B पर रखने में किया गया कार्य

$W_2 = \left(\frac{Kq}{a} - 0\right) = \frac{Kq^2}{a}$

इसी तरह A व B पर आवेश की उपस्थिति में कोने C पर q आवेश को लाने में किया गया कार्य

$W_3 = q(v_f - v_i) = q\left[\left(\frac{Kq}{a} + \frac{Kq}{a}\right) - 0\right] = \frac{2kq^2}{a}$

अतः कुल स्थितिज ऊर्जा PE = $W_1 + W_2 + W_3 = 0 + \frac{Kq^2}{a} + \frac{2Kq^2}{a} = \frac{3Kq^2}{a}$

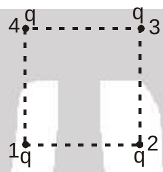
विधि **II** (सीधे सूत्र के प्रयोग से) $U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{a} = \frac{3Kq^2}{a}$

(ii) भुजाओं को कम करने में आवश्यक कार्य $W = U_f - U_i = \frac{3Kq^2}{a/2} - \frac{3Kq^2}{a} = \frac{3Kq^2}{a}$

(iii) विद्युत बल द्वारा किया गया कार्य = कणों की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन $U_i - U_f = K_f - K_i$

$\Rightarrow \frac{3Kq^2}{a} - \frac{3Kq^2}{2a} = 3(\frac{1}{2}mv^2) - 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Kq^2}{am}}$

Example 73 a भुजा के वर्ग के चारों कोनों पर चार समरूप आवेश प्रत्येक q रखे हैं। आवेश निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो।



Solution : **विधि 1 : (**सीधे सूत्र से **) :** $U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$

$= \frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{a\sqrt{2}} + \frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{a\sqrt{2}} + \frac{Kq^2}{a} = \left[\frac{4Kq^2}{a} + \frac{2Kq^2}{a\sqrt{2}}\right] = \frac{2Kq^2}{a}\left[2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

विधि 2 : [U = $\frac{1}{2}$ ($U_1 + U_2 + ...$) के प्रयोग से] **:**

U_1 = कोने 1 पर स्थित आवेश की दूसरे आवेशो के कारण कुल स्थितिज ऊर्जा

U_2 = कोने 2 पर स्थित आवेश की दूसरे आवेशो के कारण कुल स्थितिज ऊर्जा

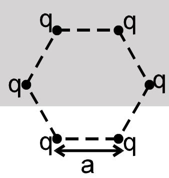
U_3 = कोने 3 पर स्थित आवेश की दूसरे आवेशो के कारण कुल स्थितिज ऊर्जा

U_4 = कोने 4 पर स्थित आवेश की दूसरे आवेशो के कारण कुल स्थितिज ऊर्जा

सममितता से $U_1 = U_2 = U_3 = U_4$

$U_{Net} = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{2} = 2U_1 = 2\left[\frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{a} + \frac{Kq^2}{\sqrt{2}a}\right] = \frac{2Kq^2}{a}\left[2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Example 74 एक a भुजा वाले सम–षठभुज के कोनों पर छः समान आवेश प्रत्येक q स्थित है। आवेश निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो।



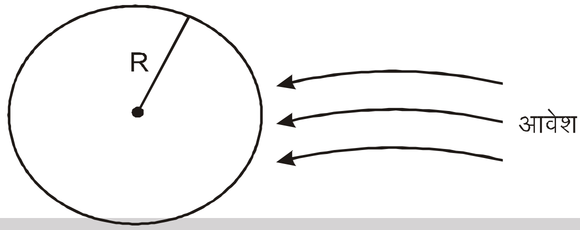
Solution : $U_{Net} = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6}{2}$

सममितता के कारण $U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = U_6$ इसलिए $U_{net} = 3U_1 = \frac{3Kq^2}{a}\left[2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right]$

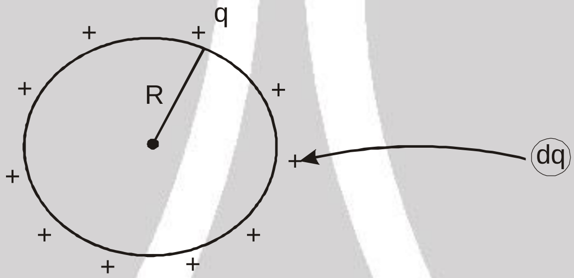
11.3 सतत् आवेशित निकाय के लिये विद्युत स्थितिज ऊर्जा की व्युत्पत्ति

इस ऊर्जा को स्व ऊर्जा भी कहते है।

(i) समान आवेशित गोलीय कोश के लिए स्व ऊर्जा ज्ञात करना : इसके लिये विधि 1 का प्रयोग करते हैं। एक अनावेशित कोश लेते हैं और अब कोश की सतह पर एक–एक करके अनन्त से आवेशों को लाया जाता है। इस प्रक्रिया में आवश्यक कार्य, स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।



माना गोले पर आवेश q है और हम इसे अतिरिक्त आवेश dq देते हैं। आवेश dq को अनन्त से इस कोश तक लाने मे किया गया कार्य है।



$dw = (dq)\,(V_f - V_i)$

$\Rightarrow \; dW = (dq)\left(\frac{Kq}{R} - 0\right) = \frac{Kq}{R}dq$

$\Rightarrow$ Q आवेश देने के लिये आवश्यक कुल कार्य W है। $\int_{q=0}^{q=Q} \frac{Kq}{R} = dq = \frac{KQ^2}{2R}$

यह कार्य स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित होता है। अतः आवेशित गोलीय कोश के कारण स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{KQ^2}{2R}$

(ii) समरूप आवेशित ठोस गोले के कारण स्व ऊर्जा : इस स्थिति में हम एक ठोस आवेशित गोले की कल्पना करते हैं। हम अनन्त से एक–एक करके आवेशों को गोले तक लाते हैं जिससे गोले का आकार बढ़ जाता है।

माना q आवेश गोले पर दिया गया है और इसकी त्रिज्या 'x' है अब हम इसे अतिरिक्त आवेश dq देते हैं जिससे इसकी त्रिज्या 'dx' से बढ़ जाती है। dq आवेश को अनन्त से गोले तक लाने में आवश्यक कार्य

$= dq\,(V_f - V_i) = (dq)\left(\frac{Kq}{x} - 0\right) = \frac{Kqdq}{x}$

गोले को Q आवेश देने के लिये आवश्यक कुल कार्य $W = \int \frac{Kqdq}{x}$, जहाँ $q = \rho\left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)$

तथा $dq = \rho\,(4\,\pi x^2\,dx)$ $\quad \Rightarrow \; W = \int_{x=0}^{x=R} K\frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)\;\rho\;(4\pi x^2 dx)}{x}$

इसे हल करने पर

$W = \frac{3}{5}\frac{KQ^2}{R}$ = ठोस गोले के लिए U_{self} है।

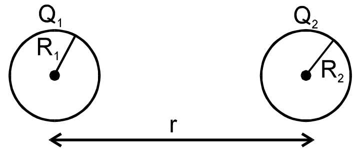
Solved Examples

Example 75 R त्रिज्या के गोलीय कोश पर q आवेश समान रूप से वितरित है, इसे 2R त्रिज्या तक विस्तारित किया जाता है। तो इस प्रक्रिया में विद्युत बलों के विरूद्ध विद्युत बल तथा बाह्य कर्ता द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : $W_{\text{बाह्य}} = U_f - U_i = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R} - \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = -\dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}$

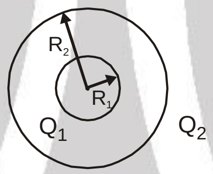
$W_{\text{विद्युत}} = U_i - U_f = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}$

Example 76 R_1 व R_2 त्रिज्या के दो अचालक खोखले गोलों पर क्रमशः Q_1 व Q_2 आवेश समान रूप से वितरित है तथा यह एक दूसरे से r दूरी पर स्थित है। निकाय की कुल ऊर्जा ज्ञात करो।



Solution : $U_{\text{कुल}} = U_{\text{स्वयं}} + U_{\text{अन्योन्य}} = \dfrac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} + \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Example 77 R_1 तथा R_2 ($R_2 > R_1$) त्रिज्या के दो संकेन्द्रीय गोलीय कोश पर क्रमशः Q_1 तथा Q_2 आवेश वितरीत है तो निकाय की कुल ऊर्जा ज्ञात करो?



Solution : $U_{\text{कुल}} = U_{\text{स्वंय 1}} + U_{\text{स्वंय 2}} + U_{\text{अन्योन्य}} = \dfrac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} + \dfrac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

11.4 ऊर्जा घनत्व :

परिभाषा : किसी विद्युत क्षेत्र के एकांक आयतन में निहित ऊर्जा को ऊर्जा घनत्व कहते हैं। इसका गणितीय सूत्र निम्न है।

ऊर्जा घनत्व $= \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

जहां E = उस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ माध्यम की विद्युत शीलता

Solved Examples

Example 78. अनन्त अचालक σ समरूप आवेश घनत्व की पट्टिकाओं के सामने रखे a भुजा वाले काल्पनिक घन के आयतन में संचित ऊर्जा ज्ञात करो?

Solution : संचित ऊर्जा

$U = \int \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \; dV$ यहॉं dV अल्प आयतन है।

$\therefore \; U = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \int dV$ $\because$ E नियत है।

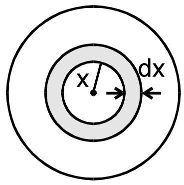
$\therefore \; U = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \dfrac{\sigma^2}{4\varepsilon_0^2} . a^3 .$ या $U = \dfrac{\sigma^2 a^3}{8\varepsilon_0}$

Example 79. कुल आवेश Q तथा R त्रिज्या के एक पतले एक समान रूप से आवेशित गोलिय कोश के विद्युत क्षेत्र में संग्रहित ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

Solution : हम जानते है कि कोश के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है, अतः ऊर्जा केवल कोश के बाहर ही संग्रहित होगी। जो ऊर्जा घनत्व के सूत्र द्वारा ज्ञात की जा सकती है।

$$U_{self} = \int_{x=R}^{x\to\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$$

x(x > R) त्रिज्या तथा dx मोटाई के अल्पांश कोश पर विचार करते है



कोश का आयतन = $(4\pi x^2 dx) = dV$

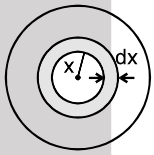
$$U = \int_R^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\frac{KQ}{x^2}\right]^2 . 4\pi x^2\, dx = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, K^2Q^2 4\pi \int_R^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\ \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} . \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{KQ^2}{2R}.$$

Example 80. Q आवेश तथा R त्रिज्या के अचालक ठोस गोले के अंदर संचयित ऊर्जा ज्ञात करो। (मानना है आवेश इसके आयतन में समान रूप से वितरित है।)

Solution : हम यह मान सकते हैं कि ठोस गोला बहुत सारे संकेन्द्रीय गोलीय कोशों से मिलकर बना है। तथा किसी भी गोलीय कोश की स्थिति पर विद्युत क्षेत्र नियत रहता है।

$$\therefore \quad U_{अंदर} = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV$$



सूक्ष्म मोटाई dx तथा x त्रिज्या का गोलीय कोश मानते हैं।

कोश का आयतन = $(4\pi x^2 dx)$

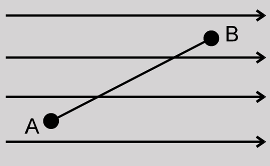
$$U = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\frac{KQx}{R^3}\right]^2 . 4\pi x^2\, dx = \frac{1}{2}\varepsilon_0\ \frac{K^2Q^2 4\pi}{R^6} \int_0^R x^4 dx$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{2R^6}\ \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} . \frac{R^5}{5} = \frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0 R} = \frac{KQ^2}{10R}.$$

12. विद्युत क्षेत्र की तीव्रता तथा विद्युत विभव के बीच में सम्बन्ध

12.1 समरूप विद्युत क्षेत्र के लिए :

(i) दो बिन्दुओं A तथा B के बीच विभवान्तर



$$V_B - V_A = -\vec{E} . \vec{AB}$$

12.2 असमरूप विद्युत क्षेत्र

(i) $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow \vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$

$$= -\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}V + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}V + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}V\right] = -\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]V = -\nabla V = -V \text{ की प्रवणता}$$

जहाँ $\frac{\partial V}{\partial x}$ = V का x के सापेक्ष अवकलन (y और z को नियत रखते हुए)

$\frac{\partial V}{\partial y}$ = V का y के सापेक्ष अवकलन (z और x को नियत रखते हुए)

$\frac{\partial V}{\partial z}$ = V का z के सापेक्ष अवकलन (x और y को नियत रखते हुए)

12.3 यदि विद्युत विभव और विद्युत क्षेत्र केवल एक निर्देशांक r पर निर्भर करे तो :

(i) $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r}$ जहाँ $\hat{r}$, r की बढ़ती हुई दिशा के अनुदिश एकांक सदिश है।

(ii) $\int dV = -\int \vec{E}\cdot\vec{dr} \Rightarrow V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}.\vec{dr}$

$\vec{dr}$, r की बढ़ती हुई दिशा में सदिश है।

(iii) किसी बिन्दु पर विभव $V = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}.\vec{dr}$

Solved Examples

Example 81. एक समान वि०क्षे० x-अक्ष के अनुदिश है। दो बिन्दुओं A(2m, 3m) व B(4m, 8m) के बीच विभवान्तर $V_A - V_B = 10$ V है। विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात कीजिए।

Solution : $E = \frac{\Delta V}{\Delta d} = \frac{10}{2} = 5$ V / m.

यह धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश है।

Example 82. यदि $V = x^2 + y$ हो, तो ज्ञात कीजिए।

Solution : $\frac{\partial V}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 1$ तथा $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

$$\vec{E} = -\left(\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -(2x\,\hat{i} + \hat{j})$$

विद्युत क्षेत्र एक समान नहीं है।

Example 83. यदि मूल बिन्दु पर V = 5 वोल्ट है तो $\vec{E} = 2x\hat{i} + 3y\hat{j}$ के लिए (x, y) बिन्दु पर विभव ज्ञात कीजिए।

Solution : $\int_5^v dV = -\int \vec{E}\cdot\vec{dr} = -\int_0^x E_x dx - \int_0^y E_y dy \Rightarrow V - 5 = -\frac{2x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} \Rightarrow V = -\frac{2x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + 5.$

13. विद्युत द्वि–ध्रुव

13.1 द्वि–ध्रुव आघूर्ण (परिभाषा)

यदि समान परिमाण q व विपरीत चिन्ह के दो बिन्दु आवेश एक दूसरे से 'a' दूरी पर इस प्रकार रखे हुए हो की क्षेत्रीय बिन्दु की दूरी r >> a है तो इस निकाय को वैद्युत द्विध्रुव कहते हैं। द्विध्रुव आघूर्ण को p = (q × a) परिमाण वाली सदिश राशि के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसकी दिशा ऋणावेश से धनावेश की ओर होती है।

Note: [रसायन विज्ञान में द्विध्रुव आघूर्ण की दिशा धनावेश से ऋणावेश की ओर मानी जाती है।] विद्युत द्विध्रुव का C.G.S मात्रक डिबाई होता है। दो समान तथा 10^{-10} फ्रेंकलिन आवेश वाले बिन्दु आवेश एक दूसरे से 1 Å दूरी पर रखे हों तो ऐसे निकाय के द्विध्रुव आघूर्ण को डिबाई कहते हैं।

1 डिबाई (D) = $10^{-10} \times 10^{-8} = 10^{-18}$ Fr × cm

$$1\ D = 10^{-18} \times \frac{C}{3\times10^9} \times 10^{-2}\ m = 3.3 \times 10^{-30}\ C \times m.$$

S.I. मात्रक कूलॉम × मात्रक = C.m

Solved Examples

Example 84 एक निकाय में दो आवेश $q_A = 2.5 \times 10^{-7}$ C और $q_B = -2.5 \times 10^{-7}$ C क्रमशः बिन्दुओं A : (0, 0, – 0.15 m) और B; (0, 0, + 0.15 m) पर स्थित है। तो निकाय का कुल आवेश व विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण क्या होगा ?

Solution : कुल आवेश = $2.5 \times 10^{-7} - 2.5 \times 10^{-7} = 0$

विधुत द्विध्रुव आघूर्ण,

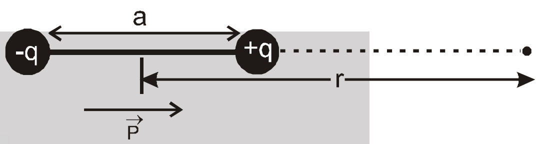
P = (आवेश का परिमाण) × (आवेशों के बीच की दूरी)

$= 2.5 \times 10^{-7}\,[0.15 + 0.15]$ Cm $= 7.5 \times 10^{-8}$ C m

द्विध्रुव आघूर्ण की दिशा B से A होगी।

13.2 द्विध्रुव के कारण विद्युत क्षेत्र की तीव्रता

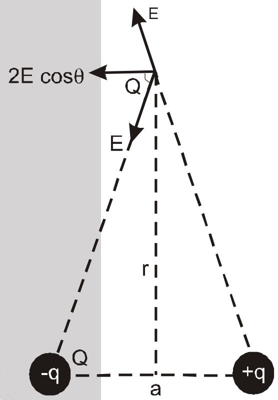
(i) अक्षीय बिन्दु पर



$= \vec{E} = \dfrac{Kq}{\left(r - \dfrac{a}{2}\right)^2} - \dfrac{Kq}{\left(r + \dfrac{a}{2}\right)^2}$ $\vec{P}$ के अनुदिश

यदि r >> a तब $\vec{E} = \dfrac{Kq2ra}{r^4}\hat{P} = \dfrac{2K\vec{P}}{r^3}$, अक्षीय बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र तीव्रता की दिशा द्विध्रुव आघूर्ण ($\vec{P}$) की दिशा में होगी। अतः $\vec{E}_{axial} = \dfrac{2K\vec{P}}{r^3}$

(ii) लम्बवत्–विभाजक पर (निरक्ष पर) विद्युत क्षेत्र तीव्रता



$E_{net} = 2\,E\cos\theta$ (along $-\hat{P}$)

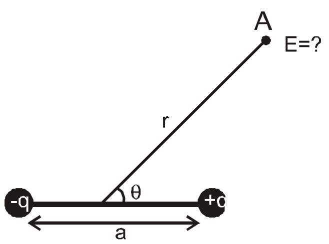
$$\vec{E}_{net} = 2\left(\frac{Kq}{\left(\sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2}\right)\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}(-\hat{P}) = \frac{Kqa}{\left(r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}}(-\hat{P})$$

यदि r >> a, तब $\vec{E}_{net} = \dfrac{KP}{r^3}(-\hat{P})$

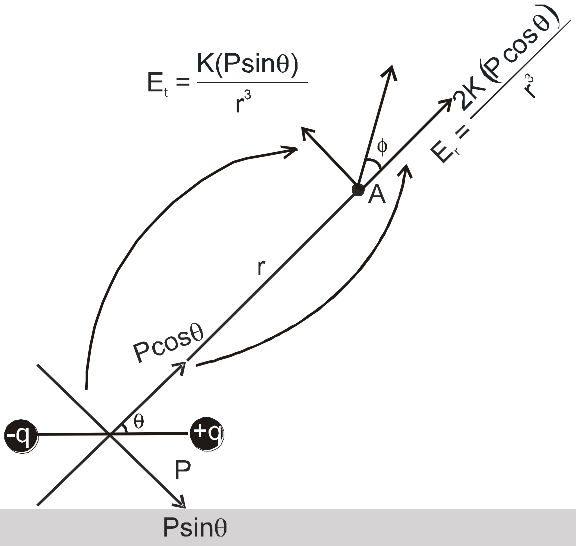
क्योंकि निरक्ष पर $\vec{E}$ की दिशा, $\vec{P}$ की दिशा में विपरीत है अतः सदिश रूप में –

$\vec{E}_{eqt} = -\dfrac{K\vec{P}}{r^3}$

(iii) किसी व्यापक बिन्दु (r, θ) पर विद्युत क्षेत्र



इसके लिए द्विध्रुव आर्घूण $\vec{P}$ को घटकों में विभाजित करते हैं।



एक घटक P cosθ त्रिज्यीय रेखा के अनुदिश है और एक घटक Psinθ त्रिज्यीय रेखा के लम्बवत है।

$$E_{net} = \sqrt{E_r^2 + E_t^2} = \sqrt{\left(\frac{2KP\cos\theta}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{KP\sin\theta}{r^3}\right)^2} = \frac{KP}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

$$\tan\phi = \frac{E_t}{E_r} = \frac{\frac{KP\sin\theta}{r^3}}{\frac{2KP\cos\theta}{r^3}} = \frac{\tan\theta}{2}$$

$$E_{net} = \frac{KP}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}\ ;\ \tan\phi = \frac{\tan\theta}{2}$$

Solved Examples

Example 85. एक छोटे द्विध्रुव की अक्षीय रेखा पर द्विध्रुव के मध्य बिन्दु से r दूरी पर विद्युत क्षेत्र वही है जो इसकी निरक्ष पर द्विध्रुव के मध्य बिन्दु से r' दूरी पर है तो $\frac{r}{r'}$ का अनुपात ज्ञात करो?

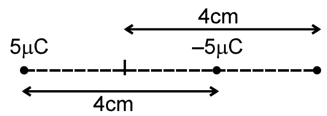
Solution : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r'^3}$ तथा $\frac{2}{r^3} = \frac{1}{r'^3}$

तथा $\frac{r^3}{r'^3} = 2$ तथा $\frac{r}{r'} = 2^{1/3}$

Example 86. दो विपरीत आवेश जिनका परिमाण 5 μC है एक दूसरे से 4 cm दूरी पर स्थिति है तो इस द्विध्रुव के अक्ष पर इसके मध्य बिन्दु से 4 cm की दूरी पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता ज्ञात करो?

Solution : हम अल्प द्विध्रुव के सूत्र का प्रयोग नहीं कर सकते हैं। क्योंकि यहां पर बिन्दु की दूरी, दो बिन्दुवत् आवेशों के मध्य की दूरी के तुल्य है।

$q = 5 \times 10^{-6}$ C, $a = 4 \times 10^{-2}$ m, $r = 4 \times 10^{-2}$ m

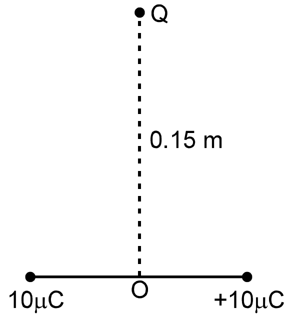


$$E_{परिणामी} = E_+ + E_- = \frac{K(5\mu C)}{(2cm)^2} - \frac{K(5\mu C)}{(6cm)^2}$$

$$= \frac{144}{144\times10^{-8}}\ NC^{-1} = 10^8\ N\ C^{-1}$$

Example 87 ± 10 μC के दो आवेश एक दूसरे से 5×10^{-3} m की दूरी पर चित्रानुसार स्थित हैं। इसकी समविभव रेखा पर O से 0.15m की दूरी पर बिन्दु Q पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करो?

Solution :



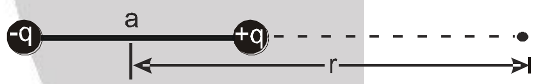
दिये गये प्रश्न में, r >> a

$\therefore \quad E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{r^3} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q(a)}{r^3}$

तथा $E = 9 \times 10^9 \dfrac{10\times10^{-6}\times5\times10^{-3}}{0.15\times0.15\times0.15} NC^{-1} = 1.33 \times 10^5 NC^{-1}$

13.3 छोटे द्विध्रुव के द्वारा विद्युत विभव

(i) अक्षीय स्थिति पर विभव $V = \dfrac{Kq}{\left(r-\dfrac{a}{2}\right)} + \dfrac{K(-q)}{\left(r+\dfrac{a}{2}\right)}$

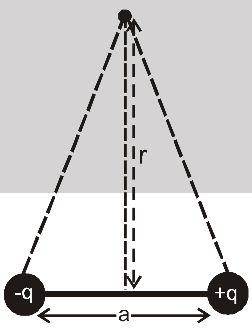


$V = \dfrac{Kqa}{\left(r^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\right)}$

यदि r >> a तब $V = \dfrac{Kqa}{r^2}$ जहाँ qa = p

$\therefore \quad V_{\text{अक्षीय}} = \dfrac{KP}{r^2}$

(ii) निरक्ष की स्थिति पर विभव

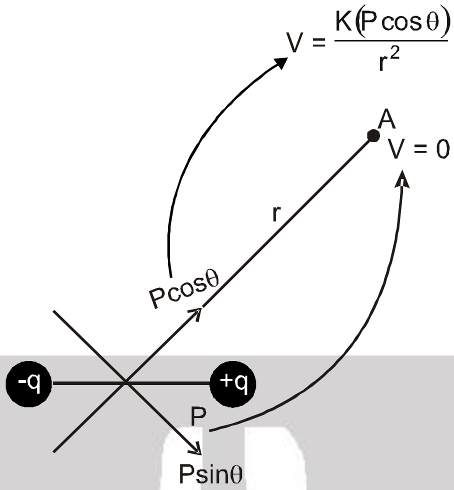


$V = \dfrac{Kq}{\sqrt{r2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} + \dfrac{K(-q)}{\sqrt{r^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}} = 0$

$V_{eqt} = 0$

(iii) व्यापक बिन्दु पर विभव **(r,θ)**

माना द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{P}$ को दो घटक त्रिज्यी रेखा के अनुदिश Pcosθ और त्रिज्यीय रेखा के लम्बवत् Psinθ घटकों में तोड़ते हैं।



Pcosθ घटक के लिये बिन्दु A अक्षीय बिन्दु है अतः A पर Pcosθ घटक के कारण विभव = $\frac{K(P\cos\theta)}{r^2}$

और Psinθ घटक के लिये बिन्दु A निरक्ष पर स्थित बिन्दु है अतः

Psinθ घटक के कारण A पर विभव = 0

$V_{net} = \frac{K(P\cos\theta)}{r^2}$

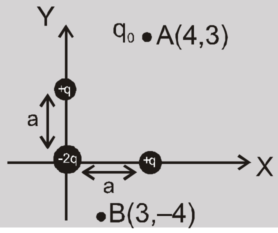
सदिश रूप में

$\therefore \quad V = \frac{K\left(\vec{P}.\vec{r}\right)}{r^3}$

Solved Examples

Example 88. (i) मूल बिन्दु के पास स्थिर छोटे आवेश निकाय के कारण बिन्दु A और B पर विभव ज्ञात करो?

(ii) किसी प्रेक्षण आवेश q_0 को A से बिन्दु B तक, धीरे–धीरे लाने में किया गया कार्य ज्ञात करो?



Solution : (i) निकाय का द्विध्रुव आघूर्ण है

$\vec{P} = (qa)\hat{i} + (qa)\hat{j}$

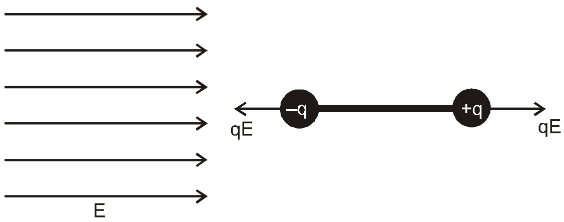
द्विध्रुव के कारण बिन्दु A पर विभव $V_A = \frac{(\vec{P}\cdot\vec{r})}{r^3}K = \frac{K[(qa)\hat{i}+(qa)\hat{j}]\cdot(4\hat{i}+3\hat{j})}{5^3} = \frac{k(qa)}{125}(7)$

$\Rightarrow \quad V_B = \frac{K\left[(qa)\hat{i}+(qa)\hat{j}\right](3\hat{i}-4\hat{j})}{(5)^3} = \frac{K(qa)}{125}$

(ii) $W_{A\to B} = U_B - U_A = q_0\,(V_B - V_A) = q_0\left[-\frac{K(qa)}{125} - \left(\frac{K(qa)(7)}{125}\right)\right] \Rightarrow W_{A\to B} = \frac{Kqq_0a}{125}(8)$

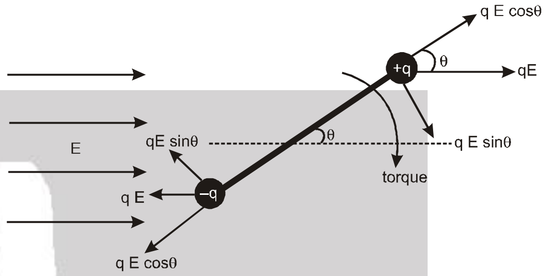
13.4 समरूप विद्युत क्षेत्र मे द्विध्रुव

(i) द्विध्रुव यदि विद्युत क्षेत्र के अनुदिश रखा है?



इस स्थिति में $F_{net} = 0$, $\tau_{net} = 0$ अतः यह साम्यावस्था है और यह स्थायी साम्यावस्था है।

(ii) यदि द्विध्रुव $\vec{E}$ से कोण θ पर रखा है।



इस स्थिति में $F_{net} = 0$

कुल बलाघूर्ण $\tau = (qE\sin\theta)$ (a)

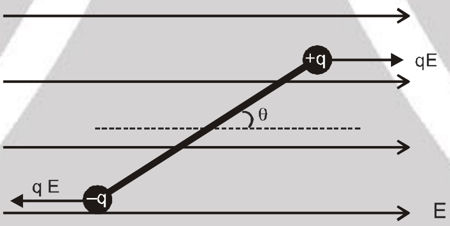
यहाँ $qa = P \Rightarrow \tau = PE\sin\theta$

सदिश रूप में $\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}$

Solved Examples

Example 89. एक द्विध्रुव दो बिन्दु आवेश जिनका आवेश – q और + q है और प्रत्येक का द्रव्यमान m है, से बना है। दोनों बिन्दु आवेश ℓ लम्बाई और m द्रव्यमान की छड़ से जुड़े हुये हैं। यह द्विध्रुव समान विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में रखा है। यदि द्विध्रुव को स्थायी साम्यवस्था से θ कोण से विक्षेपित किया जाता है तो सिद्ध करो कि इसकी गति लगभग S.H.M. होगी। इसका कलान्तर भी ज्ञात करो।

Solution :



यदि द्विध्रुव को θ कोण से विक्षेपित करें तब –

$\tau_{net} = -PE\sin\theta$ (यहाँ – ve चिन्ह यह दर्शाता है कि बलाघूर्ण θ के विपरीत है।

यदि θ बहुत छोटा है तो $\sin\theta \cong \theta$

$\tau_{net} = -(PE)\theta$

$\tau_{net} \propto (-\theta)$ अत, गति सरल आवर्त गति है।

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$ & $C = PE$ (जहाँ $P = q\ell$)

$$\therefore \; T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell}{12} + 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{P.E}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell}{12} + \frac{m\ell^2}{2}}{q\ell E}}$$

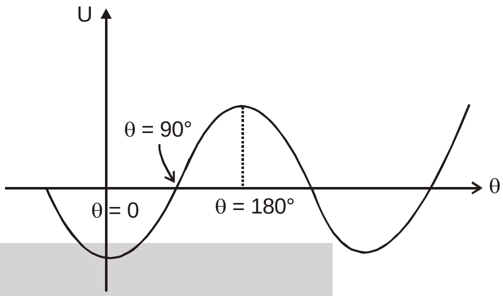
$$= 2\pi\sqrt{\frac{7m\ell^2}{12q\ell E}} = 2\pi\sqrt{\frac{7m\ell}{12qE}} \quad T = \pi\sqrt{\frac{7m\ell}{3qE}}$$

(iii) समरूप विद्युत क्षेत्र में स्थित द्विध्रुव की स्थितिज विद्युत ऊर्जा

$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}\cdot\vec{dr}$ (स्थानान्तरीय गति के लिए) यहाँ $U_B - U_A = -\int_A^B \tau . \vec{d\theta}$ (घूर्णन गति के लिए)

द्विध्रुव की स्थिति में, $\theta = 90°$ स्थितिज ऊर्जा शून्य होगी।

$U_\theta - U_{90°} = -\int_{\theta=90°}^{\theta=\theta} (-PE\sin\theta)(d\theta)$



(क्योंकि बलाघूर्ण की दिशा, θ में विपरीत है)

$U_\theta - 0 = -PE\cos\theta$

निर्देश के लिये $\theta = 90°$ चुना है

जिससे निम्न सीमा शून्य हो जायेगी

$U_\theta = -\vec{P}\cdot\vec{E}$

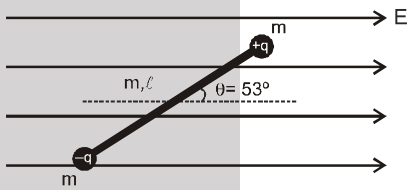
स्थितिज ऊर्जा वक्र से हम कह सकते हैं

(i) स्थितिज ऊर्जा वक्र से हम कह सकते हैं $\theta = 0$, पर P.E. न्यूनतम है अतः यह स्थायी साम्यावस्था हें

(ii) $\theta = 180°$ पर P.E. अधिकतम है अतः यह अस्थायी साम्यावस्था है।

Solved Examples

Example 90. दो बिन्दु द्रव्यमान m व समान परिमाण q के विपरीत आवेश, m द्रव्यमान की एक अचालक समरूप छड़ के कोनों पर रखे हैं एवं निकाय को समरूप विद्युत क्षेत्र E में $\theta = 53°$ के कोण से चित्रानुसार छोड़ा जाता हैं तो



(i) छोड़ने के तुरन्त बाद कोणीय त्वरण ज्ञात करो?

(ii) जब यह स्थायी साम्यावस्था को पार करता है, तब इसका कोणीय वेग क्या होगा?

(iii) इसे 180° से घूर्णन करने के लिये आवश्यक कार्य की गणना करो ?

Solution : (i) $t_{net} = PE\sin 53° = I\alpha$ $\quad\therefore\quad$ $\alpha = \dfrac{(q\ell)E\left(\frac{4}{3}\right)}{\frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

(ii) ऊर्जा संरक्षण से $K_i + U_i = K_f + U_f$

$0 + (-PE(\cos 53°) = \frac{1}{2}I\omega^2 + (-PE\cos 0°)$

जहाँ $I = \dfrac{m\ell^2}{12} + m\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 + m\left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 = \dfrac{7m\ell^2}{12}$

$\therefore \quad \frac{1}{2}I\omega^2 = PE(1 - 3/5) = \frac{2}{5}PE$

$\therefore \quad \frac{1}{2} \times \frac{7m\ell^2}{12} \times \omega^2 = \frac{2}{5}q\ell E$ $\quad$ या $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{48\ \ qE}{35\ m\ell}}$

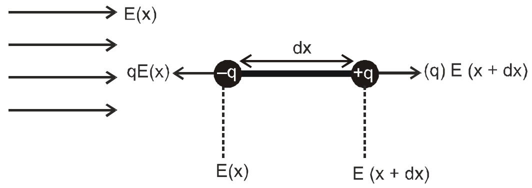
(iii) $\because\ W_{ext} = U_f - U_i$

$W_{ext} = (-PE\cos(180° + 53°)\ - (-PE\cos 53°)$

$W_{ext} = (q\ell)E\left(\frac{3}{5}\right) + (q\ell)E\left(\frac{3}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad W_{us} = \left(\frac{6}{5}\right)q\ell E$

13.5 असमान विद्युत क्षेत्र में द्वि–ध्रुव

(यदि द्विध्रुव $\vec{E}$ की दिशा में चित्रानुसार रखा है)



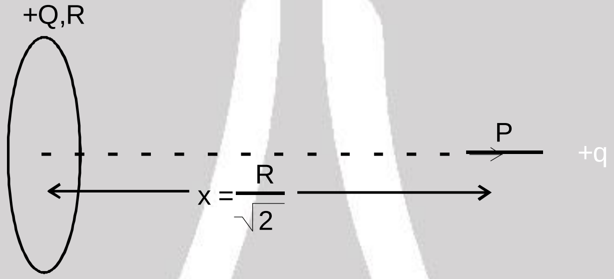
द्विध्रुव पर लगने वाला कुल बल $F_{net} = qE(x + dx) – qE(x)$

$$F_{net} = q\,\frac{E(x+dx)-E(x)}{dx}\,(dx) \text{ यह } q\,(dx) = P$$

$$\therefore \quad F_{net} = P\left(\frac{dE}{dx}\right)$$

Solved Examples

Example 91. एक छोटा द्विध्रुव एक समरूप आवेशित वलय (कुल आवेश Q, त्रिज्या R) की अक्ष पर वलय के केन्द्र से $\frac{R}{\sqrt{2}}$ दूरी पर चित्रानुसार रखा है। वलय के कारण द्विध्रुव पर लगने वाला बल ज्ञात करो।



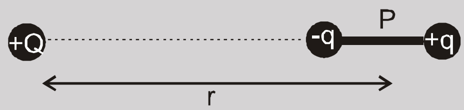
Solution : $F = P\left(\frac{dE}{dx}\right) \Rightarrow F = P\frac{d}{dx}\left(\frac{KQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\right) \;|\; (\text{at } x = \frac{R}{\sqrt{2}})$

इसे हल करने पर हम प्राप्त करते हैं $F = 0$

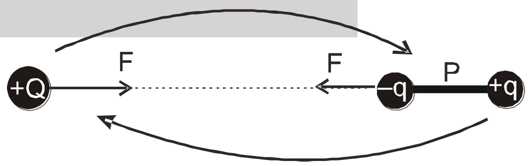
13.6 द्विध्रुव और बिन्दु आवेश के मध्य बल

Solved Examples

Example 92. द्विध्रुव आघूर्ण P का एक छोटा द्विध्रुव एक बिन्दु आवेश Q के पास चित्रानुसार रखा है। बिन्दु आवेश के कारण द्विध्रुव पर बल ज्ञात करो



Solution : द्विध्रुव के कारण बिन्दु आवेश पर बल



$F = (Q)\,E_{dipole}$

$F = (Q)\left(\frac{2KP}{r^3}\right)$ (दांयीं ओर)

क्रिया प्रतिक्रिया नियम से, बिन्दु आवेश के कारण द्विध्रुव पर बल द्विध्रुव के कारण बिन्दु आवेश पर बल के बराबर परिमाण का होगा।

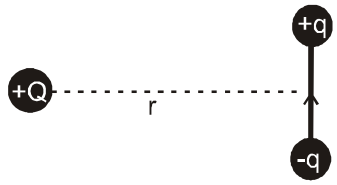
$F = \frac{2KPQ}{r^3}$ (बांयीं ओर)

यह बिन्दु आवेश के कारण द्विध्रुव पर बल है।

13.7 द्विध्रुव और द्विध्रुव के मध्य बल या दो द्विध्रुवो के मध्य बल

Solved Examples

Example 93 बिन्दु आवेश +Q के कारण द्विध्रुव पर लगने वाला बल ज्ञात करो ?



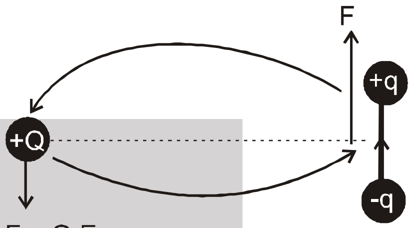
Solution : द्विध्रुव के कारण, बिन्दु आवेश पर लगने वाला बल

$F = (Q)\ (E_{dipole})$

$F = (Q)\left(\frac{KP}{r^3}\right)(\downarrow)$

अतः बिन्दु आवेश के कारण द्विध्रुव पर लगने वाला बल भी यही होगा

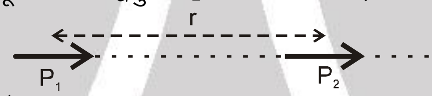
$F = \left(\frac{KPQ}{r^3}\right)(\uparrow)$ लेकिन विपरीत दिशा में



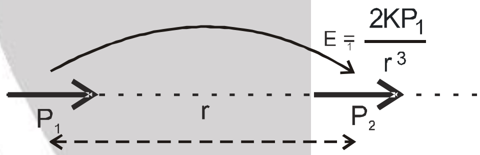
$F = Q\ E_{dipole}$

$= (Q)\left(\frac{KP}{r^3}\right)$

Example 94. एक छोटे द्विध्रुव P_2 पर दूसरे छोटे द्विध्रुव P_1 के कारण बल ज्ञात करो, यदि वे चित्रानुसार r दूरी पर रखे है।



Solution : P_1 के कारण P_2 पर लगने वाला बल

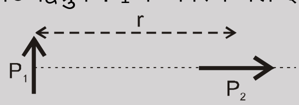


$F_2 = (P_2)\left(\frac{dE_1}{dr}\right)$

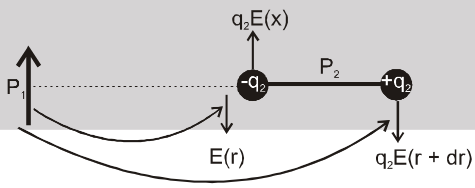
$F_2 = (P_2)\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{2kP_1}{r^3}\right)\right) \Rightarrow \quad F_2 = -\frac{6KP_1P_2}{r^4}$

ऋणात्मक चिन्ह बताता है कि यह बल आकर्षण बल है।

Example 95 एक छोटे द्विध्रुव P_2 पर दूसरे छोटे द्विध्रुव P_1 के कारण बल ज्ञात करो, यदि वे चित्रानुसार r दूरी पर रखे है।



Solution :



$F_{net} = q_2\ E\ (r + dr) - q_2\ E\ (r)$

$F_{net} = q_2\left(\frac{E(q+dr)-E(r)}{dr}\right) dr \quad \Rightarrow \quad F_{net} = (P_2)\left(\frac{dE}{dr}\right)$

सामान्यतः यह सूत्र जब द्विध्रुव को $\vec{E}$ के अनुदिश रखा हैं तब लागू होता है, फिर भी इस स्थिति में भी हम समान सूत्र प्राप्त करते हैं।

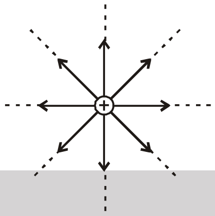
$F_{net} = (P_2)\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{KP_1}{r^3}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad F_{net} = \frac{3KP_1P_2}{r^4}$ (दिशा ऊपर की ओर)

14. विद्युत बल रेखाऐं (ELOF)

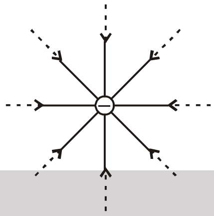
विद्युत क्षेत्र में बल रखाऐं, काल्पनिक रेखाऐं होती है। इस प्रदर्शित करने वाली रेखा पर खींची गई स्पर्श रेखा, उस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा को प्रदर्शित करती हैं।

14.1 गुण :

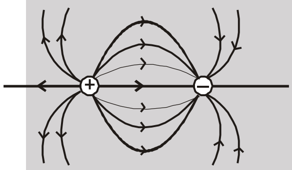
(i) बल रेखाऐं धनावेश से बाहर की ओर निकलती है तथा एक ऋणावेश पर समाप्त होती है। यदि केवल एक धनावेश है तो बल रेखाऐं धनावेश से निकलकर ∞ पर जाती हैं और केवल एक ऋणावेश है तो बल रेखाऐं ∞ से प्रारम्भ होकर ऋणावेश पर मिलती हैं।



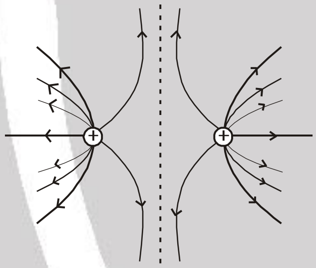
विलगित धनात्मक आवेश के लिए **ELOF**



विलगित ऋणात्मक आवेश के लिए **ELOF**

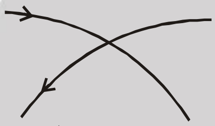


धनात्मक तथा ऋणात्मक आवेश के लिए **ELOF**



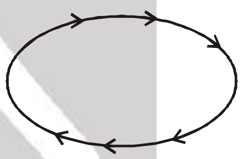
दो धनात्मक आवेश के कारण **ELOF**

(ii) दो बल रेखाएं आपस में कभी एक–दूसरे को नही काटती हैं क्योंकि किसी एक बिन्दु पर $\vec{E}$ की दो दिशा सम्भव नहीं हो सकती है।



असम्भव

(iii) स्थिर आवेश द्वारा बनने वाली विद्युत बल रेखाएं, बन्द लूप का निर्माण नहीं करती हैं। यदि बल रेखाएं किसी बंद लूप का निर्माण करती है, तब +q आवेश को लूप के अनुदिश गति कराने पर किया कार्य अशून्य होगा। अतः यह संरक्षित क्षेत्र नहीं है। अतः इस तरह की बल रेखाएं सम्भव नही है।

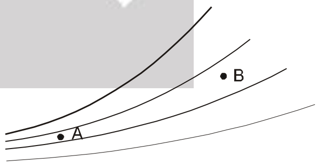


(iv) एकांक क्षेत्रफलन से गुजरने वाली रेखाओ की संख्या (रेखा घनत्व) विद्युत क्षेत्र के परिणाम को दर्शाता है।

यदि रेखाएं सघन है $\Rightarrow$ तो E अधिक होगा।

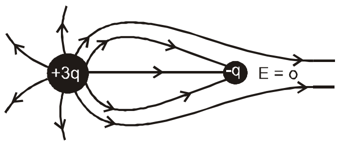
यदि रेखाएं विरल है। $\Rightarrow$ तो E कम होगा।

और यदि E = 0 है, तब कोई भी बल रेखा प्राप्त नही होगी।



$E_A > E_B$

(v) निकलने वाली या समाप्त होने वाली रेखाओं की संख्या, आवेश के समानुपाती होती है।



+3q के आवेश से निकलने वाली कुल रेखाओं की संख्या = 9 है

–q पर समाप्त होने वाली कुल बल रेखाएं = 3

Solved Example

Example 96. यदि आवेश q से निकलने वाली विद्युत क्षेत्र की बल रेखाओं की संख्या 10 है तो आवेश 2q से निकलने वाली बल रेखाओं की संख्या ज्ञात करो।

Solution : ELOF की संख्या $\propto$ आवेश

$10 \propto q$

$\Rightarrow \; 20 \propto 2q$

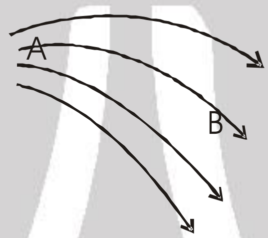
इसलिए ELOF की संख्या 20 होगी।

(vi) विद्युत बल रेखाओं का प्रारम्भ या अन्त, चालक की सतह के लम्बवत् होता है।

(vii) विद्युत बल रेखाएं कभी भी चालक में प्रवेश नहीं करती है।

Solved Examples

Example 97. चित्रानुसार कुछ बल रेखायें बिन्दु A और B के लिये प्रदर्शित हैं

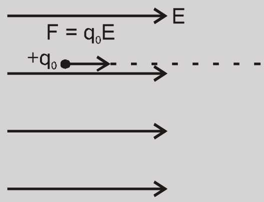


(A) $E_A > E_B$ (B) $E_B > E_A$ (C) $V_A > V_B$ (D) $V_B > V_A$

Solution : बिन्दु A पर रेखाऐं सघनित है अतः $E_A > E_B$ विद्युत क्षेत्र की दिशा में विभव कम होता है अतः $V_A > V_B$

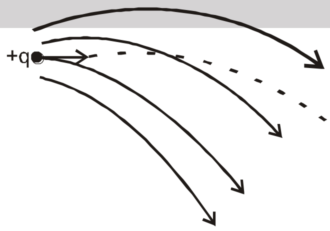
Example 98. यदि किसी आवेश को विद्युत क्षेत्र में छोड़ा जाता है तो, क्या यह बल रेखाओं का अनुसरण करेगा

Solution : **Case I :** यदि विद्युत बल रेखाऐं समान्तर है।



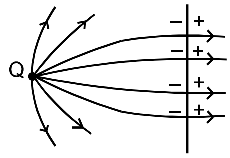
इस तरह के विद्युत क्षेत्र में यदि आवेश को छोड़ा जाता है तब इस पर लगने वाला बल q_0E होगा और इसकी दिशा के अनुदिश होगी अतः आवेश सरल रेखा मे बल रेखाओं के अनुदिश गति करेगा

Case II : - यदि बल रेखाऐ वक्र है तो



आवेश बल रेखाओं का अनुसरण नहीं करेगा

Example 99. एक आवेश +Q अनन्त लम्बाई की धात्विक पट्टिका से d दूरी पर स्थित है। विद्युत बल रेखाओं की सही दिशा प्रदर्शित करो।

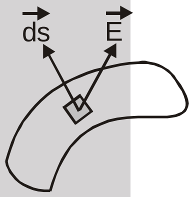


Solution : यहां पर पट्टिका पर आवेश प्रेरित हो जाता है। अतः विधुत बल रेखाएं +Q से प्रारम्भ होकर चालक पर खत्म होती है और वापस चालक की दूसरी सतह से प्रारम्भ हो जाती है।

15. विद्युत फ्लक्स

विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ में कोई सतह मानी जाए एवं इस सतह पर छोटे क्षेत्रफल $\overrightarrow{dS}$ का अल्पांश चुना जाए तो इस अल्पांश से सम्बंधित फ्लक्स $d\phi_E = \vec{E}.\overrightarrow{dS}$ है।

$\overrightarrow{dS}$ की दिशा तल के लम्बवत् होती है। यह $\hat{n}$ के अनुदिश है।



या $d\phi_E = EdS \cos\theta$

या $d\phi_E = (E \cos\theta)\, dS$

या $d\phi_E = E_n\, dS$

जहाँ E_n, $\overrightarrow{dS}$ की दिशा में विद्युत क्षेत्र का घटक है।

सम्पूर्ण क्षेत्रफल से गुजरने वाला फ्लक्स $\phi_E = \int_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \int_S E_n dS$

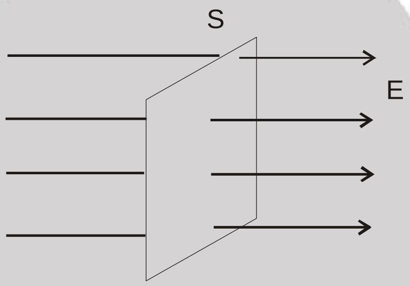
यदि सम्पूर्ण क्षेत्रफल में विद्युत क्षेत्र एक समान हो तो $\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$

Special Cases :

Case I : यदि विद्युत क्षेत्र सतह के लम्बवत् है तब विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ का लम्ब के साथ कोण शून्य है

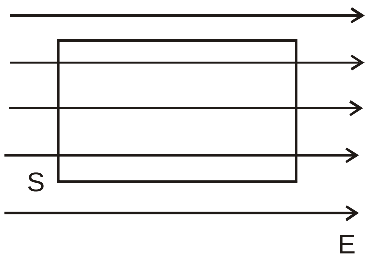
So $\phi = ES \cos 0$

$\phi = ES$



Case II : यदि विद्युत क्षेत्र सतह के समान्तर है, $\vec{E}$ लम्ब के साथ बना कोण = 90º

So $\phi = ES \cos 90^\circ = 0$



15.1 भौतिक अर्थ :

विद्युत क्षेत्र में रखी हुई सतह से, सतह के अभिलम्ब दिशा से गुजरने वाली विद्युत बल रेखाओं की कुल संख्या को विद्युत फ्लक्स कहते है। यह विद्युत क्षेत्र का गुण है।

15.2 मात्रक :

(i) विद्युत फ्लक्स का SI मात्रक $N\,m^2\,C^{-1}$ (गाउस) होता है या $J\,m\,C^{-1}$

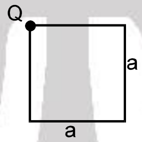
(ii) विद्युत फ्लक्स एक अदिश राशि है (यह धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकती है)।)

Solved Examples

Example 100. किसी क्षेत्र में विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = \frac{3}{5}E_0\vec{i} + \frac{4}{5}E_0\vec{j}$ से व्यक्त किया जाता है, जहाँ $E_0 = 2.0 \times 10^3$ N/C है। Y-Z तल के समानान्तर $0.2m^2$ क्षेत्रफल वाले आयताकार सतह से गुजरने वाला फ्लक्स ज्ञात करो।

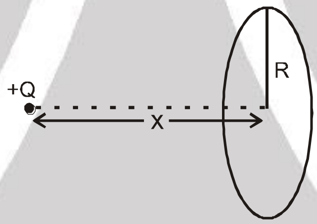
Solution : $\phi_E = \vec{E}\cdot\vec{S} = \left(\frac{3}{5}E_0\vec{i} + \frac{4}{5}E_0\vec{j}\right).\ \left(0.2\hat{i}\right) = 240\frac{N-m^2}{C}$

Example 101. a भुजा वाले वर्ग के एक कोने पर एक बिन्दु आवेश Q रखा है तो वर्ग में से गुजरने वाले फ्लक्स का मान ज्ञात करो।

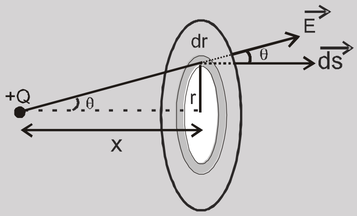


Solution : आवेश Q के कारण वर्ग के किसी भी बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र वर्ग के तल के अनुदिश होगा और विद्युत बल रेखाएं वर्ग के लम्बवत् होंगी इसलिए $\phi = 0$ अतः हम कह सकते हें कि वर्ग से कोई भी बल रेखा नहीं गुजरती है। इसलिए फ्लक्स = 0

Example 102. R त्रिज्या के वृत्तीय क्षेत्र से बिन्दु आवेश 'Q' के कारण पारित होने वाले विद्युत फलक्स ज्ञात करो?



Solution : वृत्तीय क्षेत्र को हम छोटी वलयों में विभाजित करते हैं। r त्रिज्या और dr मोटाई की एक वलय लेते है।

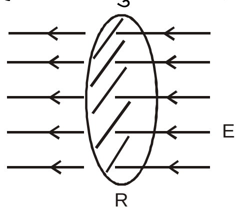


इस छोटे अवयव से निकलने वाला फ्लक्स $d\phi = E\,ds\cos\theta$

$$\phi_{net} = \int E\,ds\cos\theta = \int_{r=0}^{r=R} \frac{KQ}{(x^2+r^2)}(2\pi r dr)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right) = \frac{Q}{2\epsilon_0}\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$$

Case-III : समरूप विद्युत क्षेत्र में वक्रीय सतह

(i) माना R त्रिज्या की वृत्तीय सतह को चित्रानुसार समरूप विद्युत क्षेत्र में रखा गया है।



सतह से पार होने वाला फ्लक्स $\phi = E\,(\pi R^2)$

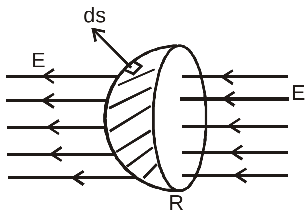
(ii) माना कोई अर्द्धगोलीय सतह को विद्युत क्षेत्र में रखा गया हे तब इस अर्द्धगोलीय सतह से पारित फ्लक्स

$\phi = \int E ds \cos\theta$

$\phi = E \int ds \cos\theta$

जहाँ $\int ds \cos\theta$ is

गोलीय सतह के क्षेत्रफल का आधार पर प्रक्षेपण

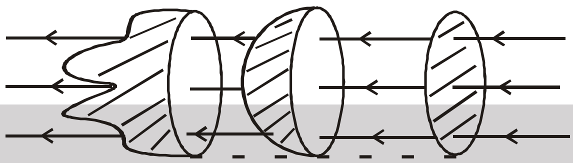


$\int ds \cos\theta = \pi R^2$

अतः $\phi = E(\pi R^2)$ = पहले वाले वृत्त के समान है।

अतः हम कह सकते हैं कि

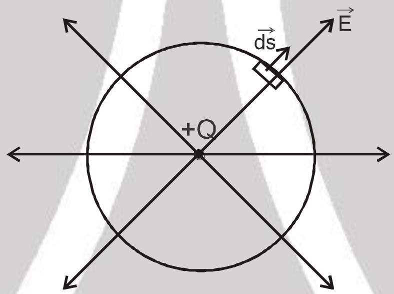
यदि दो सतहों से पार होने वाली विद्युत क्षेत्र रेखाओं की संख्या समान है, तो इन सतहों से पार होने वाला फ्लक्स सतहों के आकार से अप्रभावित रहकर समान होता है।



$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = E(\pi R^2)$

Case-IV : बन्द सतह से पारित फ्लक्स :

एक गोलीय सतह मानते हैं और माना 'q' आवेश इसके केन्द्र पर स्थित है। गोलीय सतह से पारित फ्लक्स



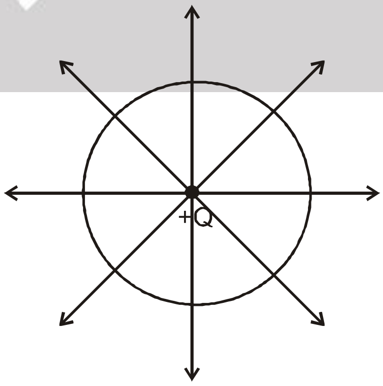
$\phi = \int \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int E.ds$ (क्योंकि $\vec{E}$, $\vec{ds}$ के अनुदिश है।)

$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q}{R^2} \int dS$ जहाँ $\int ds = 4\pi R^2$

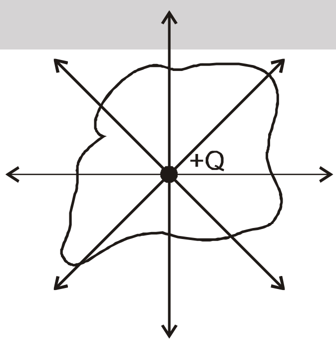
$\phi = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2}\right)\left(4\pi R^2\right) \Rightarrow \phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$

अब यदि आवेश Q अन्य बन्द सतह से घिरा हुआ है, तब भी ये सभी बल रेखाऐं सतह से पार होगी।

अतः यह गॉस प्रमेय से यह फ्लक्स $\phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$, होगा।



$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$



$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$

16. स्थिर वैद्युतिकी में गाउस का नियम या गाउस का प्रमेय

यह नियम गणितज्ञ **Karl F Gauss** द्वारा दिया गया है। गाउस का नियम किसी बंद पृष्ठ पर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र तथा बंद पृष्ठ से परिबद्ध कुल आवेश के मध्य सम्बंध बताता हे। इस सतह को गाउसीय पृष्ठ कहते हैं। यह एक काल्पनिक बन्द पृष्ठ होता है। इसकी वैधता प्रयोगों द्वारा सिद्ध की जा सकती है। इसका उपयोग सममित आवेश वितरण के कारण विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

16.1 कथन और विवरण :

गाउस का नियम निम्न प्रकार से लिखा जाता है।

किसी बन्द काल्पनिक पृष्ठ (गाउसीय पृष्ठ) से गुजरने वाले विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का पृष्ठीय समाकलन, निर्वात में उस बन्द पृष्ठ के अन्दर कुल आवेश का $\frac{1}{\varepsilon_0}$ गुना होता है। यहाँ पर ε_0 मुक्त आकाश (निर्वात्) की विद्युत शीलता है।

यदि S गाउसीय पृष्ठ है और $\sum_{i=1}^{n} q_i$ गाउसीय पृष्ठ के अन्दर कुल आवेश है तो गाउस के नियम के अनुसार

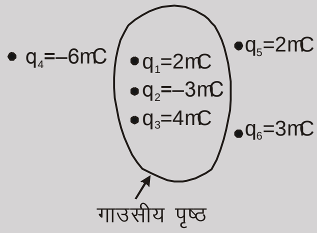
$$\phi_E = \oint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i .$$

समाकलन चिन्ह पर वृत्त व्यक्त करता है कि सम्पूर्ण बंद पृष्ठ का समाकलन किया गया है।

Note :
(i) गाउसीय पृष्ठ से गुजरने वाला फ्लक्स इसकी आकृति पर निर्भर नहीं करता है।
(ii) गाउसीय पृष्ठ से गुजरने वाला फ्लक्स केवल पृष्ठ के अन्दर कुल आवेश पर निर्भर करता है।
(iii) गाउसीय पृष्ठ से गुजरने वाला फ्लक्स गाउसीय पृष्ठ के अंदर आवेश की स्थिति पर निर्भर नहीं करता है।
(iv) गाउसीय पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता गाउसीय पृष्ठ के अंदर तथा बाहर उपस्थित सभी आवेशों के कारण होती है।
(v) किसी बन्द पृष्ठ में आने वाले फ्लक्स को ऋणात्मक और बाहर जाने वाले फ्लक्स को धनात्मक माना जाता है। क्योंकि $\hat{n}$ को बाहर की दिशा में धनात्मक लिया जाता है।
(vi) किसी गाउसीय पृष्ठ में $\phi = 0$ का अर्थ यह नहीं है कि प्रत्येक बिन्दु पर $E = 0$ है लेकिन प्रत्येक बिन्दु पर $E = 0$ का अर्थ $\phi = 0$ होता है।

Solved Examples

Example 103. दी गई गाउसीय पृष्ठ से गुजरने वाले फ्लक्स की गणना कीजिए।



Solution : $\phi = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{2\mu C - 3\mu C + 4\mu C}{\varepsilon_0} = \frac{3 \times 10^{-6}}{\varepsilon_0}$ Nm^2/C

Example 104. किसी घन के केन्द्र पर बिन्दु आवेश q रखा है तो वर्ग के किसी भी सतह से गुजरने वाले फ्लक्स के मान की गणना कीजिए।

Solution : सभी 6 पृष्ठों से होकर गुजरने वाला कुल फ्लक्स $= \frac{q}{\varepsilon_0}$

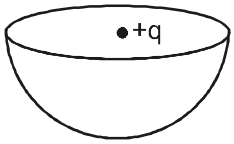
चूंकि सभी पृष्ठ सममित है।

इसलिए, एक पृष्ठ से होकर गुजरने वाला फ्लक्स $= \frac{1}{6}\frac{q}{\varepsilon_0}$

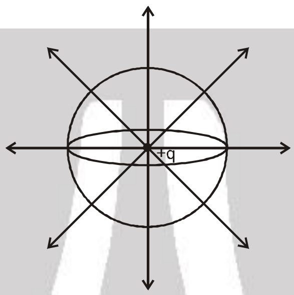
16.2 गाउस प्रमेय का उपयोग करके खुली सतह से पारित फ्लक्स :

Solved Examples

Example 105. एक बिन्दु आवेश +q, अर्द्धगोले की वक्रता के केन्द्र में स्थित है। अर्द्धगोले के पृष्ठ से निर्गत फलक्स ज्ञात करो।



Solution : माना एक +q आवेश अर्द्धगोले की सतह पर रखा है। अब सम्पूर्ण गोले से निर्गत फलक्स $= \frac{q}{\varepsilon_0}$

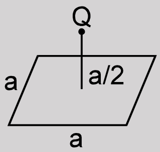


क्योंकि आवेश q ऊपर अर्द्ध और निचले अर्द्धगोले में सममित है, इसलिये आधा–आधा फ्लक्स दोनों सतहों से उत्सर्जित होगा।

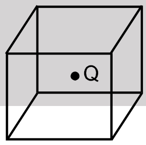
निचली अर्द्ध सतह से पारित फ्लक्स $= \frac{q}{2\varepsilon_0}$

ऊपरी अर्द्ध सतह से पारित फ्लक्स $= \frac{q}{2\varepsilon_0}$

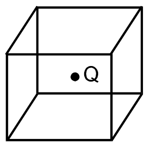
Example 106. एक a भुजा वाले वर्ग के केन्द्र से a/2 ऊपर एक आवेश Q को चित्रानुसार रखा जाता है। वर्ग के फलक से पारित विद्युत क्षेत्र का फ्लक्स ज्ञात करो?



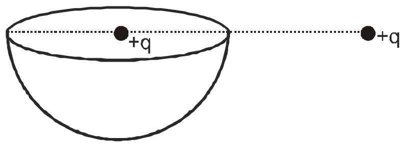
Solution :



हम एक घन के फलकों की कल्पना कर सकते हैं ताकि आवेश Q इस घन के केन्द्र पर हो। सममितता के आधार पर हम कह सकते हैं कि किसी दिए हुए क्षेत्रफल से गुजरने वाला फ्लक्स (जोकि घन की एक फलक है।) $\phi = \frac{Q}{6\varepsilon_0}$ होगा।

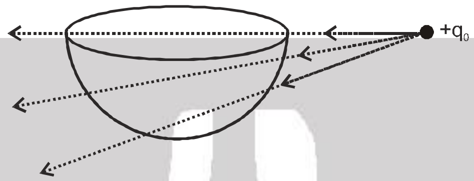


Example 107. अर्द्धगोले की सतह से गुजरने वाला फ्लक्स ज्ञात करो।



Solution : (i) अर्द्धगोले की सतह से +q आवेश के कारण गुजरने वाला फ्लक्स = $\frac{q}{2\varepsilon_0}$ (इसे हम पहले के उदाहरण से कर चुके हैं)

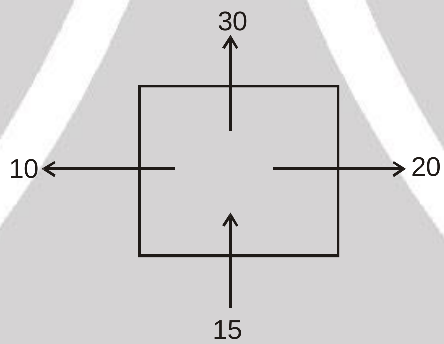
(ii) $+q_0$ आवेश के कारण अद्धगेले से गुजरने वाला फ्लक्स = 0, क्योंकि $+q_0$ आवेश के कारण सतह के अन्दर से गुजरने वाली क्षेत्र रेखाऐं = सतह से बाहर निकलने वाली क्षेत्र रेखाऐं।



16.3 फ्लक्स से $q_{\text{अन्दर}}$ ज्ञात करना :

Solved Example

Example 108. चित्रानुसार बन्द सतह से बाहर जाने वाले तथा अन्दर आने वाले फ्लक्स (SI मात्रक में) को दिखाया गया है ? बन्द सतह के द्वारा घिरे हुये आवेश को ज्ञात करो।



Solution : बन्द सतह से गुजरने वाला कुल फ्लक्स = + 20 + 30 + 10 -15 = 45 N.m^2/c

गाउस प्रमेय से

$\phi_{net} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $45 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $q_{in} = (45)\,\varepsilon_0$

16.4 गाउस प्रमेय से विद्युत क्षेत्र की गणना करना :

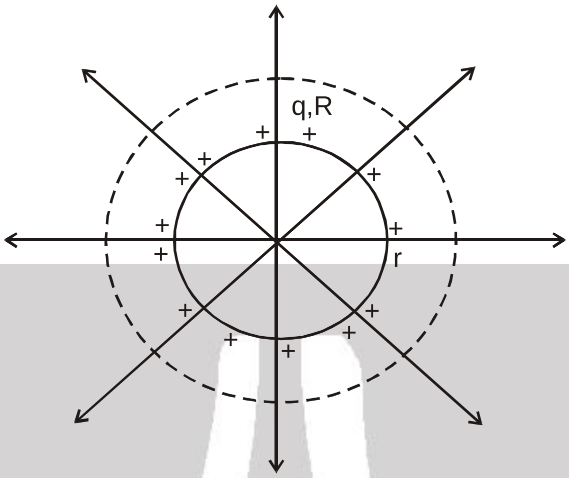
गाउस प्रमेय से, हम कह सकते हैं $\int \vec{E}\,\vec{ds} \leftarrow \phi_{net} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

E, ϕ में दिया है परन्तु यह अदिश गुणनफल और समाकलन से बाध्य है। इसलिये E को ज्ञात करने के लिये हम इसे इन बद्धताओं से मुक्त कर सकते हैं।

(i) सर्वप्रथम हम को $\vec{E}$ अदिश गुणनफल से मुक्त करना चाहेंगे। इसके इसके लिये एक सतह का चुनाव करते हैं, जो कि $\vec{E}$ के लम्बवत् है। इसलिये $\vec{E}.\vec{ds}$, E ds बन जाता है।

(ii) इस प्रकार की सतह का चुनाव करते हैं कि E का मान उस पर नियत बना रहे जिससे $\int E ds = \int ds E$.

16.4.1 गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र :



गोले के बाहर विद्युत क्षेत्र :

क्योंकि हम जानते है कि कोश के कारण विद्युत क्षेत्र, त्रिज्यीय बाहर की ओर होगा। इसलिये हम एक गोलीय गॉसीयन सतह का चयन करते है। गॉस प्रमेय का इस गॉसीयन सतह के लिये उपयोग करने पर

$\int \vec{E}\vec{ds} = \phi_{net} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o} = \frac{q}{\varepsilon_o}$

$\downarrow$

$\int \vec{E}\vec{ds}$ (क्योकि $\vec{E}$ सतह के लम्बवत है)

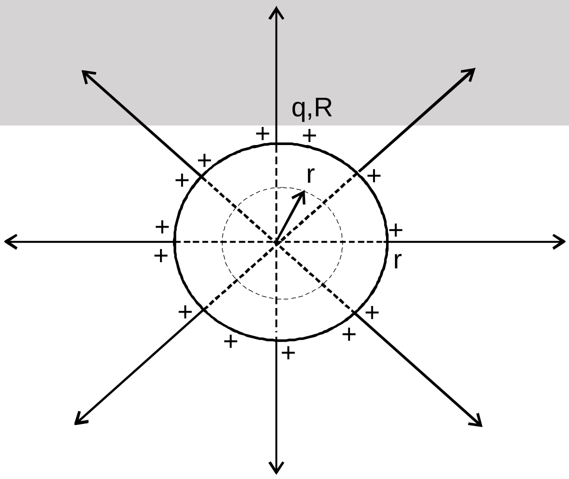
$\downarrow$

E $\int ds$ (क्योकि E का मान सतह पर नियत है)

E $(4\pi r^2)$ ($\int ds$ गोलीय सतह का कुल क्षेत्रफल = $4\pi r^2$)

$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_{out} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$

गोलीय कोश के अन्दर विद्युत क्षेत्र :



कोश के अन्दर गोलीय गॉसीयन सतह का चयन करते है और इस सतह के लिये प्रमेय का उपयोग करेंगे

$$\int \vec{E}\,\vec{ds} = \phi_{net} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o} = 0$$

$\downarrow$

$$\int \vec{E}\,\vec{ds}$$

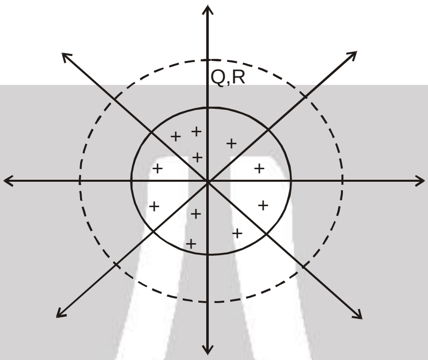
$\downarrow$

$$E \int ds$$

$\downarrow$

$$E\ (4\pi r^2) \Rightarrow E = (4\pi r^2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_{in} = 0$$

16.4.2 ठोस गोले के कारण विद्युत क्षेत्र (समरूप वितरित आवेश Q व त्रिज्या R):



गोले के बाहर विद्युत क्षेत्र : विद्युत क्षेत्र की दिशा त्रिज्यीय बाहर की ओर होती है। अतः हम एक गोलीय गॉसीयन सतह का चयन करते हैं, और गाउस प्रमेय का उपयोग करने पर

$$\int \vec{E}\,\vec{ds} = \phi_{net} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\downarrow$

$$\int E ds$$

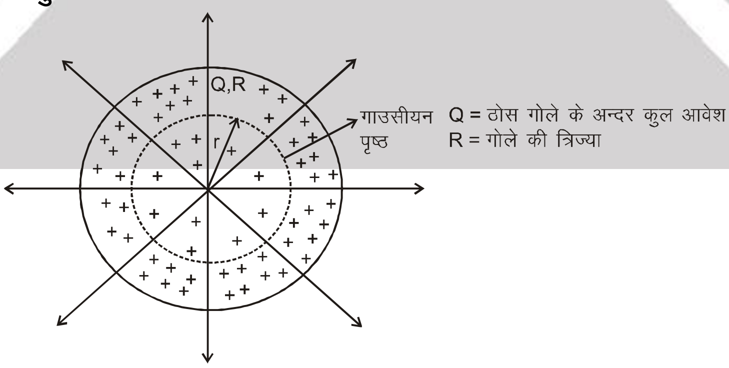
$\downarrow$

$$E\int ds$$

$\downarrow$

$$E\ (4\pi r^2) \Rightarrow E\ (4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ठोस गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र :



ठोस गोले के अन्दर गोलीय गॉसीयन सतह का चयन करते हैं, और इस सतह के लिये गॉस प्रमेय का उपयोग करते हैं।

$$\int \vec{E}\,\vec{ds} = \phi_{net} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o} = \frac{\dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon_o R^3} \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_o} = \frac{qr^3}{\varepsilon_o R^3}$$

$\downarrow$

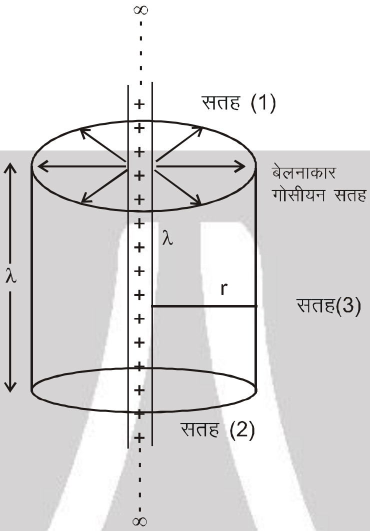
$\int E\,ds$

$\downarrow$

$E\,(4\pi r^2) \Rightarrow E(4\pi r^2) = \dfrac{Qr^3}{\varepsilon_o R^3}$

$E = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_o R^3} \qquad \therefore\ E_{in} = \dfrac{kQ}{R^3}\,r$

16.4.3 अनन्त लम्बे आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र (रेखीय आवेश घनत्व λ से समरूप वितरित आवेश):

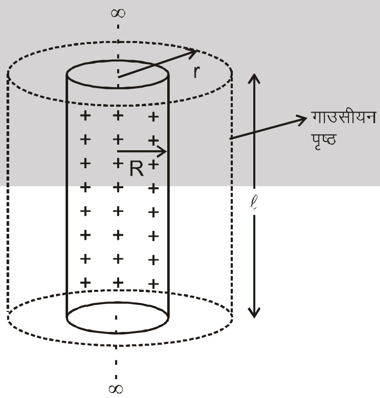


अनन्त तार के द्वारा विद्युत क्षेत्र त्रिज्यीय है अतः चित्रानुसार हम एक बेलनाकार गॉसीयन सतह का चयन करते है।

ϕ_{net} → $\phi_1 = 0 \quad \phi_2 = 0 \quad \phi_3 \neq 0 = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_o} = \dfrac{\lambda\ell}{\varepsilon_o}$

$\phi_3 = \int \vec{E}.\vec{ds} = \int E\ \ ds = E\int\ ds = E\,(2\pi r\ell)\ ;\ E\,(2\pi r\ell) = \dfrac{\lambda\ell}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r} = \dfrac{2k\lambda}{r}$

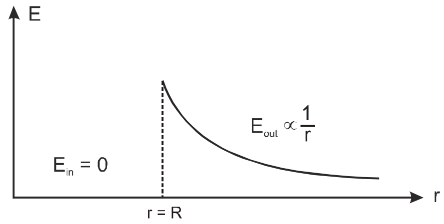
16.4.4 अनन्त लम्बी आवेशित नलिका के कारण विद्युत क्षेत्र (समरूप पृष्ठीय आवेश घनत्व σ):



(i) नलिका के बाहर E : एक बेलनाकार गॉसीयन सतह का चयन करते हैं।

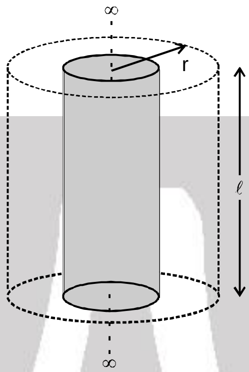
$\phi_{net} = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_o} = \dfrac{\sigma 2\pi R\ell}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_{out} \times 2\pi r\ell = \dfrac{\sigma 2\pi R\ell}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\sigma R}{r\,\varepsilon_0}$

(ii) नलिका के अन्दर E : नलिका के अन्दर बेलनाकार गॉसीयन सतह का चयन करते हैं।



$\phi_{net} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o} = 0$ अतः $E_{in} = 0$

16.4.5 R त्रिज्या के अनन्त लम्बाई के ठोस बेलन के कारण E (समरूप आयतन आवेश घनत्व ρ)



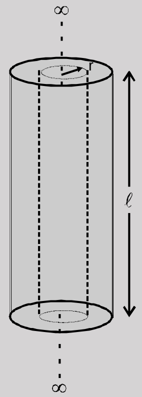
(i) बाहर स्थित बिन्दु के लिये E

एक बेलनाकार गॉसीयन सतह का चयन करते हैं और गॉस प्रमेय का उपयोग करते हैं

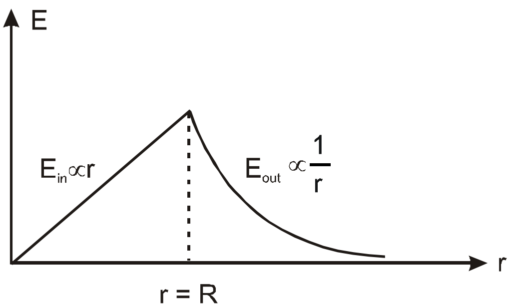
$E \times 2\pi r\ell = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho \times \pi R^2 \ell}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_{out} = \frac{\rho R^2}{2r\,\varepsilon_0}$

(ii) अन्दर स्थित बिन्दु पर E

ठोस बेलन के अन्दर बेलनाकार गाउसीयन सतह का चयन करते हैं और गॉस प्रमेय का उपयोग करते हैं।



$E \times 2\pi r\ell = \frac{q_{in}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho \times \pi r^2 \ell}{\varepsilon_o}$; $E_{in} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$



17. चालक और उसके गुण (स्थिर विद्युत परिस्थिती के लिये)

(i) चालक वे पदार्थ होते हैं जिनके अन्दर मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संख्या बहुत अधिक होती है जो चालक के अन्दर मुक्त रूप से गति कर सकते हैं।

(ii) स्थिर विद्युतिकी चालक हमेशा समविभव पृष्ठ होते हैं।

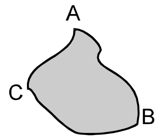
(iii) आवेश हमेशा चालक के बाहरी पृष्ठ पर रहता है।

(iv) यदि चालक के अन्दर कोई गुहा है तथा इसमें कोई आवेश नहीं है तो आवेश हमेशा चालक की बाहरी सतह पर रहेगा।

(v) विद्युत क्षेत्र हमेशा चालक पृष्ठ के लम्बवत् होता है।

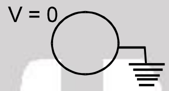
(vi) विद्युत बल रेखाऐं चालक के अन्दर कभी प्रवेश नहीं करती है।

(vii) चालक पृष्ठ के पास विद्युत क्षेत्र की तीव्रता का सूत्र $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$



$\vec{E}_A = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0}\hat{n}$; $\vec{E}_B = \frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}\hat{n}$ और $\vec{E}_C = \frac{\sigma_C}{\varepsilon_0}\hat{n}$

(viii) जब किसी चालक को भूसम्पर्कित किया जाता है तो इसका विभव शून्य हो जाता है।



(ix) जब एक विलगित चालक को भूसम्पर्कित किया जाता है तो इस पर आवेश शून्य हो जाता है।

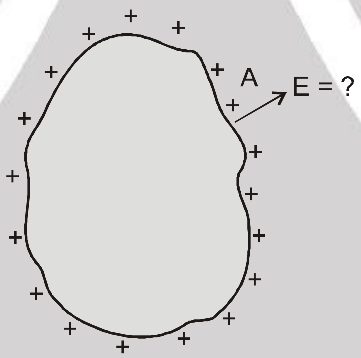
(x) जब दो चालकों को जोड़ा जाता है तो उनमें आवेश का प्रवाह तब तक होता है जब तक उनका विभव एक समान न हो जाये।

(xi) वैद्युत दाब : किसी चालक के पृष्ठ पर वैद्युत दाब का सूत्र $P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

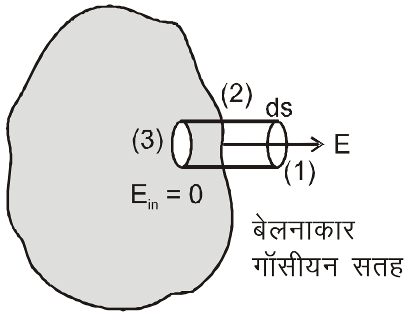
जहां σ पृष्ठीय आवेश घनत्व है।

किसी चालक द्वारा विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना

माना किसी चालक की सतह 'A' पर क्षेत्रफल आवेश घनत्व = σ है। हमें चालक की सतह के बाहर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना है।



इसके लिए चित्रानुसार माना एक छोटा बेलनाकार गॉसीयन सतह जिसका आंशिक भाग सतह के अन्दर और कुछ भाग सतह के बाहर स्थित है। माना इसका काट क्षेत्रफल ds छोटा है और इसकी ऊँचाई नगण्य है।



इस सतह के लिये गॉस प्रमेय लगाने पर

$\phi_{net} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, ds}{\varepsilon_0}$

सतह (1) से पास होने वाला फ्लक्स ϕ_2=Eds (क्योंकि $\vec{E}$ चालक की सतह के बिल्कुल लम्बवत् है।)

सतह (2) से पास होने वाला फ्लक्स ϕ_2=0 (क्योंकि $\vec{E}$ वक्रीय गाउसीयन सतह के अनुदिश है)

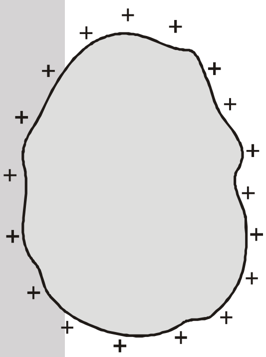
सतह (2) से पास होने वाला फ्लक्स ϕ_3=0 (चालक के अन्दर $\vec{E}$ = 0)

अतः, $Eds = \frac{\sigma ds}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

चालक की सतह के बाहर विद्युत क्षेत्र : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (सतह के लम्बवत् दिशा में)

सदिश रूप में $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$ (यहाँ $\hat{n}$ = चालक की सतह के लम्बवत् एकांक सदिश है।)

चालक की सतह पर स्थिर वैद्युत दाब



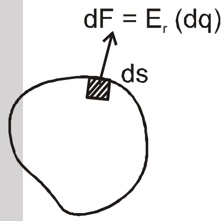
माना किसी चालक को कुछ आवेश दिया जाता है। प्रतिकर्षण के कारण, सभी आवेश चालक की सतह पर पहुँच जाते हैं, लेकिन आवेश अभी भी एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं। अतः प्रत्येक आवेश पर दूसरे आवेशों के कारण एक बाहरी बल लगता हुआ प्रतीत होता है। इस बल के कारण, सतह पर कुछ दाब लगता है, जिसे स्थिर वैद्युत दाब कहते हैं।

स्थिर वैद्युत दाब को प्राप्त करने के लिये, एक छोटा सतही अवयव जिसका क्षेत्रफल 'ds' है, लेते हैं।

इस अवयव पर शेष आवेशों के कारण लगने वाला बल

dF = (शेष आवेशों के कारण इस स्थान पर विद्युत क्षेत्र) (छोटे अवयव का आवेश)

माना शेष आवेशों के कारण इस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र = E_r है।



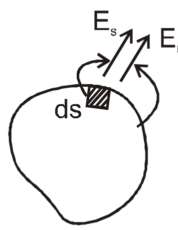
और छोटे अवयव का आवेश $dq = \sigma ds$

$\Rightarrow$ $dF = (E_r)(dq) = (E_r)(\sigma ds)$

इसलिये इस छोटे अवयव पर दाब

$$P = \frac{dF}{ds} = \frac{(E_r)(\sigma ds)}{ds}$$

$\Rightarrow$ $P = (E_r)(\sigma)$ ......(1)



अब दाब प्राप्त करने के लिये, हमें विद्युत क्षेत्र E_r प्राप्त करना है। (E_r , उस बिन्दु पर शेष आवेशों के कारण विद्युत क्षेत्र है)

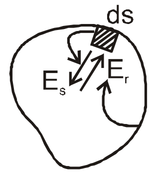
माना सतह के पास छोटे अवयव के कारण विद्युत क्षेत्र = E_s

सतह के पास शेष भाग (छोटे अवयव को छोड़कर) के कारण विद्युत क्षेत्र = E_r

सतह के बाहर किसी बिन्दु पर, छोटे अवयव के कारण विद्युत क्षेत्र (E_s) लम्बवत् बाहर की ओर होता है, और शेष भाग के कारण विद्युत क्षेत्र (E_r) भी लम्बवत् बाहर की ओर होता है।

अतः कुल विद्युत क्षेत्र सतह के बाहर की ओर होगा और कुल विद्युत क्षेत्र = $E_s + E_r$ है। हम यह सिद्ध कर चुके हैं कि चालक सतह के बाहर विद्युत क्षेत्र = $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ होता है

$$\Rightarrow \quad E_s + E_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad ......(2)$$



अब हम धात्विक सतह (metal surface) के अन्दर विद्युत क्षेत्र निकालते हैं। यहाँ शेष आवेशों के कारण विद्युत क्षेत्र (Er) समान दिशा में लम्बवत् बाहर की ओर होगा, लेकिन छोटे अवयव के कारण विद्युत क्षेत्र, विपरीत दिशा में लम्बवत् अन्दर की ओर होगा।

अतः धात्विक सतह के अन्दर कुल विद्युत क्षेत्र = $E_r - E_s$ होगा हम जानते हैं कि किसी चालक के अन्दर विद्युत क्षेत्र, शून्य होता है, अतः

$$E_r - E_s = 0 \;\Rightarrow\; E_r = E_s \qquad .....(3)$$

समीकरण (2) और समीकरण (3) से हम कह सकते हैं कि

$$2E_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

समीकरण (1) से दाब निकालने पर

$$P = (E_r)(\sigma) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\;(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

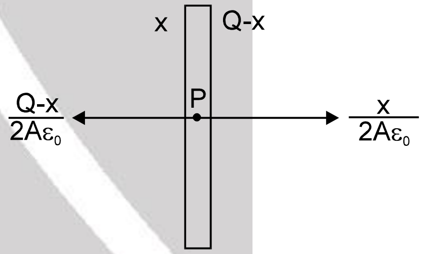
अतः चालक की सतह पर स्थिरवैद्युत दाब $P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

जहाँ σ = क्षेत्रफल आवेश घनत्व

Solved Example

Example 109. सिद्ध कीजिए कि एक विलगित (isolated) (विलगित अर्थात् पट्टिका के आस–पास कोई आवेश नहीं है।) लम्बी चालक पट्टिका को देने पर यह आवेश दोनों सतह पर बराबर मात्रा में बंट जाएगा।

Solution : माना कि पट्टिका के बांयी ओर आवेश x है तथा दायीं और Q–x आवेश है।



चूंकि बिन्दु P चालक के अन्दर उपस्थित है इसलिए

$E_P = O$

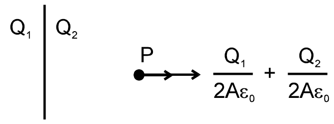
$$\frac{x}{2A\varepsilon_0} - \frac{Q-x}{2A\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{2A\varepsilon_0} = \frac{Q}{2A\varepsilon_0} \Rightarrow x = \frac{Q}{2}$$

$$Q - x = \frac{Q}{2}$$

इसलिए आवेश दोनों तरफ बराबर मात्रा में बंट जाता है।

Example 110. यदि किसी विलगित अनन्त लम्बाई वाली पट्टिका के एक सतह पर आवेश Q_1 तथा दूसरी सतह पर आवेश Q_2 है तो सिद्ध कीजिए कि पट्टिका के सामने किसी बिन्दु पर क्षेत्र की तीव्रता $\frac{Q}{2A\varepsilon_0}$ होती है। जहाँ $Q = Q_1 + Q_2$

Solution : किसी बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र :

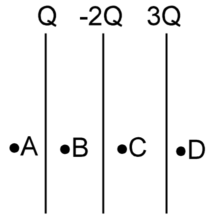


$$\vec{E} = \vec{E}_{Q_1} + \vec{E}_{Q_2}$$

$$= \frac{Q_1}{2A\varepsilon_0}\hat{n} + \frac{Q_2}{2A\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{Q_1 + Q_2}{2A\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{Q}{2A\varepsilon_0}\hat{n}$$

[यह सिद्ध करता है कि पट्टिका के कारण विद्युत क्षेत्र पट्टिका पर कुल आवेश पर निर्भर करता है। यह अलग–अलग सतह पर उपस्थित आवेश वितरण पर निर्भर नहीं करता है।]

Example 111. तीन लम्बी चालक पट्टिकाएं एक दूसरे से कुछ निश्चित दूरी पर समानान्तर रूप से रखी हुई है। इस पर आवेश क्रमशः Q, –2Q, 3Q है। बिन्दु A, B, C तथा D पर विद्युत क्षेत्र के मान की गणना कीजिए।



Solution : $E_A = E_Q + E_{-2Q} + E_{3Q}$.

यहां E_Q का मतलब 'Q' के कारण विद्युत क्षेत्र है।

$E_A = \dfrac{(Q-2Q+3Q)}{2A\varepsilon_0} = \dfrac{2Q}{2A\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{A\varepsilon_0}$, बाँयीं ओर

(ii) $E_B = \dfrac{Q - (-2Q + 3Q)}{2A\varepsilon_0}$, दाँयी ओर

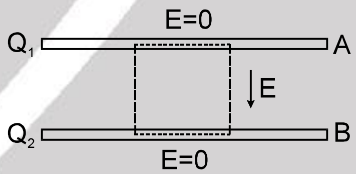
$= 0$

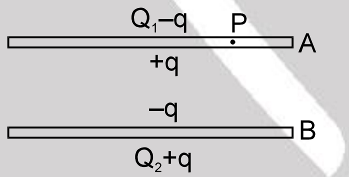
(iii) $E_C = \dfrac{(Q-2Q)-(3Q)}{2A\varepsilon_0} = \dfrac{-4Q}{2A\varepsilon_0} = \dfrac{-2Q}{A\varepsilon_0}$, दाँयीं ओर $\Rightarrow \dfrac{2Q}{A\varepsilon_0}$ बाँयीं ओर

(iv) $E_D = \dfrac{(Q-2Q+3Q)}{2A\varepsilon_0} = \dfrac{2Q}{2A\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{A\varepsilon_0}$, दाँयीं ओर

Example 112. दो चालक पट्टिका A तथा B एक दूसरे के समानान्तर रखी हुई है। A को आवेश Q_1 तथा B को आवेश Q_2 दिया जाता है। सिद्ध कीजिए की अन्दर वाली सतहों पर आवेश का मान बराबर तथा विपरीत चिन्ह का होगा।

Solution : चित्रानुसार एक गाउसीय पृष्ठ की कल्पना करने पर। इस पृष्ठ के दो भाग चालक के अन्दर पूरी तरह उपस्थित है। जहाँ पर विद्युत क्षेत्र की तीव्रता शून्य है। इसलिए इनमें से गुजरने वाले फ्लक्स का मान शून्य होगा। बन्द पृष्ठों का दूसरा भाग जो कि चालक के बाहर है। यह विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के समानान्तर है। इसलिए इस भाग से फ्लक्स शून्य होगा। इसलिए बंद पृष्ठ से गुजरने वाला कुल विद्युत फ्लक्स शून्य है। गाउस के नियमानुसार बंद पृष्ठ के अंदर कुल आवेश शून्य होना चाहिए। A की आन्तरिक सतह पर आवेश B की आन्तरिक सतह पर स्थित आवेश के बराबर तथा विपरीत होना चाहिए।





आवेश का वितरण चित्र में प्रदर्शित है, q का मान ज्ञात करने के लिए A के अन्दर किसी बिन्दु p की कल्पना करते है। माना कि A की सतह का क्षेत्रफल (एक ओर का) A है। समीकरण $E = \sigma / (2\varepsilon_0)$, का उपयोग करने पर बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र

$Q_1 - q$ आवेश के कारण $= \dfrac{Q_1 - q}{2A\varepsilon_0}$ (नीचे की ओर)

$+ q$ आवेश के कारण $= \dfrac{q}{2A\varepsilon_0}$ (ऊपर की ओर)

$- q$ आवेश के कारण $= \dfrac{q}{2A\varepsilon_0}$ (नीचे की ओर)

$Q_2 + q$ आवेश के कारण $= \frac{Q_2 + q}{2A\varepsilon_0}$ (ऊपर की ओर)

बिन्दु P पर चारों सतह के कारण कुल विद्युत क्षेत्र (नीचे की दिशा में)

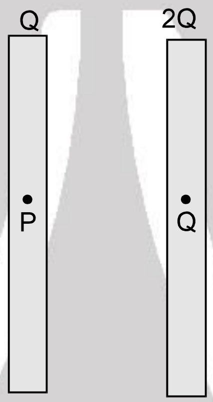
$E_p = \frac{Q_1 - q}{2A\varepsilon_0} - \frac{q}{2A\varepsilon_0} + \frac{q}{2A\varepsilon_0} - \frac{Q_2 + q}{2A\varepsilon_0}$

चूंकि बिन्दु P चालक के अन्दर है, इसलिए इस बिन्दु पर क्षेत्र का मान शून्य होगा। अतः

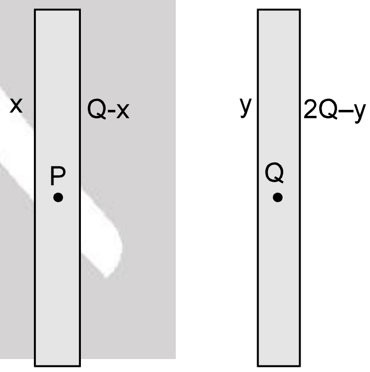
$Q_1 - q - q + q - Q_2 - q = 0$ या $q = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$

यह परिणाम निम्न परिणाम की विशिष्ट स्थिति है। जब आवेशित चालक पट्टिका को एक दूसरे के समानान्तर रखा जाता है तो दोनों बाहरी सतहों पर बराबर आवेश आ जाता है और सामने वाली सतह पर बराबर किन्तु विपरीत प्रकृति का आवेश आ जाता है।

Example 113. दो लम्बी समानान्तर चालक पट्टिकाओं (दोनों एक दूसरे से परिमित दूरी पर हैं।) को क्रमशः Q तथा 2Q आवेश दिया जाता है। तो सभी पृष्ठों पर उपस्थित आवेश की गणना कीजिए।



Solution : माना की पहली पट्टिका के बायीं ओर आवेश की मात्रा x है तो दाँयीं ओर आवेश की मात्रा Q–x होगी। इसी तरह यदि दूसरी प्लेट के बाँयीं ओर y आवेश है तो दाँयीं ओर 2Q – y आवेश होगा।



$E_p = 0$ (चालक के गुण से)

$\Rightarrow \frac{x}{2A\varepsilon_o} - \left\{\frac{Q - x}{2A\varepsilon_o} + \frac{y}{2A\varepsilon_o} + \frac{2Q - y}{2A\varepsilon_o}\right\} = 0$

हम कह सकते हैं कि P के बाँयीं ओर आवेश = P के दाँयीं ओर आवेश

$x = Q - x + y + 2Q - y$

$\Rightarrow x = \frac{3Q}{2}, Q - x = \frac{-Q}{2}$

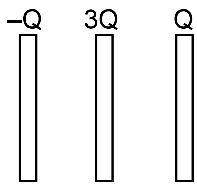
इसी तरह बिन्दु Q के लिए :

$x + Q - x + y = 2Q - y$

$\Rightarrow y = Q/2, 2Q - y = 3Q/2$

अतः आवेशों का अन्तिम वितरण चित्रानुसार होगा।

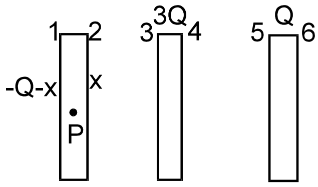
Example 114 चित्र में – Q, 3Q और Q आवेश वाली तीन बड़ी चालक पट्टिकाएं दर्शायी गई हैं।



Solution : माना पृष्ठ 2 पर आवेश x है। आवेश संरक्षण के अनुसार पृष्ठ 1 पर आवेश (– Q – x) होगा। चालक प्लेट के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है। अतः P पर विद्युत क्षेत्र शून्य है। P पर परिणामी क्षेत्र -

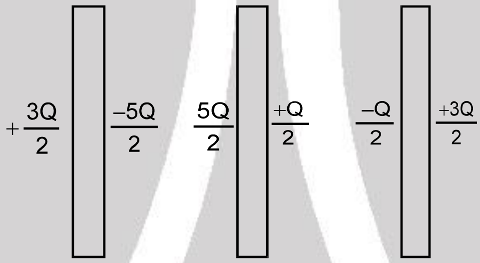
$E_P = 0$

$\Rightarrow \dfrac{-Q-x}{2A\varepsilon_0} = \dfrac{x+3Q+Q}{2A\varepsilon_0} \quad \Rightarrow -Q - x = x + 4Q$

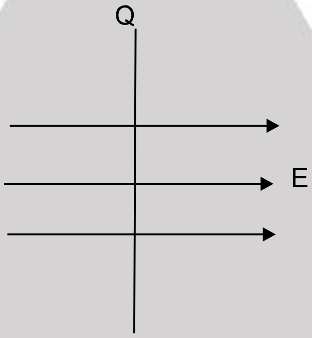


$\Rightarrow x = \dfrac{-5Q}{2}$

नोट : हम देखते हैं कि पट्टिकाओं के एक दूसरे के सम्मुख पृष्ठों पर आवेश समान परिमाण व विपरीत चिन्ह का है। इसे गाउस प्रमेय द्वारा व्यापक रूप में भी सिद्ध किया जा सकता है। यह महत्वपूर्ण परिणाम है इसे याद रखे। इस प्रकार सभी सतहों पर अन्तिम आवेश वितरण चित्रानुसार है।



Example 115. Q आवेश व A क्षेत्रफल की एक विलगित चालक पट्टिका एक समरूप विद्युत क्षेत्र E में इस प्रकार रखी हुई है कि विद्युत क्षेत्र प्लेट के लम्बवत् है व सम्पूर्ण पट्टिका पर विद्यमान है तो इसके दोनों पृष्ठों पर उत्पन्न आवेशों को ज्ञात कीजिए।



Solution : माना प्लेट के बाँयीं ओर x आवेश है व प्लेट के दाँयीं ओर Q – x आवेश है।

$\because \; E_P = 0$

$\therefore \; \dfrac{x}{2A\varepsilon_0} + E = \dfrac{Q-x}{2A\varepsilon_0}$ या $\dfrac{x}{A\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{2A\varepsilon_0} - E$

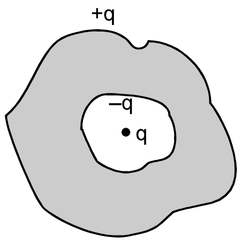
$\therefore \; x = \dfrac{Q}{2} - EA\varepsilon_0$ और $Q - x = \dfrac{Q}{2} + EA\varepsilon_0$

अतः एक ओर आवेश $\dfrac{Q}{2} - EA\varepsilon_0$ है तथा दूसरी ओर $\dfrac{Q}{2} + EA\varepsilon_0$ है।

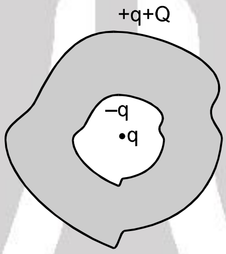
नोट : इस प्रश्न को उपरोक्त उत्तर का उपयोग किये बिना Q = 0 के लिए हल कीजिए तथा प्राप्त उत्तर का मिलान कीजिए। यह उत्तर उपरोक्त उत्तर में Q = 0 रखने पर प्राप्त होगा।

17.1 बन्द चालक के लिए कुछ अन्य महत्वपूर्ण परिणाम :

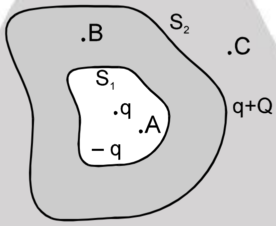
(i) यदि आवेश q किसी गुहा में है तो गुहा के भीतरी तल पर –q तथा चालक के बाहरी तल पर +q आवेश उत्पन्न होगा। (गाउस के नियम से इसको सिद्ध किया जा सकता है।)



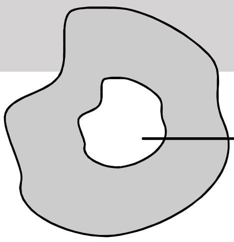
(ii) यदि किसी चालक के अन्दर स्थित गुहा में आवेश q रखा जाये और चालक को आवेश Q दिया जाये तो भीतरी पृष्ठ पर पर –q आवेश तथा चालक के बाहरी तल पर q + Q आवेश उत्पन्न होगा। (इसको गाउस के नियम से सिद्ध किया जा सकता है।)



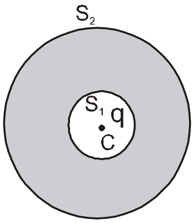
(iii) S_1 के बाहर किसी बिन्दु (जैसे B,C) पर आवेश q (गुहा के अन्दर) तथा S_1 पर प्रेरित आवेश के कारण परिणामी वैद्युत क्षेत्र शून्य होता है। S_2 पृष्ठ के अंदर स्थित किसी बिन्दु (जैसे A, B) पर पृष्ठ $\mathbf{S_2}$ पर उपस्थित आवेश **q + Q** तथा पृष्ठ $\mathbf{S_2}$ के बाहर उपस्थित आवेश के कारण परिणामी विद्युत क्षेत्र शून्य होता है।



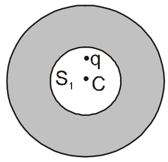
(iv) किसी बन्द चालक के अन्दर आवेशविहीन गुहा में परिणामी विद्युत क्षेत्र शून्य होता है। चालक की पृष्ठ पर तथा पृष्ठ के बाहर आवेश हो सकता है। तब भी यह परिणाम सत्य है। चालक की सबसे भीतरी पृष्ठ पर कोई आवेश प्रेरित नहीं होगा।



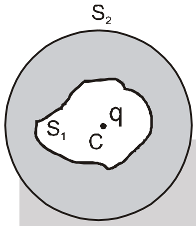
(v) चालकों के अन्दर विभिन्न प्रकार की गुहाओं के अन्दर आन्तरिक सतह और बाहरी सतह पर किसका आवेश घनत्व समान है या असमान इसका निर्णय करो।

(A)


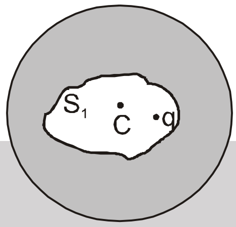
उभयनिष्ठ केन्द्र पर आवेश
(S_1, S_2 $\rightarrow$ गोलीय)

(B)


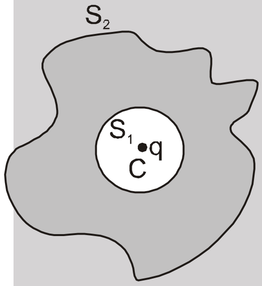
जब आवेश उभयनिष्ठ केन्द्र पर नहीं है।
S_1, S_2 $\rightarrow$ गोलीय

(C)


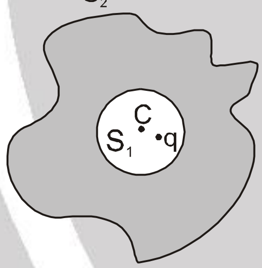
S_2 में केन्द्र पर आवेश
(S_2 $\rightarrow$ गोलीय)

(D)


जब आवेश S_2 में केन्द्र पर नहीं है।
(S_2 $\rightarrow$ गोलीय)

(E)


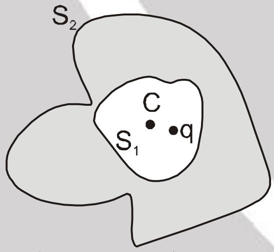
S_1 में केन्द्र पर आवेश (गोलीय)

(F)


जब आवेश S_1 के केन्द्र पर नहीं है।
(गोलीय)

(G)

जब आवेश ज्यामितीय केन्द्र पर है।

(H)


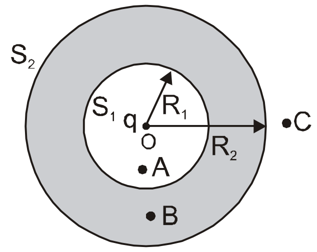
जब आवेश ज्यामितीय केन्द्र पर नहीं है।

स्थिति	A	B	C	D	E	F	G	H
S_1	समरूप	असमरूप	असमरूप	असमरूप	समरूप	असमरूप	असमरूप	असमरूप
S_2	समरूप	समरूप	समरूप	समरूप	असमरूप	असमरूप	असमरूप	असमरूप

नोट : इन सभी स्थिति में अन्दर वाली सतह (S_1), पर आवेश = $-q$ और बाहरी सतह (S_2) पर आवेश = q है। यदि चालक पर आवेश रख दिया जाये तब भी 'S_1' पर आवेश का वितरण नही बदलता है। लेकिन यदि चालक के बाहर कुछ आवेश रख दिया जाये तो S_2 पर आवेश वितरण बदल सकता है।

Solved Example

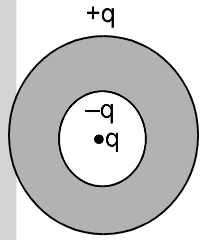
Example 116. चित्रानुसार एक अनावेशित चालक गोला जिसकी आन्तरिक त्रिज्या R_1 व बाह्य त्रिज्या R_2 है। इसके केन्द्र पर एक बिन्दु आवेश q रखा हुआ है। तो



(i) A, B और C बिन्दुओं पर $\vec{E}$ व V ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि गोले के बाहर 'r' (>>R_2) दूरी पर एक बिन्दु आवेश Q रख दिया जाये तो Q व q पर परिणामी बल ज्ञात कीजिए।

Solution : A बिन्दु पर :



$V_A = \frac{Kq}{OA} + \frac{Kq}{R_2} + \frac{K(-q)}{R_1}$,

$\vec{E}_A = \frac{Kq}{OA^3}\overrightarrow{OA}$

Note : A पर, S_1 पर स्थित आवेश –q तथा S_2 पर स्थित आवेश +q के कारण विद्युत क्षेत्र शून्य होगा क्योंकि यह एक समान रूप से वितरित है।

B बिन्दु पर :

$V_B = \frac{Kq}{OB} + \frac{K(-q)}{OB} + \frac{Kq}{R_2} = \frac{Kq}{R_2}$, $E_B = 0$

C बिन्दु पर :

$V_C = \frac{Kq}{OC}$, $\vec{E}_C = \frac{Kq}{OC^3}\overrightarrow{OC}$

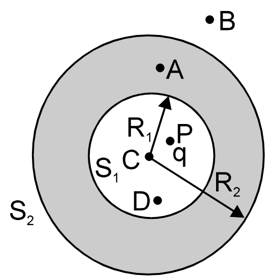
(ii) बिन्दु आवेश Q पर बल :

Note : यहां 'Q' पर बल केवल S_2 पर स्थित आवेश 'q' के कारण ही होगा परिणाम (iii) देखें।

$\vec{F}_Q = \frac{KqQ}{r^2}\hat{r}$ (r = केन्द्र 'O' से 'Q' की दूरी)

बिन्दु आवेश q पर बल : $\vec{F}_q = 0$ (परिणाम (iii) तथा S_1 पर समरूप आवेश के उपयोग से)

Example 117. एक निरावेशित चालक गोले की आन्तरिक त्रिज्या R_1 व बाह्य त्रिज्या R_2 है। चित्रानुसार एक बिन्दु p (केन्द्र पर नहीं) पर रखा है? निम्न ज्ञात करो ?



(i) V_C (ii) V_A (iii) V_B (iv) E_A

(v) E_B (vi) यदि आवेश Q को B पर रखा जाता है, तो इस पर बल।

Solution : (i) $V_C = \frac{Kq}{CP} + \frac{K(-q)}{R_1} + \frac{Kq}{R_2}$

Note : S_1 पर $-q$ आवेश असमान रूप से वितरित है। फिर भी C पर इसका विभव $\frac{K(-q)}{R_1}$ क्योंकि S_1 के प्रत्येक बिन्दु से C की दूरी R_1 है।

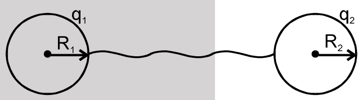
(ii) $V_A = \frac{Kq}{R_2}$ (iii) $V_B = \frac{Kq}{CB}$ (iv) $E_A = O$ (बिन्दु धात्विक चालक के अन्दर है।)

(v) $E_B = \frac{Kq}{CB^2}\hat{CB}$ (vi) $F_Q = \frac{KQq}{CB^2}\hat{CB}$

(vi) आवेशों का वितरण : R_1 और R_2 त्रिज्या के दो सुचालक खोखले गोलों पर आवेश क्रमशः Q_1 तथा Q_2 है तथा उनके बीच की दूरी अत्यधिक है। इनको एक सुचालक तार से जोड़ते हैं।

माना गोलों पर अन्तिम आवेश क्रमशः q_1 तथा q_2 है।

जोड़ने के पश्चात् दोनों गोलीय कोशों का विभव समान होगा। अतः



$$\frac{Kq_1}{R_1} = \frac{Kq_2}{R_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad ......(i)$$

तथा, $q_1 + q_2 = Q_1 + Q_2$ ......(ii)

समी० (i) तथा (ii) से $q_1 = \frac{(Q_1+Q_2)R_1}{R_1+R_2}$ $q_2 = \frac{(Q_1+Q_2)R_2}{R_1+R_2}$

आवेशों का अनुपात $\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{\sigma_2 4\pi R_2^2} = \frac{R_1}{R_2}$

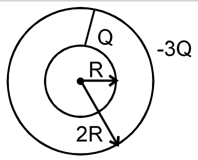
पृष्ठीय आवेश घनत्वों का अनुपात $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$

अन्तिम आवेशों का अनुपात $\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$

अन्तिम पृष्ठीय आवेश घनत्वों का अनुपात $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$

Solved Example

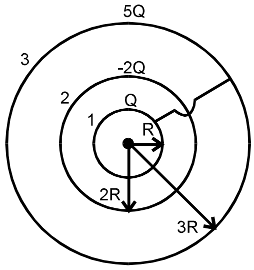
Example 118. Q आवेश व R त्रिज्या के एक विलगित चालक गोले को एक दूसरे समरूप निरावेशित गोले से (यह दोनों अधिक दूरी पर रखे है) उच्च प्रतिरोध वाले तार द्वारा जोड़ा जाता है। लम्बे समयान्तराल बाद ऊष्मीय हानि क्या होगी ?



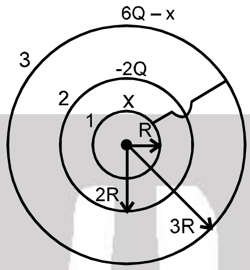
Solution : जब समान त्रिज्या के दो चालक गोलों को जोड़ा जाता है तो उनमे आवेश बराबर वितरित होता है। अतः निकाय की ऊष्मीय हानि

$$\Delta H = U_i - U_f = \left(\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - 0\right) - \left(\frac{Q^2/4}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q^2/4}{8\pi\varepsilon_0 R}\right) = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}$$

Example 119. एक चालक तार द्वारा सबसे अंदर वाले कोश तथा बाह्य कोश को जोड़ दिये जाने के बाद प्रत्येक गोलीय कोश पर आवेश ज्ञात कीजिए। प्रत्येक पृष्ठ पर आवेश ज्ञात कीजिए।



Solution : माना आन्तरिक कोश पर आवेश x है। अन्त में कोश 1 का विभव = कोश 3 का विभव



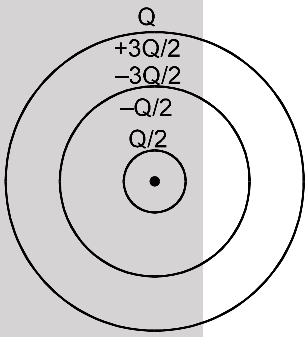
$$\frac{Kx}{R} + \frac{K(-2Q)}{2R} + \frac{K(6Q-x)}{3R} = \frac{Kx}{3R} + \frac{K(-2Q)}{3R} + \frac{K(6Q-x)}{3R}$$

$3x - 3Q + 6Q - x = 4Q$; $2x = Q$; $x = \frac{Q}{2}$

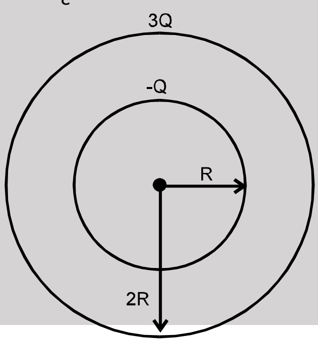
आन्तरिक कोश पर आवेश = $\frac{Q}{2}$ बाह्य कोश पर आवेश = $\frac{5Q}{2}$

मध्य कोश पर आवेश = –2Q

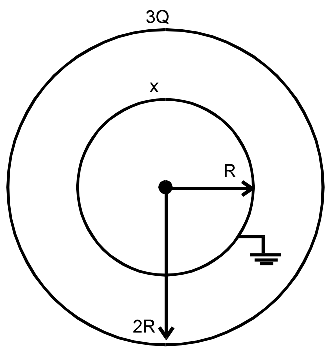
अन्तिम आवेश वितरण चित्र में प्रदर्शित है।



Example 120. R तथा 2R त्रिज्याओं के दो चालक खोखले गोलीय कोशों पर आवेश क्रमशः – Q व 3Q है। यदि आन्तरिक कोश को भू–सम्पर्कित कर दिया जाये तो पृथ्वी में कितना आवेश प्रवाहित होगा?



Solution : जब आन्तरिक कोश को भू–सम्पर्कित किया जाता है तो आन्तरिक कोश का विभव शून्य हो जाता है क्योंकि पृथ्वी का विभव शून्य माना जाता है।



$$\frac{Kx}{R} + \frac{K3Q}{2R} = 0$$

$x = \frac{-3Q}{2}$, आवेश जो बढ जाता है।

$= \frac{-3Q}{2} - (-Q) = \frac{-Q}{2}$ अतः पृथ्वी में प्रवाहित आवेश = $\frac{Q}{2}$

Example 121. Q आवेश व R त्रिज्या के एक विलगित चालक गोले को एक दूसरे समरूप निरावेशित गोले से (यह दोनों अधिक दूरी पर रखे हैं) उच्च प्रतिरोध वाले तार द्वारा जोड़ा जाता है। लम्बे समयान्तराल बाद ऊष्मीय हानि क्या होगी ?

Solution : जब समान त्रिज्या के दो चालक गोलों को जोड़ा जाता है तो उनमें आवेश बराबर वितरित होता है। अतः निकाय की ऊष्मीय हानि

$$\Delta H = U_i - U_f = \left(\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - 0\right) - \left(\frac{Q^2/4}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q^2/4}{8\pi\varepsilon_0 R}\right) = \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}$$

Solved Miscellaneous Problems

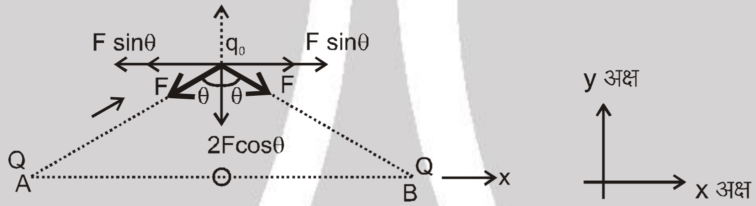
Problem 1. दो समान धनात्मक बिन्दु आवेश जिनका आवेश 'Q' है बिन्दु B(a, 0) और A(–a, 0). पर रखे हैं एक ऋणात्मक बिन्दु आवेश q_0 मूलबिन्दु O(0, 0) पर साम्यावस्था में रखा है तब सिद्ध करो कि

(i) Y-दिशा में विस्थापन के लिये स्थायी साम्यावस्था है।

(ii) X-दिशा में विस्थापन कि लिये अस्थायी साम्यावस्था है।

Solution : (i) जब आवेश y-दिशा में विस्थापित होता हैं

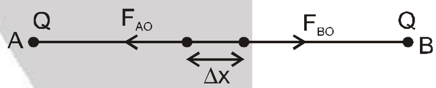
माना x-y दिशा इस तरह है



घटकों में विभाजित करने पर कुल बल ऋणात्मक y-अक्ष के अनुदिश है जिससे कण अपनी वास्तविक स्थिति पर वापस आ जाता है। अतः यह स्थायी साम्यावस्था है।

(ii) जब ऋणात्मक आवेश q_0, x-अक्ष अनुदिश विस्थापित होता है। प्रारम्भ में

$$\vec{F}_{AO} + \vec{F}_{BO} = 0 \Rightarrow \left|\vec{F}_{AO}\right| = \left|\vec{F}_{BO}\right| = \frac{KQq_0}{d^2}$$



जब आवेश q_0 को + x अक्ष की और छोटी दूरी Δx से हल्का से विस्थापित किया जाये तब

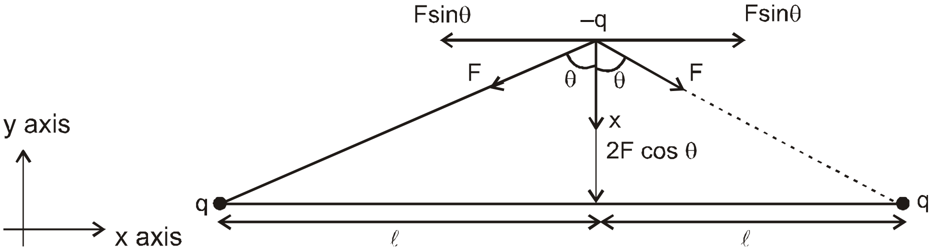
$$\left|\vec{F}_{BO}\right| > \left|\vec{F}_{AO}\right|$$

ये बल आकर्षण बल है (ऋणत्मक आवेश के कारण)

इसलिये कण धनात्मक x-अक्ष की ओर गति कर रहा है और यह अपनी वास्तविक स्थिति पर वापस नहीं पहुंचता है अतः, यह ऋणात्मक आवेश के लिए अस्थायी अवस्था है।

Problem 2. m द्रव्यमान और आवेश –q वाला कण, दो स्थिर आवेशित कण जिनमें प्रत्येक का आवेश q है तथा जिनके मध्य की दूरी 2ℓ है, के मध्य स्थित है। सिद्ध करो कि कण की गति SHM होगी यदि इसे लम्बवत् विभाजक द्वारा थोड़ा से विस्थापित किया जाये और छोड़ दिया जाये। आवर्तकाल भी ज्ञात करो?

Solution : माना x-y दिशा इस तरह है :



जब कण को y-अक्ष के अनुदिश छोटे से विस्थापन द्वारा विस्थापित करते हैं और आवेश q और –q के मध्य लगने वाले बल को घटकों में विभाजित करने पर, चित्रानुसार x-अक्ष में लगने वाला F_{net} शून्य होगा [F_{net} = –q आवेश पर लगने वाला मूल आवेश]

q आवेश पर y दिशा में लगने वाला कुल बल = –2F cosθ

$= -2.\ \dfrac{kQq}{(x^2+\ell^2)}.\ \dfrac{x}{(x^2+\ell^2)^{1/2}} \quad |\vec{F}| = \dfrac{2Kq^2x}{(x^2+\ell^2)^{3/2}}$

$\Rightarrow\ ma = \dfrac{2Kq^2x}{\ell^3}$ (x << ℓ के लिए) (a = – q आवेश का त्वरण)

$\Rightarrow\ a = -\dfrac{2Kq^2}{m\ell^3}.\ x$ यह S.H.M. का समीकरण है। ($a = -\omega^2 x$)

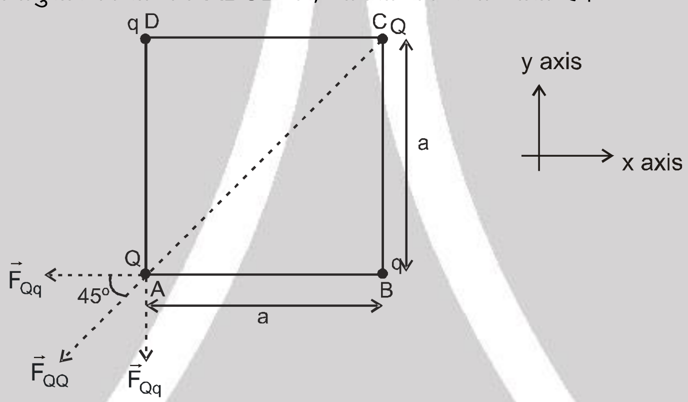
अतः इस (–q) आवेश का कलान्तर :- $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\ell^3}{2Kq^2}}$ **Ans.**

Problem 3. Q आवेश के दो आवेशों को किसी वर्ग के किन्दी दो किनारों पर रखा गया है। q आवेश, अन्य दो किनारों पर रखा गया है।

(a) यदि Q पर परिणामी आवेश शून्य है तो, Q और q किस तरह से सम्बन्धित हैं?

(b) प्रत्येक आवेश पर परिणामी बल को शून्य करने के लिए q के लिए किस मान का क्या चयन करें?

Solution : (a) माना चित्रानुसार किसी वर्ग ABCD पर, आवेशों को रखा जाता है।



बिन्दु A पर, आवेश Q पर, अन्य आवेशों के कारण लगने वाला बल चित्रानुसार $\vec{F}_{QQ}$, $\vec{F}_{Qq}$ और F_{Qq} है।

F_{net} on Q = $\vec{F}_{Q.Q} + \vec{F}_{Qq} + \vec{F}_{Qq}$

(बिन्दु A पर) लेकिन F_{net} = 0 अतः, $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_x = -F_{QQ}\cos 45° - F_{Qq} \Rightarrow \dfrac{KQ^2}{(\sqrt{2}a)^2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{KQq}{a^2} = 0 \quad \Rightarrow q = -\dfrac{Q}{2\sqrt{2}}$ **Ans.**

(b) प्रत्येक आवेश के लिये परिणामी बल शून्य होगा।

दिये गये आंकड़ों (गणनाओं) से Q आवेश पर बल शून्य है, जब $q = -\dfrac{Q}{2\sqrt{2}}$ है यदि आवेश q, के इस मान के लिये q पर बल शून्य है तब और केवल तब q का मान जो अस्तित्व में होगा जिसके लिये, प्रत्येक आवेश पर बल शून्य है।

q पर बल, अन्य तीन आवेशों के कारण चित्रानुसार $\vec{F}_{qQ}$, $\vec{F}_{qq}$ तथा $\vec{F}_{qQ}$ है।

q आवेश पर कुल बल : $\vec{F}_{net} = \vec{F}_{qq} + \vec{F}_{qQ} + \vec{F}_{qQ}$

लेकिन $\vec{F}_{net} = 0$ अतः, $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_x = -\dfrac{Kq^2}{(\sqrt{2}a)^2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{KQq}{(a)^2} \quad \Rightarrow \quad q = -2\sqrt{2}\,Q$

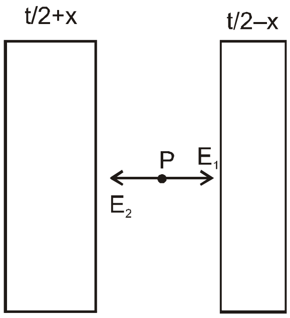
लेकिन ऊपर दिये गये शर्तानुसार $= -\dfrac{Q}{2\sqrt{2}}$

अतः q का कोई भी मान, प्रत्येक आवेश पर परिणामी बल का मान शून्य नहीं कर सकता।

Problem 4. t मोटाई तथा ρ समरूप आयतन आवेश घनत्व वाली अनन्त अचानक पट्टिका के कारण, जिसका कि बांये आधें भाग आवेश घनत्व ρ तथा दांये आधे भाग का आवेश घनत्व 2ρ है तो सममित तल पर विद्युत क्षेत्र बताइये?

Solution : $\left(\frac{t}{2}-x\right)$ तथा $\left(\frac{t}{2}+x\right)$ मोटाई की दो पट्टिका मानते हैं, जब बिन्दु पट्टिका के अन्दर है।

P बिन्दु पर कुल विद्युत क्षेत्र :



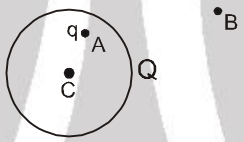
$$E = E_1 - E_2 = \frac{Q_1}{2A\ \varepsilon_0} - \frac{Q_2}{2A\ \varepsilon_0}$$

[Q_1 : बांयी पट्टिका पर आवेश ; Q_2 = दांयी पट्टिका पर आवेश]

$$= \frac{A\rho\ \left(\frac{t}{2}+x\right) - 2\rho A\ \left(\frac{t}{2}-x\right)}{2A\ \varepsilon_0} = \frac{\rho\ \left[3x - \frac{t}{2}\right]}{2\varepsilon_0}$$

सममित तल पर, $x = 0$ अतः, $E = -\frac{\rho t}{4\varepsilon_0}$ **Ans.**

Problem 5. चित्र में समरूप आवेशित, पतला अचालक गोला जिसका कुल आवेश Q व त्रिज्या R प्रदर्शित है। यदि बिन्दु आवेश q, A पर हो जो गोले के केन्द्र से $r < R$ दूरी पर है तो निम्न ज्ञात करो।

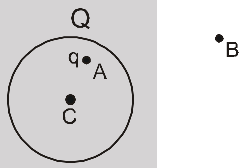


(i) आवेश q पर बल (ii) गोले के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र (iii) बिन्दु B पर विद्युत क्षेत्र

Solution : (i) खोखले गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र = 0

$\therefore$ आवेश q पर बल $F = qE = q \times 0 = 0$

(ii) गोले के केन्द्र पर कुल विद्युत क्षेत्र $E_{net} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$



E_1 = गोले के कारण विद्युत क्षेत्र = 0

E_2 = इस आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र = $\frac{Kq}{r^2}$

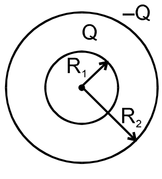
$E_{net} = \frac{Kq}{r^2}$

(iii) गोले पर स्थित आवेश के कारण B पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E}_1 = \frac{KQ}{r_1^2}\hat{r}_1$

A पर स्थित आवेश q के कारण $\vec{E}_2 = \frac{Kq}{r_2^2}\hat{r}_2$

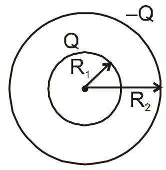
अतः, $\vec{E}_{net} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{KQ}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{Kq}{r_2^2}\hat{r}_2$ जहाँ r_1 = CB और r_2 = AB

Problem 6. चित्र में दो R_1 व R_2 ($R_2 > R_1$) त्रिज्या के संकेन्द्रीय गोले दर्शाये हैं जिन पर क्रमशः Q व – Q आवेश समान रूप से वितरित है। निम्न पर विद्युत क्षेत्र करो।



(i) $r < R_1$ (ii) $R_1 \le r < R_2$ (iii) $r \ge R_2$

Solution : कुल विद्युत क्षेत्र = $E_1 + E_2$



E_1 = R_1 त्रिज्या के गोले के कारण विद्युत क्षेत्र

E_2 = R_2 त्रिज्या के गोले के कारण क्षेत्र

(i) $E_1 = 0, E_2 = 0$; $E_{net} = 0$

(ii) $E_1 = \frac{KQ}{r^2}$, $E_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = \frac{Kq}{r^2}\hat{r}$

(iii) $\vec{E}_1 = \frac{Kq}{r^2}\hat{r}$ $\vec{E}_2 = \frac{Kq}{r^2}(-\hat{r})$ $\Rightarrow$ $\vec{E}_{net} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$

Problem 7. R त्रिज्या तथा एक समान आयतन आवेश घनत्व ρ वाले ठोस कुचालक गोले का केन्द्र मूल बिन्दु पर है। निम्न स्थितियों में विद्युत क्षेत्र सदिश रूप में ज्ञात करो।

(i) (R, 0, 0) (ii) (0, 0, R/2) (iii) (R, R, R)

Solution : समान आवेशित अचालक गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र

$\vec{E} = k\frac{Q\vec{r}}{R^3} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_o}$ for r < R और गोले के बाहर विद्युत क्षेत्र

$\vec{E}_o = \frac{KQ}{r^2}.\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}.\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{r^2}\hat{r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o r^2}.\hat{r}$ for $r \ge R$

(i) (R, 0, 0) अर्थात् यह सतह पर स्थित बिन्दु है

$\vec{r} = R\hat{r}$ और $\hat{r} = \hat{i}$; $\vec{E}_o = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o R^2}(\hat{i}) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_o}.\hat{i}$

(ii) $(0, 0\ \frac{R}{2})$ अर्थात् यह बिन्दु सतह के अन्दर है

$\vec{r} = \frac{R}{2}\hat{k}$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = \frac{\rho R}{6\varepsilon_o}\hat{k}$

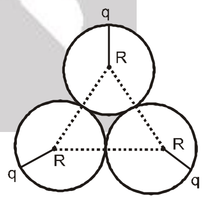
(iii) स्थिति (R, R , R) के लिए

$\vec{r} = R(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ $\Rightarrow$ $\hat{r} = \frac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{3}}$, $r = R\sqrt{3}$ अर्थात् (R,R,R), गोले के बाहर स्थित बिन्दु है।

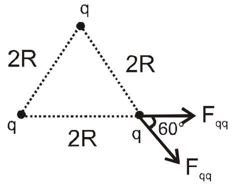
$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_o(3R^2)}.\frac{(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{3}} = \frac{\rho R}{9\sqrt{3}\varepsilon_o}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ **Ans.**

Problem 8. तीन समरूप गोले प्रत्येक पर बिन्दुवत आवेश q (समान रूप से वितरित) तथा त्रिज्या R इस प्रकार रखे हुए हैं कि प्रत्येक गोला शेष दो गोलों को स्पर्श करता है। किसी भी एक गोले पर शेष दो गोलों के कारण लगने वाले वैद्युत बल का परिमाण ज्ञात कीजिए।

Solution : चित्रानुसार तीन समान, R त्रिज्या के गोले जिनका प्रत्येक का आवेश q है दिये गये है। किसी बाहरी बिन्दु के लिये गोले बिन्दु आवेश की तरह व्यवहार करेंगे अतः यह एक त्रिभुज बनेगा जिसमें सभी किनारे पर बिन्दु आवेश स्थित है।



$|\vec{F}_{qq}| = \frac{kq^2}{4R^2}$



अतः कुल बल (F) = $2.\frac{kq^2}{4R^2}.\cos\frac{60°}{2} = 2.\frac{kq^2}{4R^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{kq^2}{R^2}$ **Ans.**

Problem 9. 20 N/C का एक समान विद्युत क्षेत्र उर्ध्वाधर नीचे की ओर है कोई व्यक्ति 40 cm ऊँचाई पर जाता है तो विभव कितना बढ़ता है। ज्ञात करो।

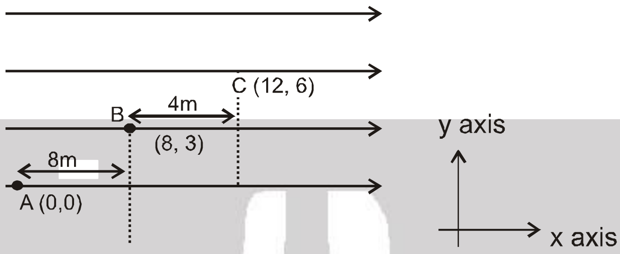
Solution : $E = -\dfrac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -\vec{E}\,.\,d\vec{r}$

$\vec{E}$ = नियतांक के लिए

$\Delta V = -\vec{E}\,.\,\Delta\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = -20\,(-\hat{j}).\,(40 \times 10^{-2})\ \hat{j} = 8$ volts.

Problem 10. x अक्ष के अनुदिश 10 N/C का विद्युत क्षेत्र है। विभवान्तर $V_B - V_A$ की गणना करो जहाँ बिन्दु A व B दिये गये हैं।
(a) A = (0, 0) ; B = (8m, 3m) (b) A = (8m, 3m) ; B = (12m, 6m) (c) A = (0, 0) ; B = (12m, 6m)

Solution : x-अक्ष पर विद्युत क्षेत्र $\vec{E} = 10\,\hat{i}$

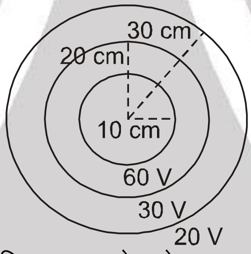


(a) $|\Delta V_{AB}| = \vec{E}.\vec{d} = 10\,\hat{i}\ .\ 8\,\hat{i} = 80$ V $\Rightarrow$ $V_B - V_A = -80$V

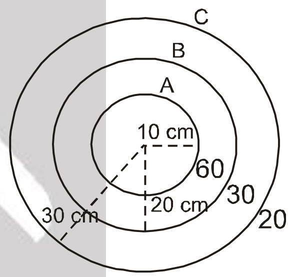
(b) $|\Delta V_{BC}| = \vec{E}.\vec{d} = 10\,\hat{i}\ .\ 4\,\hat{i} = 40$ volt $\Rightarrow$ $V_C - V_B = -40$V

(c) $|\Delta V_{AC}| = \vec{E}.\vec{d} = 10\,\hat{i}\ .\ 12\,\hat{i} = 120$ volt $\Rightarrow$ $V_C - V_A = -120$ V

Problem 11. कुछ समविभव सतह चित्र में प्रदर्शित है तो हम तथा विद्युत क्षेत्र की दिशा व परिमाण के बारे में क्या कह सकते हैं?



Solution : हम जानते हैं कि, विद्युत क्षेत्र समविभव पृष्ठ के हमेशा लम्बवत् होता है। अतः विद्युत क्षेत्र रेखाओं को सतह के लम्बवत् बनाते है और ये रखाऐं केन्द्र से शुरू होती है। अतः यह क्षेत्र, केन्द्र पर स्थित बिन्दु आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र के समान है। अतः दिये गये विभव का, बिन्दु आवेश के कारण विभव से तुलना करने पर प्राप्त करेंगे।

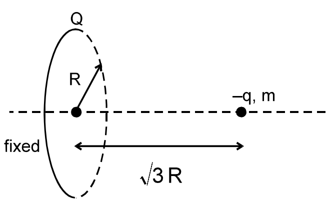


$V = \dfrac{KQ}{r} \Rightarrow KQ = V_A\,r_A = V_B r_B = V_C r_C = 6$ V-m

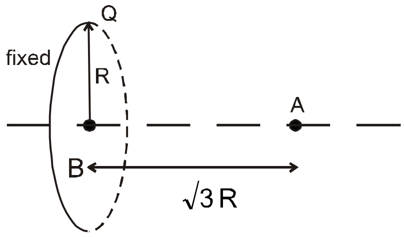
अतः, r त्रिज्या की दूरी पर विद्युत क्षेत्र $E = \dfrac{KQ}{r^2} = \dfrac{6}{r^2}$ V/m

क्योकि विद्युत क्षेत्र रेखाऐं, घटते विभव की ओर होती है। अतः विद्युत क्षेत्र त्रिज्यीय बाहर की दिशा में होगा।

Problem 12. R त्रिज्या की स्थिर वलय पर Q आवेश समान रूप से वितरित है, इसकी अक्ष पर $\sqrt{3}R$ दूरी से –q आवेश तथा m द्रव्यमान का बिन्दु आवेश नगण्य चाल से छोड़ा जाता है। जब वह वलय के केन्द्र पर पहुंच जाता है तो इसका वेग ज्ञात करो?



Solution : समान आवेशित वलय के कारण इसकी अक्ष पर विभव (x दूरी पर)



$V = \dfrac{kQ}{\sqrt{R^2+x^2}}$; अतः वलय के कारण बिन्दु A पर विभव

$V_1 = \dfrac{kQ}{\sqrt{R^2+3R^2}} = \dfrac{kQ}{2R}$

अतः –q आवेश की A पर स्थितिज ऊर्जा $P.E._1 = \dfrac{-kQq}{2R}$

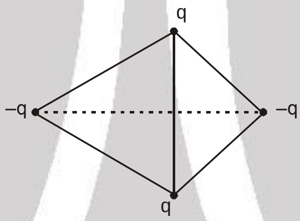
और बिन्दु B पर विभव $V_2 = \dfrac{kQ}{R}$

अतः –q आवेश की बिन्दु B पर स्थितिज ऊर्जा $P.E._2 = \dfrac{-kQq}{R}$

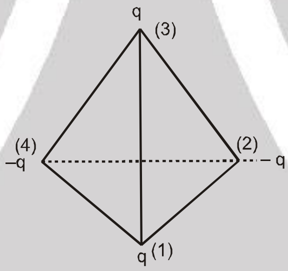
अब ऊर्जा सरंक्षण से $P.E._1 + K.E._1 = P.E_2 + K.E_2 \Rightarrow \dfrac{-kQq}{2R} + 0 = \dfrac{-kQq}{R} + \dfrac{1}{2}mv^2$

$v^2 = \dfrac{kQq}{mR}$ अतः बिन्दु B पर – q आवेश का वेग $v = \sqrt{\dfrac{kQq}{mR}}$ **Ans.**

Problem 13. a भुजा वाले समचतुष्फलक के चारों कोनो का समान परिमाण q के आवेश रखे है तो निकाय की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो।



Solution : निकाय की स्थितिज ऊर्जा : $U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$



$U = \dfrac{-kq^2}{a} + \dfrac{kq^2}{a} + \dfrac{-kq^2}{a} + \dfrac{-kq^2}{a} + \dfrac{kq^2}{a} + \dfrac{-kq^2}{a}$ इस आवेश निकाय के लिये स्थितिज ऊर्जा $U = \dfrac{-2kq^2}{a}$

Problem 14. यदि $V = x^2y + y^2z$ हो तो बिन्दु (x, y, z) पर $\vec{E}$ ज्ञात करो।

Solution : दिया है $V = x^2y + y^2z$ और $\vec{E} = -\dfrac{\partial v}{\partial r}$; $\vec{E} = -\left[\dfrac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right] \Rightarrow \vec{E} = -[2xy\,\hat{i} + (x^2+2yz)\,\hat{j} + y^2\hat{k}\,]$

Problem 15. दिया है $\vec{E} = \dfrac{20}{x^2}\,\hat{i}$ V/m, विद्युत क्षेत्र का परिमाण केवल x-निर्देशांक पर निर्भर करता है तो ज्ञात कीजिए –

(i) दो बिन्दुओं A (5m, 0) व B (10m, 0) के बीच विभवान्तर।

(ii) यदि ∞ पर V का मान 10 वोल्ट है तो x = 5 पर विभव।

(iii) भाग (i) में A व B के बीच विभवान्तर क्या इस बात पर निर्भर करता है कि ∞ पर विभव 10 वोल्ट है।

Solution : दिया गया है $\vec{E} = \dfrac{20}{x^2}\,\hat{i}$ V/m ; हम जानते हैं कि $\int dV = -\int \vec{E}.\vec{dr}$; $\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{x_1}^{x_2} E_x dx = -\int_{x_1}^{x_2} \dfrac{20}{x^2}dx$

विभवान्तर $\Delta V = \dfrac{20}{x}\Big|_{x_1}^{x_2} \Rightarrow V_2 - V_1 = \dfrac{20}{x_2} - \dfrac{20}{x_1}$

(i) बिन्दु A और B के मध्य विभवान्तर (ΔV for A to B) $V_B - V_A = \frac{20}{10} - \frac{20}{5} = -2$ volt

(ii) $x = \infty$ से $x = 5$ के लिये ΔV ; $V_5 - V_\infty = \frac{20}{5} - \frac{20}{\infty}$; $V_5 = 10 + 4 = 14$ volt

(iii) किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य विभवान्तर, विभव के निर्देश मान कर निर्भर नहीं करता है अतः A और B के मध्य विभवान्तर इस बात पर निर्भर नहीं करेगा कि ∞ पर विभव 10 वोल्ट है या कुछ अन्य।

Problem 16. यदि $E = 2r^2$ हो तो V(r) ज्ञात कीजिए।

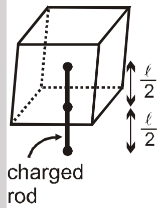
Solution : दिया है $E = 2r^2$

हम जानते हैं कि $\int dv = -\int \vec{E}.dr = -\int 2r^2\, dr \Rightarrow V(r) = \frac{-2r^3}{3} + c$ **Ans.**

Problem 17. ℓ लम्बाई की छड़ पर Q आवेश एक समान रूप से वितरित है। ℓ भुजा वाले एक घन की कल्पना करें जिसका केन्द्र छड़ के एक सिरे पर हो। घन की सम्पूर्ण पृष्ठ से निकलने वाले न्यूनतम विद्युत फ्लक्स की गणना करो।

Solution : गॉस नियम से : बन्द काल्पनिक सतह के अन्दर स्थित आवेश पर फ्लक्स निर्भर करता है।

अतः न्यूनतम सम्भव फ्लक्स जो कि घन के सम्पूर्ण सतह से पारित होगा, के लिये घन के अन्दर आवेश न्यूनतम होगा



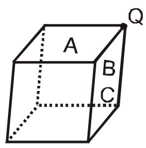
छड़ का रेखीय आवेश घनत्व = $\frac{Q}{\ell}$

और घन के अन्दर, छड़ की न्यूनतम लम्बाई = $\frac{\ell}{2}$

अतः घन के अन्दर आवेश = $\frac{\ell}{2} . \frac{Q}{\ell} = \frac{Q}{2}$

अतः घन की सम्पूर्ण सतह से पारित फ्लक्स = $\frac{\Sigma q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0}$

Problem 18. एक आवेश Q घन के कोने पर रखा है। घन की छः फलकों से निर्गत फ्लक्स की गणना करो।

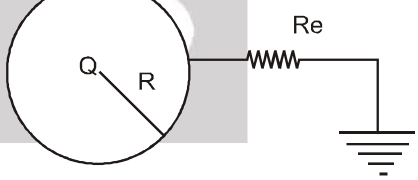


Solution : गाउस नियम से $\phi = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$; यहाँ, क्योंकि Q किनारे पर रखा है अतः घन के अन्दर केवल $\frac{Q}{8}$ आवेश है। क्योंकि पूरा आवेश इस तरह के 8 घनों से घिरा हुआ है।

$\therefore\ q_{in} = \frac{Q}{8}$ अतः, $\phi = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{8\varepsilon_0}$ **Ans.**

Problem 19. एक Q आवेश व R त्रिज्या का विलगित चालक गोला उच्च प्रतिरोधक तार से भूसम्पर्कित किया जाता है। इसमें ऊष्मा हानि कितनी होती है।

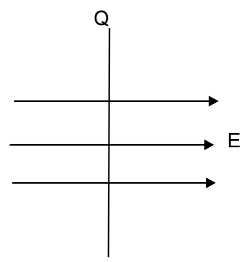
Solution : जब गोले को भू सम्पर्कित किया जाता है तो इसका विभव, शून्य हो जाता है। जिसका मतलब है सभी आवेश, धरातल में चले गये है। क्योकि गोला चालित और विलगित है।



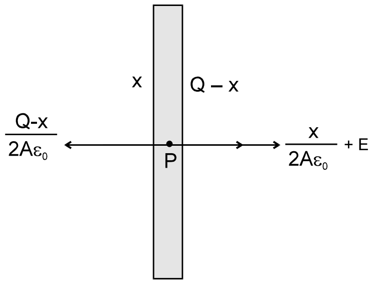
अतः गोले की सभी ऊर्जा, ऊष्मा में परिवर्तित हो जायेगी।

अतः, कुल ऊष्मा हानि = $\frac{kQ^2}{2R}$

Problem 20. एक विलगित चालक परत, जिसका क्षेत्रफल A और आवेश Q है को समान विद्युत क्षेत्र E में रखा गया है। परत को इस तरह रखा है कि विद्युत क्षेत्र, परत के लम्बवत् है और यह सम्पूर्ण परत पर आपतित चालक परत में बांये तरफ और दांयी तरफ प्रकट, आवेश को ज्ञात करो। परत के बांयी तरफ और दांयी तरफ का परिणामी विद्युत क्षेत्र भी ज्ञात करो।



Solution : माना यहाँ प्लेट के बांयी ओर x आवेश है और दांयी ओर Q – x आवेश है।



$E_P = 0$

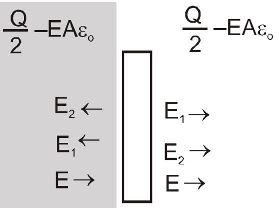
$$\frac{x}{2A\varepsilon_0} + E = \frac{Q-x}{2A\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{x}{A\varepsilon_0} = \frac{Q}{2A\varepsilon_0} - E$$

$\Rightarrow \ x = \frac{Q}{2} - EA\varepsilon_0$ और $Q - x = \frac{Q}{2} + EA\varepsilon_0$

अतः एक तरफ आवेश $\frac{Q}{2} - EA\varepsilon_0$ और दूसरी तरफ आवेश $\frac{Q}{2} + EA\varepsilon_0$ है।

आवेशित परत के कारण, परत के बाहर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र $= \frac{Q_{net}}{2A\varepsilon_0} = \frac{Q}{2A\varepsilon_0}$

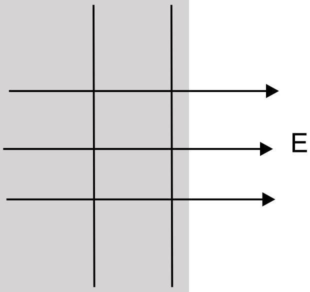
और दिशा प्लेट के बाहर की ओर होती है। E_1 और E_2 क्रमशः प्लेट के बांयी ओर और दांयीं ओर स्थित आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र है।



अब $E_{left} = E - E_1 - E_2 = E - \dfrac{\frac{Q}{2} - EA\varepsilon_o + \frac{Q}{2} + EA\varepsilon_o}{2A\varepsilon_o}$

$= E - \frac{Q}{2A\varepsilon_o}$ (बांयीं तरफ) ; $E_{right} = E + E_1 + E_2 = E + \frac{Q}{2A\varepsilon_o}$ (दांयीं तरफ)

Problem 21. दो अनावेशित तथा समान्तर चालक पट्टिकाएं (प्रत्येक का क्षेत्रफल A है।) समरूप विद्युत क्षेत्र E में एक दूसरे से परिमित दूरी पर रखी हें विद्युत क्षेत्र पट्टिकाओं के लम्बवत् है तथा सम्पूर्ण पट्टिकाएं इस क्षेत्र से ढकी हैं। तो इसके दोनों पृष्ठों पर उपस्थित आवेश ज्ञात करो?



Solution : प्लेटे, चालित है अतः इन प्लेटों के अन्दर विद्युत क्षेत्र शून्य है। अतः प्रेरित आवेश। (प्लेटों की सतह पर) के कारण विद्युत क्षेत्र बाहरी विद्युत क्षेत्र से संतुलित हो जाता है।

यहाँ $\vec{E}_i$ = प्रेरित विद्युत क्षेत्र

दोनों प्लेटों के लिये $\vec{E}_i + \vec{E} = 0$

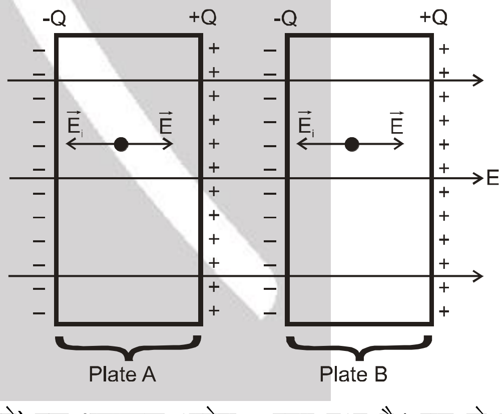
$\Rightarrow \vec{E}_i = -\vec{E}$ .....(1)

माना सतहों पर प्रेरित आवेश +Q और – Q है तब

$|\vec{E}_i| = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$

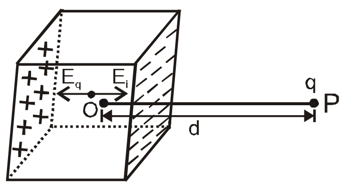
समीकरण (1) से

$\frac{Q}{A\varepsilon_0} = E \Rightarrow Q = AE\varepsilon_0$ **Ans.**



Problem 22. एक ठोस चालक घन के केन्द्र से d दूरी पर (घन के सामने) एक धनात्मक आवेश q रखा हुआ है। घन के पृष्ठ पर प्रेरित होने वाले आवेशों के कारण घन के केन्द्र पर वि०क्षे० ज्ञात कीजिए।

Solution : यहाँ E_i = प्रेरित आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र



और E_q = आवेश q के कारण विद्युत क्षेत्र

हम जानते है चालित गुहा के अन्दर विद्युत क्षेत्र, शून्य होता है

अर्थात, घन के केन्द्र पर $\vec{E} = 0$

$\Rightarrow \vec{E}_i + \vec{E}_q = 0 \quad \Rightarrow \vec{E}_i = -\vec{E}_q$

$\vec{E}_i = -\frac{kq}{d^2}\overrightarrow{PO} = \frac{kq}{d^2}\overrightarrow{OP}$ **Ans.**