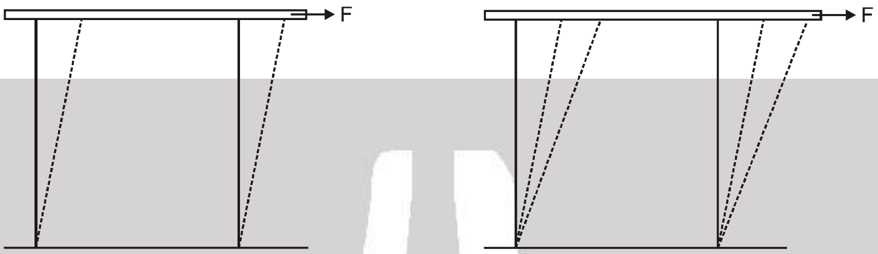
तरल यांत्रिकी (FLUID MECHANICS)

तरल यांत्रिकी में द्रव्य के विराम अवस्था व गति की अवस्था में व्यवहार का अध्ययन करते है। द्रव वह पदार्थ है जिस पर स्पर्श रेखीय (shear) प्रतिबल लगाने पर वह लगातार विरूपित होता है यद्यपि स्पर्श रेखीय प्रतिबल बहुत छोटा हो सकता है। अतः द्रव्य पदार्थ की वह भौतिक अवस्था है जिसमें यह द्रव व गैस (या वाष्प) अवस्था में होता है।
हम द्रव्य को इस प्रकार भी परिभाषित कर सकते है कि यह एक पदार्थ है जो विरामावस्था पर स्पर्श रेखीय प्रतिबल सहन नही कर सकता है।



(a) ठोस (b)द्रव

1. द्रव का घनत्व

पदार्थ का घनत्व (ρ) इस प्रकार परिभाषित है, प्रति एकांक आयतन का द्रव्यमान घनत्व कहलाता है।

$\rho = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$ $\rho = \frac{m}{V}$

2. सापेक्ष घनत्व (RD)

द्रव की स्थिति में, एक ओर पद सापेक्ष घनत्व (RD) परिपभाषित होता है। यह पदार्थ का घनत्व व 4°C पर पानी के घनत्व का अनुपात है। अतः $RD = \frac{\text{पदार्थ का घनत्व}}{4°C \text{ पर पानी का घनत्व}}$

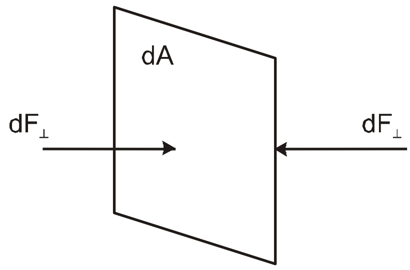
RD शुद्ध रूप से अनुपात है। अतः इसकी कोई इकाई नही होती है। यह विशिष्ट घनत्व भी कहलाता है।
CGS पद्धति में 4°C पर पानी का घनत्व $1 g/cm^3$ है। अतः आंकिक रूप से सापेक्ष घनत्व तथा पदार्थ का घनत्व (CGS में) बराबर होता है। SI पद्धति में 4°C पर पानी का घनत्व $1000\ kg/m^3$ है।

Solved Examples

Example 1. तेल का सापेक्ष घनत्व 0.8 है। तेल का CGS व SI पद्धति में शुद्ध घनत्व ज्ञात कीजिए।
Solution : तेल का घनत्व (CGS में) = $(RD) g/cm^3 = 0.8\ g/cm^3$
तेल का घनत्व (SI में) = $800\ kg/m^3$

3. द्रव्य में दाब

जब एक द्रव्य (द्रव या गैस) विरामावस्था में है, यह इसके सम्पर्क में किसी भी सतह के लम्बवत् एक बल आरोपित करता है, जैसे कि पात्र की दिवार या द्रव में डूबी एक वस्तु है।
जबकि द्रव पूर्ण रूप से विरामावस्था में है, अणु द्रव को गतिशील बनाये रखते है, द्रव द्वारा आरोपित बल अणुओ की उनके परिवेश से टक्कर के कारण होता है।



यदि हम द्रव में एक काल्पनिक सतह की कल्पना करते है। द्रव सतह के दोनो तरफ बराबर व विपरीत बल सतह पर आरोपित करता है, अन्यथा सतह त्वरित होगी तथा द्रव विरामावस्था में नही रहेगा।

एक छोटा पृष्टिय क्षेत्रफल dA लेते है जो द्रव के एक बिन्दु पर केन्द्रीत है प्रत्येक पृष्ठ पर द्रव द्वारा आरोपित अभिलम्ब बल $dF_{\perp}$ है। इस बिन्दु पर दाब की परिभाषा से प्रतिएकांक क्षेत्रफल पर लम्बवत् बल अथार्त $P = \frac{dF_{\perp}}{dA}$

यदि परिमित समतल सतह के क्षेत्रफल A के सभी बिन्दुओं पर दाब समान है, तब $P = \frac{F_{\perp}}{A}$

जहां $F_{\perp}$ सतह के एक ओर अभिलम्ब बल है दाब का SI मात्रक पास्कल है

जहां 1 पास्कल = 1Pa = 1.0 N/m^2

मोसम विज्ञानिकी में एक इकाई मुख्यत उपयोग में आती है वह एक Bar है जो 10^5 Pa के समतुल्य है।

1 Bar = 10^5 Pa

नोट : द्रव का दाब सतह के लम्बवत् कार्यरत होता है यद्धपि सतह द्रव में किसी भी अभिविन्यास में हो। अतः दाब स्वंय की कोई दिशा नही रखता है, यह एक अदिश राशि है। यद्धपि बल एक सदिश है जिसकी निश्चित दिशा होती है।

वायुमण्डलीय दाब (P_0)

यह पृथ्वी के वायुमण्डल पर दाब है। यह मौसम व ऊँचाई के साथ परिवर्तित होता है समुद्र तल पर सामान्य वायुमण्डलीय दाब (औसत मान) 1.013×10^5 Pa है।

परम दाब व गेज दाब

वायुमण्डलीय दाब से ऊपर दाब आधिक्य सामान्यत गेज दाब कहलाता है। तथा कुल दाब परम दाब कहलाता है अतः

गेज दाब = परम दाब – वायुमण्डलीय दाब

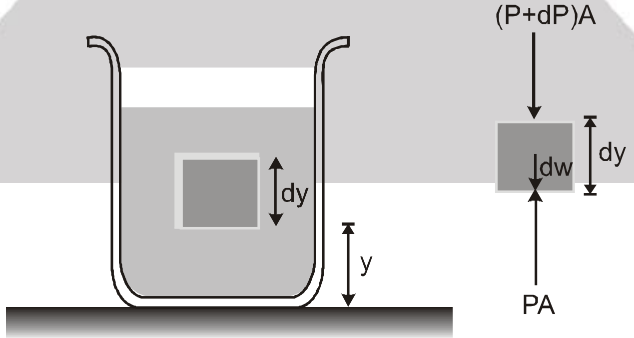
परम दाब हमेशा शून्य से अधिक या बराबर होता है जबकि गेज दाब ऋणात्मक भी हो सकता है।

ऊँचाई के साथ दाब में परिवर्तन

यदि द्रव्य का दाब नगण्य कर सकते है, द्रव के सम्पूर्ण आयतन में दाब समान रहता है। परन्तु अक्सर द्रव का भार नगण्य नही होता है व इस प्रकार की स्थिति में दाब सतह से नीचे गहराई बढने के साथ बढता जाता है।

माना अब द्रव के किसी बिन्दु पर सतह से ऊँचाई y के साथ दाब P में परिवर्तन के लिए सामान्य संबध व्यत्पन्न करते है। हम द्रव में सभी जगह घनत्व ρ व गुरूत्व के कारण त्वरण g समान मानते है। यदि द्रव साम्यावस्था में है, प्रत्येक आयतन अवयव साम्यावस्था में होता है।

द्रव में dy ऊँचाई का एक पतला अवयव लेते है। तली व शीर्ष प्रत्येक सतह का क्षेत्रफल A है तथा वे निर्देशित स्तर जहां y = 0 से y तथा y + dy ऊँचाई पर है द्रव अवयव का भार है।



dW = (आयतन) (घनत्व) (g) = (A dy) (ρ) (g)

या dW = ρgAdy

इस द्रव अवयव पर y-दिशा में अन्य बल क्या है ? तली सतह पर दाब P कहलाता है ऊपर की ओर कुल बल का y घटक PA है। शीर्ष सतह पर दाब P + dP है तथा सतह पर नीचे की ओर कुल बल का y-घटक (P + dP) है। द्रव अवयव साम्यावस्था में है, अतः कुल बल के y-घटक में भार भी सम्मलित है तथा तली सतह व शीर्ष सतह पर कुल बल शून्य होना आवश्यक है।

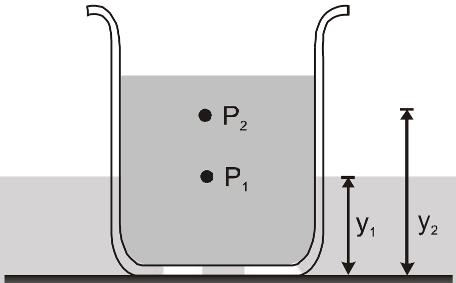
$\Sigma F_y = 0$

$\therefore \quad PA - (P + dP)A - \rho gA\, dy = 0$

या $\frac{dP}{dy} = -\rho g$

यह समीकरण दर्शाती है कि जब y बढता है, P घटता है अर्थात जब हम द्रव में ऊपर की ओर जाते है तो दाब घटता है। यदि y_1 व y_2 ऊँचाई पर दाब P_1 तथा P_2 है ओर यदि ρ व g नियत है तब समीकरण (i) के समाकलन से हम प्राप्त करते है।

या $P_2 - P_1 = -\rho g\,(y_2 - y_1)$ .....(ii)



यह अक्सर सुविधाजनक होता है कि समीकरण (ii) में गहराई को द्रव की सतह के नीचे गहराई के पद में लेवें। द्रव की सतह के नीचे h गहराई पर एक बिन्दु 1 बिन्दु लेते है तथा माना इस बिन्दु पर दाब P है। द्रव की सतह पर एक बिन्दु 2 लेते है, जहां दाब P_0 (पदाक्षर शून्य गहराई के लिए है) है। सतह से नीचे बिन्दु 1 की गहराई

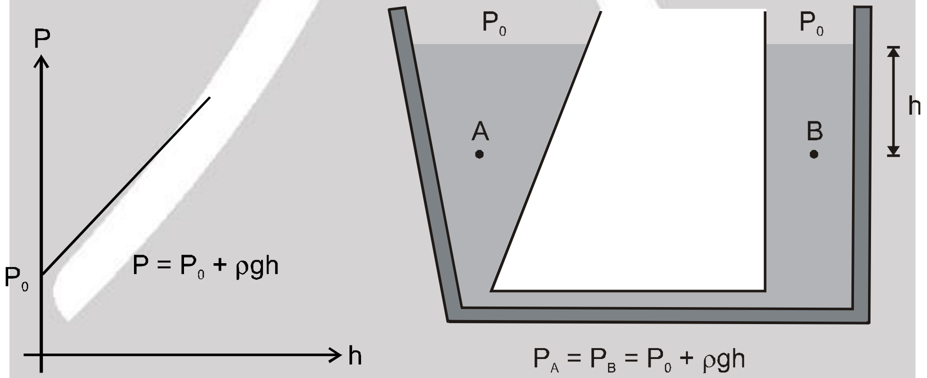
$h = y_2 - y_1$

अतः समीकरण (ii) हो जायेगी

$P_0 - P = -\rho g\,(y_2 - y_1) = -\rho gh$

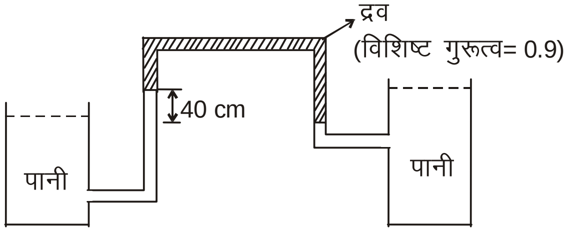
$\therefore$ $P = P_0 + \rho gh$ ......(iii)

अतः दाब गहराई के साथ रेखीय रूप से बढता है, यदि ρ व g एक समान है। P व h के मध्य आरेख नीचे दर्शाया गया है।



स्थिर द्रव में समान स्तर पर स्थित दो बिन्दुओं पर दाब समान रहता है। पात्र का आकार महत्वपूर्ण नही है।

Example 2. चित्रानुसार मैनोमीटर दो टैंको के जल स्तरों में अन्तर को मापने में उपयोग किया जाता है। प्रदर्शित स्थितियों के लिए इस जलस्तर के अन्तर को ज्ञात करो।



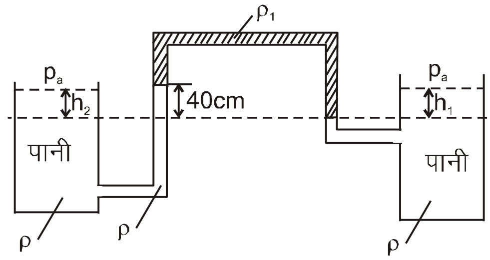
Solution : $P_a + h_1 \rho g - 40\rho_1 g + 40\rho g = P_a + h_2 \rho g$

$h_2 \rho g - h_1 \rho g = 40 \rho g - 40 \rho_1 g$

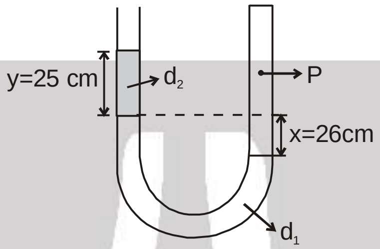
as $\rho_1 = 0.9\rho$

$(h_2 - h_1) \rho g = 40\rho g - 36\rho g$

$h_2 - h_1 = 4$ cm



Example 3. दी गई U-नली (एक सिरे से खुली हुई) में p तथा p_a के मध्य सम्बन्ध ज्ञात करो। दिया है $d_2 = 2 \times 13.6$ ग्राम /सेमी०^3 $d_1 = 13.6$ ग्राम /सेमी०^3



Solution : समान स्तर पर द्रव में दाब समान होता है। अर्थात् A – A पर

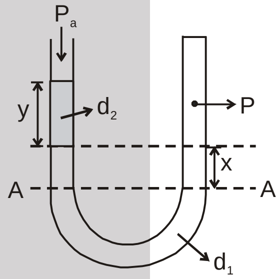
$P_a + d_2 yg + x d_1 g = P$

C.G.S. पद्वति में

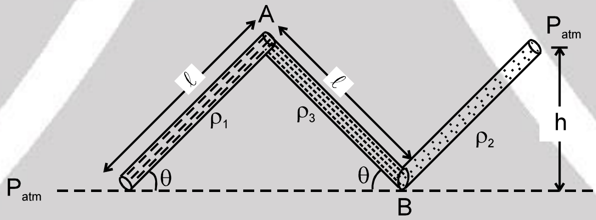
$P_a + 13.6 \times 2 \times 25 \times g + 13.6 \times 26 \times g = P$

$P_a + 13.6 \times g\,[50 + 26] = P$

$2P_a = P$ $\qquad [P_a = 13.6 \times g \times 76]$



Example 4. A तथा B बिन्दुओं पर दाब ज्ञात करो तथा कोण 'θ' भी ज्ञात करो।



Solution : A पर दाब – $P_A = P_{\text{वायुमण्डलीय}} - \rho_1 \, gl \sin\theta$

B पर दाब – $P_B = P_{\text{वायुमण्डलीय}} + \rho_2 \, gh\, \theta$

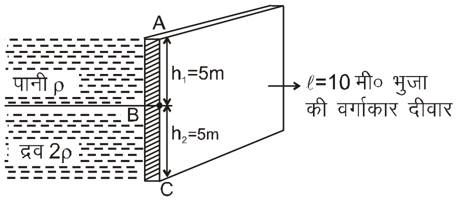
परन्तु P_B निम्न समीकरण से भी दिया जाता है।

$P_B = P_A + \rho_3 \, gl \sin\theta$ अतः $P_{\text{वायुमण्डलीय}} + \rho_2 \, gh = P_A + \rho_3 \, gl \sin\theta$

$P_{\text{वायुमण्डलीय}} + \rho_2 \, gh = P_{\text{वायुमण्डलीय}} - \rho_1 \, gl \sin\theta + \rho_3 \, gl \sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{\rho_2 h}{(\rho_3 - \rho_1)\ell}$$

Example 5. ℓ भुजा की वर्गाकार दीवार के पीछे पानी तथा द्रव भरा है तो ज्ञात कीजिए

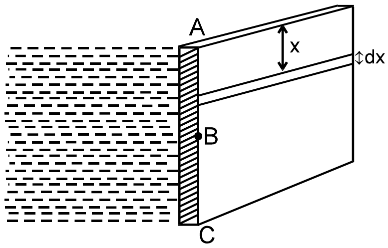


(a) A, B तथा C पर दाब $\qquad$ (b) AB तथा BC भाग में बल

Solution : (a) चूंकि 'A' के ऊपर द्रव नहीं है, इसलिए A पर, $P_A = 0$

B पर दाब, $P_B = \rho g h_1$

C पर दाब, $P_C = \rho g h_1 + 2\rho g h_2$



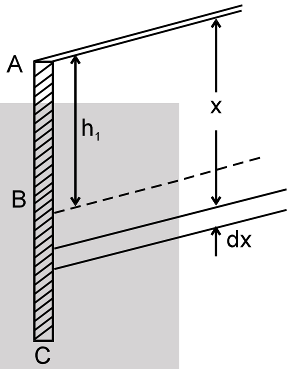
(b) A पर बल = 0

AB भाग में 'x' गहराई पर 'dx' मोटाई की पट्टिका लेने पर दाब $\rho g x$ के बराबर होता है।

पट्टिका पर बल = दाब × क्षेत्रफल

$dF = \rho g x \,\ell dx$

अतः B तक कुल बल $F = \int_0^{h_1} \rho g x \ell dx = \dfrac{\rho g x \ell h_1^2}{2}$



$= \dfrac{1000 \times 10 \times 10 \times 5 \times 5}{2} = 1.25 \times 10^6$ N

BC भाग में बल ज्ञात करने के लिए BC भाग में dx मोटाई की एक पट्टिका लेते है। अतः दाब

$= \rho g h_1 + 2\rho g(x - h_1)$

पट्टिका पर बल = दाब × क्षेत्रफल

$dF = [\rho g h_1 + 2\rho g(x - h_1)]\, \ell\, dx$

BC भाग पर कुल बल $F = \int_{h_1}^{\ell} [\rho g h_1 + 2\rho g(x - h_1)]\ell dx$

$= \left[\rho g h_1 x + 2\rho g\left[\dfrac{x^2}{2} - h_1 x\right]\right]_{h_1}^{\ell} \ell = \rho g h_1 h_2\, \ell + 2\rho g \ell \left[\dfrac{\ell^2 - h_1^2}{2} - h_1\ell + h_1^2\right]$

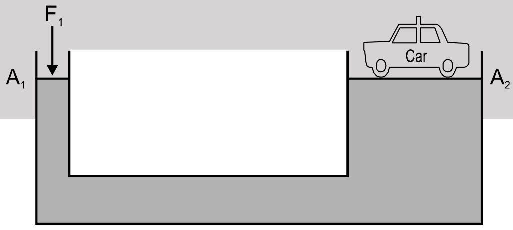
$= \rho g h_1 h_2 \ell + \dfrac{2\rho g \ell}{2}\ [\ell^2 + h_1^2 - 2h_1\ell] = \rho g h_1 h_2 \ell + \rho g \ell\, (\ell - h_1)^2$

$= \rho g h_2 \ell\, [h_1 + h_2] = \rho g h_2 \ell^2 = 1000 \times 10 \times 5 \times 10 \times 10 = 5 \times 10^6$ N

पास्कल का नियम

इसके अनुसार "परिबद्ध द्रव्य पर आरोपित बाह्य दाब द्रव्य के प्रत्येक भाग तथा पात्र की दीवारों पर बिना ह्रास के सभी दिशाओं समान रूप से स्थानांतरित होता है"।

पास्कल नियम का एक परिचित अनुप्रयोग द्रवचलित लिफ्ट के प्रयोग से भारी वस्तुओं को उठाने में होता है। इसकी रूपरेखा चित्र में समझाई गई है।



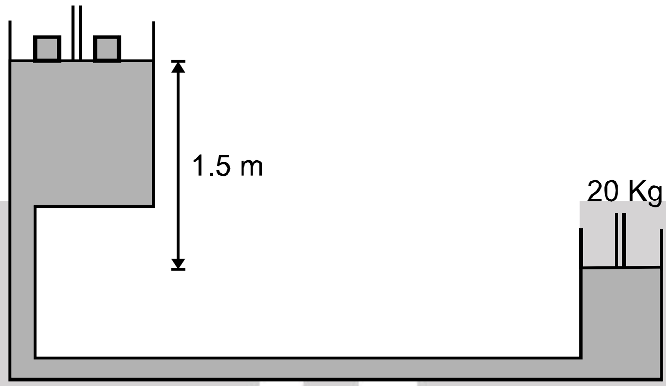
अनुप्रस्थ काट A_1 का छोटा पिस्टन द्रव पर सीधा बल F_1 आरोपित करता है। $P = \dfrac{F_1}{A_1}$ दाब पूर्ण द्रव में स्थानान्तरित होता है तथा अनुप्रस्थ काट A_2 के बड़े बेलन में जुड़े हुए पाइप के द्वारा स्थानांतरित हो जाता है। दोनों बेलनों में आरोपित दाब समान है अतः

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{या} \quad F_2 = \frac{A_2}{A_1}.F_1$$

अब, चूंकि $A_2 > A_1$ है, अतः $F_2 > F_1$ है। इसलिए द्रवचलित मशीन एक बल गुणक यंत्र है जिसका गुणनफल गुणांक दोनों पिस्टनों के क्षेत्रफल के अनुपात के बराबर है। दांतों के डॉक्टर की कुर्सी, कार उत्थापक तथा जेक व द्रवचालित ब्रेक इस सिद्धान्त पर आधारित हैं।

Solved Examples

Example 6. चित्र में एक द्रवचालित दाब मशीन दर्शाई गई है जिसके बड़े पिस्टन का व्यास 35 cm है तथा 10 cm व्यास के छोटे पिस्टन से 1.5 m की ऊँचाई पर है। छोटे पिस्टन पर रखा द्रव्यमान 20 kg है। बड़े पिस्टन पर आरोपित बल का परिमाण क्या होगा ? दाब मशीन में द्रव का घनत्व 750 kg/m^3 है। (g = 9.8m/s^2 लीजिए)



Solution : छोटे पिस्टन पर दाब $= \dfrac{20 \times 9.8}{\pi \times (5 \times 10^{-2})^2} N/m^2$

बड़े पिस्टन पर दाब $= \dfrac{F}{\pi \times (17.5 \times 10^{-2})^2} N/m^2$

दोनों के मध्य दाब का अंतर = $h\rho g$

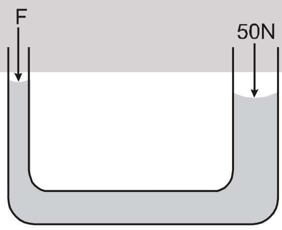
जहाँ h = 1.5 m तथा ρ = 750 kg/m^3

अतः, $\dfrac{20 \times 9.8}{\pi \times (5 \times 10^{-2})^2} - \dfrac{F}{\pi \times (17.5 \times 10^{-2})^2} = 1.5 \times 750 \times 9.8 = 11025$

$\Rightarrow$ F = 1.3 × 10^3 N

Note : दोनों पिस्टनों पर वायुमण्डलीय दाब समान है तथा इसे नगण्य कर सकते हैं।

Example 7. हाइड्रोलिक प्रेस की दो भुजाओं का अनुप्रस्थ काट क्षेत्र क्रमशः 1 cm^2 तथा 10 cm^2 है (चित्र)। चौड़ी भुजा के पानी पर 50 N बल आरोपित किया जाता है। पतली भुजा के पानी पर कितना बल लगाना चाहिए कि पानी साम्यावस्था में रहे?



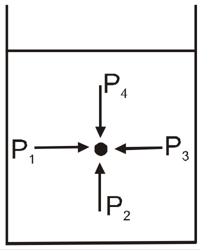
Solution : साम्यावस्था में, दोनों सतहों पर दाब बराबर होना चाहिए, यदि दोनों समान क्षैतिज स्तर पर रहे। यदि वायुमण्डलीय दाब P तथा आरोपित बल F हो तो साम्यावस्था में दाब क्रमशः

$P_0 + \dfrac{50\ N}{1\ 0cm^2}$ तथा $P_0 + \dfrac{F}{1\ cm^2}$ है।

अतः इनसे F = 5 N प्राप्त होता है।

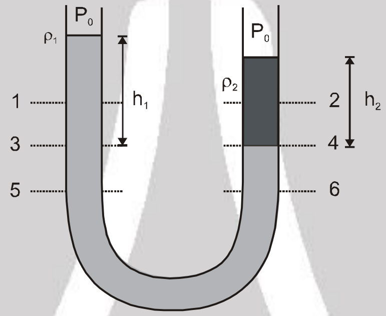
दाब के महत्वपूर्ण बिन्दु

1. द्रव्य में एक बिन्दु पर दाब सभी दिशाओं में समान होता है, चित्र में
$P_1 = P_2 = P_3 = P_4$



2. द्रव्य की साम्यावस्था में आरोपित बल इसकी सतह के लम्बवत् होता है। क्योंकि यह अपरूपण प्रतिबल सहन नहीं कर सकता है।

3. समान द्रव में समान स्तर पर स्थित सभी बिन्दुओं पर दाब समान होगा । उदाहरण के लिए चित्र में



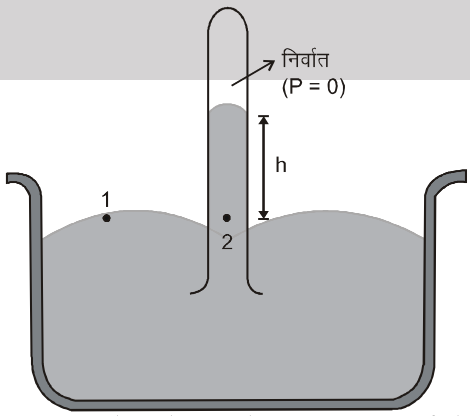
$P_1 \neq P_2$
$P_3 = P_4$ तथा $P_5 = P_6$
यद्यपि $P_3 = P_4$

$\therefore \quad P_0 + \rho_1 gh_1 = P_0 + \rho_2 gh_2$ या $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$ या $h \propto \frac{1}{\rho}$

4. टॉरिसेली प्रयोग (वायुदाबमापी) :

यह एक यंत्र है जो वायुमण्डलीय दाब मापन में उपयोग में आता है। दाबमापी में कोई भी द्रव भरकर उपयोग में ले सकते हैं, लेकिन इसके लिए पारे का चयन करते हैं क्योंकि इसके घनत्व के कारण उपयुक्त आकार का उपकरण बनना सम्भव हो सका।

$P_1 = P_2$
यहाँ, P_1 = वायुमण्डलीय दाब (P_0)
तथा $P_2 = 0 + \rho gh = \rho gh$
यहाँ ρ = पारे का घनत्व



अतः पारादाबमापी वायुमण्डलीय दाब (P_0) को सीधे ही पारे स्तम्भ की ऊँचाई से दर्शाता है।
उदाहरण के लिए यदि पारे दाबमापी में पारे की ऊँचाई 760 mm है तब वायुमण्डलीय दाब होगा

$$P_0 = \rho gh = (13.6 \times 10^3)(9.8)(0.760) = 1.01\times10^5 \text{ N/m}^2$$

5. मेनोमीटर (दाबान्तरमापी) :

यह एक यंत्र है जो पात्र के अंदर दाब मापन में उपयोग में आता है। U-आकार की नली में अक्सर पारा भरा होता है

$P_1 = P_2$

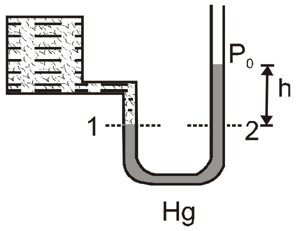
यहाँ P_1 = पात्र में गैस का दाब (P)

तथा P_2 = वायुमण्डलीय दाब (P_0) + ρgh

$P = P_0 + h\rho g$

इसे निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं

$P - P_0$ = गेज दाब = ρgh

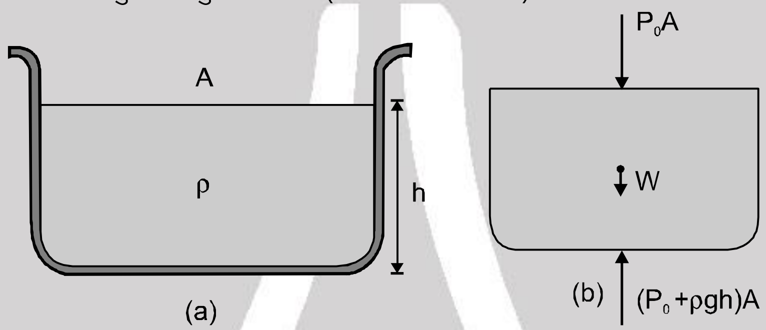


यहाँ, U-नली में उपयोग किए गए द्रव का घनत्व ρ है।

अतः h के मापन से हम पात्र में परम (या गेज) दाब ज्ञात कर सकते हैं।

6. द्रव का मुक्त वस्तु आरेख :

चित्र (b) के अनुसार द्रव के मुक्त वस्तु आरेख में (केवल ऊर्ध्वाधर बल) दर्शाते हैं। द्रव की साम्यावस्था के लिए



(a)

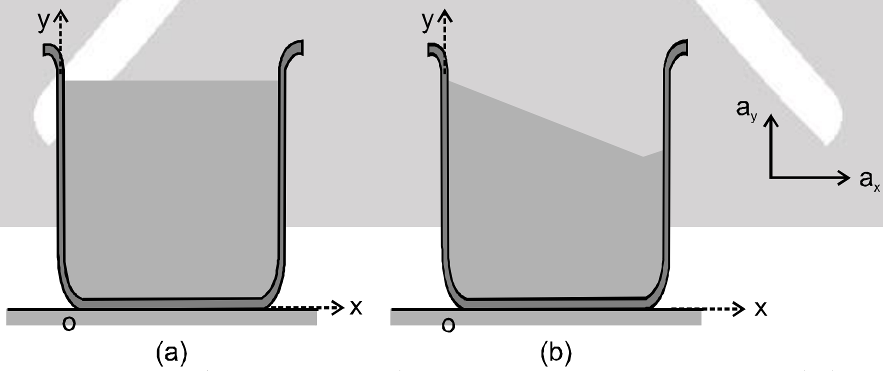
नीचे की ओर कुल बल = ऊपर की ओर कुल बल

$\therefore\ P_0A + W = (P_0 + \rho gh)A$ या $W = \rho ghA$

7. त्वरित द्रव में दाबांतर

चित्र (a) में दर्शाये अनुसार बीकर में विरामावस्था में रखे एक द्रव को लेते हैं। इस स्थिति में हम जानते हैं कि क्षैतिज दिशा (x-दिशा) में दाब में कोई परिवर्तन नहीं होता है यह ऊपर की ओर y-दिशा में घटता है अतः हम समीकरण लिख सकते हैं।

तथा $\dfrac{dP}{dx} = 0$ तथा $\dfrac{dP}{dy} = \rho g$



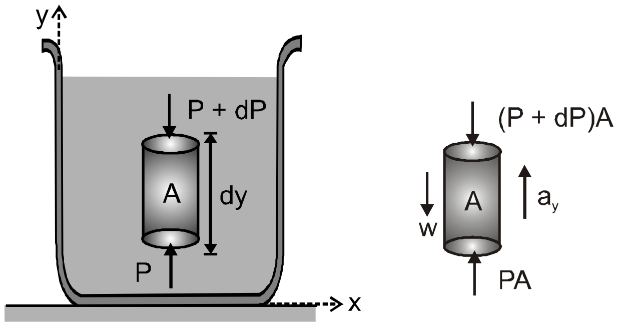
(a) (b)

लेकिन मानिए कि बीकर त्वरित है तथा यह त्वरण के घटक a_x तथा a_y क्रमशः x व y दिशाओं में रखता है तब x व y दोनों दिशाओं के अनुदिश ताप घटता है। इस स्थिति में उपरोक्त समीकरण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$\frac{dP}{dx} = -\rho a_x \quad \text{तथा} \quad \frac{dP}{dy} = -\rho(g + a_y)$$

इन समीकरण को निम्न प्रकार व्युत्पन्न कर सकते हैं, मानिए कि एक बीकर ρ घनत्व के किसी द्रव से भरा हुआ है तथा यह धनात्मक y -अक्ष के अनुदिश ऊपर की ओर a_y त्वरण से त्वरित है, माना कि चित्रानुसार द्रव का एक छोटा अवयव क्षेत्रफल A व लम्बाई dy का है, जिसका मुक्त वस्तु आरेख बनाते हैं। इस अवयव के लिए गति की समीकरण से,

$PA - W - (P + dP)A$ = (द्रव्यमान)(a_y) या $-W - (dP)A = (A\rho\, dy)(a_y)$

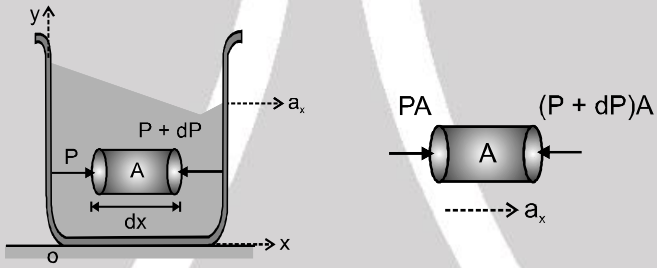


(a)

या $-(A\rho g\, dy) - (dP)\, A = (A\rho\, dy)(a_y)$ या $\frac{dP}{dy} = -\rho(g + a_y)$

इसी प्रकार यदि बीकर धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश a_x त्वरण से त्वरित है, चित्र में दर्शाये गए द्रव अवयव के लिए गति की समीकरण से $PA - (P + dP)\, A =$ (द्रव्यमान) (a_x)

या $-(dP)\, A = (A\rho\, dx)\, a_x$ या $\frac{dP}{dx} = -\rho a_x$

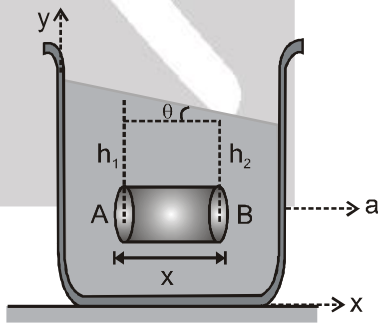


(a)

8. क्षैतिज दिशा में त्वरित द्रव की मुक्त सतह

मानिए कि बीकर में रखा द्रव जो क्षैतिज दिशा में 'a' त्वरण से त्वरित है। माना द्रव में A व B दो बिन्दु हैं जो समान क्षैतिज रेखा पर x दूरी द्वारा पृथक्कृत है। इस स्थिति में हम देखते हैं कि

$$\frac{dP}{dx} = -\rho a$$



या $dp = \rho a\, dx$

सही सीमा में इसके समाकलन से हम प्राप्त करते हैं कि

$$P_A - P_B = \rho a x$$

तत्पश्चात् $P_A = P_0 + \rho g h_1$

तथा $P_B = P_0 + \rho g h_2$

समीकरण (iii) में रखने पर

$$\rho g\, (h_1 - h_2) = \rho a x$$

$$\frac{h_1 - h_2}{x} = \frac{a}{g} = \tan\theta$$

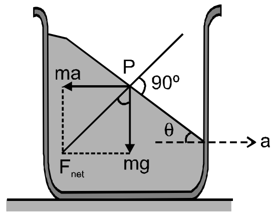
$$\tan\theta = \frac{a}{g}$$

अन्य हल

माना कि द्रव की सतह के बिन्दु P पर m द्रव्यमान का एक द्रव का कण है। त्वरित निर्देश तन्त्र से, इस पर दो बल कार्यरत हैं

(i) छद्म बल (ma) (ii) भार (mg)

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं साम्यावस्था में परिणामी बल सतह के लम्बवत् होता है

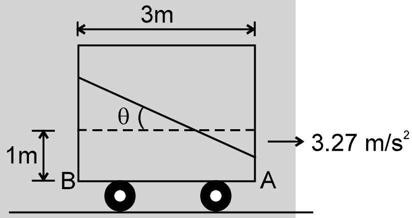


$\therefore \quad \tan\theta = \dfrac{ma}{mg} \quad \text{or} \quad \tan\theta = \dfrac{a}{g}$

Solved Examples

Example 8. एक खुला आयताकार टैंक 1.5 मीटर चौड़ा, 2 मीटर गहरा व 3 मीटर लम्बा है तथा आधा जल से भरा हुआ है। इसको लम्बाई की दिशा के अनुदिश क्षैतिज त्वरण 3.27 मी०/सैक०^2 से त्वरित करते है। टैंक के प्रत्येक सिरे पर पानी की ऊँचाई ज्ञात करो। [g = 9.81 मी०/सैक०^2]

Solution : $\tan\theta = \dfrac{a}{g} = \dfrac{1}{3}$



कोने 'A' पर गहराई = 1 – 1.5 tanθ = 0.5 मीटर

कोने 'B' पर गहराई

= 1 + 1.5 tan θ = 1.5 मीटर

9. आर्किमिडीज का सिद्धान्त

यदि एक भारी वस्तु द्रव में डूबी हुई है, यह देखा जाता है कि इसका भार तुलनात्मक कम होता है जब यह वायु में होती है। इसका कारण है कि द्रव वस्तु पर ऊपर की ओर एक बल लगाता है जो उत्प्लावन बल कहलाता है। यह वस्तु द्वारा विस्थापित द्रव के भार के बराबर होता है।

एक वस्तु द्रव में आंशिक या पूर्ण रूप से डूबती है तो इस पर द्रव द्वारा ऊपर की ओर लगने वाला बल विस्थापित द्रव के भार के बराबर है

यह परिणाम आर्किमिडीज के सिद्धान्त के रूप में जाना जाता है

अतः, उत्प्लावन बल (F) का परिमाण, $F = V_i \rho_L g$

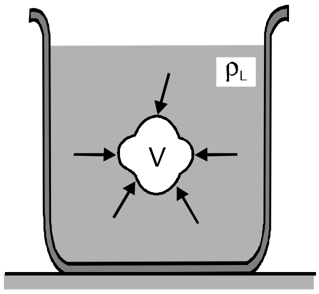
यहाँ, V_i = वस्तु का डूबा हुआ आयतन

ρ_L = द्रव का घनत्व

तथा g = गुरूत्व के कारण त्वरण

प्रमाण

माना कि V आयतन की एक यादृच्छिक आकार की वस्तु का आयतन ρ_L घनत्व के द्रव से भरे एक पात्र में रखी हुई है। दर्शायी गई वस्तु पूर्ण रूप से डूबी हुई है, लेकिन प्रमाण के लिए यह आवश्यक नहीं है कि वस्तु पूर्ण रूप से डूबे। प्रारम्भ करने से पहले, वस्तु के डूबने के पहले की स्थिति की कल्पना करते हैं। अब वस्तु द्वारा घेरा गया परिक्षेत्र पहले द्रव से भरा हुआ था जिसका भार $V\rho_L g$ था। क्योंकि सम्पूर्ण द्रव जैसा कि द्रवस्थैतिक साम्यावस्था में था, द्रव पर ऊपर की ओर द्रव के कारण कुल बल (भिन्न–भिन्न गहराई पर दाब में अन्तर के कारण) उस क्षेत्र में भरे द्रव के भार के बराबर था।



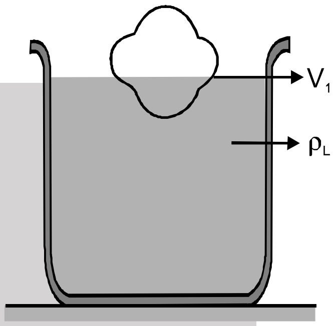
अब, मानिए कि क्या होगा जब वस्तु द्रव को विस्थापित करती है। वस्तु के प्रत्येक बिन्दु पर समान स्थाननिर्धारण पर दाब का मान अपरिवर्तित है, जब प्रत्येक बिन्दु पर वस्तु थी। इसका कारण है कि किसी भी बिन्दु पर दाब केवल सतह से बिन्दु की गहराई पर निर्भर करता है। अतः वस्तु पर परिवेश द्रव द्वारा आरोपित बल ठीक उतना ही है जितना वस्तु की उस क्षेत्र में उपस्थिति के पहले था। लेकिन हम जानते हैं कि विस्थापित द्रव का भार $V\rho_L g$ है, अतः यह वस्तु पर आरोपित उत्प्लावन बल के बराबर भी है, इस प्रकार आर्किमिडीज का सिद्धान्त प्रमाणित होता है।

10. तैरने (Floatation) का नियम

एक वस्तु का आयतन V तथा घनत्व ρ_s है, ρ_L घनत्व के द्रव में तैर रही है। माना कि द्रव में डूबे हुए वस्तु के भाग का आयतन V_i है।

वस्तु की साम्यावस्था के लिए,

भार = उत्प्लावन



$\therefore \quad V\rho_s g = V_i\rho_L g$

$\therefore \quad \dfrac{V_i}{V} = \dfrac{\rho_s}{\rho_L}$

यह द्रव में डूबे हुए आयतन की भिन्न है .

द्रव में डूबे आयतन का प्रतिशत $= \dfrac{V_i}{V}\times 100 = \dfrac{\rho_s}{\rho_L}\times 100$

तीन सम्भावनाऐं हो सकती हैं :

(i) यदि $\rho_s < \rho_L$, द्रव में वस्तु का केवल कुछ अंश डूबे। यह अंश ऊपर समीकरण द्वारा दिया गया है

(ii) यदि $\rho_s = \rho_L$, दृढ़ वस्तु पूर्ण रूप से द्रव में डूब जायेगी। अतः वस्तु द्रव में तैरती रहती है जहाँ पर इसे छोड़ा जाता है।

(iii) यदि $\rho_s > \rho_L$, वस्तु डूब जायेगी।

द्रव के अंदर एक वस्तु का आभासी भार

यदि वस्तु द्रव में पूर्ण रूप से डूब जायेगी, इसका प्रभावी भार घट जाता है। इसके भार में कमी वस्तु पर लगे उत्प्लावन बल के तुल्य है। अतः

$W_{app} = W_{actual}$ – उत्प्लावन या $W_{app} = V\rho_s g - V\rho_L g$

यहाँ, V = वस्तु का कुल आयतन

ρ_s = वस्तु का घनत्व

तथा ρ_L = द्रव का घनत्व

अतः, $W_{app} = Vg(\rho_s - \rho_L)$

यदि द्रव जिसमें वस्तु डूबी है वह पानी है तब

$\dfrac{\text{वायु में भार}}{\text{भार में कमी}}$ = वस्तु का सापेक्ष घनत्व (R.D)

यह इस प्रकार है :

$$\frac{\text{वायु में भार}}{\text{भार में कमी}} = \frac{\text{वायु में भार}}{\text{उत्प्लावन}} = \frac{V\rho_s g}{V\rho_w g} = \frac{\rho_s}{\rho_w} = RD$$

त्वरित द्रव में उत्प्लावन बल

मानिए कि एक वस्तु ρ_L घनत्व के द्रव में डूबी हुई है जो $\vec{a}$ त्वरण से गतिशील लिफ्ट में रखा हुआ है। इस स्थिति में उत्प्लावन बल F हो जायेगा

$F = V\rho_L g_{eff}$

यहाँ, $g_{eff} = |\vec{g} - \vec{a}|$

उदाहरण के लिए, यदि लिफ्ट a त्वरण से ऊपर की ओर गतिशील है, g_{eff} का मान g + a होगा तथा यदि यह नीचे की ओर a त्वरण से गतिशील है, g_{eff} का मान g – a है। मुक्त रूप से गिरती लिफ्ट में g_{eff} शून्य है (चूंकि a = g) और अतः परिणामी उत्प्लावन बल शून्य है। यह होता है क्योंकि मुक्त रूप से गिरते किसी द्रव में वायु बुलबुले ऊपर नहीं उठते हैं (अन्यथा वह उत्प्लावन बल के कारण ऊपर की ओर गतिशील होते हैं)

Solved Examples

Example 9. बर्फ का घनत्व 900kg/m^3 है। बर्फ का एक टुकड़ा 1000 kg/m^3 घनत्व के पानी में तैर रहा है। पानी के बाहर बर्फ के टुकड़े के आयतन का अंश ज्ञात कीजिए।

Solution : माना V कुल आयतन है तथा V_i पानी में डूबे बर्फ के टुकड़े का आयतन है। बर्फ के टुकड़े के साम्यावस्था के लिए,

भार = उत्प्लावन

$\therefore \quad V\rho_i g = V_i \rho_w g$

यहाँ ρ_i = बर्फ का घनत्व = 900kg/m^3

तथा ρ_w = पानी का घनत्व = 1000kg/m^3

उपरोक्त समीकरण में रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{V_i}{V} = \frac{900}{1000} = 0.9$$

अर्थात् पानी के बाहर आयतन का अंश f = 1 – 0.9 = 0.1

Example 10. एक बर्फ का टुकड़ा काँच के पात्र में भरे पानी में तैर रहा है। पात्र में पानी का स्तर किस प्रकार परिवर्तित होगा जब बर्फ पिघल जाती है ?

Solution : माना पानी में तैरते बर्फ के टुकड़े का द्रव्यमान m है।

साम्यावस्था में, बर्फ के टुकड़े का भार = उत्प्लावन

$mg = V_i \rho_w g$

या $\quad V_i = \dfrac{m}{\rho_w}$

यहाँ, V_i पानी में डूबे बर्फ के टुकड़े का आयतन है।

जब बर्फ पिघलती है, माना बर्फ के द्रव्यमान m से पानी का V आयतन बनता है तब,

$$V_i = \frac{m}{\rho_w}$$

समीकरण (i) व (ii) से हम देखते हैं कि

$V_i = V$

अतः स्तर परिवर्तित नहीं होगा।

Example 11. एक बर्फ के टुकड़े में एक पत्थर जमा हुआ है तथा यह काँच के पात्र में भरे पानी में तैर रहा है। पात्र में पानी का स्तर किस प्रकार परिवर्तित होगा जब बर्फ पिघलती है ?

Solution : माना, m_1 = बर्फ का द्रव्यमान,

m_2 = पत्थर का द्रव्यमान

ρ_s = पत्थर का घनत्व

तथा ρ_w = पानी का घनत्व

साम्यावस्था में, जब बर्फ का टुकड़ा पानी में तैर रहा है, (बर्फ + पत्थर) का भार = उत्प्लावन

$(m_1 + m_2)g = V_i \rho_w g \qquad \therefore \qquad V_i = \dfrac{m_1}{\rho_w} + \dfrac{m_2}{\rho_w}$

यहाँ, V_i = डूबी हुई बर्फ का आयतन

जब बर्फ पिघलती है बर्फ का द्रव्यमान m_1 पानी में परिवर्तित होता है तथा m_2 द्रव्यमान का पत्थर पूर्ण रूप से डूब जाता है।

बर्फ के m_1 द्रव्यमान द्वारा बने पानी का आयतन, $V_1 = \dfrac{m_1}{\rho_w}$

पत्थर का आयतन (जो विस्थापित पानी के आयतन के बराबर भी है) $V_2 = \dfrac{m_2}{\rho_s}$

चूंकि, $\rho_s > \rho_w$ अतः, $V_1 + V_2 < V_i$

या, पानी के स्तर में कमी होगी।

Example 12. एक गहने का वायु में भार 50 g है तथा पानी में भार केवल 46 g है। मानिए कि सोने (gold) से इस गहने को बनाते समय इसमें कुछ ताँबा (copper) मिलाया जाता है। इसमें कॉपर की मात्रा ज्ञात कीजिए। सोने का विशिष्ट घनत्व 20 तथा ताँबा का 10 है।

Solution : माना कि गहने में ताँबा का द्रव्यमान m है तब इसमें साने का द्रव्यमान (50 – m) है।

ताँबे का आयतन $V_1 = \dfrac{m}{10}$ $\left(\text{आयतन} = \dfrac{\text{द्रव्यमान}}{\text{घनत्व}}\right)$

तथा सोने का आयतन $V_2 = \dfrac{50 - m}{20}$

जब पानी में डूबता है ($\rho_w = 1 g/cm^3$)

भार में कमी = उत्प्लावन

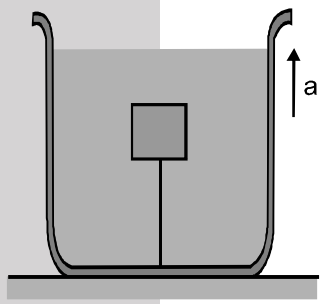
$\therefore \quad (50 - 46)g = (V_1 + V_2)\rho_w g$

या $\quad 4 = \dfrac{m}{10} + \dfrac{50 - m}{20}$

या $\quad 80 = 2m + 50 - m$

$\therefore \quad m = 30g$

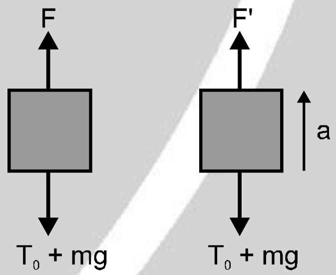
Example 13. द्रव (जिसका घनत्व ठोस के घनत्व से अधिक है) की सतह के नीचे एक डोरी द्वारा एक ठोस ब्लॉक बंधा हुआ है, डोरी में चित्रानुसार तनाव T_0 है जब निकाय विरामावस्था में है। डोरी में तनाव क्या होगा यदि निकाय a त्वरण से ऊपर की ओर गतिशील है ?



Solution : माना m ब्लॉक का द्रव्यमान है। प्रारम्भ में ब्लॉक के साम्यावस्था के लिए

$F = T_0 + mg$

यहाँ, F ब्लॉक पर उत्प्लावन बल है



लिफ्ट ऊपर की ओर त्वरित है, g_{eff}, g के स्थान पर g + a हो जाता है। अतः $F' = F\left(\dfrac{g + a}{g}\right)$

न्यूटन के द्वितीय नियम से $F' - T - mg = ma$

समीकरण (i), (ii) व (iii) को हल करने पर हम प्राप्त करते हैं

$T = T_0\left(1 + \dfrac{a}{g}\right)$

Example 14. 10 g द्रव्यमान का धातु का टुकड़ा ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग से लटका हुआ है। स्प्रिंग अपनी सामान्य लम्बाई से 10 cm खींचते हुए टुकड़े को साम्यावस्था में रखती है। अब पानी से भरा हुआ बीकर टुकड़े के नीचे इस प्रकार रखा जाता है कि टुकड़ा पानी मे सम्पूर्ण डूब जाता है। स्प्रिंग में प्रसार ज्ञात करो ? धातु का घनत्व = 9000 kg/m³ है। $g = 10 \, m/s^2$ लें।

Solution : माना स्प्रिंग बल नियतांक k है। जब टुकड़ा हवा में लटका है तो साम्यावस्था की स्थिति में

$k (10 \, cm) = (0.01 \, kg) (10 \, m/s^2)$

या $\quad k (10 \, cm) = 0.1 \, N.$ .....(i)

धातु के टुकड़े का आयतन $= \dfrac{0.01 kg}{9000 kg/m^3} = \dfrac{1}{9} \times 10^{-5} \, m^3.$

यह विस्थापित पानी का आयतन भी है जब टुकड़े को पानी में डुबोया जाता है

उत्प्लावक बल = विस्थापित पानी का भार

$= \frac{1}{9} \times 10^{-5}\ m^3 \times (1000\ kg/m^3) \times (10\ m/s^2) = 0.011\ N.$

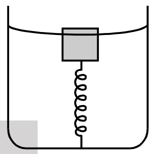
यदि स्प्रिंग में प्रसार x है, जब टुकड़े को पानी में डुबोया जाता है तो टुकड़े की साम्यावस्था की स्थिति से

$kx = 0.1\ N - 0.011\ N = 0.089\ N.$ .....(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से,

$x = \frac{0.089}{10}\ cm = 0.0089\ cm.$

Example 15. एक घनाकार प्लास्टीक का ब्लॉक जिसकी भुजा 3 cm है, पानी में तैर रहा है। घन की निचली सतह बीकर के पेंदे पर लगी हुई ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग के मुक्त सिरे को छू रही है। ब्लॉक पर रखा जा सकने वाला अधिकतम भार ज्ञात करो जो कि इसको गीला नही करें। प्लास्टीक का घनत्व = 800 kg/m^3 तथा स्प्रिंग बल नियतांक = 100 N/m है। g = 10 m/s^2 लें।



Solution : ब्लॉक का विशिष्ट गुरूत्व = 0.8 है। अतः पानी के अन्दर डुबी हुई लम्बाई = 3 cm × 0.8 = 2.4 cm है। पानी के बाहर ऊँचाई = 3 cm – 2.4 = 0.6 cm है। माना बिना गीला किये रखा गया अधिकतम भार W है। इस स्थिति में ब्लॉक पानी में सम्पूर्ण डूब जाएगा। विस्थापित पानी का आयतन = ब्लॉक का आयतन = $27 \times 10^{-6}\ m^3$.

अतः उत्प्लावक बल = $(27 \times 10^{-6}\ m^3) \times 1(1000\ kg/m3) \times (10\ m/s^2) = 0.27\ N.$

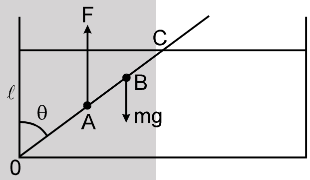
स्प्रिंग 0.6 cm सम्पीड़ित होगी तथा स्प्रिंग द्वारा ऊपर की तरफ आरोपित बल = 100 N/m × 0.6 cm = 0.6 N.

उत्प्लावक बल तथा स्प्रिंग बल दोनों मिलकर (ब्लॉक + अतिरिक्त द्रव्यमान) के भार को सन्तुलित करते है।

$W' = (27 \times 10^{-6}\ m) \times (800\ kg/m^3) \times (10\ m/s^2) = 0.22\ N.$

अतः, W = 0.27 N + 0.6 N – 0.22 N = 0.65 N.

Example 16. 2ℓ लम्बाई व समान अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल का एक लकड़ी का लट्ठा चित्रानुसार एक टंकी के एक सिरे से कीलकित है। टंकी जल से ℓ ऊँचाई तक भरी है। लट्ठे का विशिष्ट गुरूत्व 0.5 है। कोण θ ज्ञात करो जो लट्ठा ऊर्ध्वाघर से साम्यावस्था में बनाता है। (θ = 0 वाली स्थिति को नहीं मानिए।)



Solution : लट्ठे पर कार्यरत बल चित्र में प्रदर्शित है। जल के तल की ऊँचाई ℓ है। लट्ठे की लम्बाई 2ℓ । लट्ठे का भार प्लांक के केन्द्र B पर कार्यरत है। यहां OB = ℓ । उत्प्लावक बल F बिन्दु A पर कार्यरत है। जो लट्ठे के डुबे हुए भाग OC का मध्य बिन्दु है।

यहाँ $OA = \frac{OC}{2} = \frac{\ell}{2\cos\theta}$.

माना लट्ठे की प्रति इकाई लम्बाई का द्रव्यमान ρ है।

इसका भार $mg = 2\ell\rho g$.

लट्ठे के OC भाग का द्रव्यमान = $\left(\frac{\ell}{\cos\theta}\right)\rho$

हटाये गये जल का द्रव्यमान = $\frac{1}{0.5}\ \frac{\ell}{\cos\theta}\ \rho = \frac{2\ell\rho}{\cos\theta}$.

उत्प्लावक बल F है, इसलिए $F = \frac{2\ell\rho g}{\cos\theta}$.

अब साम्यावस्था के लिए, O के सापेक्ष mg का बलाघूर्ण, O के सापेक्ष F के बलाघूर्ण को सन्तुलित करना चाहिए।

इसलिए, $mg\,(OB)\sin\theta = F(OA)\sin\theta$

या $(2\ell\rho)\ell = \left(\frac{2\ell\rho}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\ell}{2\cos\theta}\right)$

या $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$ या $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, या $\theta = 45°$.

Example 17. द्रव्यमान m, त्रिज्या r तथा d घनत्व का एक लकड़ी बेलाकार गुटका, ρ घनत्व के जल में इसकी अक्ष को ऊर्ध्वाधर रखते हुए तैरता है। इसको थोड़ा नीचे विस्थापित किया जाता है। फिर छोड़ा जाता है। यदि गुटके की गति सरल आवर्त हो तो इसकी आवृति ज्ञात कीजिए।

Solution : माना साम्यावस्था में गुटके की h ऊँचाई जल के अन्दर डूबी है। यदि r बेलनाकार गुटके की त्रिज्या है तो इसका आयतन = $\pi r^2 h$। साम्यावस्था में तैरने के लिए,

$\pi r^2 h\rho g = W$ .....(i)

जहां ρ जल का घनत्व है एवं W गुटके का भार है।

अब माना कि ऊर्ध्वाधर गति के दौरान गुटका x दूरी और डुबोया जाता है। अब हटाये गये जल का आयतन $\pi r^2 (h + x)$ है। गुटके पर कार्यरत बल है, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर भार W एवं ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर उत्प्लवाक बल $\pi r^2(h + x)\rho g$।

साम्यावस्था स्थिति से x विस्थापन पर गुटके पर कुल बल –

$F = W - \pi r^2 (h + x)\rho g = W - \pi r^2 h\rho g - \pi r^2 \rho x g$

(i) उपयोग करते हुए $F = -\pi r^2 \rho g x = -kx$, जहां $k = \pi r^2 \rho g$.

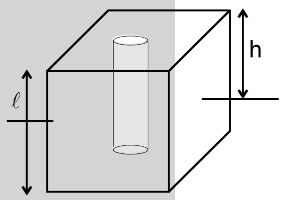
इस प्रकार, गुटका निम्न आवृति से सरल आवर्त गति करता है।

$$v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi r^2 \rho g}{m}}.$$

Example 18. ऊँचाई 'ℓ' तथा घनत्व $\rho_{ice} = 0.9\rho_w$ के बर्फ के एक बड़े घनाकार पिण्ड के अक्ष पर एक बड़ा उर्ध्वाधर छेद है। यह पिण्ड झील में तैरता है। छेद से बाल्टी द्वारा पानी निकालने के लिए रस्सी की आवश्यक लम्बाई ज्ञात करो।

Solution : छिद्र को हटाते हुए बर्फ के घनाभ का क्षेत्रफल = A

बर्फ पिण्ड का भार = हटाये गये द्रव का भार



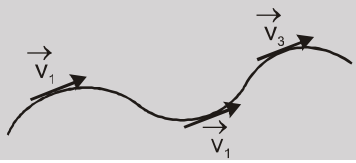
$A\rho_{ice}\ell g = A\rho_w(\ell - h)\, g$

$$\frac{9\ell}{10} = \ell - h \Rightarrow h = \ell - \frac{9\ell}{10} = \left(\frac{\ell}{10}\right)$$

11. द्रव का प्रवाह

धारारेखीय प्रवाह

यदि द्रव के कणों का वेग किसी बिन्दु पर समय के साथ परिवर्तित नहीं होता है, प्रवाह धारारेखीय प्रवाह कहलाता है। धारारेखीय प्रवाह को स्थिर प्रवाह या परतीय प्रवाह भी कहते हैं। भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर वेग भिन्न हो सकता है। अतः चित्र में

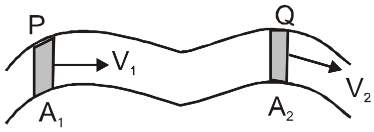


$\vec{v}_1$ = नियत, $\vec{v}_2$ = नियत, $\vec{v}_3$ = नियत

लेकिन $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \neq \vec{v}_3$

12. सतत्ता का सिद्धान्त

यह दर्शाता है कि, जब असम्पीड्य तथा अश्यान द्रव असमरूप अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की एक नली में धारारेखीय प्रवाह होता है, तब अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल तथा प्रवाह के वेग का गुणनफल नली के प्रत्येक बिन्दु पर समान रहता है।



अतः, $A_1 v_1 = A_2 v_2$

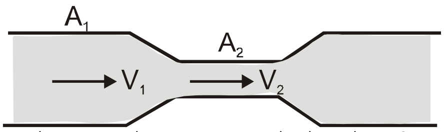
या Av = नियत या $v \propto \frac{1}{A}$

द्रव गतिकी में सततता की समीकरण द्रव्यमान संरक्षण के नियम पर आधारित है।

प्रमाण

माना एक नलिका से द्रव प्रवाहित है, के दो अनुप्रस्थ काट क्षेत्र P व Q के क्षेत्रफल A_1 व A_2 हैं। माना इन दो अनुप्रस्थ काट क्षेत्र पर चाल v_1 व v_2 है। तब असम्पीड्य द्रव में P से समयान्तराल Δt में गुजरने वाले द्रव का द्रव्यमान = Q से समान समयान्तराल Δt में गुजरने वाले द्रव का द्रव्यमान।

$\therefore \quad A_1v_1\rho\, \Delta t = A_2v_2\rho\Delta t \quad \text{or} \quad A_1v_i = A_2v_2$



अतः नलिका के चौड़े क्षेत्र में द्रव का वेग कम होगा तथा सकड़े क्षेत्र में अधिक होगा।

या $v_2 > v_1$ चूंकि $A_2 < A_1$

Note : Av का गुणनफल आयतन प्रवाह दर $\frac{dV}{dt}$ है, वह दर जिससे नलिका के अनुप्रस्थ काट से आयतन गुजरता है।

अत : $\frac{dV}{dt}$ = आयतन प्रवाह दर = Av

द्रव्यमान प्रवाह की दर अनुप्रस्थ काट क्षेत्र से प्रति एकांक समय में प्रवाहित द्रव्यमान है। यह आयतन प्रवाह की दर $\frac{dV}{dt}$ का घनत्व (ρ) गुना होता है।

हम उस स्थिति के लिए सततता की समीकरण को साधारण रूप में बता सकते हैं जिसमें द्रव असम्पीडीत नहीं है। यदि खण्ड 1 व 2 पर घनत्व ρ_1 व ρ_2 है तब $\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

अतः यह सम्पीडीत द्रव के लिए सततता की समीकरण है।

13. एक प्रवाहित द्रव की ऊर्जा

यहाँ एक प्रवाहित द्रव में तीन प्रकार की ऊर्जाऐं होती हैं।

(i) दाब ऊर्जा

यदि द्रव के A क्षेत्रफल पर दाब P है तथा द्रव इस दाब के कारण एक दूरी गतिशील होता है, तब द्रव की दाब ऊर्जा

= किया गया कार्य

= बल × विस्थापन = PAl

द्रव का आयतन Al है।

$\therefore$ द्रव के प्रति एकांक आयतन की दाब ऊर्जा = $\frac{PAl}{Al} = P$

(ii) गतिज ऊर्जा

यदि द्रव का m द्रव्यमान तथा आयतन V वेग v से प्रवाहित है, तब गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ है।

$\therefore$ द्रव के प्रति एकांक आयतन की गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{v}\right)v^2 = \frac{1}{2}\rho v^2$

यहाँ, ρ द्रव का घनत्व है।

(iii) स्थितिज ऊर्जा

यदि एक द्रव का द्रव्यमान m निर्देश रेखा (h = 0) से h ऊँचाई पर है तब इसकी स्थितिज ऊर्जा mgh है।

$\therefore$ द्रव के प्रति एकांक आयतन की स्थितिज ऊर्जा = $\left(\frac{m}{v}\right)gh = \rho gh$

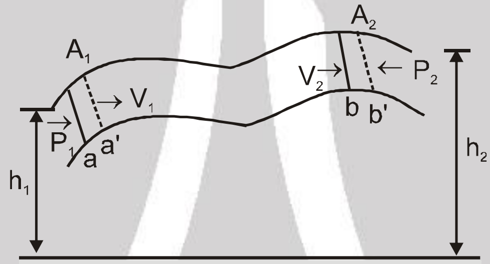
14. बरनोली का समीकरण

बरनोली का समीकरण है, **"आदर्श द्रव के लिए प्रति एकांक आयतन की कुल ऊर्जा (दाब + गतिज + स्थितिज) का योग नियत रहता है"**।

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{नियत } (J/m^3)$$

बरनोली समीकरण एक आदर्श (असम्पीडित तथा अश्यान) द्रव के प्रवाह के लिए दाब, प्रवाह की चाल तथा ऊँचाई में सम्बन्ध स्थापित करता है। द्रव का दाब ऊँचाई पर स्थैतिक स्थिति के अनुसार निर्भर करता है, तथा यह प्रवाह की चाल पर भी निर्भर करता है।

बरनोली समीकरण व्युत्पन्न करने के लिए, हम द्रव के एक भाग के द्रव अवयव पर कार्य ऊर्जा प्रमेय लगाते हैं, द्रव का एक अवयव लेते हैं जो किसी प्रारम्भिक समय पर दो अनुप्रस्थ भाग a व b के मध्य स्थित है। ऊपरी व निचले सिरों पर चाल v_1 व v_2 है। छोटे समयान्तराल में द्रव प्रारम्भिक a से a' तक दूरी $aa' = ds_1 = v_1\,dt$ गति करता है तथा द्रव जो प्रारम्भ में b पर है b' तक दूरी $bb' = ds_2 = v_2dt$ गति करता है। दो सिरों के अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल चित्रानुसार A_1 व A_2 हैं। द्रव असम्पीडित है अतः सततता की समीकरण से द्रव का आयतन dV अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल से dt समय में समान गुजरता है। वह है, $dv = A_1\,ds_1 = A_2\,ds_2$



द्रव अवयव पर किया गया कार्य

अब इस अवयव पर dt समयान्तराल में किये गये कार्य की गणना करते हैं। दोनों सिरों पर दाब P_1 व P_2 हैं, a अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल पर बल P_1A_1 है तथा b पर बल P_2A_2 है। इस विस्थापन के दौरान परिवेश द्रव द्वारा द्रव अवयव पर किया गया कुल कार्य dW है,

$$dW = P_1A_1\,ds_1 - P_2A_2\,ds_2 = (P_1 - P_2)dV$$

स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

dt के प्रारम्भ पर a व a' के मध्य द्रव्यमान के लिए स्थितिज ऊर्जा $dmgh_1 = \rho(dV)gh_1$ है। dt के समाप्ति पर b व b' के मध्य द्रव्यमान के लिए स्थितिज ऊर्जा $(dm)gh_2 = \rho(dv)gh_2$ है। dt समयान्तराल में स्थितिज ऊर्जा में कुल परिवर्तन dU है,

$$dU = \rho(dV)\,g\,(h_2 - h_1)$$

गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

dt के प्रारम्भ पर a व a' के मध्य द्रव आयतन A_1ds_1 तथा द्रव्यमान $\rho A_1\,ds_1$ रखता है कि गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}\rho(A_1\,ds_1\,v_1^2)$ है। dt की समाप्ति पर b व b' के मध्य द्रव की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}\rho(A_2\,ds_2\,v_2^2)$ है। dt समयान्तराल में गतिज ऊर्जा में कुल परिवर्तन dK है।

$$dK = \frac{1}{2}\rho(dV)(v_2^2 - v_1^2)$$

समीकरण (i), (ii) व (iii) के संयोजन से ऊर्जा की समीकरण $dW = dK + dU$

हम प्राप्त करते हैं,

$$(P_1 - P_2)\,dV = \frac{1}{2}\rho dV\,(v_2^2 - v_1^2) + \rho\,(h_2 - h_1) \quad \text{या} \quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g\,(h_2 - h_1)$$

यह बरनॉली समीकरण है। यह दर्शाती है कि द्रव के एकांक आयतन पर परिवेश द्रव द्वारा किया गया कार्य, प्रवाह के दौरान प्रति एकांक आयतन की गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन के योग के बराबर है। हम समीकरण (iv) को और अधिक सरलता से निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

पदाक्षर 1 व 2 नली के अनुदिश किन्हीं दो बिन्दुओं को निर्देशित करते हैं अतः हम इसे लिख सकते हैं

$\rho + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 =$ नियत

Note : जब द्रव गतिशील ($v_1 = 0 = v_2$) नहीं है, बरनॉली की समीकरण निम्न रूप में है

$P_1 + \rho gh_1 = \rho_2 + \rho gh_2$

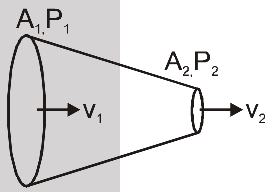
$\therefore \quad P_1 - P_2 = \rho g(h_2 - h_1)$

यह द्रव की विरामावस्था के लिए दाब का परिभाषित सम्बन्ध है।

Solved Examples

Example 19. शंकु आकार के एक पाइप से गुजरने वाले 1.25×10^3 kg/m^3 घनत्व के ग्लिसरीन के प्रवाह की दर की गणना कीजिए। यदि इसके सिरों की त्रिज्या क्रमशः 0.1m तथा 0.04m है एवं इसकी लम्बाई के सापेक्ष दाबांतर 10 N/m है।

Solution : सतत्ता की समीकरण से,



$A_1 v_1 = A_2 v_2$

या $\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \left(\frac{0.04}{0.1}\right)^2 = \frac{4}{25}$

बरनॉली समीकरण से,

$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

या $v_2^2 - v_1^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}$ या $v_2^2 - v_1^2 = \frac{2\times10}{1.25\times10^3} = 1.6 \times 10^{-2}$ m^2/s

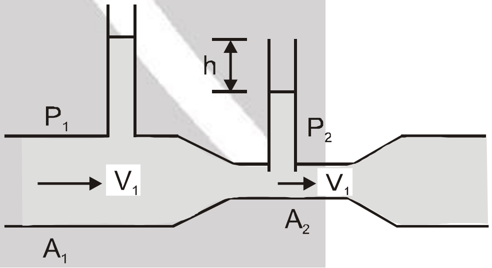
समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर, $v_2 \approx 0.128$ m/s

$\therefore$ पाइप से प्रवाहित आयतन प्रवाह की दर $Q = A_2v_2 = \left(\pi r_2^2\right)v_2 = \pi\,(0.04)^2\,(0.128) = 6.43 \times 10^{-4}$ m^3/s

15. बरनॉली समीकरण पर आधारित अनुप्रयोग

(a) वेंचुरीमीटर (धारा प्रवाह मापी)

चित्र में एक वेंचुरीमीटर दर्शाई गई है जो पाइप के असमरूप अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल में प्रवाह की चाल मापन के उपयोग में आ रही है। हम बरनॉली समीकरण पाइप के चौड़े (बिन्दु 1) व सकड़े (बिन्दु 2) लगाते हैं तथा $h_1 = h_2$



$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

सतत्ता की समीकरण से $v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$

मान रखने तथा पुनःव्यवस्थित करने पर हम प्राप्त करते हैं

$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$

यह दाबान्तर ρgh, के बराबर भी है, जहाँ h दो नली के द्रव स्तरो में अंतर है।

समीकरण (i) में रखने पर हम प्राप्त करते हैं

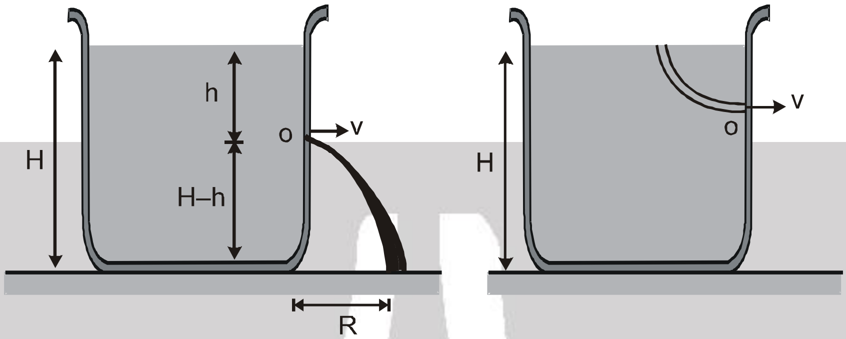
$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}$$

द्रव प्रवाह दर या प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव व्यक्त किया जा सकता है,

$$\frac{dV}{dt} = A_1 v_1 = A_1 \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}}$$

(b) बहिस्त्राव (Speed of efflux)

मानिए कि एक पात्र में इसकी एक भुजा पर सुराख (orifice) O से द्रव की सतह h ऊँचाई पर है, इस सुराख से निष्कासित द्रव का वेग v है। बाहर आने वाले द्रव की चाल बहिस्त्राव कहलाता है। यदि पात्र की विमाऐं पर्याप्त रूप से बढ़ी है, द्रव का वेग इसकी सतह पर शून्य ले सकते हैं तथा वहाँ पर दाब सुराख O पर दाब के समान अर्थात् वायुमण्डलीय दाब है जो द्रव के प्रवाह में कोई सहायता नहीं करता है, अतः द्रव का प्रवाह शुद्ध रूप से स्वयं द्रव के स्थैतिक दाब के कारण होता है। अतः एक प्रवाह की नली चित्रानुसार ले सकते हैं जो द्रव की पृष्ठीय सतह से प्रारम्भ होती है तथा सुराख पर खत्म होती है। बरनॉली समीकरण के उपयोग से



द्रव की सतह पर प्रति एकांक आयतन की कुल ऊर्जा = KE + PE + दाब ऊर्जा = $0 + \rho gh + P_0$

तथा सुराख पर प्रति एकांक आयतन की कुल ऊर्जा = KE + PE + दाब = $\frac{1}{2}\rho v^2 + 0 + P_0$

क्योंकि धारारेखीय प्रवाह में द्रव की कुल ऊर्जा अपरिवर्तित रहती है अतः बरनॉली समीकरण से हम प्राप्त करते हैं।

$\rho gh + P_0 = \frac{1}{2}\rho v^2 + P_0$ या $v = \sqrt{2gh}$

टॉरिसेली दर्शाता है कि यह वेग द्रव के मुक्त रूप से सुराख से द्रव सतह की (h) ऊँचाई से गिरने पर प्राप्त होने के समान है। इसे टॉरिसेली का सिद्धान्त कहते हैं तथा यह इस प्रकार है कि "सुराख से निकलने वाले द्रव के बहिस्त्राव का वेग समान है, जैसा कि यह द्रव स्तर व सुराख के मध्य की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई से मुक्त रूप से गिरने पर प्राप्त करता है।''

16. परास (R)

मानिए कि सतह पर प्राप्त की गई परास R है

द्रव के ऊर्ध्वाधर गति को लेने पर,

$(H - h) = \frac{1}{2}gt^2$ या $t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$

अब द्रव के क्षैतिज गति को लेने पर,

$R = vt \quad R = \sqrt{2gh}\left(\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}\right)$ या $R = 2\sqrt{h(H-h)}$

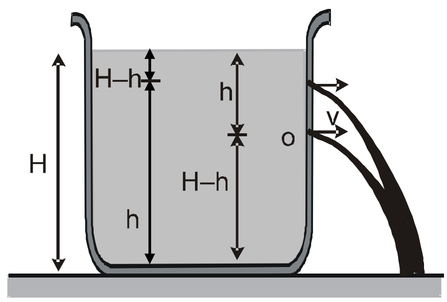
R के व्यंजक से निम्न निष्कर्ष निकाल सकते हैं,

(i) $R_h = R_{H-h}$

जैसा कि $R_h = 2\sqrt{h(H-h)}$

तथा $R_{H-h} = 2\sqrt{h(H-h)}$

यह $h = \frac{H}{2}$ पर अधिकतम हो सकता है तथा $R_{max} = H$ है।



प्रमाण : $R^2 = 4\,(Hh - h^2)$

R के अधिकतम होने के लिए $\frac{dR^2}{dh}$, = 0

या $H - 2h = 0$ या $h = \frac{H}{2}$

अतः R, $h = \frac{H}{2}$ पर अधिकतम है तथा $R_{max} = 2\sqrt{\frac{H}{2}\left(H - \frac{H}{2}\right)} = H$

टैंक के खाली होने में लिया गया समय

हम यहाँ टैंक के खाली होने में आवश्यक समय ज्ञात करना चाहते हैं, यदि टैंक की तली पर एक छिद्र बना हो। मानिए कि एक टैंक ρ घनत्व के द्रव से H ऊँचाई तक भरा हुआ है। टैंक की तली पर a अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल का एक छोटा छिद्र बनाया जाता है। टैंक का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल A है।

माना किसी समय पर टैंक का द्रव का स्तर y ऊँचाई पर है। इस समय पर बहिस्त्राव का वेग होगा।

$$v = \sqrt{2gy}$$

अब, इस समय छिद्र से प्रति सेकण्ड बाहर आने वाले द्रव का आयतन $\left(\frac{dV_1}{dt}\right)$ है।

टैंक में प्रति सेकण्ड आने वाले द्रव का आयतन $\left(\frac{dV_2}{dt}\right)$ है।

खाली होने में लिया गया समय $\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$

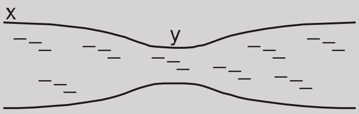
$\therefore \quad av = A\left(-\frac{dy}{dt}\right)$ $\qquad \therefore \quad a\sqrt{2gy} = A\left(-\frac{dy}{dt}\right)$

या $\int_0^t dt = \frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_H^0 y^{-1/2} - dy$

$\therefore \quad t = \frac{2A}{a\sqrt{2g}}\,[\sqrt{y}]_0^H$ $\qquad \therefore \quad t = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{2H}{g}}$

Solved Examples

Example 20. एक क्षैतिज नली में जल चित्रानुसार प्रवाहित होता है। जल का दाब x व y के मध्य 600 N/m^2 से परिवर्तित होता है। जहां अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल क्रमशः 3 cm^2 तथा 1.5 cm^2 है। नली से जल प्रवाह की दर ज्ञात करो।



Solution : माना x पर वेग = v_x एवं y पर वेग = v_y

सांतत्य की समीकरण से, $\frac{v_y}{v_x} = \frac{3cm^2}{1.5cm^2} = 2.$

बरनौली की समीकरण से,

$P_x + \frac{1}{2}\rho\, v_x^2 = P_y + \frac{1}{2}\rho v_y^2$

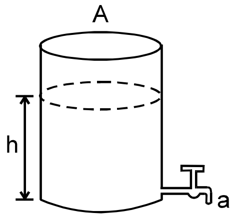
या $P_x - P_y = \frac{1}{2}\rho(2v_x)^2 - \frac{1}{2}\rho v_x^2 = \frac{3}{2}\rho v_x^2$

या $600\,\frac{N}{m^2} = \frac{3}{2}\left(1000\,\frac{kg}{m^3}\right)v_x^2$

या $v_x = \sqrt{0.4m^2/s^2} = 0.63$ m/s.

प्रवाह की दर = (3 cm^2) (0.63 m/s) = 189 cm^3/s

Example 21. अनुप्रस्थ काट A का एक बेलनाकार पात्र 'h' ऊँचाई तक भरा है। पात्र की तली में स्थिति 'a' अनुप्रस्थ काट के नल से पानी बाहर आ सकता है। ज्ञात करो –



(a) नल खोलने के तुरन्त पश्चात् पानी का वेग।

(b) पानी से निकलने वाली धारा का गहराई h_0 पर अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 'a' के पदों में।

(c) समय जिसमें पात्र खाली हो जाएगा। (दिया है: $\left(\frac{a}{A}\right)^{1/2} = 0.02$, h = 20 cm, h_0 = 20 cm)

Solution : (1) तथा (2) के बीच बर्नोली समीकरण लगाने पर -

$$P_a + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

सत्तता के समीकरण से :

$$Av_1 = av_2,\ v_1 = \frac{av_2}{a} \quad \Rightarrow \quad \rho gh + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

हल करने पर - $v_2 = \sqrt{\dfrac{2gh}{1-\dfrac{a^2}{A^2}}}$ = 2 मी०/सैक० ....(1)

(b) (2) तथा (3) के बीच बरनौली समीकरण लगाने पर $\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_0 = \frac{1}{2}\rho v_3^2$

सत्तता के समीकरण से

$$av_2 = a'\,v_3 \ \Rightarrow\ v_3 = \frac{av_2}{a'}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_0 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{av_2}{a'}\right)^2$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + gh_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a'}\right)^2 \times 2 \times 2$$

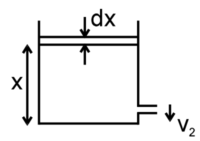
$$\left(\frac{a}{a'}\right)^2 = 1 + \frac{9.8 \times .20}{2} \Rightarrow \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = 1.98 \Rightarrow a' = \frac{a}{\sqrt{1.98}}$$

(c) समीकरण (1) से पात्र में द्रव की किसी ऊँचाई 'h' पर नल से वेग

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{0.98}} = \sqrt{20h}$$

हम जानते है कि नल से निकलने वाले द्रव का आयतन = पात्र के द्रव में आयतन में कमी

किसी भी अल्प समयान्तराल 'dt' के लिए –



$$av_2dt = -A \cdot dx$$

$$a\sqrt{20x}\,dt = -A\,dx$$

$$\int_0^t dt = -\frac{A}{a}\int_h^0 \frac{dx}{\sqrt{20x}}$$

$$t = \frac{A}{a\sqrt{20}}\left[2\sqrt{x}\right]_h^0$$

$$t = \frac{A}{a\sqrt{20}}\ 2\sqrt{h} = \frac{A}{a} \times 2 \times \sqrt{\frac{h}{20}} = \frac{2A}{a}\sqrt{\frac{0.20}{20}} = \frac{2A}{a} \times 0.1$$

दिया है $\left(\frac{a}{A}\right)^{1/2} = 0.02$ या $\frac{A}{a} = \frac{1}{0.0004} = 2500$

इस प्रकार t = 2 × 2500 × 0.1 = **500 सैकण्ड**

Example 22. एक टैंक द्रव से H ऊँचाई तक भरा हुआ है। इस टैंक की तली पर एक छोटा छिद्र बनाया जाता है। माना कि प्रथम आधे भाग को खाली होने में लिया गया समय t_1 है तथा शेष आधे भाग को खाली होने में लिया गया समय t_2 है तब $\frac{t_1}{t_2}$ ज्ञात कीजिए।

Solution : उपरोक्त विवेचना में व्युत्पन्न की गई समीकरण में उपयुक्त सीमा रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$\int_0^{t_1} dt = -\frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_H^{H/2} y^{-1/2} dy$$

या $t_1 = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} [\sqrt{y}]_{H/2}^{H}$ या $t_1 = \frac{2A}{a\sqrt{2g}} \left[\sqrt{H} - \sqrt{\frac{H}{2}}\right]$ या $t_1 = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{H}{g}}\left(\sqrt{2}-1\right)$

इसी प्रकार $\int_0^{t_2} dt = -\frac{A}{a\sqrt{2g}} \int_{H/2}^{0} y^{-1/2} = dy$

या $t_2 = \frac{A}{a}\sqrt{\frac{H}{g}}$

हम प्राप्त करते हैं

$\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{2} - 1$ या $\frac{t_1}{t_2} = 0.414$

Note : यहाँ हम देखते हैं कि $t_1 < t_2$ है। यह होता है क्योंकि प्रारम्भ में दाब उच्च होता है तथा द्रव तेजी से बाहर निकलता है।