# ज्यामितिय प्रकाशिकी (GEOMETRICAL OPTICS)

## प्रस्तावना :

नील वर्ण झीलें, तप्त रेगिस्थान, हरे–भरे वन व इन्द्रधनुष स्वस्थ नेत्र युक्त इंसान द्वारा निहारे जा सकते हैं। परन्तु भौतिक विज्ञान की शाखा प्रकाशिकी जिसमें प्रकाश तथा अन्य विद्युत चुम्बकीय तरंगों की प्रकृति के बारे मे ंविचार करते है, के अध्ययन से हम दृश्य जगत को बेहतर जान सकते हैं। प्रकाशीय गुणों का ज्ञान हमें आसमान के नीलवर्ण व अनेक प्रकाशीय उपकरण जैसे दूरबीन, सूक्ष्मदर्शी, कैमरा, नेत्र ग्लास व नेत्रों को समझने में सहायक है। प्रकाशिकी के कुछ मूल सिद्धान्त लेज़र, प्रकाश तंतु, होलोग्राम, प्रकाशिकी संगणक व अनेक अन्य चिकित्सीय छायाकंन में निहित है।

## 1. प्रकाश के स्थानान्तरीय संचरण के लिये शर्त :

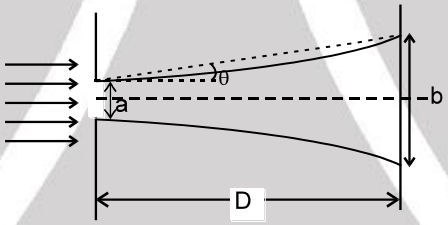
**(केवल जानकारी के लिए JEE के पाठ्यक्रम में नहीं)**

यदि हम मान लें कि प्रकाश एक सरल रेखा में गमन करता है और परावर्तन या अपवर्तन के बाद तुरन्त मुड़ जाता है तो प्रकाशिकी का कुछ भाग समझा जा सकता है। यह परिकल्पना कि प्रकाश एक सरल रेखा में गमन करता है, सही है यदि

(i) माध्यम समदैशिक हो अर्थात् सभी दिशाओं में इसका व्यवहार समान हो तथा

(ii) प्रकाश के पथ में आई रूकावट या द्वारक जिसमें होकर प्रकाश गुजरता है, बहुत छोटा न हो।

माना 'a' चौड़ाई की एक स्लिट है जिसमें होकर एकवर्णी प्रकाश किरणें गुजरती है और D दूरी पर रखे एक पर्दे से चित्रानुसार टकराती हैं।




यह पाया जाता है कि प्रकाश 'b' चौड़ाई के एक बैण्ड में टकराता है जो कि 'a' से अधिक है। प्रकाश के इस प्रकार मुड़ने को **विवर्तन** कहते हैं। प्रकाश केन्द्रीय रेखा के प्रत्येक ओर (b-a)/2 से मुड़ता है। प्रकाश के तरंग सिद्धान्त से यह दर्शाया जा सकता है कि

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} \text{.....(A),}$$

जहाँ $\theta$ चित्र में दर्शाया गया है।

यह सूत्र दर्शाता है कि प्रकाश का **मुड़ना तभी यथेष्ट होता है जबकि $a \sim \lambda$।** विवर्तन, ध्वनि में अधिक प्रेक्षित होता है क्योंकि इसकी तरंगदैर्ध्य प्रकाश की तुलना में बहुत अधिक होती है तथा रूकावट या द्वारक के आकार की कोटि की होती है। सूत्र (A) से – $\frac{b-a}{2D} \approx \frac{\lambda}{a}$ .

यह स्पष्ट है कि प्रकाश का मुड़ना नगण्य होता है यदि $\frac{D\lambda}{a} << a$ या $a >> \sqrt{D\lambda}$ ।

यदि यह शर्त पूर्ण होती है तो प्रकाश रैखिक गति करता है। ज्यामितीय प्रकाशिकी सहित अधिकांश स्थितियों में शर्तें इस प्रकार होती है कि हम सुरक्षित तौर पर मान सकते है कि प्रकाश सरल रेखा में गमन करता है और केवल परावर्तन व अपवर्तन होने पर ही मुड़ता है।

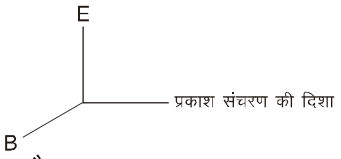
इस प्रकार ज्यामितीय प्रकाशिकी में प्रकाश को सरल रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जिन्हें किरणें कहते हैं।

एक किरण, प्रकाश ऊर्जा के संचरण का सरल रेखीय पथ है। तीर का निशान प्रकाश के संचरण की दिशा को व्यक्त करता है। चित्र में एक किरण दर्शायी गयी है जो दर्शाती है कि प्रकाश A से B की ओर गति कर रहा है।

## 2. प्रकाश के गुण :

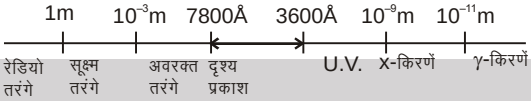
(i) निर्वात में c से प्रदर्शित प्रकाश का वेग लगभग $3 \times 10^8$ m/s के बराबर होता है।

(ii) प्रकाश विद्युत चुम्बकीय तरंग है (मैक्सवैल के द्वारा)। इसमें परिवर्ती विद्युत क्षेत्र व चुम्बकीय क्षेत्र होता है।




(iii) प्रकाश में ऊर्जा व संवेग निहित होता है।

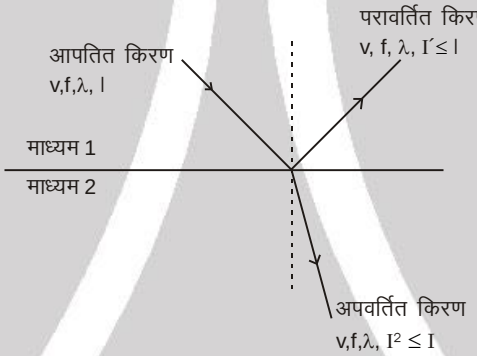
(iv) सूत्र $v = f\lambda$, प्रकाश के लिये लागू होता है।




विद्युत चुम्बकीय स्पैक्ट्रम

(v) जब प्रकाश समान माध्यम में परावर्तित होता है तो इसकी आवृति, चाल व तरंगदैर्ध्य में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

(vi) प्रकाश की आवृति अपरिवर्तित रहती है, जबकि यह परावर्तित या अपवर्तित होता है।

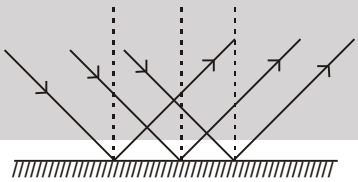



## 3. प्रकाश का परावर्तन

जब प्रकाश किरणें दो माध्यमों जैसे हवा या काँच के अन्तःपृष्ठ पर टकराती हैं, तो प्रकाश का एक भाग उसी माध्यम में वापस मुड़ जाता है। इसे प्रकाश का परावर्तन कहते हैं।

**(a) एक समान परावर्तन :**

जब परावर्तन एक पूर्ण समतल पृष्ठ से हाता है, तो इसे एक **समान परावर्तन** कहते है। इस स्थिति में एक दिशा में परावर्तित प्रकाश की तीव्रता बहुत अधिक होती है तथा अन्य दिशाओं में तीव्रता नगण्य होती है।



एकसमान परावर्तन

**(b) विसरित परावर्तन –**

जब सतह खुरदरी होती है तो प्रकाश का परावर्तन एक समान नहीं होता है। वैसे प्रत्येक बिन्दु पर प्रकाश किरण का परावर्तन सतह या पृष्ठ की सम्पूर्ण प्रकृति पर निर्भर नहीं करता है। अन्तर इसलिये दिखायी देता है क्योंकि एक संकरे प्रकाश पुंज में अनेकों किरणें होती है जो पृष्ठ के अलग–अलग बिन्दुओं से परावर्तित होती है और पृष्ठ की असमानता के कारण इस बात की संभावना रहती है कि ये किरणें अलग–अलग दिशाओं में परावर्तित हों सकती है। यह प्रक्रिया हमें किसी स्थिति से वस्तु को देख पाने में सक्षम बनाती है। इस प्रकार के परावर्तन को **विसरित परावर्तन** कहते हैं।

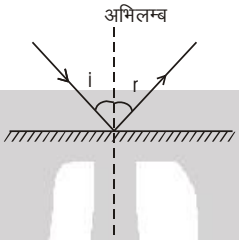
विसरित परावर्तन

**उदाहरण के लिये** एक दीवार से, एक अखबार से परावर्तन आदि। इसी कारण आप अपना चेहरा दीवार या अखबार में नहीं देख पाते हैं।

## 3.1 परावर्तन के नियम

**(a)** आपतित किरण, परावर्तित किरण व आपतन बिन्दु पर अभिलम्ब तीनों एक ही तल में होते हैं। यह तल **आपतन तल (या परावर्तन तल)** कहलाता हैं। इसे गणितीय रूप से निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है। $\vec{R}.(\vec{I}\times\vec{N})=\vec{N}.(\vec{I}\times\vec{R})=\vec{I}.(\vec{N}\times\vec{R})=0$ जहाँ $\vec{I}$, $\vec{N}$ व $\vec{R}$ क्रमशः आपतित किरण, अभिलम्ब व परावर्तित किरण के अनुदिश सदिश हैं।

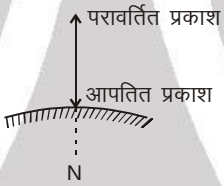
**(b)** आपतन कोण (आपतित किरण व अभिलम्ब के बीच कोण) व परावर्तन कोण (परावर्तित किरण व अभिलम्ब के बीच कोण) समान होते हैं। अर्थात




$\angle i = \angle r$

**विशेष स्थितियाँ :**

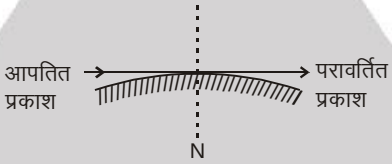
**अभिलम्ब आपतन :** जब प्रकाश अभिलम्बवत् आपतित होता है तो




$i = r = 0 \qquad \delta = 180^o$

**नोट : हम कहेंगे कि किरण ने अपना पथ विपरीत दिशा में तय किया है।**

**स्पर्शी आपतन :** जब प्रकाश स्पर्शी रूप से आपतित होता है तो



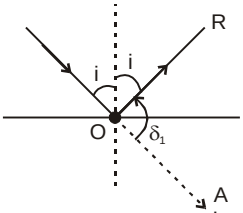

$i = r = 90, \quad \delta = 0^o$ व $360^o$

**नोट : परावर्तन में प्रकाश वेग का मापांक अपरिवर्तित रहता है, परन्तु स्पर्शी आपतन में वेग अपरिवर्तित रहता है।**

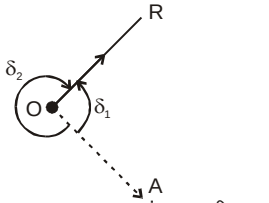
## Solved Example

**Example 1.** यह दर्शाइये कि प्रकाश किरण 'i' कोण पर आपतित होकर विचलन कोण $\delta = \pi - 2i$ or $\pi + 2i$ पर परावर्तित होती है।

**Solution :**




(a)



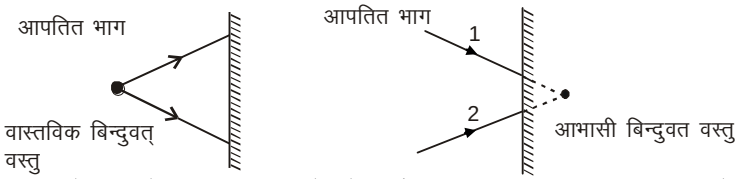

(b)

चित्र (b) से यह स्पष्ट है कि प्रकाश किरण या तो वामावर्त दिशा में $\delta_1$ कोण से मुड़ती है या दक्षिणावर्त दिशा में $\delta_2$ $(= 2\pi - \delta_1)$ कोण से।

चित्र (a) से $\delta_1 = \pi - 2i.$ $\quad\therefore\quad \delta_2 = \pi + 2i$ .

## 3.2 वस्तु व प्रतिबिम्ब :

**(a) वस्तु (O) :** वस्तु को आपतित किरणों के प्रतिच्छेद बिन्दु के रूप में परिभाषित किया जाता है।




माना हम उस भाग को जिसमें आपतित किरणें होती हैं, आपतित भाग व उस भाग को जिसमें परावर्तित (अपवर्तित) किरणें उपस्थित होती हैं, परावर्तित (अपवर्तित) भाग कहते हैं।

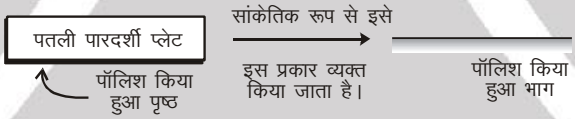
**नोट :** एक वस्तु वास्तविक कहलाती है यदि यह आपतित भाग में उपस्थित होती है अन्यथा यह आभासी कहलाती है। (केवल समतल दर्पण के लिए)

**(b) प्रतिबिम्ब (I) :** प्रतिबिम्ब को परावर्तित किरणों (परावर्तन की स्थिति में) या अपवर्तित किरणों (अपवर्तन की स्थिति में) के प्रतिच्छेद बिन्दु के रूप में परिभाषित किया जाता है।

**नोट :** एक प्रतिबिम्ब वास्तविक कहलाता है यदि यह परावर्तित या अपवर्तित भाग में उपस्थित होता है अन्यथा यह आभासी कहलाता है।

## 4. समतल दर्पण :

समतल दर्पण, एक समतल पतली काँच की प्लेट के एक पृष्ठ को पॉलिश करके बनाया जाता है। इसे एक तरफ रजित करके भी बनाया जा सकता है।

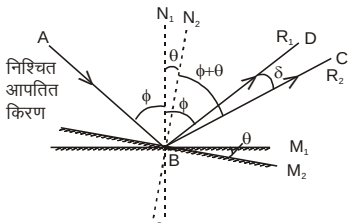



समतल दर्पण

एक समतल दर्पण पर आपतित समान्तर किरणों का एक प्रकाश पुंज समान्तर परावर्तित किरणों के पुंज के रूप में परावर्तित होता है।

## Solved Example

**Example 2.** किसी निश्चित आपतित प्रकाश किरण के लिये यदि दर्पण को $\theta$ से घुमाया जाये (दर्पण के तल में तथा आपतन तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष), तो दर्शाइये कि परावर्तित किरण $2\theta$ कोण से उसी क्रम में मुड़ जाती है




**Solution :** चित्र में देखिये $M_1$, $N_1$ और $R_1$ क्रमशः दर्पण की प्रारम्भिक स्थिति, प्रारम्भिक अभिलम्ब तथा परावर्तित प्रकाश किरण की प्रारम्भिक दिशा है $M_2$, $N_2$ और $R_2$ क्रमशः दर्पण की अन्तिम स्थिति, अन्तिम अभिलम्ब तथा परावर्तित प्रकाश किरण की अन्तिम दिशा है। चित्र से यह स्पष्ट है $ABC = 2\phi + \delta = 2(\phi + \theta)$ or $\delta = 2\theta$.

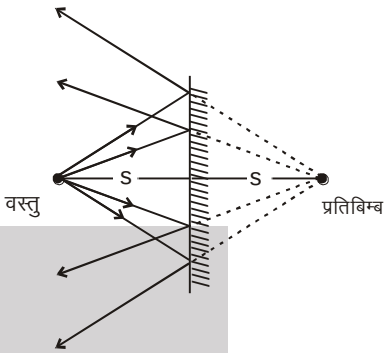
**नोट : दर्पण को स्थिर रखकर यदि आपतित किरण को अभिलम्ब के सापेक्ष $\theta$ कोण से घुमाया जाए तो परावर्तित किरण समान कोण $\theta$ से समान दिशा में घूमती है**

## 4.1 बिन्दुवत् वस्तु :

एक समतल दर्पण द्वारा परावर्तन के फलस्वरूप प्राप्त प्रतिबिम्ब के अभिलाक्षणिक :

**(i)** वस्तु की दर्पण से दूरी = प्रतिबिम्ब की वस्तु से दूरी

**(ii)** एक बिन्दुवत् वस्तु से आने वाली सभी आपतित किरणें एक समतल दर्पण से परावर्तन के पश्चात् एक बिन्दु पर मिलती हैं जिसे प्रतिबिम्ब कहते हैं।




**(iii)** एक बिन्दुवत वस्तु व इसके प्रतिबिम्ब को जोड़ने वाली रेखा परावर्ती पृष्ठ के लम्बवत् होती है।

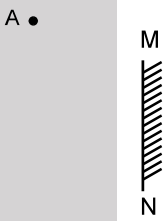
**(iv)** प्रतिबिम्ब का आकार वस्तु के बराबर होता है।

**(v)** एक वास्तविक वस्तु के लिये प्रतिबिम्ब आभासी तथा एक आभासी वस्तु के लिये प्रतिबिम्ब वास्तविक होता है।

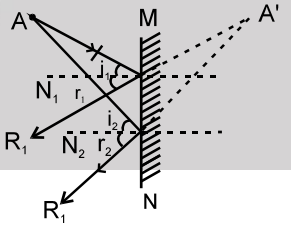
**(iv)** प्रतिबिम्ब देखने के लिए प्रेक्षक के नेत्र जिस क्षेत्र में स्थित होने चाहिए, उस क्षेत्र को दृश्य क्षेत्र कहते हैं।

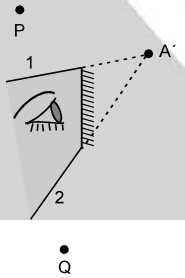
## Solved Example

**Example 3.** चित्र में एक बिन्दुवत् वस्तु A तथा समतल दर्पण MN दर्शाया गया है, दर्पण MN, में किरण चित्र द्वारा वस्तु A के प्रतिबिम्ब की स्थिति बताइये। वह क्षेत्र बताइये जहाँ प्रतिबिम्ब को देखने के लिये प्रेक्षक की आँख उपस्थित होनी चाहिये (यह क्षेत्र दृश्य क्षेत्र कहलाता है)

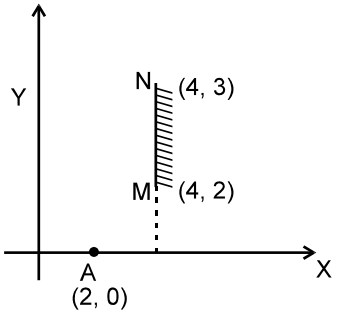



**Solution :** कोई भी दो रेखायें वस्तु से निकलती हुई मानिये। $N_1$ और $N_2$ अभिलम्ब हैं ; $i_1 = r_1$ और $i_2 = r_2$ परावर्तित किरणों $R_1$ व $R_2$ का मिलान बिन्दु, A का प्रतिबिम्ब है यद्यपि दो रेखाये ली गयी है यह समझना चाहिये कि A से निर्गत सभी किरणें परावर्तन के पश्चात् पीछे बढ़ाने पर A' पर मिलती हुई प्रतीत होती है। वह क्षेत्र जिसमें परावर्तित किरणे उपस्थित है, को प्राप्त करने के लिए A' को रेखा द्वारा दर्पण के सिरो से मिलाते है तथा आगे बढाते है। नीचे चित्र में किरण 1 व 2, के बाहर कोई परावर्तित किरण नही है इसलिये प्रेक्षक P और Q प्रतिबिम्ब नही देख सकते क्योंकि उनके पास कोई परावर्तित किरण नही आती।




**Example 4.** Y अक्ष पर वह क्षेत्र बताइये जहाँ परावर्तित किरणें उपस्थित हैं। दर्शाये अनुसार वस्तु A (2, 0) पर है तथा MN एक समतल दर्पण चित्रानुसार है।



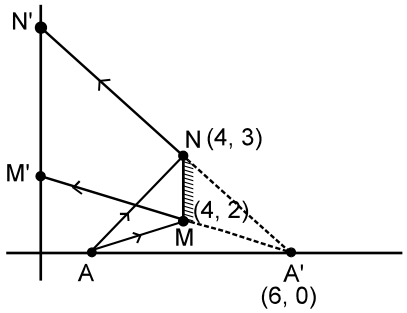
**Solution :** दर्पण में A, का प्रतिबिम्ब A' (6, 0) पर होगा।

A' M को मिलाइये तथा बढ़ाने पर यह Y अक्ष को M' पर काटती है (किरण, A से निकल कर दर्पण M पर टकराती है तथा परावर्तन के बाद किरण MM', A' से आती हुई प्रतीत होती है). A'N को मिलाइये तथा बढाने पर यह Y अक्ष को N' पर काटती है (किरण, A से निकल कर दर्पण N पर टकराती है तथा परावर्तन के बाद किरण NN', A' से आती हुई प्रतीत होती है)

ज्यामिति से

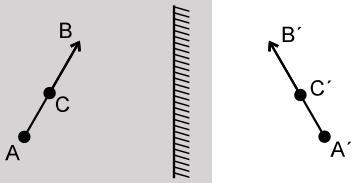
M' ≡ (0, 6)

N' ≡ (0, 9). M'N' Y अक्ष पर वह क्षेत्र है जहाँ परावर्तित किरणें उपस्थित है




## 4.2 विस्तरित वस्तु :

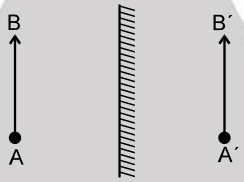
चित्र में दर्शायी गयी AB के समान एक विस्तरित वस्तु, A से B तक अनन्त बिन्दुवत् वस्तुओं का संयोजन होता है। प्रत्येक बिन्दुवत् वस्तु का प्रतिबिम्ब व्यक्तिगत रूप से बनता है। इस प्रकार अनन्त प्रतिबिम्ब बनते हैं। A का प्रतिबिम्ब A´, C का प्रतिबिम्ब C´, B का प्रतिबिम्ब B´ आदि। सभी बिन्दुवत् प्रतिबिम्ब मिलकर विस्तरित प्रतिबिम्ब बनाते हैं।



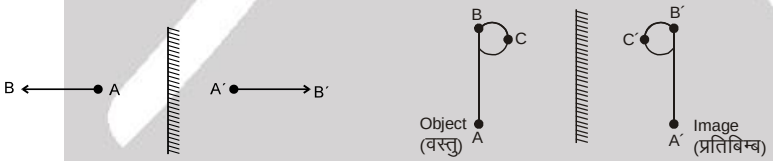

**एक समतल दर्पण द्वारा बने विस्तरित वस्तु के प्रतिबिम्ब के गुण :**

(1) वस्तु का आकार = विस्तरित प्रतिबिम्ब का आकार

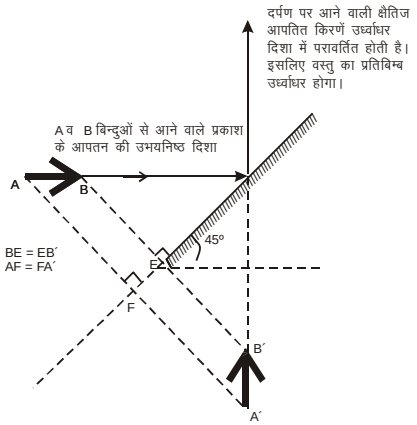
(2) प्रतिबिम्ब सीधा होता है यदि विस्तरित वस्तु दर्पण के समानान्तर स्थित होती है।




(3) प्रतिबिम्ब उल्टा होता है यदि वस्तु समतल दर्पण के लम्बवत् स्थित होती है।



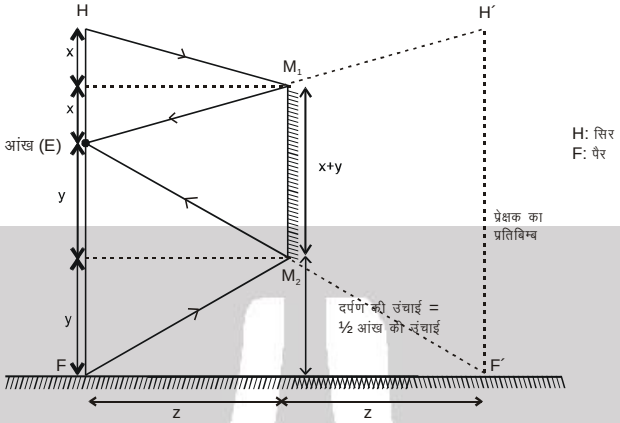

(4) यदि क्षैतिज के साथ 45º कोण बनाते हुये एक समतल दर्पण के सामने एक क्षैतिज विस्तरित वस्तु रखी हो तो इस प्रकार बना प्रतिबिम्ब ऊर्ध्वाधर होगा। चित्र देखें।



## Solved Example

**Example 5.** दर्शाइये कि प्रेक्षक द्वारा पूरे प्रतिबिम्ब को देखने के लिये प्रेक्षक के आकार से आधे आकार का समतल दर्पण चाहिये।

**Solution :** निम्न चित्र को देखें। इसे स्वयं आसानी से समझा जा सकता है यदि 'x' व 'y' लम्बाईयां चित्रानुसार ले।



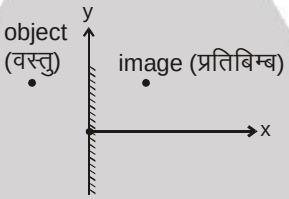

**वैकल्पिक :** $\Delta E M_1, M_2$ व $\Delta E H´F´$ समरूप है।

$\therefore \quad \frac{M_1M_2}{H´F´} = \frac{z}{2z}$ या $M_1 M_2 = H´ F´ / 2 = HF / 2$

## 4.3 वस्तु व प्रतिबिम्ब के वेग के बीच सम्बन्ध :

**दर्पण के गुण से :** $x_{im} = - x_{om}$, $y_{im} = y_{om}$ व $z_{im} = z_{om}$

यहाँ $x_{im}$ का अर्थ दर्पण के सापेक्ष प्रतिबिम्ब का x निर्देशांक है। दूसरों के अर्थ भी समान हैं।




समय के सापेक्ष अवकलन करने पर, हम पाते है

$v_{(im)x} = -v_{(om)x}$ ; $v_{(im)y} = v_{(om)y}$ ; $v_{(im)z} = v_{(om)z}$,

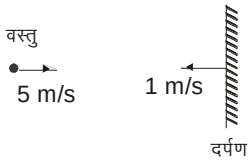
$\Rightarrow \quad v_{iG} - v_{mG} = -(v_{oG} - v_{mG})$ x अक्ष के लिये

किन्तु $v_{iG} - v_{mG} = (v_{oG} - v_{mG})$ या $v_{iG} = v_{oG}$ y व z अक्ष के लिये

**यहाँ :** $v_{iG}$ = धरातल के सापेक्ष प्रतिबिम्ब का वेग

## Solved Example

**Example 6.** दर्शाये अनुसार एक वस्तु 5 m/s की चाल से दाँयी ओर तथा दर्पण 1m/s से बांयी ओर चल रहा है। प्रतिबिम्ब का वेग बताइये।



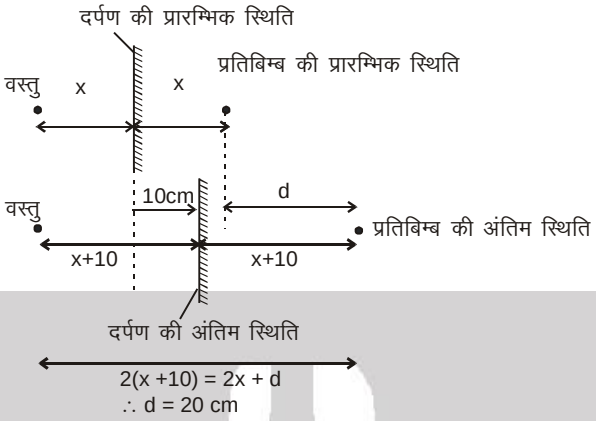

**Solution :** $\longrightarrow$ को + दिशा लें. $v_i - v_m = v_m - v_0$

$\therefore \quad v_i - (-1) = (-1) - 5$

$v_i = -7$ m/s $\Rightarrow$ 7 m/s और बाँई ओर

**Example 7.** एक बिन्दुवत् वस्तु तथा समतल दर्पण दिया गया है यदि दर्पण वस्तु से 10 cm दूर चलाया जाता है तो वह दूरी ज्ञात कीजिये जिससे प्रतिबिम्ब चलता है

**Solution :**




हम जानते हैं कि $x_{im} = -x_{om}$ or या $x_i - x_m = x_m - x_o$

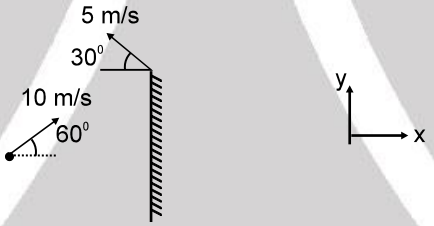
or $\Delta x_i - \Delta x_m = \Delta x_m - \Delta x_o$.

इस प्रश्न में $\Delta x_o = 0$ ; $\Delta x_m = 10$ cm.

इस प्रकार $\Delta x_i = 2\Delta x_m - \Delta x_o = 20$ cm.

## Solved Example

**Example 8.** दर्शायी गयी स्थिति में प्रतिबिम्ब का वेग ज्ञात करो।




**Solution :** x दिशा में $v_i - v_m = -(v_0 - v_m)$

$v_i - (-5\cos 30^o) = -(10 \cos 60^o - (-5 \cos 30^o))$

$\therefore \quad v_i = -5\,(1+\sqrt{3})$ m/s

y दिशा में $v_0 = v_i$

$v_i = 10 \sin 60° = 5\sqrt{3}$

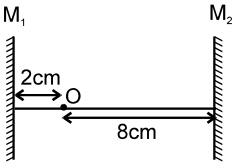
प्रतिबिम्ब का वेग $= -5\,(1+\sqrt{3})\,\hat{i} + 5\,\hat{j}$ m/s.

## 4.4 दो समतल दर्पणों द्वारा बना प्रतिबिम्ब :

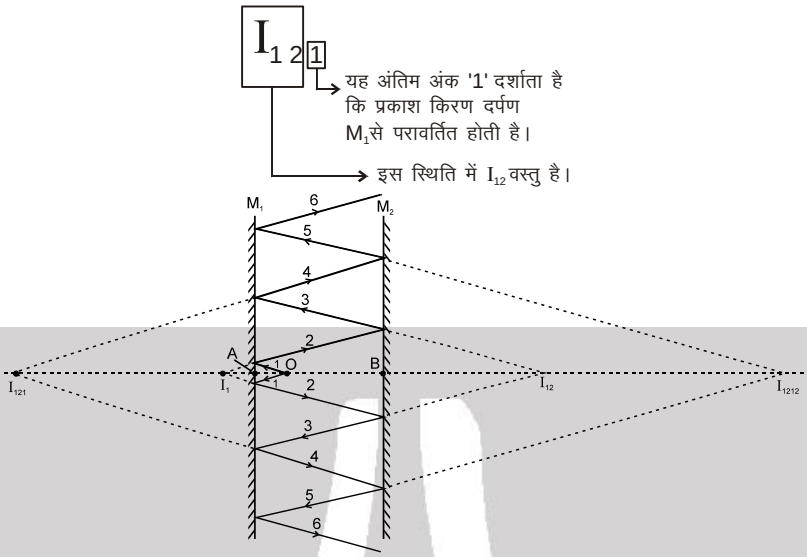
यदि एक दर्पण से परावर्तित किरण दूसरे दर्पण पर आपतित होती है तो पहले दर्पण द्वारा बना प्रतिबिम्ब दूसरे दर्पण के लिये वस्तु का कार्य करता है। यह प्रक्रिया प्रत्येक उत्तरोत्तर परावर्तन के लिये जारी रहती है।

## Solved Example

**Example 9.** चित्रानुसार दो समान्तर दर्पण के बीच एक बिन्दुवत् वस्तु रखी है। इसकी $M_1$ से दूरी 2 cm तथा $M_2$ से 8 cm है। यह मानते हुये कि पहला परावर्तन दर्पण $M_1$ से होता है, दोनो दर्पणों से बनाये गये प्रतिबिम्बों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये।



**Solution :** यह समझने के लिये कि प्रतिबिम्ब किस प्रकार बनते है नीचे चित्र व सारणी देखिये। आपको यह समझना आवश्यक होगा $I_{121}$ का मतलब क्या है। निम्न चित्र को देखिये



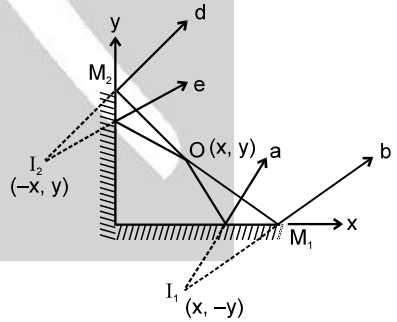

| आपतित किरणें | जिससे परावर्तित हुई | परावर्तित किरणें | वस्तु | प्रतिबिम्ब | वस्तु की दूरी | प्रतिबिम्ब की दूरी |
|---|---|---|---|---|---|---|
| किरण 1 | $M_1$ | किरण 2 | O | $I_1$ | AO = 2cm | $AI_1$ = 2 cm |
| किरण 2 | $M_2$ | किरण 3 | $I_1$ | $I_{12}$ | $BI_1$ = 12 cm | $BI_{12}$ = 12 cm |
| किरण 3 | $M_1$ | किरण 4 | $I_{12}$ | $I_{121}$ | $AI_{12}$ = 22cm | $AI_{121}$ = 22cm |
| किरण 4 | $M_2$ | किरण 5 | $I_{121}$ | $I_{1212}$ | $BI_{121}$ =32cm | $BI_{1212}$=32cm |

**और आदि...**

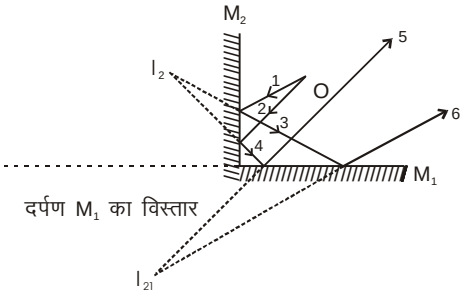
इस प्रकार प्रथम बार $M_2$ दर्पण से किरणों के टकराने पर भी प्रतिबिम्ब बनेंगे। प्रतिबिम्बो की कुल संख्या = ∞.

**Example 10.** दो लम्बवत् दर्पण $M_1$ और $M_2$ तथा बिन्दुवत् वस्तु O मानें। दोनो दर्पणों के कटान बिन्दु को मूल बिन्दु लें और वस्तु के निर्देशांक (x, y), तो प्रतिबिम्बों को संख्या तथा स्थिति बताइये।

**Solution :** किरणें 'a' और 'b' सिर्फ दर्पण $M_1$ पर टकरायेगी और यह किरण प्रतिबिम्ब $I_1$ (x, –y), पर इस तरह बनायेगी कि O तथा $I_1$ दर्पण $M_1$ से समान दूरी पर रहे। यह किरणें आगे ओर प्रतिबिम्ब नहीं बनायेगी क्याकि यह दुबारा किसी दर्पण से नहीं टकरायेगी। इसी तरह किरण 'd' और 'e' सिर्फ $M_2$ से टकरायेगी और यह किरणे प्रतिबिम्ब $I_2$ (–x, y), पर इस तरह बनायेगी ताकि O व $I_2$, दर्पण $M_2$ से समान दूरी पर रहे।

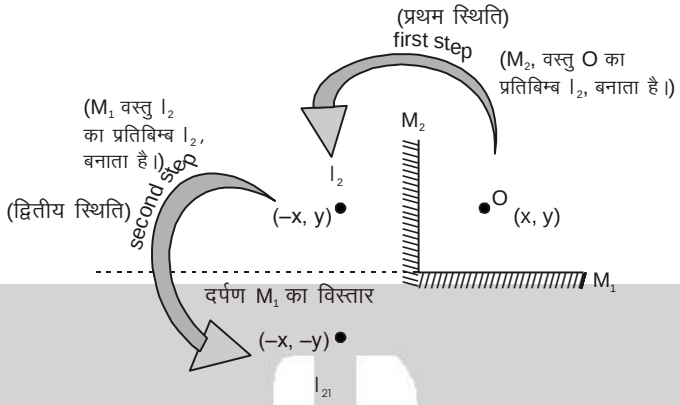



अब वह किरणें लें जो पहले $M_2$ से तथा फिर $M_1$ से टकराती हैं।




आपतित किरणें 1, 2 के लिये वस्तु O है तथा परावर्तित किरणों 3, 4 के प्रतिबिम्ब $I_2$ है।

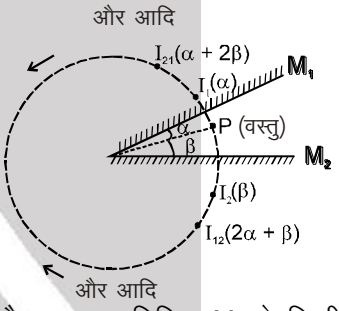
अब किरणे 3, 4, $M_1$ पर आपतित होती है ($I_2$ वस्तु है) जो किरणों 5, 6 के रूप में परावर्तित होती है तथा प्रतिबिम्ब $I_{21}$ बनाती हैं। किरणें 5, 6 किसी दर्पण से नही टकराती इसलिये प्रतिबिम्ब का बनना रूक जाता है $I_2$ और $I_{21}$, दर्पण $M_1$ से समान दूरी पर है ।




पहले $M_1$ व फिर $M_2$ से परावर्तित होने वाली किरणों के लिए, प्रथम प्रतिबिम्ब $I_1$ ((x, – y) पर) बनेगा तथा यह $M_2$ दर्पण के लिए वस्तु का कार्य करेगा और तब इसका प्रतिबिम्ब $I_{12}$ ((–x, –y) पर) बनेगा।
$I_{12}$ व $I_{21}$ सम्पाती है।
∴ तीन प्रतिबिम्ब बनते हैं।

## 4.5 दो समतल दर्पणों द्वारा बने सभी प्रतिबिम्बों का निरूपण :

माना चित्रानुसार $\theta = \alpha + \beta$ कोण पर झुके दो समतल दर्पण $M_1$ व $M_2$ हैं। बिन्दु P एक वस्तु है जो इस प्रकार रखी है कि यह दर्पण $M_1$ के साथ $\alpha$ कोण व दर्पण $M_2$ के साथ $\beta$ कोण बनाती है। $M_1$ के द्वारा वस्तु P का बना प्रतिबिम्ब $I_1$ दर्पण $M_1$ के दूसरी ओर $\alpha$ कोण पर झुका हुआ होगा। चित्र में यह कोण $I_1$ के साथ कोष्ठक में लिखा हुआ है। इसी प्रकार वस्तु P का, $M_2$ द्वारा बना प्रतिबिम्ब $I_2$, $M_2$ के दूसरी ओर $\beta$ कोण पर झुका हुआ होगा। चित्र में यह कोण $I_2$ के साथ कोष्ठक में लिखा हुआ है।




अब $I_2$, $M_1$ के लिये वस्तु का कार्य करेगा जो कि $M_1$ से $(\alpha + 2\beta)$ कोण बनाता है। इसका प्रतिबिम्ब $M_1$ के विपरीत ओर $(\alpha + 2\beta)$ कोण पर बनेगा। यह प्रतिबिम्ब $I_{21}$ द्वारा व्यक्त होगा। आगे इसी प्रकार .....।
सोचिये कब यह प्रक्रिया रूकेगी।

**संकेत :** एक समतल दर्पण द्वारा बना आभासी प्रतिबिम्ब दर्पण या इसके विस्तार के सामने नहीं होना चाहिये।

**दो नत दर्पणों द्वारा बने प्रतिबिम्बों की संख्या :**

(i) यदि $\frac{360^\circ}{\theta}$ = सम संख्या, प्रतिबिम्बों की संख्या = $\frac{360^\circ}{\theta} - 1$

(ii) यदि $\frac{360^\circ}{\theta}$ = विषम संख्या, प्रतिबिम्बों की संख्या = $\frac{360^\circ}{\theta} - 1$, यदि वस्तु कोण अर्धक पर रखी है।

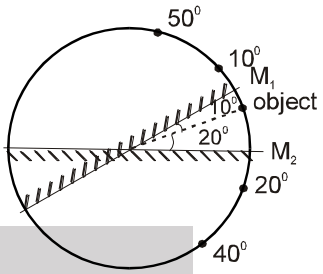
(iii) यदि $\frac{360^\circ}{\theta}$ = विषम संख्या, प्रतिबिम्बों की संख्या = $\frac{360^\circ}{\theta}$, यदि वस्तु कोण अर्धक पर नहीं रखी है।

(iv) यदि $\frac{360^\circ}{\theta} \neq$ पूर्णांक संख्या तब ऊपर बताये अनुसार प्रतिम्बिों को गिनते हैं।

## Solved Example

**Example 11.** दो दर्पण 30º कोण पर झुके हुए है। एक वस्तु, दर्पण $M_1$ के साथ 10º कोण बनाते हुए रखी हुई है। प्रत्येक दर्पण द्वारा बनने वाले प्रथम दो प्रतिबिम्बों की स्थिति ज्ञात कीजिए। (i) सीधे सूत्र का उपयोग करके तथा (ii) प्रतिबिम्बों को गिनकर कुल प्रतिबिम्बों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

**Solution :** चित्र को स्वंय समझ सकते है –






(i) सीधे सूत्र का उपयोग करते हुए :

$\frac{360^o}{30^o}$ = 12 (सम संख्या)

$\therefore$ प्रतिबिम्बों की संख्या = 12 – 1 = 11

(ii) गिनकर निम्न सारणी को देंखें –

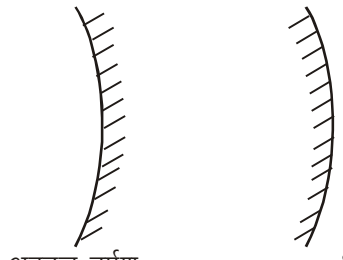
| दर्पण $M_1$ द्वारा बना प्रतिबिम्ब (कोण दर्पण $M_1$ से मापे गये है।) | दर्पण $M_2$ द्वारा बना प्रतिबिम्ब (कोण, दर्पण $M_2$ से मापे गये है) |
|---|---|
| $10^0$ | $20^0$ |
| $50^0$ | $40^0$ |
| $70^0$ | $80^0$ |
| $110^0$ | $100^0$ |
| $130^0$ | $140^0$ |
| $170^0$ | $160^0$ |
| रूके क्योंकि अगला कोण 180º से ज्यादा है। | रूके क्योंकि अगला कोण 180º से ज्यादा है। |

(प्रत्येक चरण में $+30^0$)

जांच करें कि दोनों दर्पणों से बने अन्तिम प्रतिबिम्ब सम्पाती होते है या नहीं। अन्तिम कोणों व दर्पणों के बीच कोण को जोड़िये। यदि यह ठीक 360º, आता है तो यह दर्शाता है कि दो दर्पणों द्वारा बने अन्तिम प्रतिबिम्ब सम्पाती है। यहां दर्पणों द्वारा बने अन्तिम कोण + दर्पणों के बीच कोण = 160º + 170º + 30º = 360º. अतः इस स्थिति में अन्तिम प्रतिबिम्ब सम्पाती है। इसलिए प्रतिबिम्बों की संख्या = $M_1$ द्वारा बने प्रतिबिम्बों की संख्या + $M_2$ द्वारा बने प्रतिबिम्बों की संख्या – 1(इस स्थिति में अन्तिम प्रतिबिम्ब सम्पाती है)= 6 + 6 – 1 = 11 कि दोनों दर्पणों से बने अन्तिम प्रतिबिम्ब सम्पाती होते है या नहीं अन्तिम कोणें व दर्पणों के बीच कोण को जोड़िये। यदि यह ठीक 360º, आता है तो यह दर्शाता है कि दो दर्पणों द्वारा बने प्रतिबिम्ब सम्पाती है। यहां दर्पणों द्वारा बने अन्तिम कोण + दर्पणों के बीच कोण = 160º + 170º + 30º = 360º. अतः इस स्थिति में अन्तिम प्रतिबिम्ब सम्पाती है। इसलिए प्रतिबिम्बों की संख्या = $M_1$ द्वारा बने

## 5. गोलीय दर्पण :

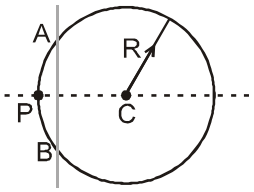
गोलीय दर्पण, एक गोले के किसी भाग के एक पृष्ठ को पॉलिश करके बनाया जाता है। गोलीय दर्पण का वर्गीकरण इस पर निर्भर करता है कि कौनसा भाग पॉलिश किया गया है जैसे दर्पण (a) अवतल दर्पण कहलाता है यदि वक्रता केन्द्र की ओर वाला भाग चमकीला होता है तथा (b) उत्तल दर्पण कहलाता यदि वक्रता केन्द्र से दूर वाला भाग चमकीला होता है।





अवतल दर्पण उत्तल दर्पण

## 5.1 गोलीय दर्पणों के लिए मुख्य पारिभाषिक पद :




निर्दिष्ट वक्रता केन्द्र, ध्रुव, द्वारक व वक्रता त्रिज्या के साथ गोलीय कोश

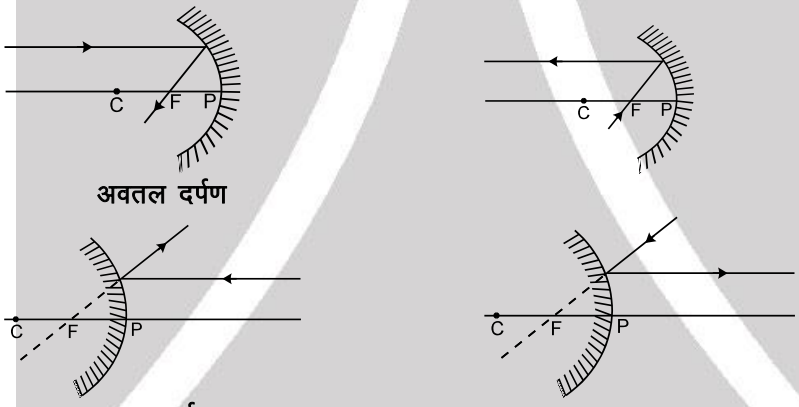
**(a) वक्रता केन्द्र (C) :** उस गोले का केन्द्र जिसका गोलीय दर्पण एक भाग है, दर्पण का वक्रता केन्द्र कहलाता है। यह C द्वारा व्यक्त होता है।

**(b) ध्रुव (P) :** दर्पण का केन्द्र ध्रुव कहलाता है। चित्र में दर्पण APB का ध्रुव बिन्दु P द्वारा व्यक्त है।

**(c) मुख्य अक्ष :** मुख्य अक्ष वह रेखा है जो दर्पण तल के लम्बवत् और ध्रुव से गुजरती है। मुख्य अक्ष, दर्पण के ध्रुव व वक्रता केन्द्र को जोड़ने वाली रेखा द्वारा भी व्यक्त होती है।

**(d) द्वारक (A) :** दर्पण का वह क्षेत्र जो प्रकाश परावर्तन के लिए उपलब्ध है, दर्पण का द्वारक कहलाता है। निर्दिष्ट चित्र में APB दर्पण का द्वारक है।

**(e) मुख्य फोकस (F) :** उन सभी परावर्तित किरणों का प्रतिच्छेद बिन्दु होता है जिनके लिए दर्पण से टकराने (छोटे द्वारक से) वाली किरणें मुख्य अक्ष के समान्तर होती हैं। अवतल दर्पण में यह वास्तविक होता है तथा उत्तल दर्पण में आभासी ध्रुव से फोकस के बीच की दूरी को फोकस दूरी कहते है। द्वारक (दर्पण के आकार से सम्बन्धित) दर्पण का व्यास होता है।




अवतल दर्पण

उत्तल दर्पण

## Solved Example

**Example 12.** एक किरण का आपतन कोण ज्ञात कीजिए। जिसके लिए यह ध्रुव से गुजरे। दिया जाता है कि MI || CP

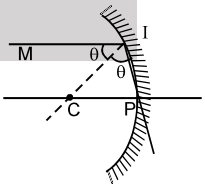
**Solution :** $\angle MIC = \angle CIP = \theta$

$MI \parallel CP \; \angle MI\theta = \angle ICP = \theta$

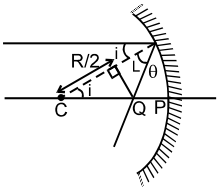
$CI = CP \quad \Rightarrow \quad \angle CIP = \angle CPI = \theta$

$\therefore \Delta CIP$ में सभी कोण बराबर है।

$3\theta = 180^o \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^o$




**Example 13.** दूरी CQ ज्ञात कीजिए यदि मुख्य अक्ष के समानान्तर आपतित होने वाली प्रकाश किरण कोण i पर आपतित होती है। दूरी CQ भी ज्ञात कीजिए यदि $i \to 0$



**Solution :** $\cos i = \frac{R}{2CQ}$

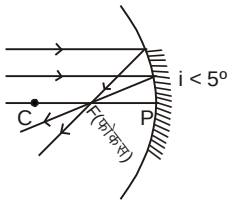
$CQ = \frac{R}{2\cos i}$

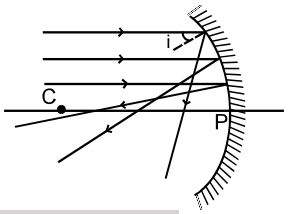
i के बढ़ने पर cos i घटता है। इसलिए CQ बढ़ती है।

यदि i एक अल्प कोण है तो $\cos i \approx 1$

$\therefore$ CQ = R/2

अतः उपाक्षीय किरणें वक्रता केन्द्र से R / 2 दूरी पर मिलती है, जिसे फोकस कहते है।

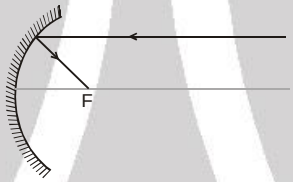



## 5.2 किरण अनुरेखण :

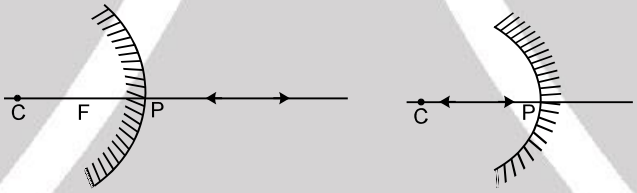
किरण अनुरेखण में निम्न तथ्य उपयोगी होते हैं।

(i) यदि आपतित किरण मुख्य अक्ष के समान्तर है तो परावर्तित किरण फोकस से गुजरती है।

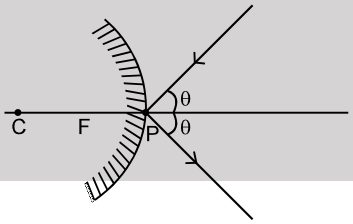



(ii) यदि आपतित किरण फोकस से गुजरती है तो परावर्तित किरण मुख्य अक्ष के समान्तर होती है।

(iii) वक्रता केन्द्र से गुजरने वाली आपतित किरण पुनः वक्रता केन्द्र से होकर परावर्तित होगी (क्योंकि यह अभिलम्बवत् आपतित होती है।)




(iv) नीचे दर्शाये अनुसार ध्रुव पर आपतित एक किरण का अनुरेखण आसान होता है।




## 5.3 चिन्ह परिपाटी :

हम निर्देशांक चिन्ह परिपाटी का उपयोग करते हैं।

**(i)** ध्रुव (दर्पण के लिये) या प्रकाशीय केन्द्र (लैंस के लिये) को मूल बिन्दु लें।
आपतित किरण की दिशा को धनात्मक लेते हुये मुख्य अक्ष के अनुदिश X अक्ष लें। **u, v, R** व **f** क्रमशः वस्तु के, प्रतिबिम्ब के, वक्रता केन्द्र के व फोकस के x- निर्देशांक को व्यक्त करते हैं।

**(ii)** y-निर्देशांक, मुख्य अक्ष के ऊपर धनात्मक व नीचे ऋणात्मक लिये जाते हैं।
$h_1$ व $h_2$ क्रमशः वस्तु व प्रतिबिम्ब के y निर्देशांक होते हैं।

**नोट :**

- यह चिन्ह परिपाटी दर्पण से परावर्तन, समतल या वक्रीय पृष्ठों से परावर्तन या लैंसों से परावर्तन के लिये है।

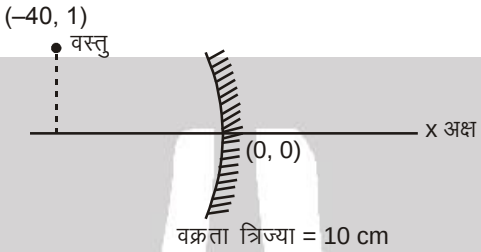
## 5.4 गोलीय दर्पणों से परावर्तन के लिये सूत्र :

**(a) दर्पण सूत्र :** $\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}$

अवतल दर्पण के लिये वक्रता केन्द्र व फोकस के X-निर्देशांक ऋणात्मक व उत्तल दर्पण के लिये धनात्मक होते हैं। चूंकि दर्पणों में प्रकाश किरणें X-दिशा में पीछे परावर्तित होती है इसलिये **v का ऋणात्मक चिन्ह वास्तविक प्रतिबिम्ब व v का धनात्मक चिन्ह आभासी प्रतिबिम्ब को दर्शाता है।**

## Solved Example

**Example 14.** चित्र में ध्रुव (0, 0) तथा x अक्ष के अनुदिश मुख्य अक्ष वाला एक गोलीय अवतल दर्पण दर्शाया गया है –




बिन्दु (– 40 cm, 1cm) पर एक बिन्दुवत वस्तु है तो प्रतिबिम्ब की स्थिति क्या होगी ?

**Solution :** चिन्ह परिपाटी के अनुसार

$u = -40$ cm

$h_1 = +1$ cm

$f = -5$ cm.

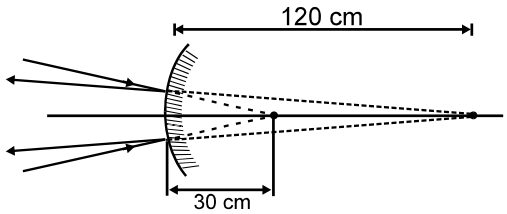
$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v}+\frac{1}{-40}=\frac{1}{-5} \; ; v=\frac{-40}{7}\text{cm} \; ; \; \frac{h_2}{h_1}=\frac{-v}{u}$$

$$\Rightarrow \; h_2=-\frac{-v}{u}\times h_1=\frac{-\left(-\frac{40}{7}\right)\times 1}{-40}=-\frac{1}{7}\text{ cm}$$

$\therefore$ प्रतिबिम्ब की स्थिति $\left(\frac{-40}{7}\text{cm},-\frac{1}{7}\text{cm}\right)$

**Example 15.** अभिसारी किरणें एक गोलीय उत्तल दर्पण पर इस प्रकार आपतित होती हैं कि उन्हें आगे बढ़ाने पर वे दर्पण के पीछे 30 cm की दूरी पर प्रकाशिक अक्ष पर मिलती हैं। परावर्तित किरणें एक अपसारी पुंज इस प्रकार बनाती हैं कि उन्हें आगे बढ़ाने पर वे दर्पण से 1.2 मीटर दूर प्रकाशिक अक्ष पर मिलती हैं। दर्पण की फोकस दूरी ज्ञात कीजिए।

**Solution :**

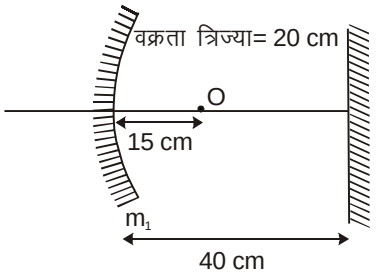



इस स्थिति में $u = +30$

$v = +120$

$\therefore \quad \frac{1}{f}=\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{120}+\frac{1}{30} \quad f = 24$ cm

**Example 16.** प्रथम परावर्तन $m_1$ पर लेते हुए तीन उत्तरोत्तर परावर्तनों के बाद बने अन्तिम प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात कीजिए।




**I परावर्तन :** दर्पण का फोकस = – 10 cm

u = – 15 cm

**दर्पण सूत्र लगाने पर :** $\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$

v = – 30 cm.

**समतल दर्पण पर II परावर्तन के लिए :**

u = – 10 cm ∴ v = 10 cm

**पुनः वक्रीय दर्पण पर III परावर्तन के लिए :**

u = – 50 cm f = – 10 cm

दर्पण सूत्र लगाने पर : $\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$

v = – 12.5 cm

**(b) अनुप्रस्थ आवर्धन m =** $\frac{h_2}{h_1}$ द्वारा परिभाषित है व **m =** $-\frac{v}{u}$ से सम्बन्धित है। m की परिभाषा से m का धनात्मक चिन्ह सीधे प्रतिबिम्ब व ऋणात्मक चिन्ह उल्टे प्रतिबिम्ब को दर्शाता है।

**(c)** दर्पणों से उत्तरोत्तर परावर्तन की स्थिति में कुल आवर्धन $\mathbf{m_1 \times m_2 \times m_3}$ ....., द्वारा दिया जाता है, यहाँ $m_1$, $m_2$ आदि व्यक्तिगत दर्पणों द्वारा उत्पन्न आवर्धन है।

$\mathbf{h_1}$ व $\mathbf{h_2}$ वस्तु व प्रतिबिम्ब के क्रमशः y निर्देशांक दर्शाते हैं।

**नोट :** **(a)** व **(b)** का उपयोग करते हुये निम्न निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। (स्वंय जाँच करें)

| **वस्तु की प्रकृति** | **प्रतिबिम्ब की प्रकृति** | **उल्टा या सीधा** |
|---|---|---|
| वास्तविक | वास्तविक | उल्टा |
| वास्तविक | आभासी | सीधा |
| आभासी | वास्तविक | सीधा |
| आभासी | आभासी | उल्टा |

**(d)** **(a)** व **(b)** ; से हम पाते है कि **m =** $\frac{f}{f-u}=\frac{f-v}{f}$ **(**समय की बचत करने वाला सूत्र**)**

## Solved Example

**Example 17.** 20 cm वक्रता त्रिज्या वाले एक अवतल दर्पण के मुख्य अक्ष के लम्बवत् ध्रुव से 15 cm की दूरी पर एक विस्तरित वस्तु रखी हुई है। आवर्धन ज्ञात कीजिए।

**Solution :** u = – 15 cm f = – 10 cm

$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$ के उपयोग से हम प्राप्त करते है कि v = – 30 cm

∴ $m = -\frac{v}{u} = -2.$

**वैकल्पिक :** $m = \frac{f}{f-u} = \frac{-10}{-10-(-15)} = -2$

**Example 18.** एक व्यक्ति एक गोलीय दर्पण में देखता है। उसके चेहरे के प्रतिबिम्ब का आकार उसके चेहरे के वास्तविक आकार का दुगुना है। यदि चेहरा 20 cm की दूरी पर हो तो दर्पण की वक्रता त्रिज्या की प्रकृत्ति ज्ञात कीजिए।

**Solution :** व्यक्ति उसके चेहरे का प्रतिबिम्ब देख पायेगा जब प्रतिबिम्ब आभासी है। वास्तविक बिम्ब का आभासी प्रतिबिम्ब सीधा होता है।

अतः $m = 2 \quad \therefore \frac{-v}{u} = 2$

$v = 40$ cm

$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$ ; $f = -40$ cm या $R = 80$ cm.

**वैकल्पिक :** $m = \frac{f}{f-u} \Rightarrow 2 = \frac{f}{f-(-20)} \Rightarrow f = -40$ cm या $R = 80$ cm

**Example 19.** पर्दे पर एक मोमबत्ती के प्रतिबिम्ब का आकार इसके वास्तविक आकार का दुगना है। यदि मोमबत्ती को 5 cm विस्थापित किया जाता है तो प्रतिबिम्ब का आकार तीन गुना हो जाता है। दर्पण की वक्रता त्रिज्या व प्रकृत्ति ज्ञात कीजिए।

**Solution :** चूंकि पर्दे पर बना प्रतिबिम्ब वास्तविक है इसलिए वास्तविक वस्तु व वास्तविक प्रतिबिम्ब अवतल दर्पण को दर्शाते हैं।

$m = \frac{f}{f-u}$ के उपयोग से या $-2 = \frac{f}{f-(u)}$ .....(1)

विस्थापन के बाद $-3 = \frac{f}{f-(u+5)}$ .....(2)

[u + 5 क्यों ?, u – 5 क्यों नहीं : अवतल दर्पण में वास्तविक प्रतिबिम्ब का आकार तभी बढ़ेगा जबकि वास्तविक वस्तु को दर्पण के पास लाया जायेगा। ऐसा करने पर इसका x निर्देशांक बढ़ेगा।]

(1) व (2) से $f = -30$ cm या $R = 60$ cm

## (d) प्रतिबिम्ब का वेग

**(i)** जब वस्तु मुख्य अक्ष के अभिलम्बवत् गति करती है :

**(b)** से

हम जानते है कि $\frac{h_2}{h_1} = \frac{-v}{u}$ अथवा $h_2 = -\frac{v}{u} \times h_1$

यदि बिन्दु वस्तु मुख्य अक्ष के लम्बवत् गति करती है , वस्तु तथा प्रतिबिम्ब दोनो के x–निर्देशांक नियत रहते है। ऊपर दिये गये सम्बन्ध का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर हम प्राप्त करते है।

$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{v}{u}\frac{dh_1}{dt}$

यहाँ $\frac{dh_1}{dt}$ वस्तु का मुख्य अक्ष के लम्बवत् वेग है तथा $\frac{dh_2}{dt}$ प्रतिबिम्ब का मुख्य अक्ष के लम्बवत् वेग है।

**(ii) जब वस्तु मुख्य अक्ष के अनुदिश गति करती है :**

दर्पण सूत्र का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं $\frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{u^2}\frac{du}{dt}$, जहाँ $\frac{dv}{dt}$ मुख्य अक्ष के अनुदिश प्रतिबिम्ब का वेग व $\frac{du}{dt}$ मुख्य अक्ष के अनुदिश वस्तु का वेग है। ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि दर्पण में प्रतिबिम्ब सदैव वस्तु के विपरित दिशा में गति करता है। यह चर्चा x-अक्ष के अनुदिश दर्पण के सापेक्ष वेग के लिये है।

**(iii) जब वस्तु मुख्य अक्ष से कुछ कोण पर गति करती है :** वस्तु के वेग का मुख्य अक्ष के लम्बवत् तथा मुख्य अक्ष के अनुदिश घटक लीजिए तथा प्रतिबिम्ब का इन दिशाओं में वेग तथा परिणामी ज्ञात कीजिए।

**(e)** एक दर्पण की प्रकाशिक शक्ति (डायोप्टर्स में) = $\frac{1}{f}$

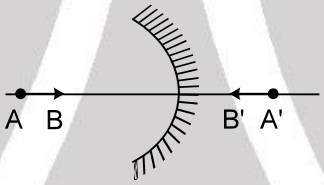
f = चिन्ह के साथ फोकस दूरी (मीटर में)

**(f)** यदि मुख्य अक्ष के अनुदिश स्थित वस्तु बहुत छोटी नहीं है तो अनुदैर्ध्य आवर्धन = $\frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}$ (यह सदैव उल्टा होगा)

**(g) यदि ध्रुव से दूरी की तुलना में वस्तु का आकार अत्यल्प है तो**

**दर्पण सूत्र का अवकलन करने पर हम प्राप्त करते है कि $\frac{dv}{du} = -\frac{v^2}{u^2}$.**

गणितीय रूप से 'du' वस्तु की स्थिति में अल्प परिवर्तन व 'dv' प्रतिबिम्ब की स्थिति में संगत परिवर्तन को दर्शाता है। यदि एक छोटी वस्तु मुख्य अक्ष के अनुदिश रखी है तो 'du' वस्तु के आकार व dv मुख्य अक्ष के अनुदिश इसके प्रतिबिम्ब के आकार को दर्शाता है। (ध्यान रहे कि फोकस वस्तु के प्रारम्भिक तथा अन्तिम बिन्दु के बीच नहीं होना चाहिए) इस स्थिति में $\frac{dv}{dt}$ अनुदैर्ध्य आवर्धन कहलाता है। **ऋणात्मक चिन्ह प्रतिबिम्ब के व्युत्क्रम को दर्शाता है (प्रतिबिम्ब व दर्पण की प्रकृति पर आधारित नहीं)**




## Solved Example

**Example 20.** 10 सेमी० फोकस दूरी के एक अवतल दर्पण के मुख्य अक्ष पर ध्रुव से 60 सेमी० की दूरी पर एक बिन्दुवत वस्तु स्थित है। ज्ञात कीजिए –

(a) प्रतिबिम्ब की स्थिति

(b) यदि वस्तु को मुख्य अक्ष पर दर्पण की ओर 1 mm विस्थापित किया जाये तो प्रतिबिम्ब का विस्थापन ज्ञात कीजिए। परिणाम को समझाइये।

**Solution :** (a) u = – 60 cm

f = – 10cm

$$v = \frac{fu}{u-f} = \frac{-10\ (-60)}{-60-(-10)} = \frac{600}{-50} = -12 \text{ cm.}$$

(b) $\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$

अवकलन करने पर $dv = -\frac{v^2}{u^2} du = -\left(\frac{-12}{-60}\right)^2 [1 \text{ mm}] = -\frac{1}{25}$ mm

[$\because$ du = 1mm; du का चिन्ह + है क्योंकि यह चिन्ह परिपाटी द्वारा धनत्मक दिशा में विस्थापित किया गया है।]

(a) dv का ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि प्रतिबिम्ब ऋणात्मक दिशा में विस्थापित होता है।

(b) v का चिन्ह ऋणात्मक है जो दर्शाता है कि प्रतिबिम्ब, ध्रुव के ऋणात्मक ओर बनता है। (a) व (b) साथ में दर्शाते हैं कि प्रतिबिम्ब ध्रुव से दूर विस्थापित होगा।

**(h) न्यूटन का सूत्र : $XY = f^2$**

X व Y मुख्य फोकस से क्रमशः वस्तु व प्रतिबिम्ब की दूरी (मुख्य अक्ष के अनुदिश) है। यह सूत्र काम में लिया जा सकता है जबकि दूरियाँ फोकस से पूछी गयी हों या दी गयी हों।

## 6. प्रकाश का अपवर्तन :

एक माध्यम से दूसरे माध्यम में गुजरने पर प्रकाश किरणों का उनके वास्तविक पथ से विचलन अपवर्तन कहलाता है।

- यदि प्रकाश का आपतन कोण ($0 < i < 90$) हो तो यह अपने पथ से विचलित हो जाता है। इसका कारण प्रकाश का एक माध्यम से दूसरे माध्यम में गुजरने पर वेग में परिवर्तन है।
- यदि प्रकाश अभिलम्बवत् आपतित होता है तो यह बिना मुड़े दूसरे माध्यम में चला जाता है किन्तु फिर भी इसे अपवर्तन कहते हैं।
- किसी माध्यम का अपवर्तनांक उस गुणांक द्वारा परिभाषित किया जाता है जिससे प्रकाश का वेग निर्वात में प्रकाश के वेग की तुलना में घट जाता है।

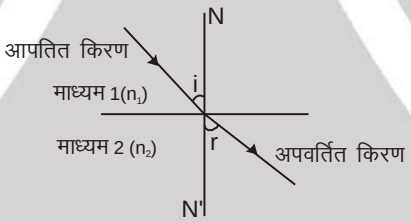
$$\mu = \frac{c}{v} = \frac{\text{निर्वात में प्रकाश की चाल}}{\text{माध्यम में प्रकाश की चाल}}$$

उच्च (निम्न) अपवर्तनांक, माध्यम में निम्न (उच्च) प्रकाश के वेग को दर्शाता है इसलिये इसे सघन (विरल) माध्यम कहते हैं।

### 6.1 अपवर्तन का नियम

**(a)** आपतित किरण, आपतन बिन्दु पर अपवर्ती पृष्ठ पर अभिलम्ब व अपवर्तित किरण तीनों एक ही तल में स्थित होते हैं जिसे आपतन तल या अपवर्तन तल कहते हैं।

**(b)** $\frac{\text{Sin i}}{\text{Sin r}}$ = माध्यमों के किसी युग्म के लिये व दी गयी तरंगदैर्ध्य के प्रकाश के लिये नियतांक। इसे स्नैल का नियम कहते हैं।




नियम.

$$\frac{\text{Sin i}}{\text{Sin r}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

सवालों में उपयोग के लिये याद रखें

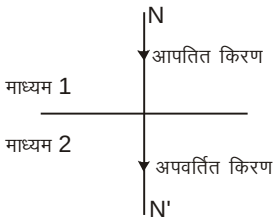
**$n_1 \sin i = n_2 \sin r$**

$\frac{n_2}{n_1} = {}_1n_2$ = पहले माध्यम के सापेक्ष दूसरे माध्यम का अपवर्तनांक

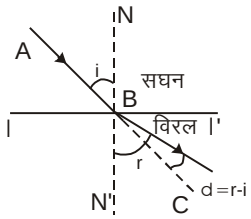
C = हवा (या निर्वात) में प्रकाश का वेग = $3 \times 10^8$ m/s.

### विशेष स्थितियाँ :

- अभिलम्ब आपतन : i = 0
  स्नैल के नियम से : r = 0

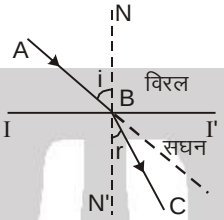


- जब प्रकाश सघन से विरल माध्यम में गमन करता है तो यह अभिलम्ब से दूर मुड़ता है।




r > i

- जब प्रकाश विरल से सघन माध्यम में गमन करता है तो यह अभिलम्ब की ओर मुड़ता है।

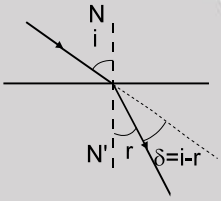



**नोट :**
- अपवर्तनांक उच्च होने पर माध्यम सघन (प्रकाशिक रूप से) होता है
- अपवर्तन के दौरान प्रकाश की आवृति परिवर्तित नही होती है।
- निर्वात के सापेक्ष माध्यम का अपवर्तनांक = $\sqrt{\mu_r \in_r}$

  $n_{\text{निर्वात}} = 1$ ; $n_{\text{हवा}} = 1$ ; $n_{\text{पानी}}$ (माध्य मान) = 4/3 ; $n_{\text{काँच}}$ (माध्य मान)= 3/2

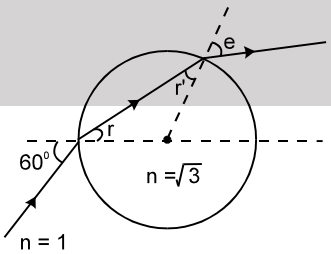
## 6.2 अपवर्तन के कारण किसी किरण का विचलन

$\angle i$ कोण पर आपतित व $\angle r$ कोण पर अपवर्तित एक किरण का विचलन ($\delta$) निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है। **$\delta = |i - r|$.**




## Solved Example

**Example 21.** चित्रानुसार एक प्रकाश किरण कांच के गोले पर $60^0$ कोण पर चित्रानुसार आपतित होती है। कोण r, r', e ज्ञात करो तथा दोनो अपवर्तनों के पश्चात् कुल विचलन भी ज्ञात करो।




**Solution :** स्नेल के नियम से $1\sin 60° = \sqrt{3}\sin r \Rightarrow r = 30°$

सममिति से $r' = r = 30°$.

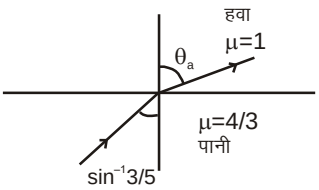
दूसरी सतह पर स्नेल के नियम से $1\sin e = \sqrt{3}\sin r \Rightarrow e = 60°$

प्रथम सतह के कारण विचलन = $i - r = 60° - 30° = 30°$

दूसरी सतह के कारण विचलन = $e - r' = 60° - 30° = 30°$

इसलिए, कुल विचलन = 60°.

**Example 22.** चित्रानुसार पानी से हवा में अपवर्तित प्रकाश किरण के द्वारा बनाया गया कोण $\theta_a$ ज्ञात करो




**Solution :** स्नेल के नियम से

$\mu_W \sin\theta_W = \mu_a \sin\theta_a \qquad \frac{4}{3}\times\frac{3}{5} = 1\sin\theta_a$

$\sin\theta_a = \frac{4}{5} \qquad \theta_a = \sin^{-1}\frac{4}{5}$

**Example 23.** यदि 'b' माध्यम में प्रकाश की चाल $\frac{c}{3}$ हो तो 'a' माध्यम मे प्रकाश की चाल ज्ञात करो। यहाँ c = निर्वात में प्रकाश की चाल और 'a' से 'b' माध्यम में अपवर्तित तरंग अभिलम्ब से क्रमशः 45° व 60° का कोण बनाती है

**Solution :** स्नेल के नियम से

$\mu_a \sin\theta_a = \mu_b \sin\theta_b$

$\frac{c}{v_a}\sin\theta_a = \frac{c}{v_b}\sin\theta_b.$

$\frac{c}{v_a}\sin 45° = \frac{c}{c/3}\sin 60°. \quad \Rightarrow \quad v_a = \frac{\sqrt{2}c}{3\sqrt{3}}$

## 6.3 प्रकाश किरणों के व्युत्क्रमता का सिद्धान्त :

(a) परावर्तित किरण के पथ के अनुदिश गमन करती हुयी एक किरण आपतित किरण के पथ के अनुदिश परावर्तित होती है।

(b) एक अपवर्तित किरण जो इसी के पथ के अनुदिश पीछे की ओर गमन करती है, आपतित किरण के पथ के अनुदिश अपवर्तित होती है। इस प्रकार आपतित व अपवर्तित किरण एक दूसरे के व्युत्क्रम होती है।

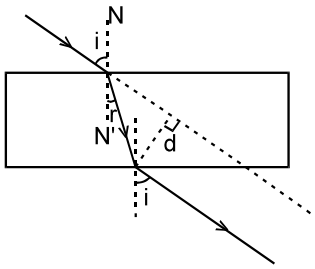
## 7. एक समानान्तर पट्टिका से अपवर्तन :

दोनों ओर समान माध्यम लिये हुये एक समान्तर पट्टिका से होकर जब प्रकाश गुजरता है तो –

**(a)** निर्गत किरण, आपतित किरण के समानान्तर होती है।

**नोट :** निर्गत किरण, आपतित किरण के समान्तर नही होगी यदि पट्टिका के दोनों ओर का माध्यम अलग–अलग है।

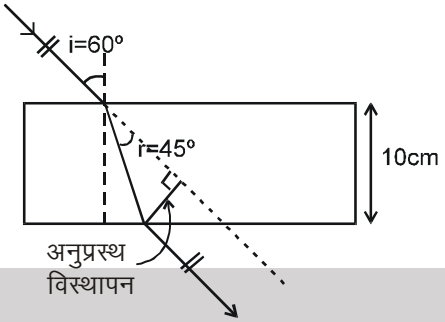
**(b)** प्रकाश किरण में अनुप्रस्थ विस्थापन होगा (छात्र इसे स्वयं व्युत्पन्न कर सकता है)




$d = \frac{t\sin(i-r)}{\cos r} \quad \Rightarrow \quad t$ = पट्टिका की मोटाई

## Solved Example

**Example 24.** प्रकाश किरण का विस्थापन ज्ञात कीजिए जबकि यह हवा में रखी 10 cm मोटी कांच की पट्टिका से गुजरती है। हवा में आपतन कोण 60° है तथा कांच में अपवर्तन कोण 45° है।




**Solution :** $d = \frac{t\sin(i-r)}{\cos r} = \frac{10\sin(60°-45°)}{\cos 45°} = \frac{10\sin 15°}{\cos 45°} = 10\sqrt{5}\ \sin 15°.$

### 7.1 डूबी हुई वस्तु की आभासी गहराई व विस्थापन

निकट अभिलम्ब आपतन (अल्प आपतन कोण i) पर आभासी गहराई (d')

**d'=** $\frac{d}{n_{\text{आपेक्षिक}}}$ यहाँ $n_{\text{आपेक्षिक}} = \frac{n_i\ (\text{आपतन माध्यम का अपवर्तनांक})}{n_r\ (\text{अपवर्तन माध्यम का अपवर्तनांक})}$

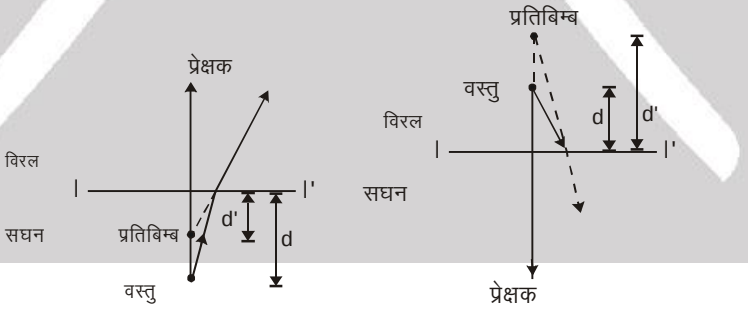
d = अन्तःपृष्ठ से वस्तु की दूरी = वास्तविक गहराई

d' = अन्तःपृष्ठ से प्रतिबिम्ब की दूरी = आभासी गहराई

v = सतह के सापेक्ष अन्त पृष्ठ के लम्बवत् वस्तु का वेग

v′ = सतह के सापेक्ष अन्त पृष्ठ के लम्बवत् प्रतिबिम्ब का वेग

यह सूत्र, स्नैल के नियम का उपयोग करते हुये व निकट अभिलम्ब आपतन की शर्त लागू करते हुये आसानी से व्युत्पन्न किया जा सकता है।



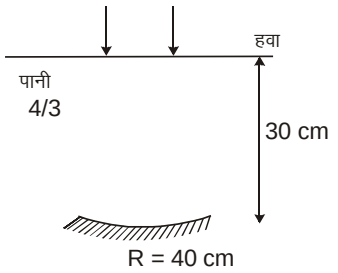

**आभासी विस्थापन** $= d\left(1-\frac{1}{n_{\text{आपेक्षिक}}}\right)$

## Solved Example

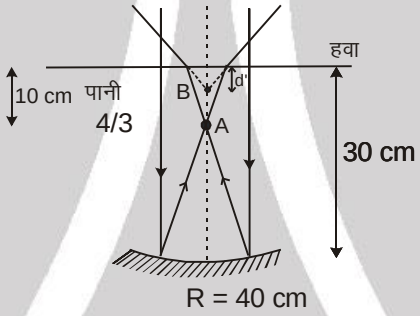
**Example 25.** एक वस्तु पानी में 100 cm दूरी पर स्थित है। उसे हवा से अभिलम्बवत् देखा जाता है तो वस्तु की आभासी गहराई ज्ञात करो।

**Solution :** $d' = \frac{d}{n_{\text{आपेक्षिक}}} = \frac{100}{\frac{4/3}{1}} = 75$ cm.

**Example 26.** एक अवतल दर्पण पानी के अन्दर चित्रानुसार स्थित है। इसकी चमकीली सतह ऊपर की तरफ व मुख्य अक्ष उर्ध्वाधर है। किरणे मुख्य अक्ष के समान्तर दर्पण पर गिर रही है। अन्तिम प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात करो।




**Solution :** एक किरण पानी की सतह से बिना विचलित हुए गुजरती है और मुख्य अक्ष के समान्तर चलती हुई दर्पण से टकराती है। इसलिए दर्पण के लिए वस्तु अनन्त पर है (चित्र में) इसका प्रतिबिम्ब A दर्पण से 20 cm दूर स्थित फोकस पर बनता है तो पानी व हवा की सयुंक्त सतह के लिए d = 10 cm




$$\therefore \quad d' = \frac{d}{\left(\frac{n_w}{n_a}\right)} = \frac{10}{\left(\frac{4/3}{1}\right)} = 7.5 \text{ cm.}$$

**Example 27.** चित्र की सहायता से

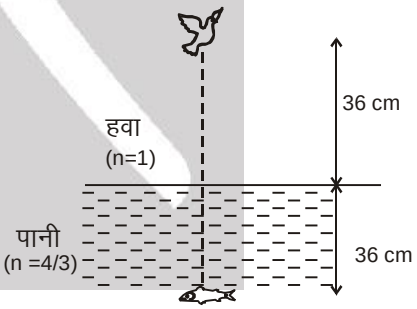
(i) पक्षी की आभासी ऊँचाई ज्ञात करो

(ii) मछली की आभासी गहराई ज्ञात करो

(iii) मछली के लिए पक्षी किस दूरी पर प्रतीत होगा

(iv) पक्षी के लिए मछली किस दूरी पर प्रतीत होगी

(v) यदि पक्षी का वेग नीचे की ओर 12 cm/sec व मछली का वेग 12 cm/sec ऊपर की ओर हो, तो एक दूसरे के सापेक्ष इनके वेग ज्ञात करिये।



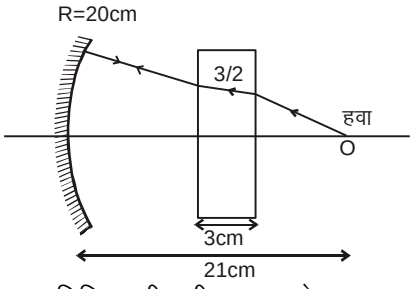

**Solution :** (i) $d'_B = \frac{36}{\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{36}{3/4} = 48$ cm (ii) $d'_F = \frac{36}{4/3} = 27$ cm

(iii) मछली के लिए : $d_F = 36 + 48 = 84$ cm (iv) पक्षी के लिए :: $d_B = 27 + 36 = 63$ cm.

(v) पक्षी के सापेक्ष मछली का वेग $= 12 + \frac{12}{4/3} = 21$ cm.

मछली के सापेक्ष पक्षी का वेग $= 12 + \frac{12}{3/4} = 28$ cm.

**Example 28.** चित्र को देखो,




दर्पण द्वारा बनाये गये अन्तिम प्रतिबिम्ब की दूरी ज्ञात करो।

**Solution :** विस्थापन $= 3\left(1-\frac{1}{3/2}\right)$

दर्पण के लिए वस्तु की दूरी $= 21 - 3\left(1-\frac{1}{3/2}\right) = 20$ cm

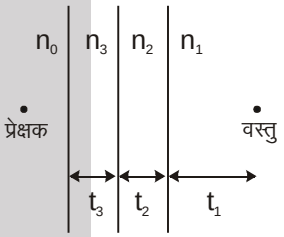
दर्पण व वस्तु के बीच दुरी = 20 cm

वस्तु दर्पण के वकृता केन्द्र पर स्थित है। अतः प्रकाश किरणें पुनः अपने पथ पर जाएगी और प्रतिबिम्ब स्वयं वस्तु पर बनेगा।

## 7.2 एक संयुक्त पट्टिका से अपवर्तन

(या $n_0$ अपवर्तनांक के माध्यम से देखने पर असंख्य समानान्तर माध्यमों द्वारा अपवर्तन)

**आभासी गहराई (अन्तिम पृष्ठ से अन्तिम प्रतिबिम्ब की दूरी)**




$$= \frac{t_1}{n_{1\text{ आपेक्षिक}}} + \frac{t_2}{n_{2\text{ आपेक्षिक}}} + \frac{t_3}{n_{3\text{ आपेक्षिक}}} + ..... + \frac{t_n}{n_{n\text{ आपेक्षिक}}}$$

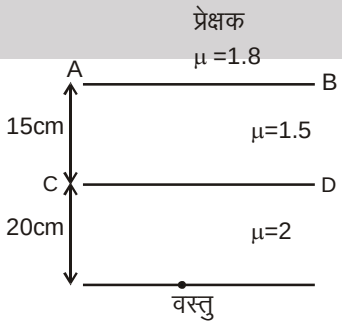
$$\text{आभासी विस्थापन} = t_1\left[1-\frac{1}{n_{1\text{ आपेक्षिक}}}\right] + t_2\left[1-\frac{1}{n_{2\text{ आपेक्षिक}}}\right] + .....+ \left[1-\frac{n}{n_{n\text{ आपेक्षिक}}}\right]$$

जहाँ 't' मोटाई को व 'n' संगत माध्यम के अपवर्तनांक (प्रेक्षक का माध्यम के सापेक्ष) को व्यक्त करता है।

(अर्थात $n_{1\text{ आपेक्षिक}} = n_1/n_0$, $n_{2\text{ आपेक्षिक}} = n_2/n_0$ आदि)

## Solved Example

**Example 29.** चित्र देखो, वस्तु की आभासी गहराई ज्ञात करो ? जब इसको सतह AB के नीचे से देखा जाता है।




**Solution :** $D_{\text{आभासी}} = \sum\frac{d}{\mu} = \frac{20}{\left(\frac{2}{1.8}\right)} + \frac{15}{\left(\frac{1.5}{1.8}\right)} = 18 + 18 = 36$ cm.

## 8 . क्रान्तिक कोण व पूर्ण आन्तरिक परावर्तन (T. I. R.)

क्रान्तिक कोण, सघन माध्यम में बनाया गया वह कोण है, जिसके लिये विरल माध्यम में अपवर्तन कोण 90° होता है। जब सघन माध्यम में कोण, क्रान्तिक कोण से अधिक हो जाता है तो प्रकाश किरण परावर्तन के नियमों का पालन करते हुये पुनः सघन माध्यम में परावर्तित हो जाती है तथा अन्तरापृष्ठ एक पूर्ण परावर्ती दर्पण की भांति व्यवहार करता है।

चित्र में

O = वस्तु

NN′ = अन्तरापृष्ठ पर अभिलम्ब

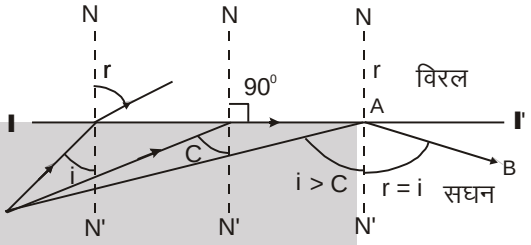
II′ = अन्तरापृष्ठ

C = क्रान्तिक कोण

AB = पूर्ण आन्तरिक परावर्तन के कारण परावर्तित किरण

जब i = C तब r = 90°

$\therefore C = \sin^{-1}\frac{n_r}{n_d}$



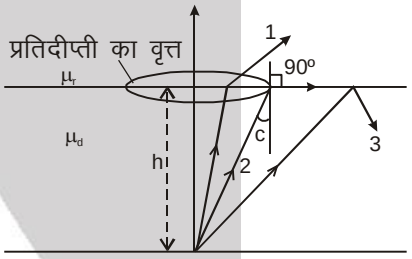



### 8.1 पूर्ण आन्तरिक परावर्तन की शर्तें

(a) प्रकाश, अन्तरापृष्ठ पर सघन माध्यम से आपतित होना चाहिये।

(b) आपतन कोण, क्रान्तिक कोण से बड़ा होना चाहिये (i > c) चित्र में $\mu_r$ और $\mu_d$ अपवर्तनांको वाले दो माध्यमों को पृथक करने वाले अन्तरापृष्ठ से h दूरी पर सघन माध्यम में रखी एक प्रदीप्त वस्तु को दर्शाया गया है। (r व d क्रमशः विरल व सघन माध्यमों के लिये है)

चित्र में किरण 1 पृष्ठ से, क्रान्तिक कोण C से कम कोण पर टकराती है और विरल माध्यम में अपवर्तित हो जाती है। किरण 2 पृष्ठ से क्रान्तिक कोण पर टकराती है व अन्तरापृष्ठ पर स्पर्शी अपवर्तित हो जाती है। किरण 3, अन्तरापृष्ठ से क्रान्तिक कोण से बड़े कोण पर टकराती है और आन्तरिक परावर्तित हो जाती है। उन बिन्दुओं का बिन्दु पथ जहाँ किरण, क्रान्तिक कोण पर टकराती है, **प्रतिदीप्ती का वृत्त** कहलाता है।






वे सभी किरणे जो इस वृत्त के अन्दर आपतित होती है, विरल माध्यम में अपवर्तित हो जाती है। यदि एक प्रेक्षक विरल माध्यम में है तो वह केवल प्रतिदीप्ती वृत्त से आने वाले प्रकाश को ही देख सकेगा। यदि प्रतिदीप्ती वृत्त को एक वृत्ताकार अपारदर्शी प्लेट से ढक दिया जाये तो विरल माध्यम में कोई प्रकाश अपवर्तित नहीं होगा और तब वस्तु को विरल माध्यम से नही देखा जा सकेगा। प्रतिदीप्ती वृत्त की त्रिज्या आसानी से ज्ञात की जा सकती है।

## Solved Example

**Example 30.** जब किरण कांच से निर्वात में जाती है, तो कांच माध्यम ($\mu$ = 1.5) में बनाया जा सकने वाला अधिकतम कोण ज्ञात करो।

**Solution :** 1.5 sin C = 1 sin 90°, जहाँ C = क्रान्तिक कोण

sin C = 2/3 ; C = $\sin^{-1}$ 2/3

**Example 31.** एक माध्यम (m = 2) मे अपवर्तन कोण ज्ञात कीजिए यदि प्रकाश निर्वात में क्रान्तिक कोण से दुगुना कोण बनाते हुए आपतित होता है।

**Solution :** चुंकि आपतित किरण विरल माध्यम में है। अतः पूर्ण आन्तरिक परावर्तन सम्भव नहीं है।

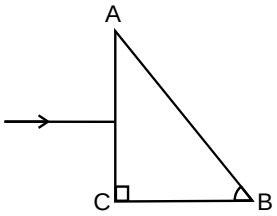
$C = \sin^{-1}\frac{1}{\mu} = 30°$

$\therefore$ i = 2C = 60°

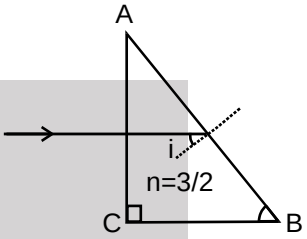
स्नेल के नियम से 1 sin 60° = 2 sin r

$\sin r = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ; $r = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

**Example 32.** कोण $\theta$ का मान क्या होना चाहिये ताकि प्रिज्म (n = 3/2) के पृष्ठ AC पर लम्बवत् प्रवेश करने वाला प्रकाश दूसरे अपवर्तक पृष्ठ AB को पार न करे।




**Solution :** प्रकाश किरण पृष्ठ AC से बिना मुड़े गुजरेगी यदि यह लम्बवत् आपतित होती है। माना यह पृष्ठ AB से आपतन कोण i पर टकराती है।




$i = 90 - \theta$

आवश्यक स्थिति के लिए : $90° - \theta > C$

या $\sin(90° - \theta) > \sin C$

या $\cos\theta > \sin C = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$ या $\theta < \cos^{-1}\frac{2}{3}$.

**Example 33.** हवा में रखी कांच की एक छड़ के अपवर्तनांक n का मान कितना होना चाहिये ताकि छड़ के समतल पृष्ठ से प्रवेश करने वाली प्रकाश किरण छड़ के वक्रीय पृष्ठ को पार न करे।

**Solution :** यह आवश्यक है कि सभी संभावित r' क्रान्तिक कोण से बड़े होने चाहिये। यह स्वतः पूरा हो जायेगा यदि न्यूनतम r' क्रान्तिक कोण से अधिक है .....(A)

कोण r' न्यूनतम होगा जबकि r अधिकतम अर्थात् C( क्यों ?) इस प्रकार r' का न्यूनतम मान 90 – C है।

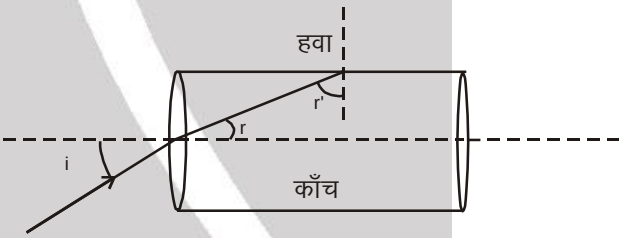
शर्त (A) से :

$90° - C > C$ तथा $C < 45°$

$\sin C < \sin 45°$ ;

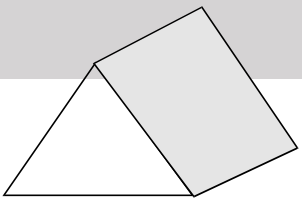
$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

या $n > \sqrt{2}$




## 9. एक प्रिज़्म के अभिलाक्षणिक :

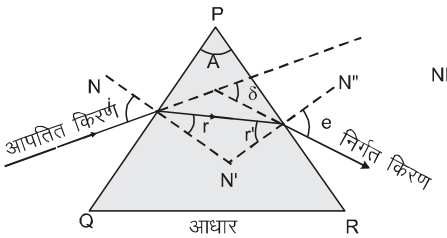
**(a)** एक दूसरे पर किसी कोण पर झुके हुये दो समतल पृष्ठों से घिरा हुआ एक समांगी ठोस पारदर्शी व अपवर्ती माध्यम, प्रिज़्म कहलाता है।



**त्रिविम दृश्य**

**एक प्रिज़्म से अपवर्तन :**

**एक ओर का दृश्य**




NN' व N'N" अभिलम्ब हैं

**(b)** PQ व PR अपवर्ती पृष्ठ हैं।

**(c)** $\angle QPR = A$, को प्रिज़्म कोण या अपवर्ती कोण कहते हैं। (शीर्ष कोण भी कहते है)

**(d)** $\delta$ = विचलन कोण

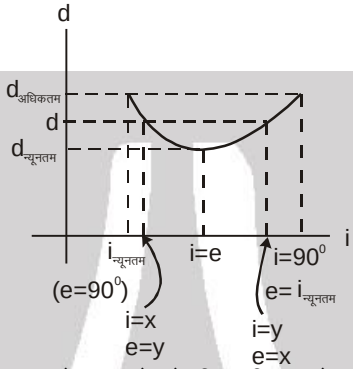
**(e)** एक प्रिज़्म से एकवर्णी प्रकाश (एकल तरंग लम्बाई) किरण के अपवर्तन के लिये –

$\delta = (i + e) - (r_1 + r_2)$ तथा $r_1 + r_2 = A$

$\therefore$ **$\delta = i + e - A$.**

**(f)** i के साथ $\delta$ में परिवर्तन चित्र में दर्शाया गया है।

एक $\delta$ ($\delta_{न्यूनतम}$ को छोड़कर) के लिये आपतन कोण के दो मान होते हैं। यदि i व e को एक दूसरे से बदल दिया जाये तो प्रकाश के व्युत्क्रम नियम के कारण हमें $\delta$ का वही मान प्राप्त होता है।






**Note :** (i) उपर्युक्त परिणाम का उपयोग करने के लिए प्रिज्म के दोनों ओर माध्यम समान होना चाहिए।

(ii) उपर्युक्त आरेख के आधार पर हम निम्न परिणाम व्युत्पन्न कर सकते हैं जिनके अनुसार एक नियत विचलन के लिए i व e परस्पर परिवर्तनीय है अर्थात् दिए हुए विचलन के लिए दो आपतन कोण होते हैं। (न्यूनतम विचलन को छोड़कर)

| i | $r_1$ | $r_2$ | e | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_4$ | $\theta_4$ | $\theta_5$ |
| $\theta_4$ | $\theta_3$ | $\theta_2$ | $\theta_1$ | $\theta_5$ |

**(g)** केवल और केवल एक ही आपतन कोण होता है जिसके लिये विचलन कोण न्यूनतम होता है।

**(h)** जब $\delta = \delta_{न्यूनतम}$, न्यूनतम विचलन कोण तब $i = e$ और $r_1 = r_2$, अपवर्ती पृष्ठों के सापेक्ष किरण सममित रूप से गुजरती है। साधारण गणना से हम दर्शा सकते हैं कि $\delta_{न्यूनतम} = 2i_{न्यूनतम} - A$

जहाँ $i_{न्यूनतम}$ = न्यूनतम विचलन के लिये आपतन कोण व $r = A/2$.

$\therefore \; n_{आपेक्षिक} = \dfrac{\sin\left[\dfrac{A + \delta_m}{2}\right]}{\sin\left[\dfrac{A}{2}\right]}$, यहां $n_{आपेक्षिक} = \dfrac{n_{प्रिज्म}}{n_{बाह्य\ माध्यम}}$ तथा $\delta_{न्यूनतम} = (n - 1)A$ ($\angle A$ के छोटे मानो के लिये)

**(i)** एक पतले प्रिज़्म ( $A \le 10^o$) के लिये व i के छोटे मान के लिये $\delta = (n_{सापेक्ष} - 1)A$ जहाँ $n_{सापेक्ष} = \dfrac{n_{प्रिज्म}}{n_{परिवेश}}$

## Solved Example

**Example 34.** एक प्रिज्म का अपवर्तक कोण $A = 60^o$ तथा इसका अपवर्तनांक $n = 3/2$ है। न्यूनतम विचलन प्राप्त करने के लिये आपतन कोण i कितना होगा ? न्यूनतम विचलन भी ज्ञात किजिये। [बाह्य माध्यम हवा (n = 1) लें]

**Solution :** न्यूनतम विचलन के लिये $r_1 = r_2 = \dfrac{A}{2} = 30^o$.

पृष्ठ I पर स्नेल का नियम लगाने पर $1 \times \sin i = \dfrac{3}{2} \sin 30^o \Rightarrow i = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)$

$\delta_{न्यूनतम} = 2\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right) - \dfrac{\pi}{3}$

**Example 35.** चित्र देखें। अपवर्तक कोण 4º व अपवर्तनांक $\frac{3}{2}$ वाले एक प्रिज्म द्वारा उत्पन्न विचलन ज्ञात कीजिये।

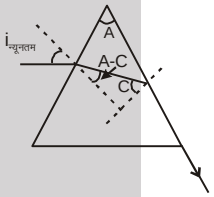
**Solution :** $\delta = (\frac{3}{2} - 1) \times 4° = 2°$

**Example 36.** A = 60º, n = $\sqrt{\frac{7}{3}}$ वाले एक प्रिज्म के लिये न्यूनतम सम्भव आपतन कोण ज्ञात कीजिये ताकि प्रकाश किरण दूसरे पृष्ठ से अपवर्तित हो। $\delta_{\text{अधिकतम}}$ भी ज्ञात किजिये।

**Solution :** न्यूनतम आपतन की स्थिति मे कोण, चित्र में दर्शाये अनुसार होंगे।

स्नेल का नियम लेने पर :

$1 \times \sin i_{\text{न्यूनतम}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sin (A - C)$




$= \sqrt{\frac{7}{3}} (\sin A \cos C - \cos A \sin C)$

$= \sqrt{\frac{7}{3}} \left( \sin 60 \sqrt{1 - \frac{3}{7}} - \cos 60 \sqrt{\frac{3}{7}} \right) = \frac{1}{2}$

$\therefore \quad i_{\text{न्यूनतम}} = 30°$

$\therefore \quad \delta_{\text{अधिकतम}} = i_{\text{न्यूनतम}} + 90° - A = 30° + 90° - 60^0 = 60°.$

**Example 37.** दर्शाइये यदि $A > A_{\text{अधिकतम}}$ (= 2 C), तब 'i' के किसी भी मान के लिये दूसरे अपवर्तक पृष्ठ PR पर पूर्ण आन्तरिक परावर्तन होता है।

**Solution :** दूसरे पृष्ठ पर T.I.R. के लिये r' > C

$\Rightarrow$ (A – r) > C तथा A > (C + r)

उपरोक्त सम्बन्ध सन्तुष्ट होगा यदि

या $A > C + r_{\text{अधिकतम}}$ या $A > C + C$ या $A > 2C$

**(j)** उपरोक्त उदाहरण के आधार पर तथा समान कारण के लिए यह दर्शाया जा सकता है कि –

(i) यदि A > 2C तो सभी किरणें दूसरे पृष्ठ से परावर्तित हो जाती हैं।

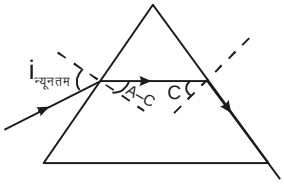
(ii) यदि $A \le C$ तब कोई भी किरण दूसरे पृष्ठ से परावर्तित नहीं होती है अर्थात सभी किरणें दूसरी सतह से अपवर्तित हो जाती हैं।

(iii) यदि $2C \ge A > C$ तो कुछ किरणें दूसरी सतह से परावर्तित हो जाती हैं व कुछ किरणें अपवर्तित होती है। यह आपतन कोण पर निर्भर करता है।

**(k)** i के दो मानों के लिए $\delta$ अधिकतम होता है $\Rightarrow$ $i_{\text{न्यूनतम}}$ (e = 90º के संगत) व i = 90º ($e_{\text{न्यूनतम}}$ के संगत).

**$i_{\text{न्यूनतम}}$ के लिये :** $n_s \sin i_{\text{न्यूनतम}} = n_p \sin(A - C)$

यदि $i < i_{\text{न्यूनतम}}$ तब दूसरे अपवर्ती पृष्ठ PR पर पूर्ण आन्तरिक परावर्तन होता है।



## 10. प्रकाश का विक्षेपण :

एक श्वेत प्रकाश किरण का घटकों में विभक्त होकर (कोणीय रूप से) अलग–अलग दिशाओं में फैलना प्रकाश का विक्षेपण कहलाता है [यह सभी विद्युत चुम्बकीय तरंगों के लिये लागू होता है]। यह घटना होती है क्योंकि अलग–अलग तरंगदैर्ध्यों का प्रकाश निर्वात में समान चाल से किन्तु किसी माध्यम में अलग–अलग चालों से गति करता है।

इस प्रकार किसी माध्यम का अपवर्तनांक तरंगदेर्ध्य पर भी निर्भर करता है। तरंगदैर्ध्य के साथ अपवर्तनांक में परिवर्तन को कौची के सूत्र द्वारा दिया जाता है।

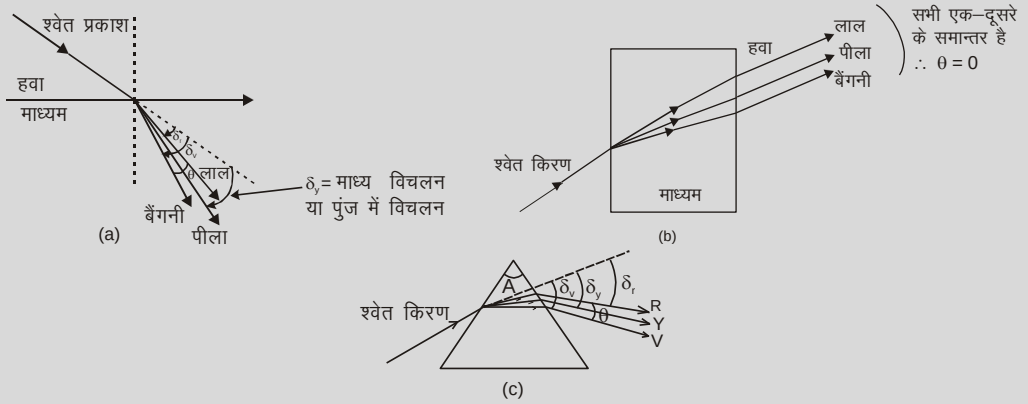
**कौची का सूत्र :** $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$ यहाँ a व b माध्यम के धनात्मक नियतांक है।

**नोट :**

- यह घटना ध्वनि तरंगों में नही होती है।

अपवर्तित (विक्षेपित) प्रकाश में चरम रंगो की किरणों के बीच का कोण विक्षेपण कोण कहलाता है। $\theta = \delta_v - \delta_r$ (चित्र (a))

चित्र (a) व (c) विक्षेपण दर्शाते हैं जबकि चित्र (b) में कोई विक्षेपण नही है।




अल्प प्रिज़्म कोण 'A' के प्रिज़्म व छोटे 'i' के लिये : $\theta = \delta_v - \delta_r = (n_v - n_r)A$

## Solved Example

**Example 38.** लाल व बैंगनी प्रकाश के लिये फ्लिंट काँच के आपवर्तनांक क्रमशः 1.613 व 1.632 है। इस फ्लिंट कांच जिसका अपवर्तन कोण 5° है, के एक पतले प्रिज्म द्वारा उत्पन्न कोणीय विक्षेपण ज्ञात किजिये ।

**Solution :** लाल प्रकाश का विक्षेप $\delta_r = (\mu_r - 1)A$ तथा बैंगनी प्रकाश का विचलन $\delta_v = (\mu_v - 1)A$ है।

विक्षेपण $= \delta_v - \delta_r = (\mu_v - \mu_r)A = (1.632 - 1.613) \times 5° = 0.095°$.

पुंज का विचलन (माध्य विचलन) $\delta = \delta_y = (n_y - 1)A$

$n_v$, $n_r$ व $n_y$ क्रमशः बैंगनी, लाल व पीले रंगो के लिये पदार्थ के अपवर्तनांक हैं।

**नोट :** यदि $\mu$ का औसत मान कम है तो $\mu_v - \mu_r$ भी कम होता है और यदि $\mu$ का औसत मान अधिक है तो $\mu_v - \mu_r$ भी अधिक होता है। इस प्रकार माध्य विचलन अधिक होने पर कोणीय विक्षेपण भी अधिक होगा।

**विक्षेपण क्षमता (ω) :** प्रिज़्म के पदार्थ की विक्षेपण क्षमता ($\omega$) निम्न सूत्र द्वारा दी जाती है।

$$\omega = \frac{n_v - n_r}{n_y - 1}$$

**नोट :**

- $\omega$ माध्यम का गुण है।

  अल्प प्रिज़्म कोण वाले प्रिज़्म ($A \le 10^o$) व छोटे कोण i पर आपतित प्रकाश के लिये :

  $$\frac{n_v - n_r}{n_y - 1} = \frac{\delta_v - \delta_r}{\delta_y} = \frac{\theta}{\delta_y} = \frac{\text{कोणीय विक्षेपण}}{\text{माध्य किरण (पीला) का विचलन}}$$

  [$n_y = \frac{n_v + n_r}{2}$, यदि सवाल में $n_y$ नहीं दिया हुआ है]

- $n - 1$ = संगत रंग के लिये माध्यम की अपवर्तिता।

## Solved Example

**Example 39.** लाल व बैंगनी रंगो के लिये काँच का अपवर्तनांक क्रमशः 1.50 और 1.60 है। ज्ञात कीजिये
(a) पीले रंग के लिये आवर्तनांक लगभग (b) माध्यम की विक्षेपण क्षमता

**Solution :** (a) $\mu_r \simeq = \frac{\mu_v + \mu_R}{2} = \frac{1.50 + 1.60}{2} 1.55$ (b) $\omega = \frac{\mu_v - \mu_R}{\mu_r - 1} = \frac{1.60 - 1.50}{1.55 - 1} = 0.18.$

### 10.1 बिना विचलन के विक्षेपण (सीधा दृश्य संयोजन)

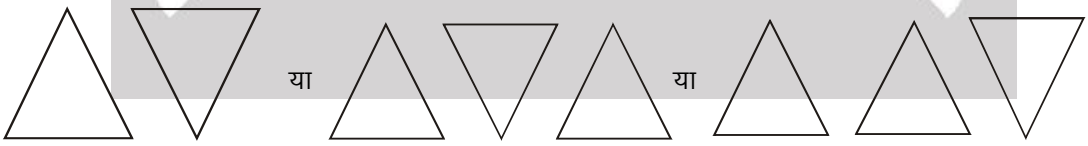
बिना विचलन के विक्षेपण के लिये शर्त है :

$$\left[n_y - 1\right] A = \left[n'_y - 1\right] A' \Leftrightarrow \left[\frac{n_v + n_r}{2} - 1\right] A = \left[\frac{n'_v + n'_r}{2} - 1\right] A'$$

कोणीय विक्षेपण व विचलन के अलग–अलग संयोजनों को प्राप्त करने के लिये दो या अधिक प्रिज़्मों को विभिन्न तरीकों से जोड़ा जा सकता है।

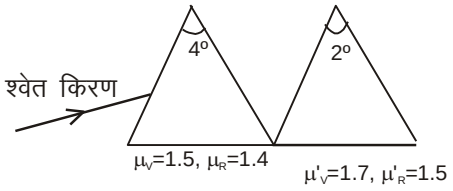
### 10.2 विक्षेपण के बिना विचलन (विवर्ण संयोजन)

इसके लिये शर्त है : $(n_v - n_r)\, A = (n'_v - n'_r)\, A'$




## Solved Example

**Example 40.** यदि दो प्रिज्म चित्रानुसार जुड़े हों तो संयोजन पर आपतित एक श्वेत प्रकाश किरण का विचलन कोण व कुल कोणीय विक्षेपण ज्ञात किजिये।



**Solution :** दोनो प्रिज्म प्रकाश किरणों को उनके आधारों की ओर अर्थात् समान दिशा में मोड़ते है । इस प्रकार दोनों प्रिज्मों के द्वारा उत्पन्न मोड़ योगात्मक है।

कुल कोणीय विक्षेपण $= \theta + \theta' = (\mu_V - \mu_R)\, A + (\mu'_V - \mu'_R)\, A' = (1.5 - 1.4)\, 4^o + (1.7 - 1.5) 2^o = 0.8°$

कुल विचलन $= \delta + \delta' = \left(\frac{\mu_V + \mu_R}{2} - 1\right) A + \left(\frac{\mu'_V + \mu'_R}{2} - 1\right) A'$

$= \left(\frac{1.5 + 1.4}{2} - 1\right) 0.4^o + \left(\frac{1.7 + 1.5}{2} - 1\right) 0.2^o$

$= (1.45 - 1)\, 0.4^o + (1.6 - 1)\, 0.2^o$

$= 0.45 \times 0.4^o + 0.6 \times 0.2^o = 1.80 + 1.2 =$ **$3.0^o$** **Ans.**

**Example 41.** दो पतले प्रिज्मों को जोड़कर एक विवर्ण संयोजन बनाया जाता है। प्रिज्म I के लिये $A = 4^o$, $\mu_R = 1.35$, $\mu_Y = 1.40$, $\mu_v = 1.42$. प्रिज्म II के लिए $\mu'_R = 1.7$, $\mu'_Y = 1.8$ व $\mu'_V = 1.9$। प्रिज्म II का प्रिज्म कोण व कुल माध्य विचलन ज्ञात किजिये।

**Solution :** विवर्ण संयोजन के लिए शर्त

$\theta = \theta'$

$(\mu_V - \mu_R)A = (\mu'_V - \mu'_R)A'$ $\quad \therefore A' = \frac{(1.42 - 1.35)4^o}{1.9 - 1.7} = 1.4°$

$\delta_{कुल} = \delta - \delta' = (\mu_Y - 1)A - (\mu'_Y - 1)A'$

$= (1.40 - 1)\, 4^o - (1.8 - 1)\, 1.4° = 0.48^o.$

**Example 42.** 5° कोण का क्राउन काँच का बना एक प्रिज्म एक फ्लिंट प्रिज्म के साथ इस प्रकार जोड़ा जाता है कि माध्य किरण बिना विचलित हुये गुजरती है। (a) फ्लिंट काँच के बने प्रिज्म का प्रिज्म कोण व (b) संयोजन द्वारा उत्पन्न कोणीय विक्षेपण ज्ञात कीजिए जबकि इससे होकर श्वेत प्रकाश गुजरता है। लाल, पीले व बैगंनी प्रकाश के लिये क्राउन काँच के अपवर्तनांक क्रमशः 1.5, 1.6 व 1.7 हैं और फ्लिंट कांच के आवर्तनांक क्रमशः 1.8, 2.0 व 2.2 है।

**Solution :** क्राउन प्रिज्म द्वारा उत्पन्न विचलन $\delta = (\mu - 1)A$

व फ्लिंट प्रिज्म द्वारा :

$\delta' = (\mu' - 1)A'$.

प्रिज्मों को एक दूसरे के सापेक्ष उल्टे कोणों पर रखा जाता है। विचलन भी विपरीत दिशाओं में होते है। अतः कुल विचलन:

$D = \delta - \delta' = (\mu - 1)A - (\mu' - 1)A'$. .....(1)

(a) यदि माध्य किरण के लिये कुल विचलन शुन्य हो तो

$(\mu - 1)A = (\mu' - 1)A'$. या $A' = \frac{(\mu - 1)}{(\mu' - 1)} A = \frac{1.6 - 1}{2.0 - 1} \times 5° = 3°$

(b) क्राऊन प्रिज्म द्वारा उत्पन्न कोणीय विक्षेपण $\delta_v - \delta_r = (\mu_v - \mu_r)A$

तथा फ्लिंट प्रिज्म द्वारा $\delta'_v - \delta'_r = (\mu'_v - \mu'_r)A$

कुल कोणीय विक्षेपण $(\mu_v - \mu_r)A - (\mu'_v - \mu'_r)A = (1.7 - 1.5) \times 5° - (2.2 - 1.8) \times 3° = -0.2°$.

कोणीय विक्षेपण का परिमाण 0.2° है।

## 11. स्पेक्ट्रम : (यह केवल आपके ज्ञान के लिए है JEE में उपयोगी नहीं है)

अपवर्तन के बाद किसी प्रिज़्म से निर्गत पुंज द्वारा उत्पन्न क्रमिक प्रतिरूप, स्पेक्ट्रम कहलाता है।

### 11.1 स्पेक्ट्रमों के प्रकार

**(a) रैखिक स्पेक्ट्रम :** परमाणवीय अवस्था में स्त्रोत के कारण

**(b) बैण्ड़ स्पेक्ट्रम :** आण्विक अवस्था में स्त्रोत के कारण

**(c) सतत् स्पेक्ट्रम :** श्वेत गर्म ठोस के कारण

## 11.2 उत्सर्जन स्पेक्ट्रम में :

स्त्रोत से उत्सर्जित चमकीले रंग या रेखायें दिखायी देती हैं। दिये गये प्रकाश स्त्रोत द्वारा उत्सर्जित स्पेक्ट्रम को उत्सर्जित स्पेक्ट्रम कहते हैं। यह उत्सर्जित प्रकाश का तरंगदैर्ध्य के आधार पर वितरण है। उत्सर्जन स्पेक्ट्रम, ठोसों, द्रवों व गैसों द्वारा दिया जाता है जिन्हे या तो सीधे लपटो के रूप में जलाया जाता है या एक विसर्जन नलिका में कम दाब पर जलाया जाता है।

## 11.3 अवशोषण स्पेक्ट्रम में :

काली रेखायें अवशोषित आवृत्तियों को दर्शाती हैं।

जब एक गर्म स्त्रोत से उत्सर्जित प्रकाश पुंज को किसी पदार्थ (कम ताप पर) से होकर गुजारा जाता है तो प्रकाश का कुछ भाग पारगमित हो जाता है किन्तु शेष भाग अवशोषित हो जाता है। स्पेक्ट्रोमीटर की सहायता से हम प्रत्येक तरंगदैर्ध्य के लिए अवशोषित प्रकाश का भाग जान सकते हैं। किसी पदार्थ द्वारा प्रकाश की अवशोषित तरंगदैर्ध्य के वितरण को अवशोषण स्पेक्ट्रम कहते हैं। प्रत्येक पदार्थ का अपना एक अभिलाक्षणिक अवशोषण स्पेक्ट्रम होता है।

## 11.4 स्पेक्ट्रोमीटर

इसमें एक कोलीमेटर प्रकाश पुंज को एकत्रित करने का उपकरण , प्रिज़्म व टेलिस्कोप होता है। इसका उपयोग स्पेक्ट्रम देखने व विचलन मापने में किया जाता है।

# 12. गोलीय पृष्ठों पर अपवर्तन :

दो माध्यमों को पृथक करने वाले गोलीय पृष्ठ पर आपतित उपक्षीय किरणों के लिये

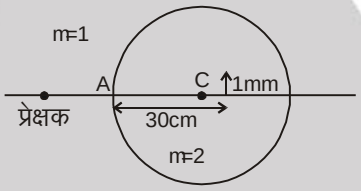
$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad ......(A)$$

यहाँ प्रकाश $n_1$ अपवर्तनांक वाले माध्यम से $n_2$ अपवर्तनांक वाले माध्यम में गमन करता है।

गोलीय सतह से अपवर्तन के कारण (मुख्य अक्ष के लम्बवत् आकार का) अनुप्रस्थ आवर्धन $m = \frac{v-R}{u-R} = \left(\frac{v/n_2}{u/n_1}\right)$

## Solved Example

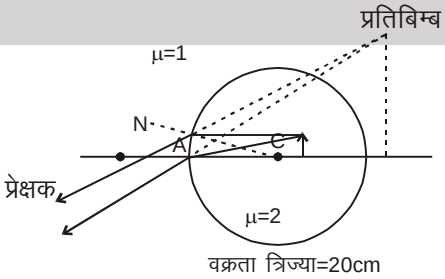
**Example 43.** चित्र में दर्शायी गयी स्थिति के लिए प्रतिबिम्ब की स्थिति, आकार व प्रकृति ज्ञात कीजिए। किरण चित्र बनाइये।






**Solution :** बिन्दु A के निकट अपवर्तन के लिए u = – 30 ; R = – 20; $n_1$ = 2 ; $n_2$ = 1.

अपवर्तन सूत्र लगाने पर






$$\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\frac{1}{v} - \frac{2}{-30} = \frac{1-2}{-20} \qquad \Rightarrow \quad v = -60 \text{ cm}$$

$$m = \frac{h_2}{h_1} = \frac{n_1 v}{n_2 u} = \frac{2(-60)}{1(-30)} = 4 \qquad \therefore \quad h_2 = 4 \text{ mm.}$$

### विशेष स्थिति :

**समतल पृष्ठों पर अपवर्तन**

सूत्र $\frac{n_2}{v}-\frac{n_1}{u}=\frac{n_2-n_1}{R}$ में $R=\infty$ रखने पर $v=\frac{n_2u}{n_1}$

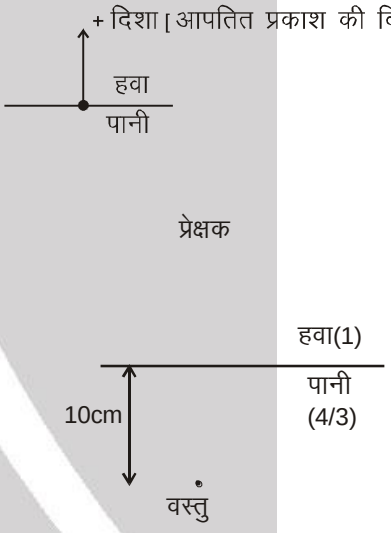
v व u के समान चिन्ह दर्शाते हैं कि वस्तु व प्रतिबिम्ब सदैव अन्रापृष्ठ के एक ही ओर होते हैं। यदि हम उपरोक्त सूत्र को निम्न प्रकार लिखें $v=\frac{u}{n_{\text{आपेक्षिक}}}$,

तो यह आभासी गहराई व वास्तविक गहराई के बीच सम्बन्ध बताता है।

## Solved Example

**Example 44.** गोलीय पृष्ठ का सूत्र काम में लेते हुए (या अन्यथा) पानी की सतह से 10 सेमी० नीचे स्थित एक वस्तु की आभासी गहराई ज्ञात कीजिए यदि हवा से अभिलम्बवत् देखा जाता है।

**Solution :** गोलीय पृष्ठ पर अपवर्तन के सूत्र में $R=\infty$ रखने पर




$v=\frac{un_2}{n_1}$

$u=-10$ cm

$n_1=\frac{4}{3}$

$n_2=1 \quad \Rightarrow \quad v=-\frac{10\times1}{4/3}=-7.5$ cm

–ve चित्र दर्शाता है कि प्रतिबिम्ब पानी में बनता है।

**Alter :** $d_{\text{आभासी}}=\frac{d_{\text{वास्तविक}}}{\mu_{\text{आपेक्षिक}}}$

$=\frac{10}{4/3}=\frac{30}{4}=7.5$ cm.

## 13. पतले लैंस :

एक पतला लैंस उत्तल लैंस कहलाता है यदि यह बीच में से मोटा तथा यह अवतल लैंस कहलाता है यदि यह किनारों से मोटा होता है

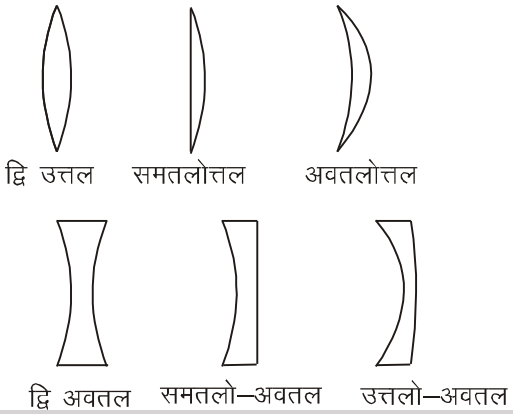
एक उत्तल लैंस का एक पृष्ठ सदैव उत्तल होता है। दूसरे पृष्ठ के आधार पर उत्तल लैंस को निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जाता है।

(a) यदि दूसरा पृष्ठ भी उत्तल हो तो द्वि–उत्तल लैंस

(b) यदि दूसरा पृष्ठ समतल हो तो समतलोत्तल लैंस तथा

(c) यदि दूसरा पृष्ठ अवतल हो तो अवतलोत्तल लैंस।

इसी प्रकार अवतल लैंस को द्वि–अवतल लैंस, समतलो–अवतल लैंस व उत्तलों–अवतल लैंस में वर्गीकृत किया जा सकता है।




दोनों ओर समान माध्यम रखने वाले एक गोलीय पतले लैंस के लिये :

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=(n_{\text{आपेक्षिक}}-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \quad \text{.....(a),}$$

जहाँ $n_{\text{आपेक्षिक}}=\frac{n_{\text{लैन्स}}}{n_{\text{माध्यम}}}$ तथा $R_1$ व $R_2$ क्रमशः पहले व दूसरे पृष्ठों के वक्रता केन्द्रों के x-निर्देशांक है।

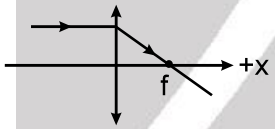
$$\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \quad \rightarrow \text{लैन्स सूत्र} \quad \text{.....(b)}$$

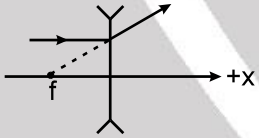
लैंस के दो फोकस होते है :

यदि $u=\infty$, तब $\frac{1}{v}-\frac{1}{\infty}=\frac{1}{f} \Rightarrow v=f$

$\Rightarrow$ यदि आपतित किरणें, मुख्य अक्ष के समान्तर हों तो अपवर्तित किरणें मुख्य अक्ष को 'f' पर काटेंगी। इसे द्वितीय फोकस कहते है।

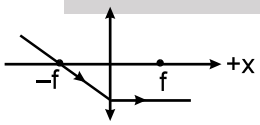
**अभिसारी लैंस के लिये यह धनात्मक तथा अपसारी लैंस के लिये ऋणात्मक होता है।**

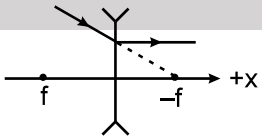



यदि $v=\infty$ तब $\frac{1}{\infty}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f} \Rightarrow u=-f$

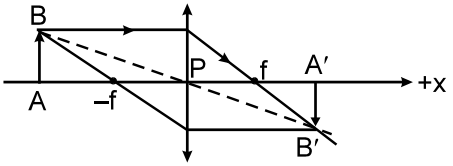
$\Rightarrow$ यदि आपतित किरणें मुख्य अक्ष को $-f$ पर काटती है तब अपवर्तित किरणें मुख्य अक्ष के समान्तर हो जाती हैं। इसे प्रथम फोकस कहते हैं। अभिसारी लैंस के लिये यह ऋणात्मक ($\because$ f धनात्मक है) तथा अपसारी लैंस के लिये यह धनात्मक ($\because$ f ऋणात्मक है) होता है।

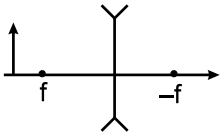



$-f$ व $+f$ का उपयोग किरण चित्रों को बनाने में होता है।

ध्यान रहे कि बिन्दु B, इसका प्रतिबिम्ब B′ व लैंस का ध्रुव P संरेखिक है। इसका कारण मध्य में लैंस की प्रकृति समान्तर पट्टिका के समान होना है। यह किरण सीधी जाती है। (इसे याद रखें)




$\frac{1}{f}=(n_{\text{आपेक्षिक}}-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ सम्बन्ध से स्पष्ट है कि द्वितीय फोकस दूरी दो कारकों पर निर्भर करती हैं।

**(A)** $\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ है –

**(i) सभी प्रकार के उत्तल लैंसो के लिये धनात्मक**

**(ii) सभी प्रकार के अवतल लैंसो के लिये ऋणात्मक**

**(B)** $(n_{\text{आपेक्षिक}} - 1)$ है –

**(i) धनात्मक जबकि लैंस के माध्यम की अपेक्षा बाह्य माध्यम विरल है।**

**(ii) ऋणात्मक जबकि लैंस के माध्यम की अपेक्षा बाह्य माध्यम सघन है।**

**(C)** अतः एक लैंस अभिसारी होता है यदि f धनात्मक है जो कि होता है जबकि **(A)** व **(B)** दोनों कारक समान चिन्ह के होते हैं।

**(D)** तथा एक लैंस अपसारी होता है यदि f ऋणात्मक है जो कि होता है जबकि **(A)** व **(B)** दोनों विपरीत चिन्ह के होते हैं।

**(E)** लैंस की फोकस दूरी लैंस के माध्यम व परिवेश पर निर्भर करती है।

**(F)** यह आपतित किरण की तरंगदैर्ध्य पर भी निर्भर करता है। लैंस द्वारा विभिन्न तरंगदैर्ध्य की प्रकाश किरणों को एक बिन्दु पर केन्द्रित करने की असमर्थता को वर्ण विपथन कहते हैं।

## Solved Example

**Example 45.** एक विरल माध्यम में स्थित अवतल लैन्स का व्यवहार ज्ञात कीजिए।

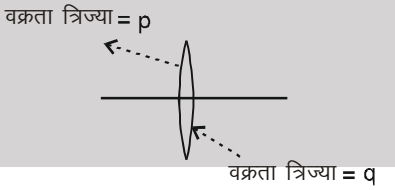
**Solution :** कारक (A) ऋणात्मक है क्योंकि लैन्स अवतल है।

कारक (B) धनात्मक है क्योंकि लैन्स विरल माध्यम में है।

इस प्रकार लैन्स की फोकस दूरी जो इन कारकों के गुणन पर निर्भर करती है, ऋणात्मक है व इसी कारण लैन्स अपसारी लैन्स की भांति व्यवहार करता है।

**Example 46.** दिखाइयें की कारक $\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$ (तथा इसलिए फोकस दूरी) इस पर निर्भर नहीं करता है कि लैंस के किस पृष्ठ पर प्रकाश पहले टकराता है।

**Solution :** वक्रता त्रिज्याओं p और q का उत्तल लैन्स दिखाया गया है।




**प्रकरण 1:** माना प्रकाश बांयी ओर से आपतित होता है तथा p वक्रता त्रिज्या वाले पृष्ठ पर पहले टकराता है।

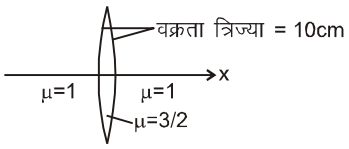
तब $R_1 = +p$ ; $R_2 = -q$ तथा $\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{-q}\right)$

**प्रकरण 2 :** माना प्रकाश दांयी ओर से आपतित होता है तथा q वक्रता त्रिज्या वाले पृष्ठ पर पहले टकराता है।

तब $R_1 = +q$ ; $R_2 = -p$ तथा $\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{-p}\right)$

इस प्रकार हमने उभयोत्तल लैन्स के लिए परिणाम दर्शाया है। यह प्रत्येक लैन्स के लिए सही है।

**Example 47.** चित्र में दिखाये गये लैंस की फोकस दूरी बताओ।



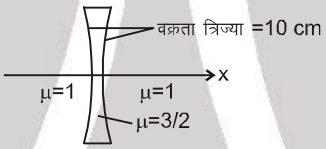
अभिसारी लैन्स

**Solution :** $\because \quad \frac{1}{f} = (n_{\text{आपेक्षिक}} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$$\frac{1}{f} = (3/2 - 1)\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{(-10)}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} \; ; \quad f = +10 \text{ cm.}$$

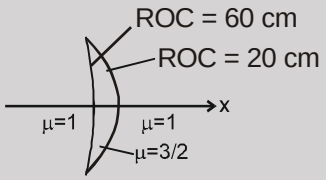
**Example 48.** चित्र में दर्शाये गये लैन्स की फोकस दूरी ज्ञात कीजिए।




**Solution :** $\frac{1}{f} = (n_{\text{आपेक्षिक}} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{-10} - \frac{1}{10}\right)$

$f = -10$ cm

**Example 49.** चित्र में दर्शाये लैंस की फोकस दूरी ज्ञात करिये
(a) यदि आपतित किरण बायीं तरफ से आती है
(b) यदि आपतित किरण दायीं तरफ से आती है




**Solution :** (a) $\frac{1}{f} = (n_{\text{rel}} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{-60} - \frac{1}{-20}\right)$; $f = 60$ cm

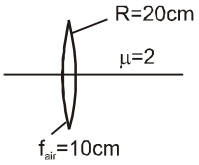
(b) $\frac{1}{f} = (n_{\text{rel}} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{60}\right)$ ; $f = 60$ cm

**Example 50.** समान्तर वक्र सीमाओं वाले पतले लैंस जिसकी वक्रता त्रिज्या समान है के मुख्य अक्ष पर एक बिन्दु आवेश रखा हुआ है। बने प्रतिबिम्ब की स्थिति की विवेचना करो।

**Solution :** $\frac{1}{f} = (n_{\text{rel}} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 0 \qquad [\because R_1 = R_2]$

$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = 0$ या $v = u$ अर्थात् किरणें बिना मुड़े गुजर जाती है।

**Example 51.** पतले लैंस की हवा में फोकस दूरी 10 cm है। अब लैंस के एक तरफ का माध्यम, अपवर्तनांक $\mu = 2$ वाले माध्यम से बदल दिया जाता है। माध्यम में सम्पर्क वाले पृष्ठ की वक्रता त्रिज्या 20 cm है। लैंस की नई फोकस दूरी बताओ।






**Solution :** माना I पृष्ठ की वक्रता त्रिज्या $R_1$ और लैंस का अपवर्तनांक $\mu$ है और लैंस पर समान्तर किरणें आपतित है। प्रथम पृष्ठ पर अपवर्तन सूत्र लगाने पर

$$\frac{\mu}{V_1} - \frac{1}{\infty} = \frac{\mu - 1}{R_1} \qquad .............(1)$$

पृष्ठ II पर $\quad \frac{2}{V} - \frac{\mu}{V_1} = \frac{2-\mu}{-20} \qquad .............(2)$

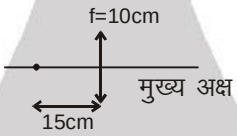
(1) व (2) को जोड़ने पर

$$\frac{\mu}{V_1} - \frac{1}{\infty} + \frac{2}{V} - \frac{\mu}{V_1} = \frac{\mu - 1}{R_1} + \frac{2-\mu}{-20}$$

$$= (\mu - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{-20}\right) - \frac{\mu - 1}{20} - \frac{2-\mu}{20} = \frac{1}{f} \text{ (हवा में)} + \frac{1}{20} - \frac{2}{20}$$

$\Rightarrow$ v = 40 cm $\Rightarrow$ f = 40 cm

**Example 52.** चित्र में एक बिन्दुवत् वस्तु और अभिसारी लैंस दिखाये गये हैं। अन्तिम प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात करो।






**Solution :**

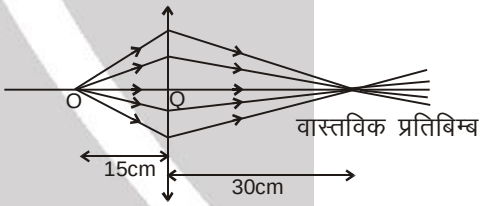
$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

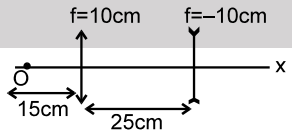
$$\frac{1}{v} - \frac{1}{-15} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{1}{30} \qquad v = +30 \text{ cm}$$




**Example 53.** चित्र के अनुसार अन्तिम प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात करो।








**Solution :** अभिसारी लैन्स के लिए u = –15 cm, f = 10 cm

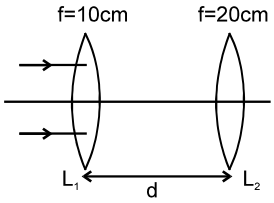
$$v = \frac{fu}{f+u} = 30 \text{ cm}$$

अपसारी लैन्स के लिए u = 5 cm

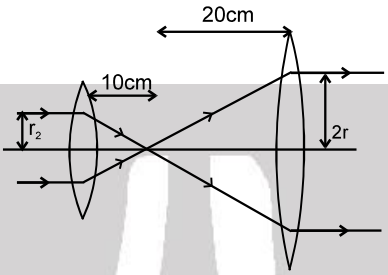
f = –10 cm

$$\therefore \quad v = \frac{fu}{f+u} = 10 \text{ cm}$$

**Example 54.** चित्र में दो अभिसारी लैंस दिखाए गये है। आपतित किरणें मुख्य अक्ष के समान्तर है। d के किस मान के लिए अन्तिम किरणें भी समान्तर होगी।



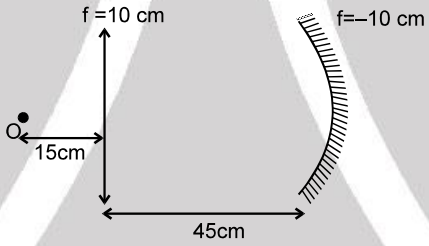

**Solution :** अन्तिम किरणें समानान्तर होनी चाहिए। इसके लिए $L_1$ का फोकस II, $L_2$ के फोकस I पर सम्पाती होना चाहिए।




d = 10 + 20 = 30 cm

यहाँ किरण पुंज का व्यास चौड़ा हो जाता है।

**Example 55.** चित्र देखिये और अन्तिम प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात करिये।




**Solution :** लैन्स के लिए $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$

$\frac{1}{v} - \frac{1}{-15} = \frac{1}{10} \Rightarrow v = +30$ cm

अतः यह दर्पण के लिए वस्तु है।

u = – 15 cm ; $\frac{1}{v} + \frac{1}{-15} = \frac{1}{-10} \Rightarrow v = -30$ cm

अब दूसरी बार यह पुनः लैन्स से गुजरती है।

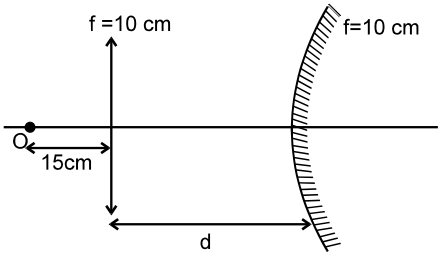
u = – 15 cm

v = ? ; f = 10 cm

$\frac{1}{v} - \frac{1}{-15} = \frac{1}{10} \Rightarrow v = +30$

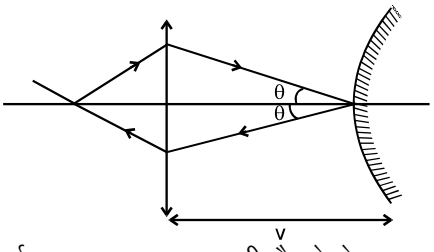
अतः अन्तिम प्रतिबिम्ब लैन्स के बांयी ओर 30 सेमी० की दूरी पर बनता है।

**Example 56.** d के किस मान के लिए वस्तु का प्रतिबिम्ब वस्तु पर ही बनेगा।

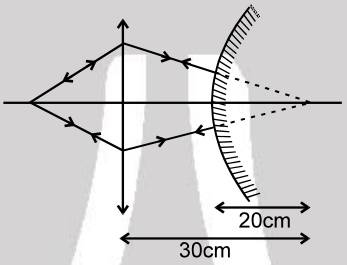


**Solution :** लैंस के लिए $\frac{1}{v}-\frac{1}{-15}=\frac{1}{10}$ ; $v = +30$ cm

**प्रकरण 1 :** यदि d = 30 तो दर्पण के लिए वस्तु ध्रुव पर होगी और इसका प्रतिबिम्ब उसी पर बनेगा।




**प्रकरण 2 :** यदि किरणें दर्पण पर लम्बवत् टकराती है तो वे पुनः अपने पथ पर लौटेगी तथा प्रतिबिम्ब वस्तु पर बनेगा।




$\therefore$ d = 30 – 20 = 10 cm

## 13.2 अनुप्रस्थ आवर्धन (m)

एक पतले लैंस का अनुप्रस्थ आवर्धन (m) (मुख्य अक्ष के लम्बवत्)

$$m = \frac{v}{u}$$

यदि लैंस मोटा है या/और दोनों ओर का माध्यम अलग–अलग है तब हमें अपवर्तन के लिये दिया गया सूत्र अलग–अलग पृष्ठों के लिये एक के बाद एक लगाना पड़ता है।

## Solved Example

**Example 57.** 20 cm फोकस दूरी वाले एक अभिसारी लैन्स की मुख्य अक्ष के लम्बवत् 2 cm आकार की एक विस्तरित वास्तविक वस्तु रखी हुई है। लैन्स व वस्तु के बीच दूरी 30 cm है।

(i) लैन्स द्वारा उत्पन्न पार्श्व आवर्धन ज्ञात कीजिए।

(ii) प्रतिबिम्ब की ऊचाँई ज्ञात कीजिए।

(iii) यदि वस्तु को मुख्य अक्ष के अनुदिश लैन्स के 1 mm निकट लाया जाये तो पार्श्व आवर्धन में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

**Solution :** $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$ के उपयोग से

और $m = \frac{v}{u}$

$$m = \frac{f}{f+u} \quad .....(A)$$

$\therefore$ $m = \frac{+20}{+20+(-30)} = \frac{+20}{-10} = -2$ (–) चिन्ह दर्शाता है कि प्रतिबिम्ब उल्टा है।

(ii) $\frac{h_2}{h_1} = m$ ; $h_2 = mh_1 = (-2)(2) = -4$ cm

(iii) (A) का अवकलन करने पर $dm = \frac{-f}{(f+u)^2}\, du = \frac{-(20)}{(-10)^2}\,(0.1) = \frac{-2}{100} = -.02$

ध्यान रखें कि अवकलन विधि तभी लागू होती है जबकि परिवर्तन छोटे होते हैं।

**वैकल्पिक**

u (वस्तु को विस्थापित करने के बाद) = – (30 + 0.1) = – 29.9 cm

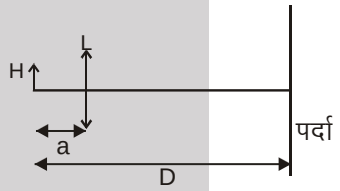
$m = \frac{f}{f+u}$ सूत्र से $\Rightarrow$ $m = \frac{20}{20+(-29.9)} = -2.02$

$\therefore$ 'm' मे परिवर्तन = – 0.02.

चूंकि इस विधि में अवकलन का उपयोग नहीं हुआ है इसलिए यह किसी भी प्रकार के परिवर्तन के लिए काम में ली जा सकती है।

## 13.3 एक अभिसारी लैंस की फोकस दूरी ज्ञात करने की विस्थापन विधी :

लघुतम ऊँचाई H की एक वस्तु व इससे D दूरी पर एक पर्दा चित्रानुसार रखें। एक अभिसारी लैंस को वस्तु से पर्दे की ओर खिसकायें। माना पर्दे पर एक तीक्ष्ण प्रतिबिम्ब बनता है जबकि वस्तु व लैंस के बीच की दूरी 'a' है। लैंस सूत्र से




$$\frac{1}{D-a} - \frac{1}{-a} = \frac{1}{f}$$

or $a^2 - D\,a + fD = 0$ ...(A)

यह द्विघात् समीकरण है, तथा a के दो मान संभव हैं। माना $a_1$ और $a_2$ अतः $a_1$ तथा $a_2$ समीकरण के दो मूल होंगे। इसलिए द्विघात् समीकरण के मूलों के गुण से

$\therefore$ $a_1 + a_2 = D$

$a_1 a_2 = f\,D$

तथा $(a_1 - a_2) = \sqrt{(a_1+a_2)^2 - 4a_1a_2} = \sqrt{D^2 - 4fD} = d$ (माना).

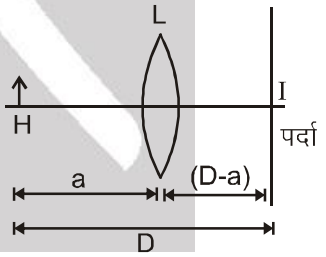
'd' का अर्थ लैंस की दो स्थितियों के बीच की दूरी से है।

### D व d के पद में लैंस की फोकस दूरी

अतः, $a_1 - a_2 = \sqrt{(a_1+a_2)^2 - 4a_1a_2}$

$\sqrt{D^2 - 4fd} = d \Rightarrow$ $\boxed{f = \frac{D^2-d^2}{4D}}$

d = 0 के लिए दो स्थितियाँ संपाती होगीं।




$f = \frac{D^2}{4D}$

$\therefore$ $\boxed{D = 4f}$

$a^2 - Da + f\,D = 0$ समीकरण के मूल काल्पनिक होंगे, यदि

$b^2 - 4ac < 0.$ $= D^2 - 4fD < 0$

$= D(D - 4f) < 0.$ = $\boxed{D - 4f < 0}$

समीकरण $a^2 - Da + f\,D = 0$ में a के वास्तविक मान के लिए

$b^2 - 4ac \geq 0.$ = $D^2 - 4f\,D \geq 0.$

इसलिए, $D \geq 4f \Rightarrow D_{min} = 4f$

### विस्थापन विधि में पार्श्व आवर्धन :

यदि दो स्थितियों में आवर्धन $m_1$ एवं $m_2$ हैं (विस्थापन विधि में)

$$m_1 = \frac{v_1}{u_1} = \frac{(D-a_1)}{-a_1} \Rightarrow m_2 = \frac{v_2}{u_2} = \frac{D-a_2}{-a_2} = \frac{a_1}{-(D-a_1)}$$

अतः $m_1 m_2 = \frac{(D-a_1)}{-a_1} \times \frac{a_1}{-(D-a_1)} = 1.$

यदि दोनो स्थितियो में प्रतिबिम्ब की लम्बाई $h_1$ व $h_2$ हैं,

तब $m_1 = -\frac{h_1}{H} \Rightarrow m_2 = -\frac{h_2}{H} \Rightarrow m_1 m_2 = 1$

$\therefore \frac{h_1 h_2}{H^2} = 1 \Rightarrow h_1 h_2 = H^2 \Rightarrow H = \sqrt{h_1 h_2}$

## 14. लैंसो का संयोजन :

पतले लैंसों के संयोजन की तुल्य फोकस दूरी निम्न समीकरण द्वारा दी जाती है।

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}$$

जहाँ $f_1, f_2, f_3$ प्रत्येक लैंसों की फोकस दूरियाँ हैं।

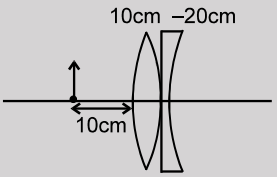
यदि दो लैंसों के बीच की दूरी d है तथा आपतित किरणें उभयनिष्ठ मुख्य अक्ष के समान्तर हैं तब संयोजन निम्न सम्बन्ध द्वारा दी गयी फोकस दूरी के एक लैंस की भांति कार्य करता है।

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3 f_2}$$

तथा तुल्य लैंस की स्थिति दूसरे लैंस के सापेक्ष $\frac{-dF}{f_1}$ है।

## Solved Example

**Example 58.** चित्र में दर्शाये गये लैंसो के संयोजन द्वारा उत्पन्न पार्श्व आवर्धन ज्ञात कीजिये।



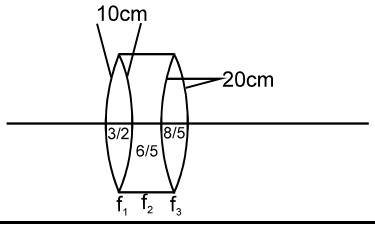

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$$

$f = +20$

$\therefore \frac{1}{v} - \frac{1}{-10} = \frac{1}{20} \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{20} - \frac{1}{10} = \frac{-1}{20} = -20 \text{ cm}$

$\therefore m = \frac{-20}{-10} = 2$

**Example 59.** निकाय की तुल्य फोकस दूरी ज्ञात कीजिये।



**Solution :**

$$\frac{1}{f_1}=\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{f_2}=\left(\frac{6}{5}-1\right)\left(\frac{-1}{10}-\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{5}\times\left(\frac{-30}{10\times20}\right)=\frac{-3}{100}$$

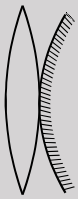
$$\frac{1}{f_3}=\left(\frac{8}{5}-1\right)\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)=\frac{3}{50}$$

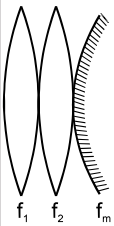
$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}=\frac{1}{10}+\frac{-3}{100}+\frac{3}{50} \qquad f=\frac{100}{13}$$

## 15. दर्पण व लैंस का संयोजन :

लैंस व दर्पण का संयोजन 'f' फोकस दूरी वाले एक दर्पण की भांति व्यहवार करता है।

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F_m}-\frac{2}{F_\ell}$$





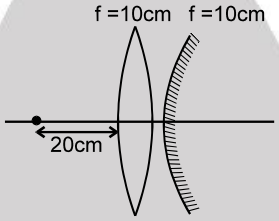

यदि लैंस एक से अधिक हो तो $\frac{1}{f}=\frac{1}{F_m}-2\left(\sum\frac{1}{f_\ell}\right)$

दिये गये चित्र मे लिये 'f' दिया जाता है

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F_m}-2\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}\right)$$

### Solved Example

**Example 60.** अन्तिम प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात कीजिये (चित्र में दर्शाये गये स्थान की चौड़ाई नगण्य है।)




**Solution :**

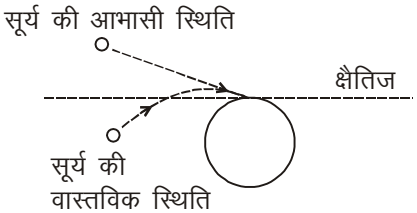
$$\frac{1}{f_{eq}}=\frac{1}{10}-\frac{2}{10}=\frac{-1}{10}$$

$$f_{eq}=-10\text{ cm}$$

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{-20}=\frac{1}{-10} \Rightarrow v=-20\text{ cm}$$ अतः प्रतिबिम्ब, वस्तु पर ही बनेगा।

### प्रकाश के बारे में कुछ रोचक तथ्य :

**(1) वास्तविक उदय से पहले सूर्योदय होना तथा वास्तविक अस्त से पहले सूर्य अस्त होना :**




जैसे–जैसे ऊँचाई बढ़ती जाती है। वायुमण्डल कम घना होता जाता है। इसे इस प्रकार भी जाना जाता है कि घनत्व घटने के साथ–साथ अपवर्तनांक कम होता जाता है। अतः ऊँचाई के साथ अपवर्तनांक कम होता जाता है। इसके कारण प्रकाश की किरणें पृथ्वी के वायुमण्डल में प्रवेश के साथ कुछ मुड़ जाती है।

**(2) सूर्य का उदय व अस्त के समय अण्डाकार दिखाई देना :**

प्रकाश की किरणें सूर्य की निचली सतह जहाँ वायु की मोटाई ऊपरी सतह की अपेक्षा ज्यादा होती है, से अधिक विचलित होती है। जबकि ऊपरी सतह से कम इसलिए पहले वाली स्थिति में बाद वाली स्थिति की अपेक्षा अपवर्तन ज्यादा होता है। इसलिए ऊर्ध्वाधर व्यास क्षैतिज की अपेक्षा छोटा दिखाई देता है जिसमें परिवर्तन नहीं होता है।

**(3) तारों का टिमटिमाना जबकि ग्रहों का नहीं :**

वायुमण्डल का अपवर्तनांक किन्हीं कारणों से कुछ मात्रा में बदलता रहता है। जिससे प्रकाश का विचलन भी बदलता है तथा तारों की आभासी स्थिति बदलती रहती है। जो तारों के टिमटिमाने का कारण है।

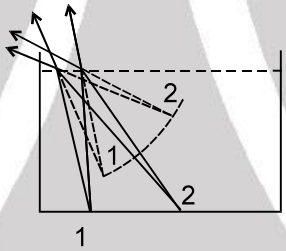
**(4) कांच का पारदर्शित होना, जबकि इसके मिश्रण का श्वेत होना :**

प्रकाश कांच के असंख्य कणों की सतह से परावर्तित होता है। इसलिए कांच का मिश्रण श्वेत दिखाई देता है। कांच प्रकाश का अधिकतम भाग पारगमित कर देता है। जबकि कुछ भाग परावर्तित होता है। इसलिए कांच पारदर्शित दिखाई देता है।

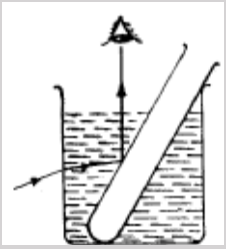
**(5) ग्रीस अथवा तैलीय कागज का पारदर्शित होना तथा साधारण कागज का श्वेत होना :**

साधारण कागज की खुरदरी सतह होने के कारण प्रकाश परावर्तित हो जाता है जिससे कागज श्वेत दिखाई देता है, जबकि ग्रीस तथा तैलीय कागज में प्रकाश का बहुत कम परावर्तन होता है। इसमें अधिकतम प्रकाश पारगमित हो जाता है। इसलिए यह पारदर्शित दिखाई देता है।

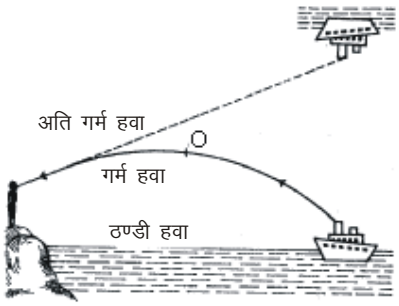
**(6) एक विस्तारित पानी के टेंक का दूर सिरे तक छिछला दिखाई देना :** यह कुल आंतरिक परावर्तन के कारण होता है।

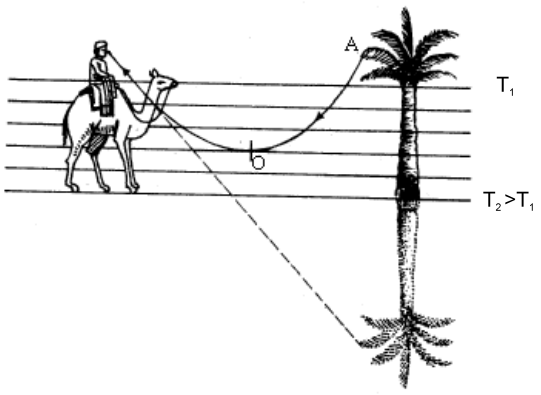



**(7) परखनली** या **धुंए जैसी गेंद** को **पानी में रखने पर** ऊपर से देखने पर **चांदी जैसी सफेद दिखाई देना :** यह कुल आंतरिक परावर्तन के कारण होता है।



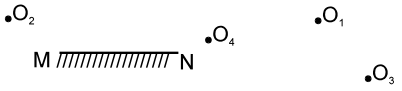
**(8) ठण्डे प्रदेशों में जहाज का हवा में उल्टे लटके हुए दिखाई देना, जबकि रेगिस्तान में पेड़ों का उल्टे जमीन के अन्दर दिखाई देना :** यह कुल आंतरिक परावर्तन के कारण होता है।



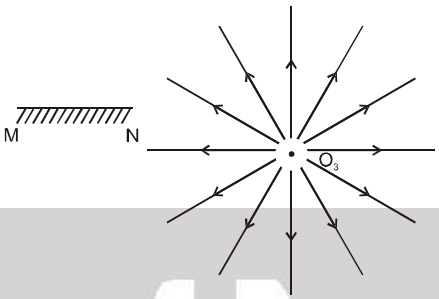



## Solved Miscellaneous Problems

**Problem 1.** नीचे दिये गये चित्र को देखिये। चित्र में दर्शायी कौन/कौनसी वस्तुओं का दर्पण में प्रतिबिम्ब नही बनेगा –

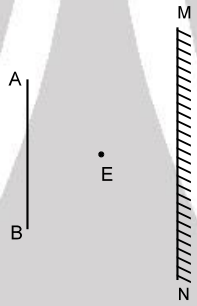



**Solution :**

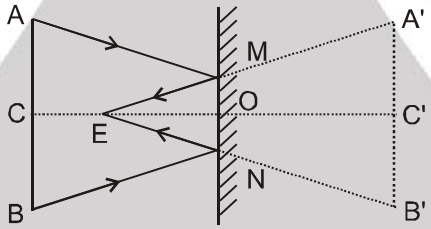



$O_3$ से कोई भी आपतित किरण परावर्तक सतह पर आपतित नहीं होती है, इसलिए प्रतिबिंब नहीं बनेगा।

**Problem 2.** दर्शाये अनुसार एक वस्तु AB तथा एक समतल दर्पण MN वस्तु के समान्तर रखा है। यदि प्रेक्षक की आँख E पर है तो वस्तु का प्रतिबिम्ब देखने के लिये दर्पण की आवश्यक लम्बाई बताइये।




**Solution :** आवश्यक दर्पण की लम्बाई = MN.




$\Delta MNE$ & $\Delta A'B'E$ समान है

$$\frac{MN}{OE} = \frac{A'B'}{C'E} \quad \Rightarrow \quad MN = \frac{A'B'}{2} = \frac{AB}{2}.$$

**Problem 3.** एक वस्तु समतल दर्पण के सामने स्थिर है जो 10 m/s से वस्तु से दूर जा रहा है। प्रतिबिम्ब का वेग ज्ञात किजिये

**Solution :**

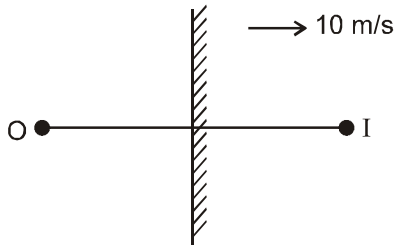
$$\vec{V}_{IM} = -\vec{V}_{OM}$$

$$\vec{V}_{I,G} - \vec{V}_{M,G} = -\vec{V}_{O,G} + \vec{V}_{M,G}$$

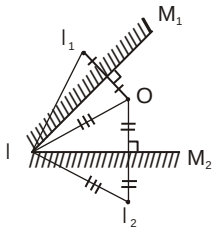
$$\Rightarrow \quad \vec{V}_{M,G} = \frac{\vec{V}_{I,G} + \vec{V}_{O,G}}{2} \quad (\because \vec{V}_{O,G} = 0)$$

$$\frac{\vec{V}_{I,G}}{2} = 10\,\hat{i}\ \text{m/s}$$

$$\vec{V}_{I,G} = 20\,\hat{i}\ \text{m/s}$$



**Problem 4.** चित्र में दो नत समतल दर्पण $M_1$ और $M_2$ तथा एक वस्तु O दर्शायी गयी है इसका दर्पण $M_1$ और $M_2$ में बना प्रतिबिम्ब क्रमशः $I_1$ और $I_2$ है। दर्शाइये कि $I_1$ और $I_2$ तथा O एक वृत्त की परिधि पर होगें जिसका केन्द्र I है [यह परिणाम दर्शाता है कि सभी प्रतिबिम्ब एक ही वृत्त पर बनेगें। यह परिणाम दर्पणों के नत कोण पर निर्भर नही करता है।] I दर्पणों का कटान बिन्दु है।




**Solution :** स्पष्टतः,

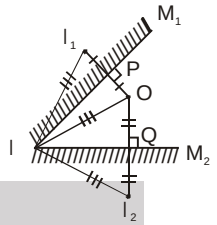
$\Delta IOQ$ व $\Delta I\, I_2Q$ सर्वांगसम है।

$\Delta IOP$ और $\Delta II_1P$ सर्वांगसम है।

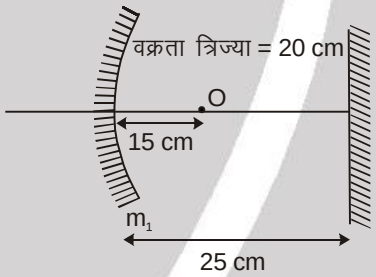
इसलिए, $II_1 = IO$ व $IO = II_2$

इसलिए, $II_1 = IO = II_2$

इसलिए, $I_1$ व $I_2$ और O, I केन्द्र के वृत्त की परिधि पर स्थित होंगे।




**Problem 5.** प्रथम परावर्तन $m_1$ पर लेते हुए तीन उत्तरोत्तर परावर्तनों के बाद बने अन्तिम प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात कीजिए।




**Solution :** **प्रथम परावर्तन :** u = – 15cm

f = –10 cm

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}=\frac{-3+2}{30}=-\frac{1}{30}$$

v = – 30 cm

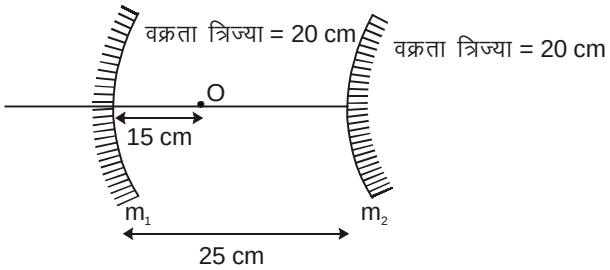
**समतल दर्पण पर द्वितीय परावर्तन :** u = 5 cm

v = – 5 cm

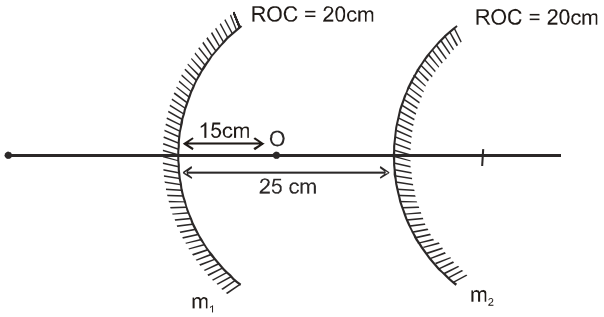
**वक्रीय दर्पण पर तृतीय परावर्तन के लिए :** u = – 20 cm

$$v=\frac{uf}{u-f}=\frac{(-20)\times(-10)}{-20+10}=\frac{200}{-10}=-20\text{ cm}$$

**Problem 6.** प्रथम परावर्तन $m_1$ पर लेते हुए तीन उत्तरोत्तर परावर्तनों के बाद बने अन्तिम प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात कीजिए।



**Solution :**




**दर्पण $m_1$ पर प्रथम परावर्तन के लिए :** u = –15 cm, f = – 10cm

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{f} - \frac{1}{u}$$

$$\therefore\ v = \frac{uf}{u-f} = \frac{(-15)\times(-10)}{(-15)+10} = \frac{150}{-5}\ \text{cm} = -30\ \text{cm}.$$

इस प्रकार प्रतिबिंब $m_2$ के दायीं ओर 5 cm पर बनेगा जो कि $m_2$ पर परावर्तन के लिए बिंब का कार्य करेगा।

**$m_2$ पर द्वितीय परावर्तन के लिए** u = 5 cm, f = 10 cm

$$v = \frac{uf}{u-f} = \frac{5\times10}{5-10} = \frac{50}{-5} = -10\ \text{cm}.$$

**$m_1$ पर पुनः तृतीय परावर्तन के लिए** u = –15 cm f = – 10 cm

$$v = \frac{uf}{u-f} = \frac{-15\times(-10)}{(-15)+10} = -30\ \text{cm}.$$ **Ans.**

**Problem 7.** एक सिक्का, एक अवतल दर्पण से 10 सेमी० की दूरी पर रखा है। दर्पण वास्तविक प्रतिबिम्ब बनाता है जिसका व्यास सिक्के की तुलना में 4 गुना है। प्रतिबिम्ब की दूरी क्या है।

**Solution :** $m = \frac{d_2}{d_1} = -\frac{v}{u}$

u = 10 cm (आभासी बिम्ब) चूंकि वास्तविक प्रतिबिम्ब बन रहा है।

v = – mu = –4 ×10 cm = – 40 cm **Ans.**

**Problem 8.** एक छोटी मूर्ति की ऊचाँई 1 सेमी० है तथा यह एक गोलीय दर्पण के सामने रखी है। मूर्ति का प्रतिबिम्ब उल्टा, 0.5 सेमी० लम्बा तथा दर्पण के सामने 10 सेमी० दूरी पर स्थित है। दर्पण की फोकस दूरी व प्रकृति ज्ञात कीजिए।

**Solution :** $m = \frac{h_2}{h_1} = -\frac{0.5}{1} = -0.5$

v = – 10 cm (वास्तविक प्रतिबिंब)

चूंकि $m = \frac{f-v}{f} - 0.5 = \frac{f+10}{f} \Rightarrow f = \frac{-20}{3}$ cm अतः अवतल दर्पण **Ans.**

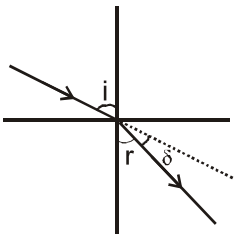
**Problem 9.** निर्वात से किसी माध्यम में अपवर्तित प्रकाश की तंरग में 30° का विचलन (जो कि आपतन कोण का 1/3 भाग है) प्राप्त होता है। माध्यम का अपवर्तनांक ज्ञात करो।

**Solution :** $\delta = i - r$

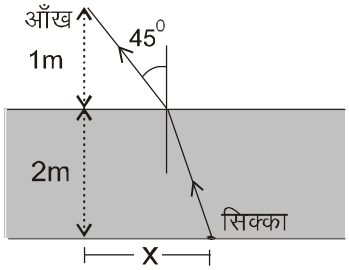
$\Rightarrow \frac{i}{3} = i - r = 30^o. \quad \Rightarrow \quad i = 90^o$

$\Rightarrow 2i = 3r \quad \therefore \quad r = \frac{2i}{3} = 60^o$

So, $\mu = \frac{\sin 90^o}{\sin 60^o} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ **Ans.**



**Problem 10.** एक सिक्का 2m गहराई की झील में पानी की सतह से 1 m मीटर ऊचाँई पर स्थित स्पोट लाईट (समान्तर प्रकाश पुजों का स्त्रोत) से क्षैतिज दूरी X पर स्थित है। यदि झील की गहराई 2m व पानी (द्रव) का आपवर्तनांक $\mu = \sqrt{2}$ हो तो x ज्ञात करो.




**Solution :** $\sqrt{2} = \dfrac{\sin 45^\circ}{\sin r}$

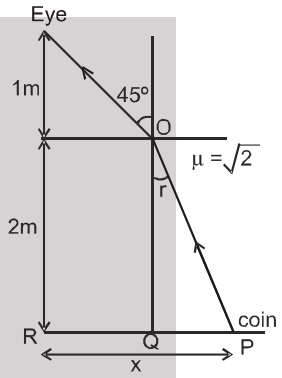
$\Rightarrow \sin r = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad r = 30^\circ$

$x = RQ + QP$

$= 1m + 2\tan 30^\circ\ m$

$= \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ m **Ans.**




**Problem 11.** एक प्रकाश किरण समतल–समान्तर कांच की पट्टिका पर 30° के कोण पर गिरती है और प्रारम्भिक किरण के समान्तर बाहर निकलती है। कांच का अपवर्तनांक 1.5 है। यदि दोंनो समान्तर किरणों के मध्य दूरी 3.82 cm हो तो पट्टिका की मोटाई क्या होगी ? [दिया है : $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = 19.5^\circ$ ; $\cos 19.5^\circ = 0.94$ ; $\sin 10.5^\circ = 0.18$]

**Solution :** प्रयुक्त करने पर $s = \dfrac{d\sin(i-r)}{\cos r}$

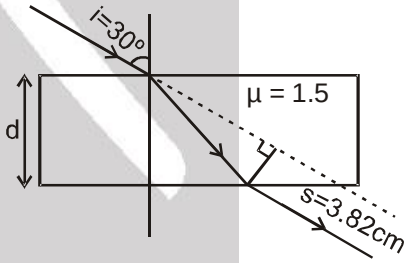
$\Rightarrow \quad d = \dfrac{3.82 \times \cos r}{\sin(30^\circ - r)}$ .....(1)

और, $1.5 = \dfrac{\sin 30^\circ}{\sin r} \quad \Rightarrow \quad \sin r = \dfrac{1}{3}$

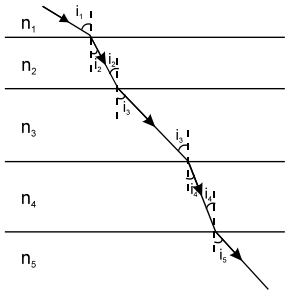
इसलिए, $r = 19.5^\circ$

इसलिए, $d = \dfrac{3.82 \times \cos 19.5^\circ}{\sin(30^\circ - 19.5^\circ)} = \dfrac{3.82 \times 0.94}{\sin 10.5^\circ}$

$= \dfrac{3.82 \times 0.94}{0.18} = 19.948$ cm $\approx 0.2$ cm



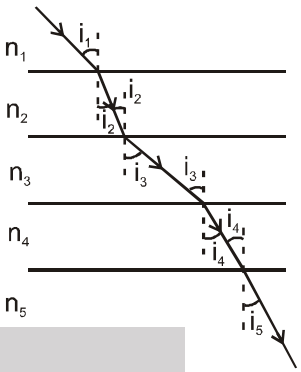

**Problem 12.** प्रकाश चित्रानुसार एक के बाद एक बहुत सारी पट्टिकाओं से गुजरता है




सिद्ध करो $n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2 = n_3\sin i_3 = n_4\sin i_4 =$.....**[इसे याद रखें].** यह भी सिद्ध कीजिए कि यदि $n_1 = n_4$ तब माध्यम $n_1$ व माध्यम $n_4$ में प्रकाश किरणें समानान्तर है।

यह भी सिद्ध करो कि यदि $n_1 = n_4$ हो तो $n_1$ माध्यम में उपस्थित किरण $n_4$ माध्यम में उपस्थित किरण के समान्तर होगी।

**Solution :** ज्ञातव्य है,




$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$\Rightarrow$ $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ ....(i)

इसी प्रकार $n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3$

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 = .....$

$n_1 \sin i_1 = n_4 \sin i_4 \Rightarrow \sin i_1 = \sin i_4$ $(\because n_1 = n_2)$

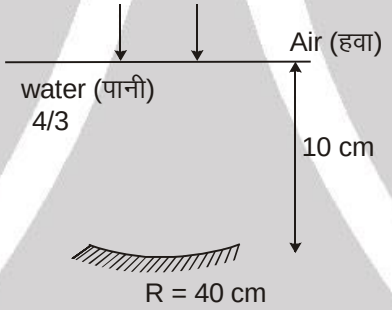
अतः, $i_1 = i_4$

इसलिए माध्यम $n_1$ और $n_4$ में प्रकाश किरण समांतर होगी।

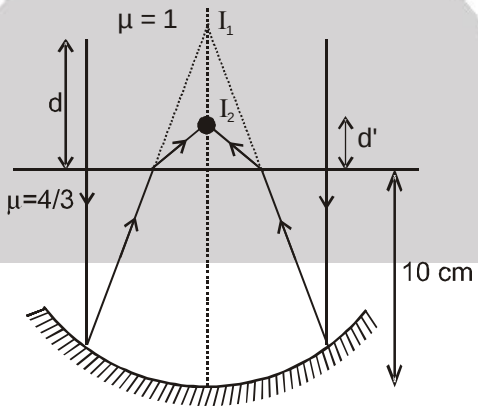
**Problem 13.** एक वस्तु हवा में पानी की तसह के ऊपर 90 cm दूरी पर स्थित है। उसे अभिलम्बवत् पानी से देखा जाता है तो वस्तु की आभासी ऊचाँई ज्ञात करो।

**Solution :** $d' = \frac{d}{n_{rel}} = \frac{d}{n_i / n_r} = \frac{90 \text{ cm}}{\frac{1}{4/3}} = \frac{90 \times 4}{3}$ cm = 120 cm **Ans.**

**Problem 14.** एक अवतल दर्पण पानी के अन्दर स्थित है । इसकी चमकीली सतह ऊपर की तरफ तथा मुख्य अक्ष चित्रानुसार उर्ध्वाधर है। किरणें मुख्य अक्ष के समान्तर अवतल दर्पण पर गिरती हैं तो अन्तिम प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात करो।




**Solution :**



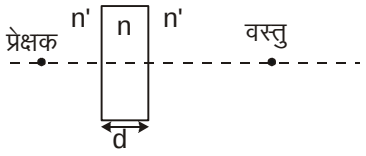

$u = -\infty$, $f = -20$ cm

अतः, $v = -20$ cm

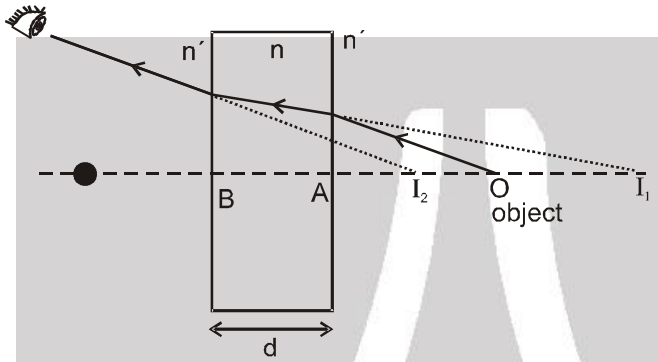
अतः, $d = 20$ cm

$\therefore \quad d' = \frac{d}{\mu_{rel}} = \frac{10 \text{cm}}{4/3} = \frac{30}{4}$ cm = 7.5 cm **Ans.**

**Problem 15.** सिद्ध करो की समान्तर पट्टिका के कारण किसी वस्तु की स्थिति में विस्थापन $d\left(1-\frac{1}{n_{\text{आपेक्षिक}}}\right)$ होता है। यहाँ $n_{\text{आपेक्षिक}} = \frac{n}{n'}$ है।




**Solution :**




प्रथम पृष्ठ पर किरण अपवर्तन से O का प्रतिबिंब $I_1$ पर बनेगा। इस अपवर्तन के लिए वास्तविक गहराई AO = x व आभासी गहराई = $AI_1$ है।

इस प्रकार : $AI_1 = \frac{AO}{n_i/n_r} = \frac{AO}{n'/n} = \frac{n(AO)}{n'}$.

द्वितीय पृष्ठ पर अपवर्तन के लिए बिन्दु $I_1$ बिंब का कार्य करता है। इस अपवर्तन के कारण $I_1$ का प्रतिबिंब $I_2$ पर बनता है। इसलिए,

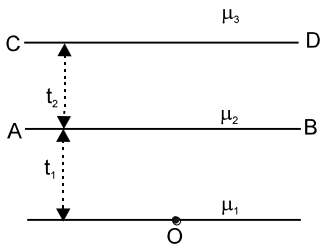
$$BI_2 = \frac{(BI_1)}{(n/n')} = \frac{n'}{n}(BI_1) = n'/n\,(AB + AI_1) = \frac{n'}{n}\left[d + \frac{n}{n'}(AO)\right] = \frac{n'}{n}\,d + AO.$$

कुल प्रतिस्थापन = $OI_2 = BO - BI_2$

$$= d + (AO) - \frac{n'}{n}d - AO = d\left(1 - \frac{n'}{n}\right)$$

$$= d\left(1-\frac{1}{n_{rel}}\right) \text{ जहाँ } n_{rel} = \frac{n}{n'}. \quad \textbf{Ans.}$$

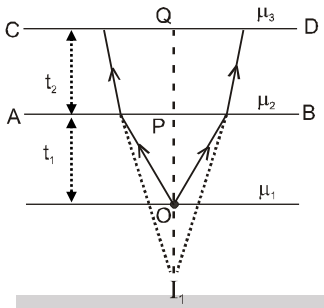
**Problem 16.** AB सतह के नीचे स्थित वस्तु की आभासी गहराई ज्ञात करो ? जब इसको $\mu_2$ अपवर्तनांक वाले माध्यम से देखा जाता है।




**Solution :** $d_{app.} = \frac{t_1}{\mu_1/\mu_2}$

**Problem 17.** उपरोक्त प्रश्न में माध्यम $\mu_2$ में सतह CD पर टकराने वाली आपतित किरणों के संगत वस्तु की आभासी गहराई क्या होगी ?

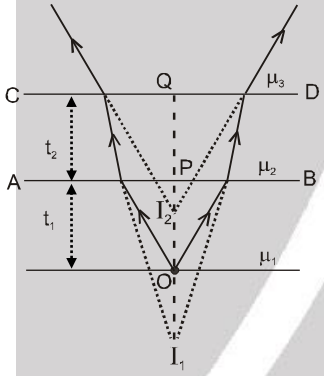
**Solution :**




माध्यम $\mu_2$ में पृष्ठ CD पर आपतित किरण के संगत बिंब की गहराई $= t_2 + PI_1 = t_2 + \dfrac{t_1}{\mu_1/\mu_2}$

**Problem 18.** उपरोक्त प्रश्न में यदि प्रेक्षक माध्यम $\mu_3$ में हो तो पृष्ठ CD के नीचे से देखने पर वस्तु की आभासी गहराई क्या होगी ?

**Solution :**

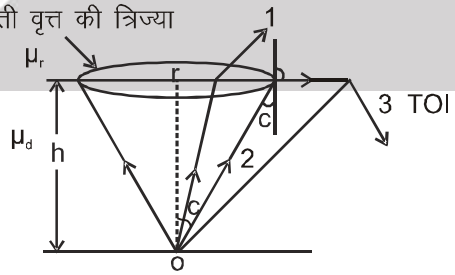



यदि प्रेक्षक माध्यम $\mu_3$ में है तो पृष्ठ CD के नीचे आभासी गहराई $= QI_2$

$$= \sum \frac{t_i}{(n_{rel})_i} = \frac{t_2}{\mu_2/\mu_3} + \frac{t_1}{\mu_1/\mu_3}$$

**Problem 19.** प्रतिदीप्ती वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिये यदि एक दीप्त वस्तु सघन माध्यम में अन्तरा पृष्ठ से h दूरी पर रखी है।

**Solution :**

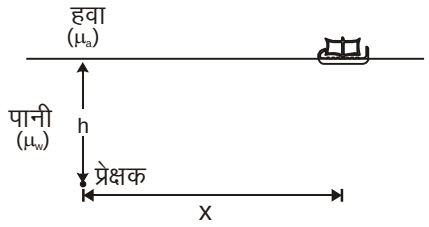



$\tan c = \dfrac{r}{h}$ .

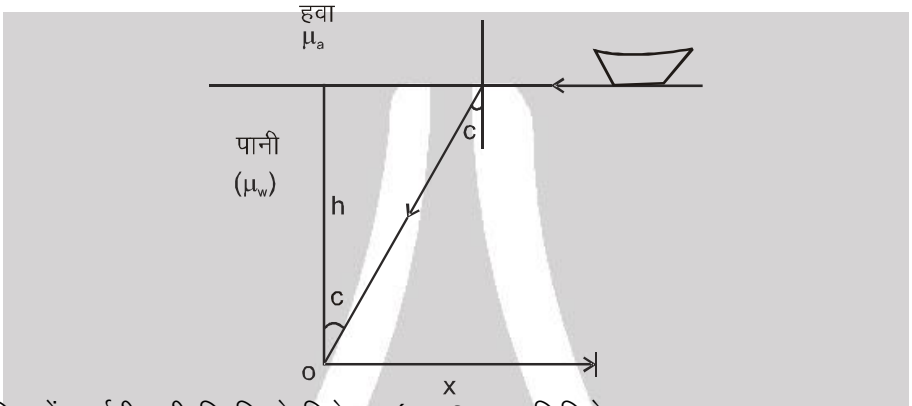
$\therefore \quad r = h \tan c.$

परन्तु $C = \sin^{-1}\dfrac{1}{(\mu_d/\mu_r)}$ अतः, $r = h \tan\left[\sin^{-1}\dfrac{1}{(\mu_d/\mu_r)}\right] = h.\dfrac{\mu_r}{\sqrt{\mu_d^2 - \mu_r^2}}$

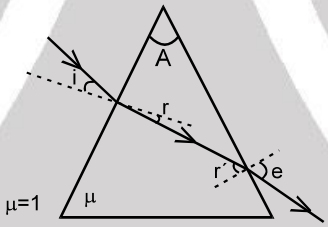
**Problem 20.** नदी में एक जहाज स्थित है। एक प्रेक्षक पानी ($\mu_w$) में x >> h दूरी पर हो तो जहाज की दृश्य रेखा द्वारा उध्वार्धर के साथ बनाया गया कोण ज्ञात किजिये।




**Solution :** $C = \sin^{-1}\left(\frac{\mu_a}{\mu_w}\right)$




**Problem 21.** चित्र में दर्शायी गयी स्थिति के लिये r, r´, e, $\delta$ ज्ञात किजिये।




**Solution :** यहाँ $\theta = 180° - 75° = 105°$

$\sin 45° = \sqrt{2} \sin r$

$\therefore \quad r = \sin^{-1}\frac{1}{2} = 30°.$

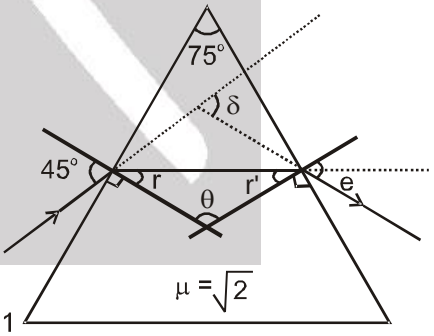
$r' = 180° - (r + \theta) = 180° - 30° - 105° = 45°$

$\sin e = \sqrt{2} \sin r'$

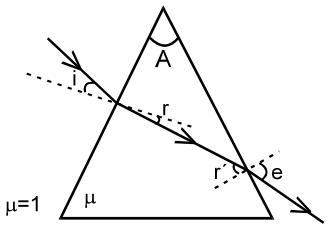
$\therefore \quad \sin e = \sqrt{2} \times \sin 45° = 1$

$\therefore \quad \boxed{e = 90°}$

अतः, $\delta = i + e - A = 45° + 90° - 75° = 60°.$



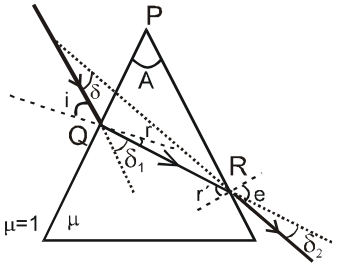

**Problem 22.** चित्र में दर्शायी गयी स्थिति के लिये सम्बन्धों r´ – r = A तथा $\delta = |(i - e) + A|$ को सिद्ध कीजिये। (इन सम्बन्धों को याद करने की कोशिश न करे क्योंकि सामान्यतः प्रिज्म इस ढ़ंग से काम में नहीं लिया जाता है).



**Solution :** $\Delta$ PQR,

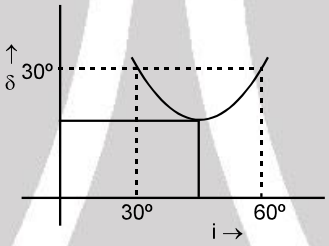
$A + \angle PQR + \angle QRP = 180° = A + r + 90^o + 90^o - r' = 180°$

$\therefore \quad \boxed{r^1 - r = A}$

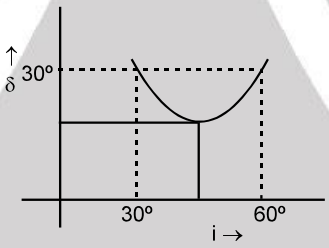



| | | |
|---|---|---|
| प्रथम अपवर्तन पश्चात् विचलन | $\delta_1 = (i - r)$ | (वामावर्त) |
| द्वितीय अपवर्तन पश्चात् विचलन | $\delta_2 = (e - r')$ | (दक्षिणावर्त) |
| अतः कुल विचलन | $\delta = \delta_1 - \delta_2 = (i - r) - (e - r') = i - e + A$ | |

**Problem 23.** दर्शाये गये विचलन $\delta$ व आपतन कोण i के आरेख से प्रिज्म कोण ज्ञात कीजिये।




**Solution :** आरेख से ;



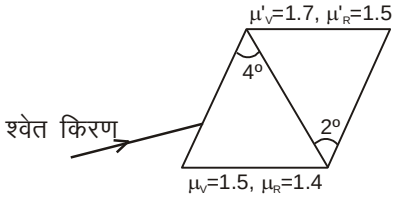

$\delta = i + e - A.$

$30° = 30° + 60° - A$

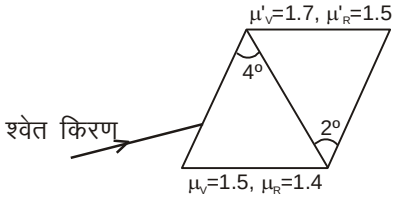
$\therefore \quad \boxed{A = 60°}$

यदि i व e अदल–बदल कर दिए जाए तो भी $\delta$ का मान समान प्राप्त होगा।

**Problem 24.** यदि दो प्रिज्म चित्रानुसार जुड़े हों तो संयोजन पर आपतित एक श्वेत प्रकाश किरण का विचलन कोण व कुल कोणीय विक्षेपण ज्ञात किजिये।




**Solution :**



कुल कोणीय विक्षेपण = $(\delta_v - \delta_r) - (\delta'_v - \delta'_r)$

$= (\mu_v - \mu_r)\,A - (\mu'_v - \mu'_r)\,A' = (1.5 - 1.4) \times 4° - (1.7 - 1.5) \times 2° = 0$

विक्षेपण कोण = $\left(\frac{\mu_v + \mu_r}{2} - 1\right) A - \left(\frac{\mu'_v + \mu'_r}{2} - 1\right) A'$

$= \left(\frac{1.5 + 1.4}{2} - 1\right) \times 4° - \left(\frac{1.7 + 1.5}{2} - 1\right) \times 2° = 0.6°$

**Problem 25.** क्राऊन व फ्लिंट काँचों की विक्षेपण क्षमताऐं क्रमशः 0.03 व 0.05 है। पीले प्रकाश के लिए इन काँचों के अपवर्तनांक क्रमशः 1.517 व 1.621 है। क्राऊन व फ्लिंट काँचों के बने प्रिज्मों का विवर्ण संयोजन बनाया जाता है जो पीली किरण में $1^0$ का विचलन उत्पन्न कर सके। आवश्यक दोनों प्रिज्मों के अपवर्तक कोण ज्ञात कीजिए।

**Solution :** $\omega_c = 0.03 = \frac{n_v - n_r}{n_y - 1}$ $\quad\therefore (n_v - n_r) = 0.03\,(1.5\,17 - 1) = 0.0155$

और, $\omega_f = 0.05 = \frac{n'_v - n'_r}{n'_y - 1}$ $\quad\therefore n'_v - n'_r = 0.05 \times (1.6\,21 - 1) = 0.031$

$\theta = (n_v - n_r)\,A - (n'_v - n'_r)\,A' = 0.0155\,A - 0.031\,A'$ .........(1)

परन्तु $\delta_{net} = 1$

इसलिए, $(n_y - 1)\,A - (n'_y - 1)\,A' = 1$

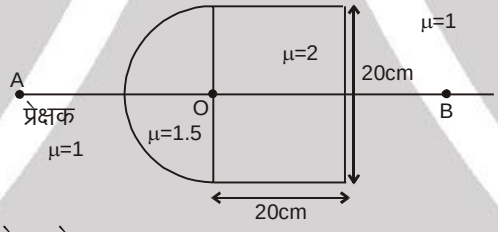
$= 0.517\,A - 0.621\,A' = 1$ .........(2)

$\therefore$ $A = 4.8°$ तथा $A' = 2.4°$

**Problem 26.** चित्र में दर्शायी गयी स्थिति को देखें

(1) प्रेक्षक A द्वारा देखने पर प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात कीजिए।

(2) प्रेक्षक B द्वारा देखने पर प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात कीजिए।

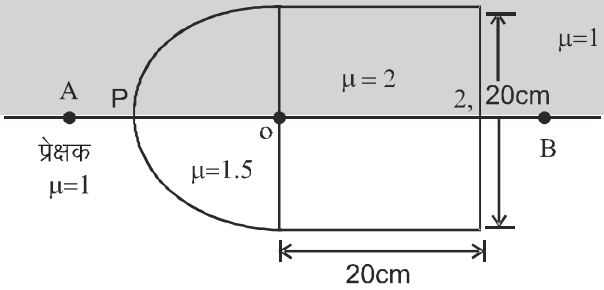





**Solution :** (i) प्रेक्षक A द्वारा देखे जाने पर

R = – 10 cm.

u = – 10 cm.






इसलिए, $\frac{n_2}{v} - \frac{n_1}{u} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ , $\frac{1}{v} - \frac{1.5}{(-10)} = \frac{1 - 1.5}{(-10)}$

v = –10 cm

(ii) प्रेक्षक B द्वारा देखे जाने पर

$R = \infty$

u = – 20 cm ; $\frac{1}{v} - \frac{2.0}{-20} = \frac{1 - 2.0}{\infty}$

v = – 10cm प्रतिबिंब O से 10 cm दायीं ओर बनेगा।

**Problem 27.** द्वि उत्तल लैंस ($R_1$ = 15 cm और $R_2$ = –25 cm) की फोकस दूरी ज्ञात करो। लैंस के पदार्थ का अपवर्तनांक n = 1.5 है।

**Solution :** $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.5-1)\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{25}\right) = 0.5\left(\frac{10+6}{150}\right) = \frac{8}{150}$.

$f = \frac{150}{8} = 18.75$ cm

**Problem 28.** समतलोत्तल लैंस ($R_1$ = 15 cm और $R_2 = \infty$) की फोकस दूरी ज्ञात करो। लैंस के पदार्थ का अपवर्तनांक n = 1.5 है।

**Solution :** $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.5-1)\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{\infty}\right) = 0.5 \times \frac{1}{15}$

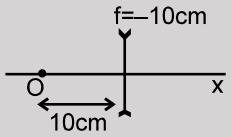
$\therefore$ f = 30 cm.

**Problem 29.** अवतलोत्तल लैंस (धनात्मक मेनिस्कस) जिसकी वक्रता त्रिज्यायें $R_1$ = 15 cm और $R_2$ = 25 cm है तथा लैंस के पदार्थ का अपवर्तनांक n = 1.5 है तो लैंस का फोकस दूरी ज्ञात करो।

**Solution :** $\frac{1}{f} = (1.5-1)\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{25}\right) = 0.5 \cdot \left(\frac{10-6}{150}\right)$

$\therefore \quad f = \frac{300}{4} = 75$ cm

**Problem 30.** चित्र में एक बिन्दुवत वस्तु व एक अपसारी लैन्स को दर्शाया गया है। अन्तिम प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।




**Solution :** $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{-10} + \frac{1}{(-10)} = -\frac{2}{10}$

= V = – 5 cm

**Problem 31.** एक वृहद् वास्तविक वस्तु को – 10 सेमी फोकस दूरी के एक अवतल लैंस के मुख्य अक्ष के लम्बवत् इस प्रकार रखा जाता है कि प्रतिबिम्ब का आकार वस्तु के आकार का आधा प्राप्त होता है।

(a) लैंस से वस्तु की दूरी ज्ञात कीजिये।

(b) लैंस से प्रतिबिम्ब की दूरी ज्ञात कीजिये तथा किरण चित्र बनाईये।

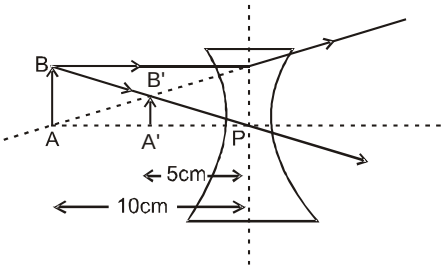
(c) यदि वस्तु को मुख्य अक्ष के अनुदिश लैंस की ओर 1 mm से विस्थापित किया जाता है तो पार्श्व आवर्धन ज्ञात कीजिये।

**Solution :** (a) $f = -10$ cm

$m = \frac{h_2}{h_1} = 0.5 = \frac{v}{u}$

अतः, $\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.54} - \frac{1}{u} = \frac{1}{-10} \qquad \therefore u = -10$cm

(b)




$\frac{v}{u} = 0.5.$ $\quad \therefore v = 0.5 \times (-10)$ cm.

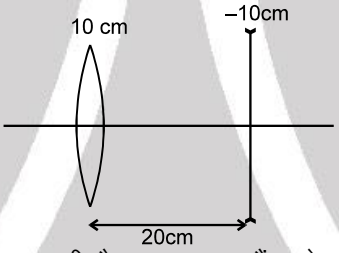
$\frac{v}{u} = -5$ cm

किरण आरेख :

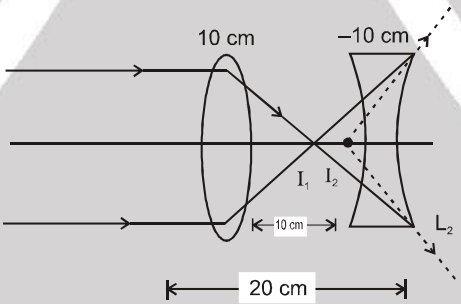
(c) $m = \frac{f}{f+u} \Rightarrow dm = \frac{-f}{(f+u)^2} du = \frac{(+10)}{(-10-10)^2} (0.1) = 0.0025$ cm

इस प्रकार अन्तिम पार्श्व आवर्धन $(m + dm) = 0.5025$ cm **Ans.**

**Problem 32.** अक्ष के समानान्तर उपाक्षीय किरणों के लिये निकाय की तुल्य फोकस दूरी ज्ञात कीजिये।

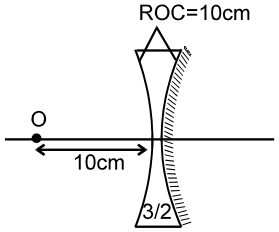



**Solution :** माना कि किरण अनंत दूरी से आ रही है। तब उत्तल लैंस से अपवर्तन के पश्चात् $I_1$ का प्रतिबिंब $L_1$ के फोकस पर बनेगा। $I_1$, $L_2$ के बिंब की भांति कार्य करेगा।




तब, $\frac{1}{v} - \frac{1}{(-10)} = \frac{1}{(-10)} \Rightarrow \frac{1}{v} = -\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{5}$ $\boxed{V = -5 \text{ cm}}$

**Problem 33.** चित्र में देखें। संयोजन की तुल्य फोकस दूरी व प्रतिबिम्ब की स्थिति ज्ञात कीजिये।




**Solution :** लैंस संयोजन के लिए $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{-10} - \frac{1}{10}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{10}$

$F_m = \frac{R}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm ; $\quad \therefore \frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{F_m} - 2\frac{1}{f} = \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$ $\quad \boxed{f_{eq} = 2.5 \text{ cm}}$ **Ans.**