कार्य, शक्ति तथा ऊर्जा (WORK, POWER & ENERGY)

प्रस्तावना :

दैनिक जीवन में 'कार्य' शब्द का अर्थ भौतिकी के कार्य से भिन्न होता है। यदि एक कुली अपने सिर पर कुछ सामान लिए हुए रेलगाड़ी पहुंचने का इंतजार कर रहा है तो विज्ञान की भाषा में वह कोई कार्य नहीं कर रहा है। अब हम विज्ञान की भाषा में कार्य का अध्ययन करेंगे।

नियत बल द्वारा कार्य :

कार्य का भौतिक अर्थ दैनिक जीवन से जुड़े कार्य शब्द से पूर्ण भिन्न है। दैनिक जीवन में कार्य के पर्याय मेहनत, थकान, प्रयास आदि होते हैं, परन्तु भौतिकी में कार्य को परिभाषित करने का विशेष तरीका है।

जब कोई बल किसी वस्तु को जिस पर बल कार्यरत है, बल की दिशा की लम्बवत् दिशा को छोड़कर अन्य किसी भी दिशा में विस्थापित कर दे तो इस बल के द्वारा कार्य किया गया है।

कार्य होने के लिए निम्न दो शर्तों की पूर्ति आवश्यक है –

(i) एक बल लगाना अनिवार्य है।

(ii) आरोपित बल, बल की लम्बवत् दिशा को छोड़कर अन्य किसी भी दिशा में वस्तु को विस्थापित कर दें।

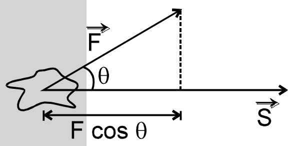
माना किसी वस्तु पर $\vec{F}$ बल आरोपित करने पर वह बल की दिशा में $\vec{S}$ विस्थापित हो जाती है तो किया गया कार्य

W = FS

हाँलाकि विस्थापन हमेशा बल की दिशा में नहीं होता। माना नियत बल $\vec{F}$ किसी वस्तु पर आरोपित है तथा इस बल द्वारा वस्तु बल की दिशा से θ कोण पर विस्थापित हो जाती है तो किया गया कार्य बल तथा विस्थापन का बिन्दु गुणनफल होता है।

$$W = \vec{F}.\vec{S}$$

चूंकि कार्य, बल तथा विस्थापन का बिन्दु गुणनफल है इसीलिए यह एक अदिश राशि है।

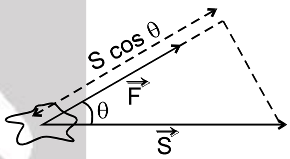


$W = FS\cos\theta$

या $W = (F\cos\theta)S$

∴ W = बल का विस्थापन की दिशा में घटक × विस्थापन का परिमाण

अतः कार्य, बल का विस्थापन की दिशा में घटक तथा विस्थापन का परिमाण का गुणनफल होता है।



तथा $W = F(S\cos\theta)$

या कार्य, विस्थापन का बल की दिशा में घटक तथा बल के परिमाण का गुणनफल होता है।

मुख्य बिन्दु :

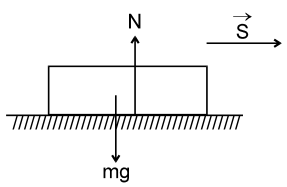
स्थिति (i)

जब θ = 90º तो W = FS cos 90º = 0

अतः यदि वस्तु बल की लम्बवत् दिशा में विस्थापित होती है, तो बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

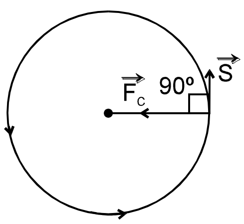
उदाहरण :

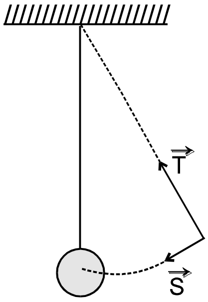
1. माना कोई वस्तु क्षैतिज सतह पर फिसल रही है। उस पर गुरूत्व बल तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होगा। क्योंकि दोनों बल (गुरूत्व बल, अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल) विस्थापन के लम्बवत् कार्य कर रहे है।



इसी प्रकार यदि कोई व्यक्ति (या कुली) सिर पर भार (या सामान) रख कर रेल्वे प्लेटफॉर्म पर जा रहा है तो उसके द्वारा किया गया कार्य शून्य होगा। (उपरोक्त कारण के अनुसार)

2. माना एक वस्तु नियत चाल से वृत्त पर गतिमान है। वृत्ताकार पथ के प्रत्येक बिन्दु पर चित्रानुसार अभिकेन्द्रीय बल तथा विस्थापन परस्पर लम्बवत् है, अतः अभिकेन्द्रीय बल द्वारा किया गया कार्य शून्य है। इसी प्रकार जब कोई उपग्रह वृत्तीय कक्षा में गति करता है तो गुरूत्वाकर्षण बल विस्थापन के सदैव लम्बवत् रहता है। अतः गुरूत्वाकर्षण बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।





3. चित्रानुसार गतिशील सरल लोलक के धागे का तनाव सदैव विस्थापन के लम्बवत् होता है। अतः तनाव बल द्वारा कार्य शून्य होगा।

स्थिति (ii) :

जब S = 0 तो **W = 0.**

यदि बल लगाने के पश्चात् भी वस्तु विस्थापित नहीं हो तो किया गया कार्य शून्य होगा।

उदाहरण :

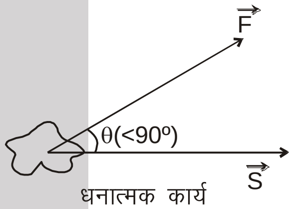
यदि एक व्यक्ति किसी भार को उठाकर स्थिर खड़ा हो तो कार्य शून्य होगा।

स्थिति (iii) :

जब $0^\circ \le \theta < 90^\circ$ [चित्रानुसार] तो $\cos\theta$ धनात्मक

अतः W (= FS cos θ) धनात्मक होगा।

यदि बल अथवा बल का घटक विस्थापन की दिशा में हो, तो बल के द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होगा।



धनात्मक कार्य

उदाहरण :

1. घोड़ा गाड़ी खींचते समय घोड़े द्वारा लगाया गया बल तथा विस्थापन एक ही दिशा में होते है। अतः घोडे के द्वारा किया गया कार्य धनात्मक होता है।

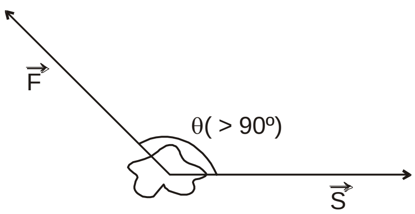
2. भार को ऊपर उठाने में लगाया गया बल तथा विस्थापन दोनों ऊपर की ओर होते है, अतः भार उठाने वाले बल का कार्य धनात्मक होता है।

3. स्प्रिंग को खींचने में, खिचाव बल तथा विस्थापन एक ही दिशा में होते है अतः खिचाव बल का कार्य धनात्मक होता है।

स्थिति (iv) :

जब $90^\circ < \theta \le 180^\circ$ (चित्रानुसार), तो cosθ ऋणात्मक अतः W (= FS cos θ) भी ऋणात्मक होगा।

यदि आरोपित बल या आरोपित बल के घटक **तथा विस्थापन की दिशा परस्पर विपरीत हो तो बल के द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।**



ऋणात्मक कार्य

उदाहरण :

1. गतिशील वाहन में ब्रेक लगाये जाने पर, मंदक बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होगा। क्योंकि ब्रेक लगाने के कारण उत्पन्न मंदक बल की दिशा, वाहन के विस्थापन की दिशा से विपरीत होती है।

2. जब किसी वस्तु को खुरदरी सतहपर विस्थापित किया जाता है तो घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है। क्योंकि घर्षण बल वस्तु के विस्थापन की विपरीत दिशा में कार्य करता है।

3. जब किसी वस्तु को ऊपर उठाया जाता है तो गुरूत्वीय बल की दिशा नीचे की ओर तथा विस्थापन ऊपर की ओर होता है। अतः गुरूत्वीय बल द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक होता है।

Solved Example

Example 1. चित्र में चार स्थितियां दिखाई गई है। प्रत्येक बॉक्स घर्षणरहित सतह पर रखा है, प्रत्येक स्थिति में बॉक्स पर समान बल लगाने पर यह दाहिनी ओर 'd' विस्थापित हो जाते है। इस विस्थापन के दौरान बल द्वारा बॉक्स पर किये गये कार्य को अधिकतम धनात्मक कार्य से अधिकतम ऋणात्मक कार्य के क्रम में लिखिए। (व्यवस्थित कीजिए)

Answer : **D, C, B, A**

स्पष्टीकरण : (D) $\theta = 0^o$, $\cos\theta = 1$ (अधिकतम मान). अतः किया गया कार्य अधिकतम

(C) $\theta < 90^o$, $\cos\theta$ धनात्मक है, अतः W धनात्मक होगा

(B) $\theta = 90^o$, $\cos\theta$ शून्य है, अतः W = 0

(A) θ अधिककोण है तो, $\cos\theta$ ऋणात्मक होगा अतः W ऋणात्मक होगा।

बहु बलों द्वारा किया गया कार्य

यदि किसी कण पर बहुत सारे बल कार्यरत हो तो, $W = \vec{F}.\vec{S}$ समीकरण में $\vec{F}$ को कुल बल $\Sigma\vec{F}$ से प्रतिस्थापित किया जा सकता है।

$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...$ $\qquad \therefore \qquad W = [\Sigma\vec{F}]\,.\,\vec{S}$ .... (i)

अतः उपरोक्त समीकरण द्वारा, परिणामी बल द्वारा कण को $\vec{S}$ विस्थापित करने में किया गया कार्य ज्ञात किया जा सकता है।

$W = \vec{F}_1.\vec{S} + \vec{F}_2.\vec{S} + \vec{F}_3.\vec{S} + ...$ या $\qquad W = W_1 + W_2 + W_3 + ...$

अतः कण पर किया गया कुल कार्य प्रत्येक बल द्वारा कण पर किये गये अलग–अलग कार्यो के योग के बराबर होता है।

महत्वपूर्ण बिन्दु :

1. कार्य किसी अन्तराल या विस्थापन के लिए होता है, तात्क्षणिक वेग की तरह तात्क्षणिक कार्य नहीं होता है।
2. किसी निश्चित विस्थापन के लिए, बल द्वारा किया गया कार्य गति के प्रकार पर निर्भर नहीं करता अर्थात याहे यह नियत वेग, नियत त्वरण या मंदन से गति करे।
3. किसी निश्चित विस्थापन के लिए कार्य समय पर निर्भर नहीं करता। समान विस्थापन के लिए कार्य समान होगा चाहे समय अल्प या अधिक हो।
4. यदि किसी वस्तु पर अनेक बल कार्यरत हो तो किसी निश्चित समयान्तराल के लिए किसी एक बल द्वारा किया गया कार्य अन्य बलों पर निर्भर नहीं करता।
5. बल निर्देश तंत्र पर निर्भर नहीं करता। लेकिन विस्थापन निर्देश तंत्र पर निर्भर करता है अतः बल द्वारा किया गया कार्य निर्देश तंत्र पर निर्भर करता है अर्थात् भिन्न–भिन्न निर्देश तंत्रों में कार्य भिन्न–भिन्न होता है।
6. किसी कण या निकाय की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन कार्य के तुल्य होता है।
7. कार्य, किसी स्त्रोत या कर्ता द्वारा आरोपित बल द्वारा होता है।

कार्य की इकाई –

1. कार्य की इकाई :

I. cgs पद्वति में कार्य की इकाई अर्ग होती है।

अर्ग : यदि किसी वस्तु पर 1 डाइन बल लगाने से वस्तु में बल की दिशा में एक सेमी. विस्थापन हो तो बल द्वारा किया गया कार्य एक अर्ग होगा।

$\therefore$ 1 अर्ग = 1 डाइन × 1 सेमी = 1 ग्रा. सेमी. सै$^{-2}$ × 1 सेमी = 1 ग्रा. सेमी^{2} से.$^{-2}$

नोट- अर्ग को डाइन सेमी भी कहते है।

II. SI इकाई : जूल (J) (अन्तर्राष्ट्रीय मात्रक पद्धति) SI पद्वति में कार्य का मात्रक जूल है जिसे प्रसिद्व भौतिक विज्ञानी जेम्स पर्सनल जूल (1818–1869) के नाम पर रखा गया था।

जूल : यदि किसी वस्तु पर एक न्यूटन बल लगने से वस्तु में बल की दिशा में विस्थापन एक मीटर हो तो बल द्वारा वस्तु पर किया गया कार्य एक जूल होता है।

1 जूल = 1 न्यूटन × 1 मी. = 1 किग्रा ×1 मी./से.^{2} × 1 मी. = 1 किग्रा. मी.^{2} से.$^{-2}$

नोट – जूल को न्यूटन x मीटर भी कहा जाता है।

<u>जूल तथा अर्ग में संबंध</u>

1 जूल = 1 न्यूटन × 1 मीटर

1 जूल = 10^5 डाइन × 10^2 सेमी = 10^7 डाइन सेमी

1 जूल = 10^7 अर्ग

1 अर्ग = 10^{-7} जूल

कार्य की विमा :

[कार्य] = [बल] [दूरी] = [MLT^{-2}] [L] = [ML^2] [T^{-2}]

कार्य में : द्रव्यमान की विमा = 1, लम्बाई की विमा = 2, समय की विमा = – 2

विमीय सूत्र के आधार पर कार्य का मात्रक, किग्रा. मी^{2} सै$^{-2}$

नोट :– 1 किग्रा x मी.^{2} से.$^{-2}$ = (1 किग्रा मी. से.$^{-2}$) मी. = 1 न्यूटन x मी. = 1 जूल

Solved Examples

Example 2. एक दृढ़ दीवार की तरफ एक प्रत्यास्थ गेंद फेंकी जाती है। दीवार द्वारा गेंद पर आरोपित अभिलम्ब प्रतिक्रिया द्वारा किया गया कार्य

(A) +ve (B) – ve (C*) शून्य (D) इनमें से कोई नहीं

Solution : चूंकि बल का क्रिया बिन्दु स्थिर है अतः अभिलम्ब प्रतिक्रिया द्वारा किया गया कार्य शून्य है।

Example 3. जब एक व्यक्ति सीढ़ीयां चढ़ता है तो अभिलम्ब प्रतिक्रिया द्वारा किया गया कार्य

(A) +ve (B) – ve (C*) शून्य (D) इनमें से कोई नही

Solution : चूंकि बल का क्रिया बिन्दु स्थिर है अतः अभिलम्ब प्रतिक्रिया द्वारा किया गया कार्य शून्य है।

Example 4. जब एक व्यक्ति दौड़ना शुरू करता है, तब स्थैतिक घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ______ है।

Solution : चूंकि बल का क्रिया बिन्दु स्थिर है अतः स्थैतिक घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य शून्य है।

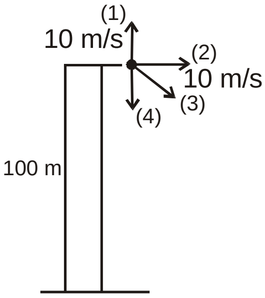
विभिन्न वास्तविक बलों द्वारा किया गया कार्य

(WORK DONE BY VARIOUS REAL FORCES)

Work done by gravity Force (गुरूत्व बल द्वारा किया गया कार्य)

Solved Example

Example 5.



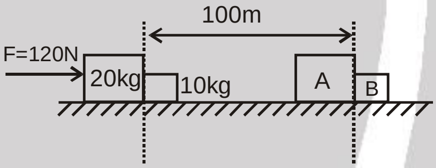
एक कण का द्रव्यमान 2 kg है। ये समान चाल 10 m/s से चार भिन्न–भिन्न तरीकों से चित्रानुसार प्रक्षेपित किया जाता है। जब कण धरातल पर गिरता है, उस समय तक गुरूत्व द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : $W = |\vec{F}||\vec{S}| \cos\theta = 2000$ J हर स्थिति में

अभिलम्ब प्रतिक्रिया द्वारा किया गया कार्य (Work done by normal reaction)

Solved Example

Example 6.



(i) A पर 100 m विस्थापन के दौरान बल F द्वारा किया कार्य ज्ञात करो।

(ii) B पर 100 m विस्थापन के दौरान बल F द्वारा किया कार्य ज्ञात करो।

(iii) दिये गये विस्थापन के लिए अभिलम्ब प्रतिक्रिया द्वारा A तथा B पर किया गया कार्य ज्ञात करो।

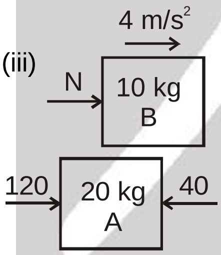
(iv) A तथा B की अन्त में गतिज ऊर्जा ज्ञात करो।

Solution : (i) $(W_F)_{on\ A} = F\Delta S \cos\theta = 120 \times 100 \times \cos 0° = 12000$ J

(ii) $(W_F)_{on\ B} = 0$

F, B पर कार्य नही करता है।

(iii)



$N = 10 \times 4 = 40$ N

$(W_N)_{on\ B} = 40 \times 100 \times \cos 0° = 4000$ J

$(W_N)_{on\ A} = 40 \times 100 \times \cos 180° = -4000$ J

(iv) $v^2 = u^2 + 2as \quad u = 0$

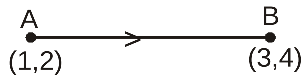
$\therefore v^2 = 2 \times 4 \times 100 \Rightarrow v = 20\sqrt{2}$ m/s $\qquad \therefore KE_A = \frac{1}{2} \times 20 \times 800 = 8000$ J

$KE_B = \frac{1}{2} \times 10 \times 800 = 4000$ J

A तथा B के निकाय पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया द्वारा किया गया कार्य शून्य है। अतः आन्तरिक क्रिया द्वारा एक दृढ़ निकाय पर किया कार्य शून्य है।

Example 7. एक कण को बिन्दु A (1, 2) से B(3, 4) तक आरोपित बल $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ N द्वारा विस्थापित किया जाता है। $\vec{F}$ द्वारा कण को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य ज्ञात करो ?.

Solution :



$W = \vec{F}.\Delta\vec{S}$

$\Delta S = (3-1)\ \hat{i} + (4-2)\ \hat{j} = (2\hat{i} + 3\hat{j}) . (2\hat{i} + 2\hat{j}) = 2 \times 2 + 3 \times 2 = 10$ इकाई

ऊर्जा :

परिभाषा :

किसी वस्तु की कार्य करने की या कार्य कर सकने की आंतरिक क्षमता को ऊर्जा कहते है। जब हम कहते है कि एक वस्तु के पास ऊर्जा है इसका अर्थ है कि वह कार्य कर सकती है।

ऊर्जा कई प्रकार की होती है, यांत्रिक ऊर्जा, ध्वनि ऊर्जा, ऊष्मा ऊर्जा, प्रकाश ऊर्जा, रासायनिक ऊर्जा, परमाणु ऊर्जा नाभिकीय ऊर्जा आदि।

प्रकृति में होने वाली विभिन्न घटनाओं में ऊर्जा एक रूप से दूसरे रूप में रूपांतरित होती रहती है।

गतिज ऊर्जा :

परिभाषा :

किसी वस्तु या पिण्ड में उसकी गति के कारण कार्य करने की आंतरिक क्षमता को गतिज ऊर्जा कहते है।

गतिज ऊर्जा एक अदिश राशि है। गतिज ऊर्जा वस्तु की गति की अवस्था से संबंधित होती है। किसी ऊंचाई पर उड़ते हवाईजहाज में स्थानान्तरण गतिज ऊर्जा होती है इसी प्रकार किसी मशीन के घूर्णन करते पहिये में घूर्णन गतिज होती है। माना किसी कण का द्रव्यमान m तथा यह चाल v मी/से. से गति कर रहा है। चाल v प्रकाश की चाल से बहुत कम है तो

गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$

गतिज ऊर्जा से संबंधित महत्वपूर्ण बिन्दु :

1. द्रव्यमान m तथा v^2 $(\vec{v}.\vec{v})$ सदैव धनात्मक होते है। अतः गतिज ऊर्जा धनात्मक अदिश राशि है अर्थात् गतिज ऊर्जा ऋणात्मक नहीं हो सकती है।
2. गतिज ऊर्जा निर्देश तंत्र पर निर्भर करती है।

$$K = \frac{p^2}{2\ m} \quad \text{तथा } P = \sqrt{2mK} \ ; \ P = \text{रेखीय संवेग}$$

चाल v वस्तु द्वारा किसी भी प्रकार से प्राप्त की जा सकती है। किसी निकाय (कणों या वस्तुओं का समूह) की गतिज ऊर्जा अलग–अलग कण की गतिज ऊर्जाओं के योग के बराबर होती है।

माना किसी निकाय में 'n' कण है जिनके द्रव्यमान $m_1, m_2, ..., m_n$ है, इनके वेग क्रमशः $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\ \vec{v}_n$, है। अतः निकाय की कुल गतिज ऊर्जा E_k होगी।

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + ... + \frac{1}{2}m_nv_n^2$$

यदि m ग्राम में तथा वेग सेमी/सैकण्ड में हो तो गतिज ऊर्जा का मापन अर्ग में होता है।

यदि m किग्रा. में तथा वेग v मी/से. में हो तो गतिज ऊर्जा का मापन जूल में होता है।

गतिज ऊर्जा की इकाई कार्य की इकाई के समान है यह कथन सभी प्रकार की ऊर्जाओं के लिए सत्य है। अतः ऊर्जा एवं कार्य एक दूसरे में रूपान्तरित किये जा सकते है।

विशिष्ट गतिज ऊर्जाऐं (K) :

क्र.सं.	वस्तु	द्रव्यमान (किग्रा.)	चाल (मी./से.)	K (जूल)
1	वायु के कण	$\approx 10^{-26}$	500	$\approx 10^{-21}$
2	सीमांत वेग से गिरती पानी की बूंद	3.5×10^{-5}	9	1.4×10^{-3}
3	10 मी. ऊंचाई से गिरता हुआ पत्थर	1	14	10^{2}
4	गोली	5×10^{-5}	200	10^{3}
5	दोड़ता हुआ धावक	70	10	3.5×10^{3}
6	कार	2000	25	6.3×10^{5}

गतिज ऊर्जा एवं संवेग में संबंध :

माना किसी वस्तु का द्रव्यमान m तथा यह v वेग से गति कर रही है तो उसका संवेग p = mv है।

वस्तु की गतिज ऊर्जा, $E_k = \frac{1}{2} mv^2$

$$E_k = \frac{1}{2m}(m^2v^2)$$

या $$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

या $$p = \sqrt{2mE_k}$$

Solved Example

Example 8. यदि वस्तु की गतिज ऊर्जा में 21% वृद्धि कर दी जाये तो वस्तु के संवेग के परिमाण में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करों।

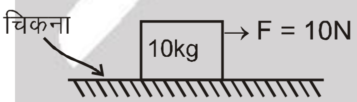
Solution : $E_{k2} = \frac{121}{100} E_{k1}$ या $\frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{121}{100} \frac{1}{2} m v_1^2$

या $v_2 = \frac{11}{10} v_1$ या $mv_2 = \frac{11}{10} mv_1$

या $p_2 = \frac{11}{10} p_1$ या $\frac{p_2}{p_1} - 1 = \frac{11}{10} - 1 = \frac{1}{10}$

या $\frac{p_2 - p_1}{p_1} \times 100 = \frac{1}{10} \times 100 = 10$ अतः संवेग के परिमाण में 10% वृद्धि होगी।

Example 9.



दिखाया गया बल 2 s के लिए कार्य करता है, 10 kg पर 3 s में F द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : $w = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S}$ $\Rightarrow$ $w = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S} \cos 0°$ $\Rightarrow$ $w = 10\,\Delta\vec{S}$

अब 10 = 10 a $\therefore$ a = 1 m/s² $\Rightarrow$ $S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 = 2$ m

w = 10 × 2 = 20 J

Example 10. 2 s के बाद गतिज ऊर्जा ज्ञात करो।

Solution : V = 0 + at $\Rightarrow$ V = 1 × 2 = 2m/s

$\therefore$ $KE = \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 = 20$ J

परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य :

यदि बल का परिमाण व दिशा त्रिविमिय हो तो इसे स्थिति के फलन के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। परिवर्ती बल द्वारा वस्तु को अतिसूक्ष्म ($d\vec{s}$) विस्थापित करने के लिए बल को नियत माना जा सकता है।

$$dW = \vec{F}.d\vec{s}$$

कुल कार्य अतिसूक्ष्म कार्यों के योग के बराबर होता है।

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{s} = \int_A^B (F\cos\theta)ds$$

आयताकार घटकों के पदों में, $\vec{F} = F_x\,\hat{i} + F_y\,\hat{j} + F_z\,\hat{k}$

$$d\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

$$W_{A\to B} = \int_{x_A}^{x_B} F_x\,dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

नोट : यदि $F_x = f(x)$, $F_y = f(y)$, $F_t = f(t)$ तब बल संरक्षित बल होते हैं।

Solved Example

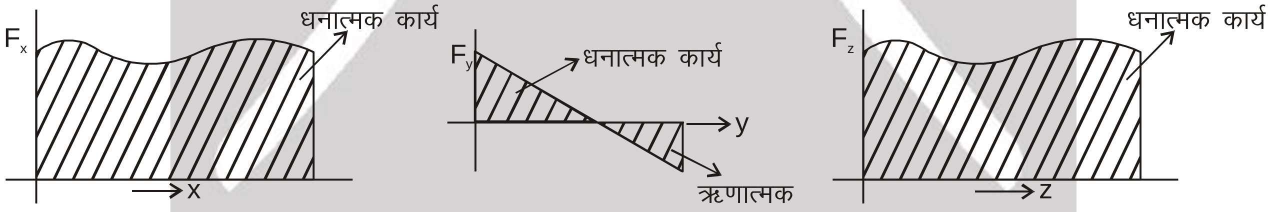
Example 11. एक वस्तु को बल $\vec{F} = (3x^2\hat{i} + 2y\hat{j})$ N लगाकर स्थिति सदिश $\vec{r}_1 = (2\hat{i} + 3\hat{j})$ m से $\vec{r}_2 = (4\hat{i} + 6\hat{j})$ m तक विस्थापित किया जाता है, इस बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : $W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (3x^2\hat{i} + 2y\hat{j}) \bullet (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$

$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (3x^2dx + 2ydy) = [x^3 + y^2]_{(2,\ 3)}^{(4,\ 6)} = 83$ J **Ans.**

बल–विस्थापन वक्र के मध्य घिरा क्षेत्रफल

ग्राफीय विधि में, बल–विस्थापन वक्र के मध्य घिरा क्षेत्रफल कार्य के बराबर होता है।

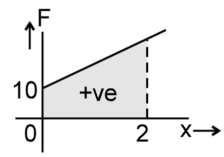


x-अक्ष के ऊपर का क्षेत्रफल धनात्मक तथा x-अक्ष के नीचे का क्षेत्रफल ऋणात्मक होता है।

Solved Example

Example 12. एक कण पर आरोपित बल F = 0.5x + 10 है। F न्यूटन तथा x मी. में है, तो x = 0 से x = 2 मीटर तक के विस्थापन के लिए बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : अल्प विस्थापन $\overrightarrow{dx}$ में किया गया कार्य dW



$dW = \vec{F}\ .\ \overrightarrow{dx}$

या $dW = Fdx\cos 0^o$

या $dW = Fdx$ $[\because \cos 0^o = 1]$

कुल कार्य, $W = \int_{x=0}^{x=2} F dx = \int_{x=0}^{x=2} (0.5x + 10)dx$

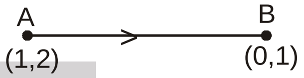
$= \int_{x=0}^{x=2} 0.5x \; dx + \int_{x=0}^{x=2} 10 \, dx = 0.5 \left| \frac{x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=2} + 10 \left| x \right|_{x=0}^{x=2}$

$= \frac{0.5}{2} [2^2 - 0^2] + 10[2 - 0] = (1 + 20) = 21$ जूल

परिवर्तनशील बल द्वारा किया गया कार्य $W = \int d \; W = \int \vec{F} \cdot \vec{ds}$

Solved Example

Example 13. एक वस्तु को बल $\vec{F} = x\hat{i} + 2y\hat{j}$ लगाकर बिन्दु A(1, 2) से B(0, 1) तक विस्थापित किया जाता है तो बल $\vec{F}$ द्वारा वस्तु को A से B ले जाने में किया गया कार्य ज्ञात करो।



Solution : $dW = \vec{F}.\vec{ds}$

$dW = (x\hat{i} + 2y\hat{j})\,(dx\hat{i} + dy\hat{i})$

$dW = \int_1^0 x\,dx + \int_2^1 2y\,dy \qquad \therefore \qquad W = -3.5$ J

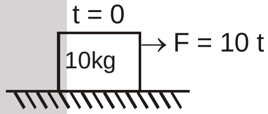
Example 14. यदि वस्तु के संवेग में 10% की वृद्धि कर दी जाये तो गतिज ऊर्जा में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करो।

Solution : गतिज ऊर्जा में प्रतिशत वृद्धि = 21%

$mv_2 = \frac{110}{100} mv_1, \; v_2 = \frac{11}{10} v_1, \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{121}{100}$

गतिज ऊर्जा में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{E_2 - E_1}{E_1} \times 100 = 21\%$

Example 15. चित्रानुसार एक समय पर निर्भर बल F = 10 t एक 10 kg की वस्तु पर आरोपित है। 2 s में F द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।



Solution : $dW = \vec{F}.\vec{ds} \quad \Rightarrow \quad dW = 10\,t.\,dx$

$dW = 10\,t\,v\,dt \quad .... (1) \quad \because \quad dx = vdt$ तथा $10 \times \frac{dv}{dt} = 10\,t$

$\therefore \int_0^v dv = \int_0^t t \; dt \Rightarrow v = \frac{t^2}{2} \quad .... (2)$

समीकरण (1) व (2) से

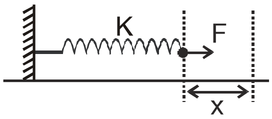
$dW = 10\,t.\left(\frac{t^2}{2}\right)dt \quad \Rightarrow \quad dW = 5t^3dt$

$\Rightarrow \quad W = \frac{5}{4}\left[t^4\right]_0^2 = 20$ J

स्प्रिंग बल द्वारा किया गया कार्य (WORK DONE BY SPRING FORCE)

Solved Examples

Example 16.



प्रारम्भ में स्प्रिंग अविस्तारित है। एक व्यक्ति एक अचर बल F से स्प्रिंग को खींचना शुरू करता है, तो F द्वारा इसे धीरे–धीरे x दूरी तक खीचने में किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : $\int dW = \int F \bullet ds = \int_0^x Kx\,dx$

$\Rightarrow \quad W = \left(\dfrac{Kx^2}{2}\right)_0^x = \dfrac{Kx^2}{2}$

Example 17. उपरोक्त उदाहरण में

(i) कार्य कहाँ गया ?

(ii) स्प्रिंग द्वारा दीवार पर किया गया कार्य शून्य है, क्यों ?

(iii) स्प्रिंग बल द्वारा आदमी पर किया गया कार्य है ?

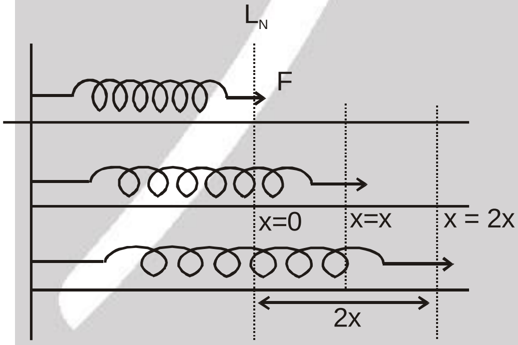
Solution : (i) ये स्प्रिंग में स्थितिज उर्जा के रूप में संग्रहित हो गया है।

(ii) शून्य, क्योंकि विस्थापन शून्य है।

(iii) $-\dfrac{1}{2}Kx^2$

Example 18. आरोपित बल द्वारा स्प्रिंग को धीरे–धीरे x से 2x विस्तारित करने में किया गया कार्य ज्ञात करो ?

Solution : प्रारम्भ में स्प्रिंग x से विस्तारित है।



$W = \vec{F}.d\vec{s}$

$W = \int_x^{2x} Kx.dx$

$W = \left[\dfrac{Kx^2}{2}\right]_x^{2x} = \dfrac{3}{2}\ Kx^2$

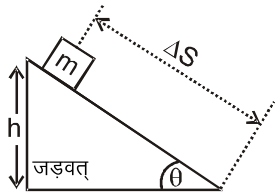
इसे स्थितिज ऊर्जा के अंतर से भी ज्ञात किया जा सकता है।

i.e., $\quad U_f = \dfrac{1}{2}K\,(2x)^2 = 2kx^2 \quad \Rightarrow \quad U_i = \dfrac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad U_f - U_i = \dfrac{3}{2}\ kx^2$

अन्य नियत बलों द्वारा किया गया कार्य
(WORK DONE BY OTHER CONSTANT FORCES)

Solved Examples

Example 19. एक m द्रव्यमान के ब्लॉक को एक चिकने, स्थिर θ कोण के नत तल के ऊपरी बिन्दु से छोड़ा जाता है। अभिलम्ब प्रतिक्रिया तथा गुरूत्व के द्वारा ब्लॉक के नीचे आने तक किया गया कार्य ज्ञात करो।



Solution : $W_N = 0$ क्योंकि $F \perp \Delta S$

$W_g = \vec{F}.\Delta\vec{S} = mg \,.\, \Delta S \,.\, \cos(90 - \theta) = mg\,\Delta S \sin\theta = mgh$

Example 20. निचले बिन्दु पर ब्लॉक की चाल तथा इसकी गतिज ऊर्जा ज्ञात करो।

Solution : $V^2 = u^2 + 2as$

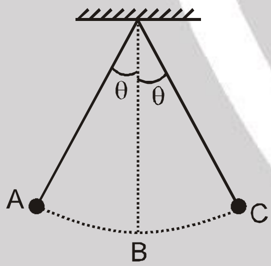
$V^2 = 0 + 2(g \sin\theta)\dfrac{h}{\sin\theta} \Rightarrow V^2 = 2gh \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$

$KE = \dfrac{1}{2}mv^2 = mgh$

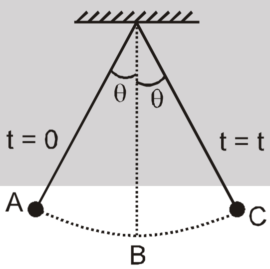
तनाव के द्वारा किया गया कार्य (WORK DONE BY TENSION)

Solved Examples

Example 21. एक पेन्डुलम के बॉब को विरामवस्था से सीमान्त स्थिति से चित्रानुसार छोड़ते है तो A से B, B से C और C से A के दौरान तनाव द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।



Solution : शून्य क्योंकि $F_T \perp dS$ हर समय



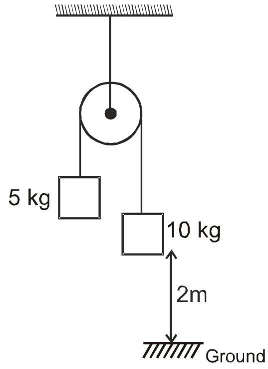
Example 22. उपरोक्त प्रश्न में गुरूत्व के द्वारा A से B तथा B से C जाने में किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : $W_g = \vec{F}.\Delta\vec{S} = mg\,\Delta S \cos\theta$

$W_g = mg(\ell - \ell\cos\theta)$ for A to B

$W_g = -\,mg(\ell - \ell\cos\theta)$ for B to C

Example 23. निकाय विरामावस्था से छोड़ा जाता है। जब 10 kg का ब्लॉक धरातल पर पहुँचता है तब ज्ञात करो।



(i) 10 kg पर गुरूत्व के द्वारा किया गया कार्य
(ii) 5 kg पर गुरूत्व के द्वारा किया गया कार्य
(iii) तनाव द्वारा 10 kg पर किया गया कार्य
(iv) 5 kg पर तनाव द्वारा किया गया कार्य

Solution : (i) $(W_g)_{10\ kg} = 10\ g \times 2 = 200$ J

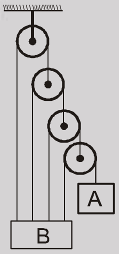
(ii) $(W_g)_{5kg} = 5\ g \times 2 \times \cos 180° = -100$ J

(iii) $(W_T)_{10\ kg} = \frac{200}{3} \times 2 \times \cos 180° = \frac{-400}{3}$ J

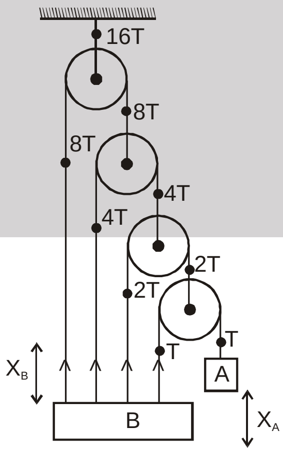
(iv) $(W_T)_{5\ kg} = \frac{200}{3} \times 2 \times \cos 0° = \frac{400}{3}$ J

तनाव के द्वारा किया गया कुल कार्य शून्य है। आन्तरिक तनाव के द्वारा किया गया कार्य (निकाय में कार्यरत तनाव) निकाय पर हमेशा शून्य होता है यदि लम्बाई नियत रहती है।

Example 24. चित्रानुसार किसी क्षण निकाय के A ब्लॉक का वेग V_A है, इस क्षण पर ब्लॉक B का वेग ज्ञात करो।



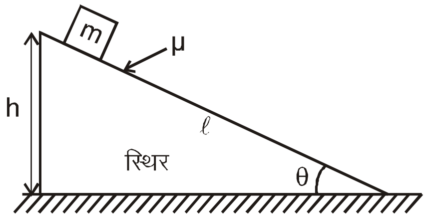
Solution : आन्तरिक तनाव द्वारा किया गया कार्य शून्य है।



$\therefore \quad 15\ T \times X_B - T \times X_A = 0$

$X_A = 15\ X_B \quad \therefore \quad V_A = 15\ V_B$

Example 25. θ नत कोण वाले नत तल के ऊपरी बिन्दु से एक m द्रव्यमान की वस्तु छोड़ी जाती है, वस्तु तथा नत तल के मध्य घर्षण गुणांक $\mu(\mu < \tan\theta)$ है जब वस्तु उपर से नीचे पहुंचती है तो अभिलम्ब प्रतिक्रिया, गुरूत्व तथा घर्षण के द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।



Solution : $W_N = 0 \quad \therefore F_N \perp \Delta S$

$W_g = mg\,\ell \sin\theta$

$W_f = -\mu mg \cos\theta \,.\, \ell$

Example 26. उपरोक्त प्रश्न में वस्तु की निचले बिन्दु पर गतिज ऊर्जा क्या है?

Solution : $V^2 = u^2 + 2as$

$V^2 = 2(g\sin\theta - \mu\, g\cos\theta)\,(\ell)$

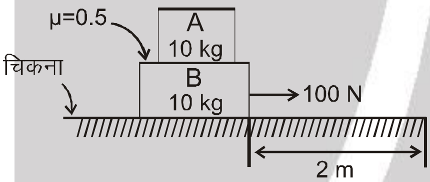
$\therefore KE = \frac{1}{2} m\, 2\,(g\sin\theta - \mu g\cos\theta)\,\ell$

$= mg\,\ell\,(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

घर्षण के द्वारा किया गया कार्य (WORK DONE BY FRICTION)

Solved Examples

Example 27. दिये गये चित्र में



(i) आरोपित बल द्वारा 2m के विस्थापन के दौरान किया गया कार्य ज्ञात करो?.

(ii) A द्वारा B पर घर्षण बल के द्वारा विस्थापन के दौरान किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : (i) $100 \times 2 \times \cos 0° = 200$ J

(ii) $f_{smax} = \mu mg = 0.5 \times 10\,g = 50$ N

माना दोनों साथ चलते है।

$100 = 20\,a \Rightarrow a = 5\ m/s^2$

A पर घर्षण की जाँच करो।

$f = 10 \times 5 = 50$ N

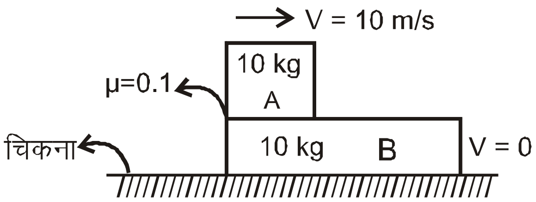
$f_{reqd} = f_{available} \quad \therefore$ ये दोनों साथ चलेगें।

अतः $(W_f)_{on\,B} = -100$ J

$(W_f)_{on\,A} = 100$ J Net zero

आन्तरिक स्थैतिक घर्षण के द्वारा किया गया शून्य है।

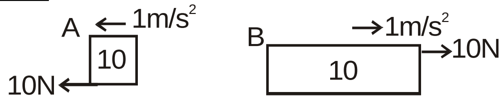
Example 28. चित्रानुसार चिकने धरातल पर रखे 10 kg के प्लांक की सतह पर एक 10 kg दव्यमान की वस्तु 10 m/s से प्रक्षेपित की जाती है।



(i) जब घर्षण बल कार्य करना बंद कर दे तब दोनों ब्लॉक का वेग ज्ञात करो।

(ii) जब A और B का वेग समान होता है इनका विस्थापन ज्ञात करो।

Solution : (i)



$V_A = 10 - 1t$ $\Rightarrow$ $V_B = 1t$

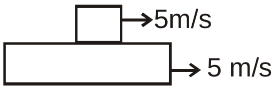
घर्षण कार्य करना बंद करता है जब

$V_A = V_B$ $\Rightarrow$ $10 - t = t$

$10 = 2t$ $\Rightarrow$ $t = 5$ sec.

$V_B = V_A = 5$m/s

स्थिति हो जायेगी



(ii) $S_A = 10 \times 5 - \frac{1}{2} \times 1 \times 5^2 = 37.5$ m

$S_B = \frac{1}{2} \times 1 \times 5^2 = 12.5$ m

Example 29. उपरोक्त प्रश्न में A तथा B पर गतिज घर्षण द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : $(W_{KF})_{on}$ A $= 10 \times 37.5 \cos 180° = -375$ J

$(W_{KF})_{on}$ B $= 10 \times 12.5 \cos 0 = 125$ J

A व B निकाय पर गतिज घर्षण द्वारा किया गया कार्य $= -375 + 125 = -250$ J

निकाय पर गतिज घर्षण द्वारा किया गया कार्य हमेशा ऋणात्मक होता है।

उत्पन्न उष्मा $= -(W_{KF})$ निकाय पर

(W_{KF}) निकाय पर $= -(f_K \times S_{relative}) = -10 \times 25 = -250$ J

सत्य / असत्य :

Example 30. किसी वस्तु पर गतिज घर्षण द्वारा किया कार्य कभी शून्य नही हो सकता है।

Answer : असत्य

Example 31. एक निकाय पर गतिज घर्षण द्वारा किया कार्य हमेशा ऋणात्मक होता है।

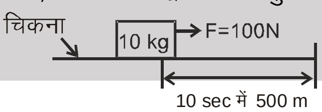
Answer : सत्य

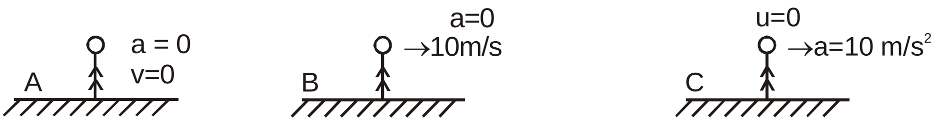
छद्म बल द्वारा किया गया कार्य (WORK DONE BY PSEUDO FORCE)

किसी वस्तु की गतिज उर्जा तंत्र पर निर्भर करती है क्योकि वेग तंत्र पर निर्भर राशि है। इसलिए छद्म बल का कार्य भी लेना होगा।

Solved Example

Example 32. एक 10 kg का ब्लॉक F = 100 N के बल से खीचा जाता है । ये प्रारम्भिक बिन्दु से 10 s में 500 m दूरी तय करता है। ये गति तीन प्रेक्षको A, B व C के द्वारा चित्रानुसार देखी जाती है।





A,B व C द्वारा देखा गया F द्वारा 10 sec में किया गया कार्य ज्ञात करो–

Solution : A के सापेक्ष $(W_F)_{\text{on block w.r.t A}} = 100 \times 500$ J $= 50,000$ J

B के सापेक्ष $(W_F)_{\text{on block w.r.t B}} = 100\,[500 - 10 \times 10] = 40,000$ J

C के सापेक्ष $(W_F)_{\text{on block w.r.t C}} = 100\,[500 - 500] = 0$

आन्तरिक बल द्वारा किया गया कार्य (WORK DONE BY INTERNAL FORCE)

$F_{AB} = -F_{BA}$ i.e., आन्तरिक बलों का योग शून्य है।
परन्तु ये आवश्यक नही है कि आन्तरिक बलों के द्वारा किया गया कार्य शून्य हो। आंतरिक कार्य करने के लिए निकाय के मध्य जरूर क्षरण तथा पुर्नभरण होगा। दृढ पिण्ड की स्थिति में आन्तरिक बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।

कार्य ऊर्जा प्रमेय (Work-Energy Theorem) :

कार्य ऊर्जा प्रमेय के अनुसार किसी कण पर सभी बलों द्वारा किया गया कार्य कण की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है।

$$W_C + W_{NC} + W_{PS} = \Delta K$$

जहां, W_C = सभी संरक्षी बलों द्वारा किया गया कार्य
W_{NC} = सभी असंरक्षी बलों द्वारा किया गया कार्य
W_{PS} = छद्म बल (या आभासी बल) द्वारा किया गया कार्य।

कार्य ऊर्जा प्रमेय का संशोधित रूप (Modified Form of Work-Energy Theorem) :

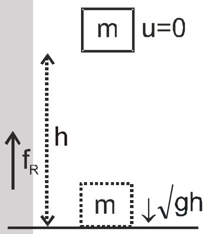
हम जानते है कि स्थितिज ऊर्जा संरक्षी बलों से संबंधित होती है। अतः $W_C = -\Delta U$
कार्य ऊर्जा प्रमेय के अनुसार $W_{NC} + W_{PS} = \Delta K + \Delta U$

$$W_{NC} + W_{PS} = \Delta E$$

Solved Examples

Example 33. एक m द्रव्यमान की वस्तु को h ऊँचाई से छोड़ा जाता है तथा ये धरातल से $\sqrt{gh}$ चाल से टकराती है। प्रतिरोधी बल द्वारा किया गया कार्य है।

Solution : अन्तिम व प्रारम्भिक स्थितियों को तथा सारे बलों को पहचानों।

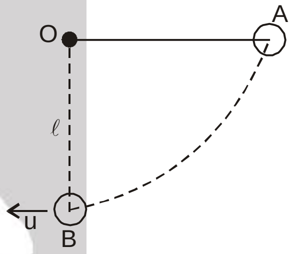


$$W_g + W_{\text{वायु प्रतिरोध}} + W_{\text{आन्तरिक बल}} = \Delta K$$

$$mgh + W_{\text{वायु प्रतिरोध}} + 0 = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{gh}\right)^2 - 0$$

$$\Rightarrow \quad W_{\text{वायु प्रतिरोध}} = -\frac{mgh}{2}$$

Example 34. जब रस्सी क्षैतिज है, तब एक ℓ लम्बाई के सरल लोलक के बॉब को छोड़ा जाता है, निचले बिन्दु पर इसकी चाल ज्ञात करें।

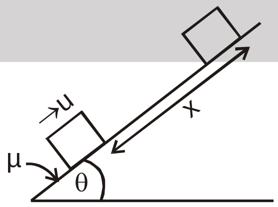


Solution : $W_g + W_T = \Delta K$

$$mg\ell + 0 = \frac{1}{2}mu^2 - 0$$

$$u = \sqrt{2g\ell}$$

Example 35. एक ब्लॉक को नततल के ऊपर चित्रानुसार u चाल दी जाती है।



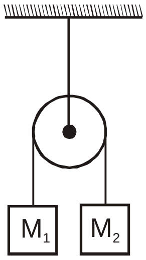
कार्य ऊर्जा प्रमेय का उपयोग करते हुये जब ब्लॉक रूक जाता है तो x ज्ञात करें।

Solution : $W_g + W_f + W_N = \Delta K$

$$-mg\,x\sin\theta - \mu\,mgx\cos\theta + 0 = 0 - \frac{1}{2}mu^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{u^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}$$

Example 36. M_1 तथा M_2 ($M_2 > M_1$) द्रव्यमान विरामवस्था से छोडे जाते है–



कार्य ऊर्जा प्रमेय का उपयोग करते हुये जब ये x दूरी चलते है इनका वेग ज्ञात करो–

Solution : $(W_{\text{all F}})_{\text{निकाय}} = (\Delta K)_{\text{निकाय}}$

$(W_g)_{sys} + (W_T)_{sys} = (\Delta K)_{sys}$ as $(W_T)_{sys} = 0$

$M_2gx - M_1gx = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)V^2 - 0$ .... (1)

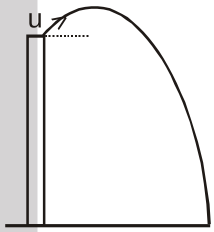
$V = \sqrt{\frac{2(M_2 - M_1)gx}{M_1 + M_2}}$

Example 37. उपरोक्त प्रश्न में ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो?

Solution : $(M_2g - M_1g) = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\, 2v\frac{dv}{dx}$ [समीकरण (1) का अवकलन करने पर]

$\Rightarrow \left(\frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2}\right)g = v\frac{dv}{dx} = a$

Example 38. h ऊँचाई की मीनार से एक पत्थर को प्रारम्भिक वेग u से प्रक्षेपित किया जाता है, कुछ समय पश्चात पत्थर धरातल पर गिर जाता है। धरातल से टकराते समय इसकी चाल ज्ञात करों।



Solution : $W_{\text{all forces}} = \Delta K$

$W_g = \Delta K$

$mgh = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$

$v = \sqrt{u^2 + 2gh}$

शक्ति (Power) :

कार्य करने की दर को शक्ति कहते है।

जब किसी कार्य को पूर्ण करने में लगा समय (अर्थात् कार्य कितना शीघ्र किया गया है) महत्वपूर्ण होता है, तो यह कार्य करने वाले कर्त्ता की शक्ति दर्शाता है (या प्रदर्शित करता है)।

किसी कर्ता द्वारा प्रदान औसत शक्ति ($\bar{P}$ या p_{av}) $\bar{P}$ या $p_{av} = \frac{W}{t}$ जहां W, t समय में किया गया कार्य है।

शक्ति दो अदिश राशियों कार्य तथा समय का अनुपात है अतः यह एक अदिश राशि है। यदि दिये गये कार्य को करने में अधिक समय लगता है तो शक्ति कम होगी। यदि dt समयांतराल में प्राप्त शक्ति P हो, तो $P = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{S}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F}\,.\,\vec{v}$

बिन्दु गुणनफल की परिभाषा से $P = FV\cos\theta$ जहां θ, $\vec{F}$ तथा $\vec{V}$ के मध्य अल्प कोण है। यह तात्क्षणिक शक्ति है। यह धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकती है।

Solved Example

Example 39. किसी रस्सी के एक सिरे पर एक ब्लॉक बंधा है तथा एक समान वृत्तीय गति कर रहा है। रस्सी द्वारा ब्लॉक पर आरोपित बल द्वारा प्राप्त शक्ति क्या होगी–ऋणात्मक, धनात्मक या शून्य?

Answer : शून्य

स्पष्टीकरण $\vec{F}$ तथा $\vec{v}$ परस्पर लम्बवत् है। $\therefore$ शक्ति = $\vec{F}\,.\,\vec{v}$ = Fv cos 90º = शून्य.

शक्ति की इकाई (Unit of Power) :

एकांक समय में किया गया एकांक कार्य, एकांक शक्ति के तुल्य होता है।

जब कार्य जूल में तथा समय t सैकण्ड में हो, तो शक्ति की इकाई जूल प्रति सैकण्ड होती है, इसे हम वॉट कहते है।

1 वॉट = 1 जूल/सैकण्ड = 10^7 अर्ग/सैकण्ड तथा 1 वॉट = $\dfrac{1\text{न्यूटन} \times 1\text{मी.}}{1\text{सेकण्ड}}$ = 1 न्यू. मी. से.$^{-1}$.

शक्ति का विमीय सूत्र

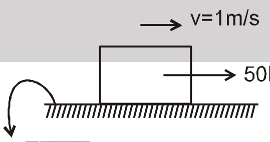
$$[\text{शक्ति}] = \frac{[\text{कार्य}]}{[\text{समय}]} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[T]} = [ML^2\,T^{-3}]$$

शक्ति में, द्रव्यमान की विमा = 1, लम्बाई की विमा = 2, समय की विमा = – 3

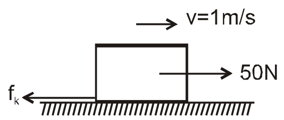
क्र.सं.	मानवीय क्रियायें	शक्ति (W)
1	दिल की धड़कन	1.2
2	सोना	83
3	बैठना	120
4	कार में बैठना	140
5	पैदल चलना (4.8 किमी./घंटा)	265
6	साईकिल चलाना (15 किमी./घंटा)	410
7	टेनिस खेलना	440
8	तैरना (छाती की तरफ से, 1.6 किमी./घंटा)	475
9	पहिये वाले जूतों पर चलना	535
10	सीढ़ियाँ चढ़ना (एक मिनट में 116 सीढ़ी)	685
11	साईकिल चलाना (21.3 किमी./घंटा)	700
12	बॉस्केट बॉल खेलना	800
13	ट्यूब लाईट	40
14	पंखा	60

Solved Example

Example 40. एक क्षैतिज सतह पर एक ब्लॉक क्षैतिज बल 50 N के प्रभाव में नियत वेग 1 m/s से चलता है। घर्षण तथा बाह्यः बल की शक्ति क्या है।



Solution :



चूंकि a = 0 i.e. f_k = 50 N

P_{ext} = 50 × 1 = 50 W

$\Rightarrow$ P_f = –50 × 1= –50 W

शक्ति दी गयी ऊर्जा की दर भी होती है।

कुल शक्ति = $P_1 + P_2 + P_3$ ....

$P_{net} = \frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt}$ ......

$\Rightarrow \quad P_{net} = \left(\frac{dW_1 + dW_2 + ...}{dt}\right)$

$P_{net} = \frac{dK}{dt} \qquad \because W_{all} = \Delta K$

$\therefore$ गतिज ऊर्जा में परिवर्तन की दर भी शक्ति है।

Solved Example

Example 41. एक पत्थर को क्षैतिज से θ कोण पर किसी वेग से प्रक्षेपित किया जाता है तो ज्ञात करो–

(i) t समय के दौरान गुरूत्व की औसत शक्ति।

(ii) समय t के दौरान गुरूत्वीय बल के कारण तात्क्षणिक शक्ति जहाँ पर t उड्डयन काल है।

(iii) औसत शक्ति कब शून्य है ?

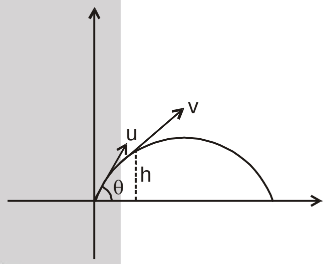
(iv) P_{inst} कब शून्य है ?

(v) P_{inst} कब ऋणात्मक है ?

(vi) P_{inst} कब धनात्मक है ?

Solution :

(i) $<P> = \frac{w}{T} = -\frac{mgh}{t} = -\frac{mg\left[u\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right]}{t}$



$<P> = mg\left[\frac{gt}{2} - u\sin\theta\right]$

(ii) तात्क्षणिक शक्ति

$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$= (-mg\,\hat{j})\,[u\cos\theta\;\hat{i} + (u\sin\theta - gt)\,\hat{j}\,)] = -mg(u\sin\theta - gt)$

(iii) $\frac{gt}{2} = u\sin\theta \Rightarrow \qquad t = \frac{2u\sin\theta}{g}$, i.e. उड्डयन काल

(iv) जब $\vec{F}$ तथा $\vec{V}$ लम्बवत् है अर्थात् $t = \frac{u\sin\theta}{g}$ पर, जो कि उच्चतम बिन्दु है।

(v) आधार से उच्चतम बिन्दु तक

(vi) उच्चतम बिन्दु से आधार तक

स्थितिज ऊर्जा

ऊर्जा : ये कार्य करने की आन्तरिक क्षमता है।

गतिज ऊर्जा : ये गति के कारण कार्य कर सकने की आंतरिक क्षमता होती है।

स्थितिज ऊर्जा : किसी निकाय का विन्यास विशेष के कारण कार्य करने की आन्तरिक क्षमता को स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।

उदाहरण : गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा, स्प्रिंग स्थितिज ऊर्जा इत्यादि।

स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy) :

परिभाषा :

किसी निकाय का विन्यास विशेष के कारण कार्य करने की आन्तरिक क्षमता को स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।
किसी वस्तु को निर्देश बिन्दु से दी गई स्थिति तक विस्थापित करने में संरक्षी बल द्वारा किये गये कार्य का ऋणात्मक मान उस स्थिति में वस्तु की स्थितिज ऊर्जा के तुल्य होता है।
अतः संरक्षी बल क्षेत्र में

$$\int_{U_1}^{U_2} dU = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \text{i.e.,} \qquad U_2 - U_1 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -W$$

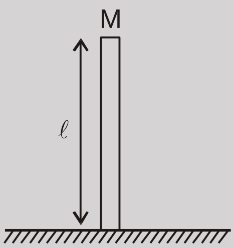
जहां तक संभव हो हम निर्देश तल अनन्त ∞ पर मानते है। और वहां स्थितिज ऊर्जा शून्य मानते है।
अतः यदि $r_1 = \infty$ तथा $U_1 = 0$ हो तो

$$U = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -W$$

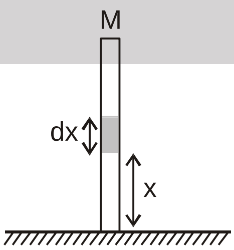
(a) गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा
$U = mgh$
m द्रव्यमान के एक कण के लिये जो कि निर्देशित स्तर से h ऊँचाई पर है।

Solved Example

Example 42 एक एकसमान ऊर्ध्वाधर M द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की छड की स्थितिज उर्जा ज्ञात करों



Solution : $dU = dm\, gh$



$$\int_0^U dU = \int_0^{\ell} \left(\frac{M}{\ell} dx\right) gx \qquad U = \frac{Mg\ell}{2}$$

(b) स्प्रिंग स्थितिज ऊर्जा

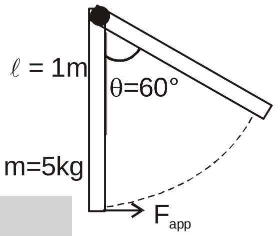
$U = \frac{1}{2}Kx^2$

जहां x सामान्य लम्बाई से लम्बाई में परिवर्तन है।

Note : गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक, धनात्मक या शून्य हो सकती है परन्तु स्प्रिंग स्थितिज ऊर्जा हमेशा धनात्मक होती है।

Solved Example

Example 43. दिये गये चित्र में एक m = 5kg द्रव्यमान तथा ℓ = 1m की छड़ एक सिरे पर कीलकित है। छड को धीरे–धीरे झुकी हुई अवस्था तक लाने में आरोपित बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करों।



Solution : $W_{ALL} = \Delta K$ कार्य ऊर्जा प्रमेंय द्वारा

$x = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\cos 60° = \frac{1}{4}$ m = 0.25 m

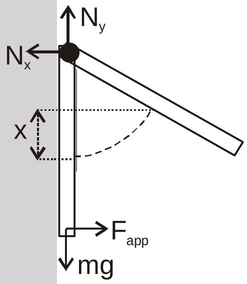
$W_{N_x} + W_{N_y} + W_g + W_{Fapp} = \Delta K$ $\quad (W_{N_x} = W_{N_y} = 0)$

$\therefore$ 0 – mg(0.25) + W_{Fapp} = 0 – 0

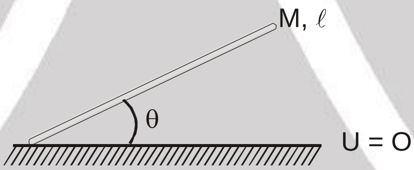
ΔK = 0 चूंकि धीरे–धीरे लाते है।

$\therefore W_{Fapp} = 5 \times 9.8 \times 0.25$

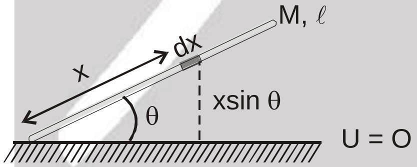
ये देखा जा सकता है कि $W_{Fapp} = mgh = 5 \times 9.8 \times 0.25$ J.



Example 44. चित्रानुसार दी गयी स्थिति में M द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की एकसमान छड रखी है। छड की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करों।



Solution :



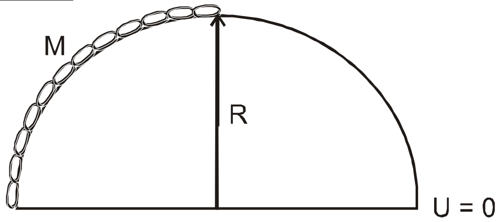
dU = dm.g.h

$\int dU = \int_0^{\ell} \frac{M}{\ell} dx \cdot g \cdot x \sin\theta$

$\therefore U = \frac{Mg\sin\theta\ell}{2}$

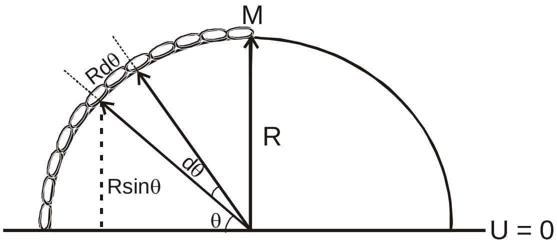
ध्यान दे कि छड का द्रव्यमान केन्द्र धरातल से $\left(\frac{\ell}{2}\sin\theta\right)$ ऊचाँई पर है।

Example 45.



एक M द्रव्यमान की जंजीर चित्रानुसार अर्द्धगोले पर रखी है। जंजीर की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करों।

Solution :



हम जानते है कि $\frac{\text{arc}}{\text{Radius}} = \theta$

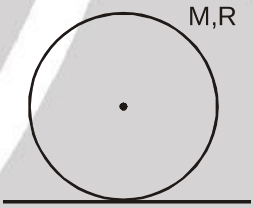
$\therefore$ अवयव की लम्बाई = $Rd\theta$ $\qquad \therefore \quad dm = \frac{M}{\pi/2}d\theta = \frac{2M}{\pi}d\theta$

अब $\quad dU = dmgh = \left(\frac{2M}{\pi}d\theta\right)(g)(R\sin\theta)$

$\therefore \quad \int_0^U dU = \frac{2M}{\pi}Rg\int_0^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta \quad \Rightarrow \quad U = \frac{2MgR}{\pi}(-\cos\theta)_0^{\pi/2}$

$\Rightarrow \quad U = Mg\left(\frac{2R}{\pi}\right)$ $\qquad$ [ध्यान दे कि $\left(\frac{2R}{\pi}\right)$ द्रव्यमान केन्द्र की ऊँचाई है]

Example 46. एक एकसमान ठोस गोला जिसका द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है, क्षैतिज सतह पर रखा है–



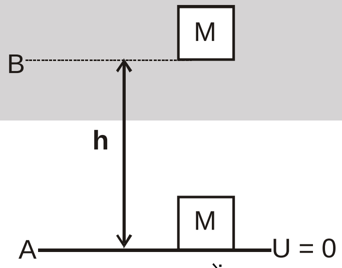
ठोस गोले की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करों –

Solution : $U = Mgh_{cm}$

सममित वस्तु हेतु द्रव्यमान केन्द्र वस्तु के ज्यामितीय केन्द्र पर होता है।

$\therefore \quad U = MgR$

Example 47. ब्लॉक को गति कराने पर गुरूत्व के द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करों



(i) A से B तक (ii) B से A तक (iii) ज्ञात करों $U_A - U_B$ (iv) ज्ञात करों $U_B - U_A$

Solution : $(W_g)_{A\text{ to }B} = -mgh$

$(W_g)_{B\text{ to }A} = mgh$

$U_A - U_B = -mgh$

$U_B - U_A = mgh$

ये कहा जा सकता है।

$W_g = -\Delta U$

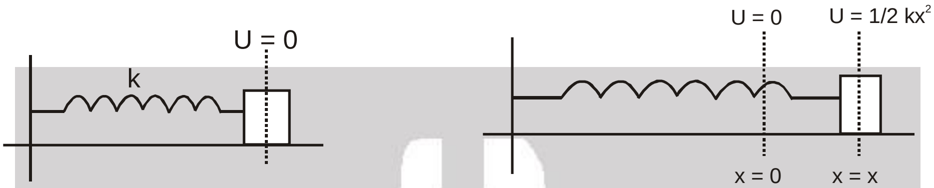
गुरूत्व के द्वारा किया गया कार्य स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन के ऋणात्मक के बराबर होता है।

i.e., $W_g = -[U_f - U_i]$ $\Rightarrow$ $W_g = U_i - U_f$

महत्वपूर्ण तथ्य :

1. स्थितिज ऊर्जा केवल संरक्षी बलों से संबंधित होती है। यह असंरक्षी बलों से संबंधित नहीं होती।
2. स्थितिज ऊर्जा धनात्मक, ऋणात्मक हो सकती है तथा यह निर्देश तंत्र की स्थिति पर निर्भर करती है।
3. स्थितिज ऊर्जा निर्देश तंत्र पर निर्भर करती है लेकिन स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन निर्देश तंत्र पर निर्भर नहीं करता।
4. स्थितिज ऊर्जा किसी कण की नहीं बल्कि किसी निकाय की होती है।
5. स्थितिज ऊर्जा स्थिति का फलन होता है लेकिन पथ पर निर्भर नहीं करती।

स्प्रिंग बल के द्वारा किया गया कार्य

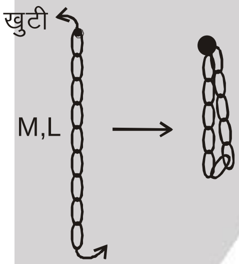


उपरोक्तानुसार $W_{SP} = -\Delta U$

$\therefore$ $W_{SPF} = -\Delta U$; $W_{SPF} = U_i - U_F$; $W_{SPF} = 0 - \frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}kx^2$

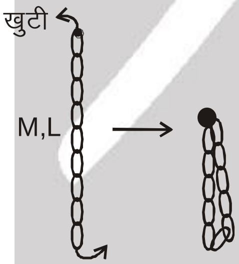
Solved Examples

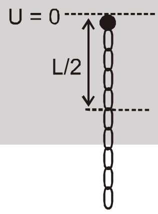
Example 48.



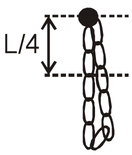
जंजीर के निचले सिरे को धीरे–धीरे उठाकर खूंटी पर रखने के दौरान बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो?

Solution :





प्रारम्भ में $U_i = -Mg\frac{L}{2}$



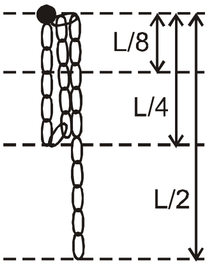
$U_f = -Mg\frac{L}{4}$

$\therefore W_g = U_i - U_f = (-Mg\frac{L}{2}) - (-Mg\frac{L}{4}) = -Mg\frac{L}{4}$

कार्य ऊर्जा प्रमेय से, $W_g + W_{ext} = \Delta K = 0$ $\Rightarrow$ $W_{ext} = -W_g = Mg\frac{L}{4}$

Example 49. उपरोक्त उदाहरण में मध्य जोड को धीरे से खूंटी पर टॉगने के दौरान बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution :

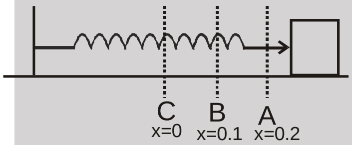


$U_i = -\,Mg\dfrac{L}{2}$;

$U_f = \left(-\left(\dfrac{M}{2}\right)g\dfrac{L}{8}\right) - \left(\dfrac{M}{2}g\dfrac{L}{4}\right)$

$\therefore\ W_{ext} = U_f - U_i = \dfrac{5}{16}MgL$

Example 50



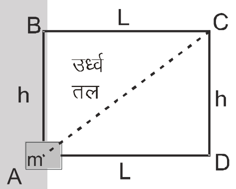
A से B तथा B से C के दौरान स्प्रिंग बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करें। x = 0 प्राकृतिक लम्बाई की स्थिति है।

Solution : $(W_{spring})_{A\rightarrow B} = U_i - U_f = \dfrac{1}{2}K(0.2)^2 - \dfrac{1}{2}K(0.1)^2$

$\therefore\ (W_{spring})_{A\rightarrow B} = \dfrac{3}{2}$ J

इसी तरह $(W_{spring})_{BC} = \dfrac{1}{2}$ J

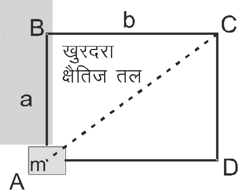
Example 51 **(a)** m द्रव्यमान को A से C तक तीन विभिन्न पथों से ले जाते है।



(i) ABC
(ii) ADC
(iii) AC

तीनों स्थितियों में गुरूत्व के द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करें।

(b) द्रव्यमान को A से C तक तीन विभिन्न पथों से ले जाते है।



आरोपित बल क्षैतिज है घर्षण बल के द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करें।

(i) ABC
(ii) ADC
(iii) AC

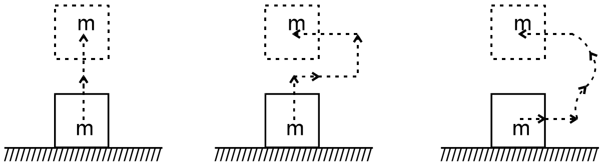
Solution : **(a)** (i) –mgh (ii) –mgh (iii) –mgh

(b) (i) $W_{ABC} = -\mu mg\,(a+b)$

(ii) $W_{ADC} = -\mu mg\,(a+b)$

(iii) $W_{AC} = -\mu mg\,(\sqrt{a^2+b^2})$

संरक्षी बल (CONSERVATIVE FORCES) :



किसी बल को संरक्षी बल कहते है, यदि किसी वस्तु को गाति कराने मे बल के द्वारा या विरूद्ध किया गया कार्य
(a) केवल आरम्भिक एवं अंतिम स्थिति पर ही निर्भर करता है पथ पर निर्भर नहीं करता है।
(b) अंतिम एवं आरम्भिक स्थितियों के मध्य पथ की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता है।

उपरोक्त चित्रानुसार माना m द्रव्यमान की वस्तु को ऊर्ध्वाधर h ऊँचाई तक उठाया जाता है तो किया गया कार्य mgh है। यदि वस्तु को चित्र (b) में दर्शाये पथ के अनुसार ले जाये तो क्षैतिज गति के दौरान कार्य शून्य होता है लेकिन उर्ध्वाधर भाग वाले पथ से ले जाने पर कार्य का मान mgh प्राप्त होता है।

अब वस्तु को चित्र (C) में दर्शाये ऐच्छिक पथ से ले जाते है यदि हम सम्पूर्ण पथ को सूक्ष्म क्षैतिज तथा उर्ध्वाधर भागों में विभाजित कर दें तो क्षेतिज भागों में किया गया कार्य शून्य होता है तथा उर्ध्वाधर भागों को जोड़ने पर किया गया कार्य पुनः mgh प्राप्त होता है।

अतः किसी वस्तु को गुरूत्वाकर्षण के विरूद्ध ऊपर उठाने में किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता है। यह वस्तु की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति पर निर्भर करता है। अतः गुरूत्व बल एक संरक्षी बल होता है।

संरक्षी बल के उदाहरण :

(i) गुरूत्वाकर्षण बल केवल पृथ्वी के कारण ही नहीं होता, इसका व्यापक रूप सार्वत्रिक गुरूत्वाकर्षण बल के नियम से प्राप्त होता है। यह संरक्षी बल होता है।
(ii) किसी खिंची हुई या संपीड़ित स्प्रिंग में स्प्रिंग बल संरक्षी बल होता है।
(iii) दो आवेशों के मध्य लगने वाला स्थिर वैद्युत बल संरक्षी बल होता है।
(iv) दो चुम्बकीय ध्रुवों के मध्य लगने वाला चुम्बकीय बल संरक्षी बल होता है।

दो वस्तुओं के केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश लगने वाला बल केन्द्रीय बल कहलाता है। गुत्वाकर्षण बल तथा स्थिर वैद्युत बल केन्द्रीय बल होते है। केन्द्रीय बल सदैव संरक्षी बल होते है।

संरक्षी बलों के गुण :

(i) संरक्षी बल के द्वारा या संरक्षी बल के विरूद्ध किया गया कार्य केवल वस्तु की अन्तिम तथा प्रारम्भिक स्थिति पर निर्भर करता है।

(ii) संरक्षी बल के द्वारा या संरक्षी बल के विरूद्ध किया गया कार्य वस्तु की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थितियों के मध्य तय किये गये पथ की प्रकृति पर निर्भर नहीं करता है।
यदि किसी वस्तु को, वस्तु की प्रारम्भिक स्थिति से अन्तिम स्थिति तक ले जाने में बल द्वारा किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करे तो बल संरक्षी होता है।

(iii) संरक्षी बल द्वारा या संरक्षी बल के विरूद्ध बन्द पथ के अनुदिश किया गया कार्य शून्य होता है।
यदि किसी वस्तु को बन्द पथ के अनुदिश ले जाने में बल द्वारा किया गया कार्य शून्य है तो बल संरक्षी होता है। अन्यथा बल असंरक्षी होता है।
स्थितिज ऊर्जा संरक्षी बल अथवा संरक्षी बल क्षेत्र से संबंधित होती है।

(iv) संरक्षी बल द्वारा किये गये कार्य की पुनः प्राप्ति संभव है।
कार्य की पुनः प्राप्ति संरक्षी बल का महत्वपूर्ण तथ्य है।

असंरक्षी बल :

यदि किसी वस्तु पर बल के द्वारा अथवा बल के विरूद्ध किया गया कार्य आरम्भिक स्थिति एवं अंतिम स्थिति के मध्य पथ पर निर्भर करता है तो बल असंरक्षी होता है।

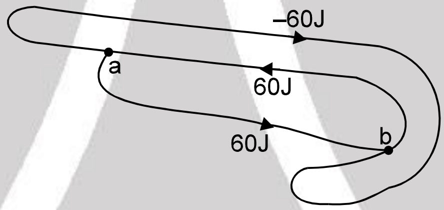
घर्षण बल असंरक्षी बल होते है। घर्षण बल के द्वारा किया गया कार्य पथ की लम्बाई पर निर्भर करता है। यह अंतिम एवं आरम्भिक स्थितियों पर निर्भर नहीं करता है। एक पूर्ण परिक्रमा में घर्षण बल के द्वारा किया गया कार्य शून्य नहीं होता है।

असंरक्षी बल के उदाहरण : वेग पर निर्भर बल जैसे वायु प्रतिरोध, श्यान बल, तथा चुम्बकीय बल आदि।

क्र.सं.	संरक्षी बल	असंरक्षी बल
1	कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता।	कार्य पथ पर निर्भर करता है।
2	बंद पथ में कार्य शून्य होता है।	बंद पथ में कार्य शून्य नहीं होता है।
3	केन्द्रीय बल होते है।	वेग पर निर्भर करता है तथा अवमंदन प्रकृति के बल।
4	जब किसी निकाय पर केवल संरक्षी बल कार्यरत हो तो निकाय की गतिज ऊर्जा अथवा स्थितिज ऊर्जा परिवर्तित हो सकती है किन्तु इनका योग अर्थात् निकाय की यांत्रिक ऊर्जा अपरिवर्तित रहती है।	असंरक्षी बल के द्वारा किया गया कार्य सामान्यतया ऊष्मा ऊर्जा में परिवर्तित होकर यांत्रिक ऊर्जा में कमी करता है।
5	किये गये कार्य की पुनः प्राप्ति संभव है।	किये गये कार्य की पुनः प्राप्ति सम्भव नहीं है।

Solved Examples

Example 52. चित्रानुसार a तथा b बिन्दु तीन पथों द्वारा जुड़े है। किसी कण पर F बल लगाकर प्रदर्शित प्रत्येक पथ की दिशा के अनुदिश ले जाया जाता है तो क्या दी गई सूचना के आधार पर बल ' F ' संरक्षी है।



Answer : नहीं

कारण : संरक्षी बल के लिए, बंद पथ में किया गया कार्य शून्य होना आवश्यक है।

Example 53. एक कण को बिन्दु A (0, 0) से बिन्दु B(2, 3) तक विस्थापित करने में बल $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$ द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करों

Solution : $dW = \vec{F}.\vec{ds} = (x\hat{i} + y\hat{j}).(dx\hat{i} + dy\hat{j})$

$$W = \int_0^2 x dx + \int_0^3 y dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3 = \frac{13}{2} \text{ इकाई}$$

सत्य या असत्य

Example 54. एक अंसरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य दो विभिन्न पथों के अनुदिश हमेशा भिन्न होगा।

Answer : असत्य

Example 55. असंरक्षी बल के द्वारा किया गया कार्य दो विभिन्न पथों के अनुदिश भिन्न हो सकता है।

Answer : सत्य

Example 56. असंरक्षी बल के द्वारा किया गया कार्य सभी संभव पथों के अनुदिश समान नही हो सकता है।

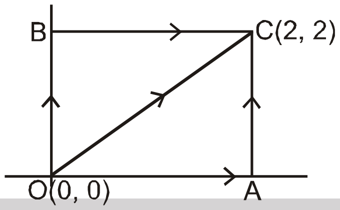
Answer : सत्य

Example 57. एक कण को बिन्दु O(0, 0) से बिन्दु C(2, 2) तक विस्थापित करने में बल $\vec{F} = x\hat{i} + xy\hat{j}$ के द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करों।

Solution : $\int dW = \int_0^2 x dx + \int_0^2 xy dy$

ज्ञात किया जा सकता है। ज्ञात नही किया जा सकता है
जब तक x, y के पदों में ज्ञात नही हो
या पथ की समीकरण ज्ञात नही हो

Example 58. उपरोक्त उदाहरण में O से C के दौरान $\vec{F}$ द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करों यदि पथ चित्रानुसार दिया हों–



Solution : OAC $\Rightarrow$ OA + AC

OA के लिए y = 0 dy = 0

$\therefore \int dW_{OA} = \int_0^2 x dx + 0 \qquad \therefore \qquad W_{OA} = 2$ J

AC के लिये x = 2 dx = 0

$\int dW_{AC} = 0 + 2\int_0^2 y dy \qquad \therefore \qquad W_{AC} = 4$J

$W_{OAC} = W_{OA} + W_{AC} = 2 + 4 = 6$J

(ii) OBC $\Rightarrow$ OB + BC

OB के लिए x = 0 dx = 0 $W_{OB} = O$

BC के लिए y = 2 dy = 0

$\therefore \int dW = \int x dx \qquad W = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 \qquad \therefore \qquad W_{OAC} \neq W_{OBC}$

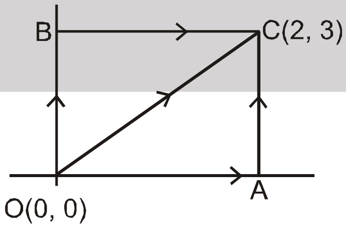
चूंकि बल असंरक्षी है।

(iii) W_{OC} के लिए dW = xdy + xydx

OC के लिए x = y dx = dy

$dW = \int_0^2 x dx + \int_0^2 y^2 dy \qquad W = \frac{14}{3}$ unit

Example 59. दिये गये पथों के अनुदिश बिन्दु O से C तक विस्थापित करने में बल $\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j}$ के द्वारा किया गया ज्ञात करों। ज्ञात करो कि ये बल संरक्षी है या असंरक्षी है।



Solution : (i) OAC $\Rightarrow$ OA + AC

OA के लिये y = 0 dy = 0

dW = 0 $W_{OA} = 0$

AC के लिये x = 2 dx = 0

$\int dW = \int_0^3 dy \Rightarrow W = 6 \text{ J} \Rightarrow W_{OAC} = 6$ इकाई

(ii) OBC $\Rightarrow$ OB + BC

OB के लिये $x = 0 \quad dx = 0 \quad \therefore \quad dW = 0$

BC के लिये $y = 3 \quad dy = 0$

$\int dW = \int_0^2 3dx \Rightarrow$ W = 6 इकाई $\Rightarrow$ W_{OBC} = 6 इकाई

(iii) OC OC के लिये $y = \frac{3}{2}x \qquad dy = \frac{3}{2}dx$

$\therefore \quad \int dW = \int_0^2 \frac{3}{2}xdx + \int_0^2 \frac{3}{2}xdx \Rightarrow \int dW = 3\int_0^2 x^2dx \Rightarrow$ W_{OC} = 6 इकाई

उपरोक्त बल संरक्षी लग रहा है पर हम निश्चित तौर पर ये नही कह सकते जब तक हमे इसके पथ की जानकारी नही है। परन्तु फिर भी हम इसका समाकलन कर सकते है।

दुबारा हमारे पास है $dw = xdy + ydx$ & $xdy + ydx$ लिखा जा सकता है dxy

$\therefore \quad \int dW = \int dxy \Rightarrow W = \int_{0,0}^{2,3} dxy = [xy]_{0,0}^{2,3} = 6J$

उपरोक्त का समाकलन करने के लिये पथ की जानकारी होना जरूरी नही है अतः उपरोक्त F संरक्षी है।

स्थितिज ऊर्जा तथा संरक्षी बल (POTENTIAL ENERGY AND CONSERVATIVE FORCE)

$F_S = -\partial U/\partial s$,

अर्थात् विस्थापन 'dr' की दिशा में दिये गये बिन्दु पर बल सदिश F, दी गई दिशा के सापेक्ष स्थितिज ऊर्जा U के अवकलन के विपरीत चिन्ह के बराबर होता है। आंशिक अवकलन /s का अनुप्रयोग एक निश्चित दिशा के सापेक्ष अवकलन के लिए करते है।

अतः फलन U के x, y, z के सापेक्ष विपरीत चिन्ह के आंशिक अवकलन प्राप्त होने पर, हमें बल सदिश F के **i**, **j** तथा **k** एकांक सदिश पर प्रक्षेप क्रमशः F_x, F_y तथा F_z प्राप्त होते है। इस प्रकार, आसानी से सदिश प्राप्त कर सकते है। $F = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$, या जब संरक्षी बल धनात्मक कार्य करते है तो स्थितिज ऊर्जा घटती है।

$dU = -dw$

$dU = -F.ds$

$dU = -(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$

$dU = -F_xdx - F_ydy - F_zdz$

यदि y तथा z नियत हो तो, $dy = 0 \; dz = 0$

$dU = -F_xdx$

$\therefore \quad F_x = -\frac{dU}{dx}$ यदि y व z नियत हो तो

$F_x = \frac{-\partial U}{\partial x}$

इसी तरह $F_y = \frac{-\partial u}{\partial y}$; $F_z = \frac{-\partial u}{\partial z}$

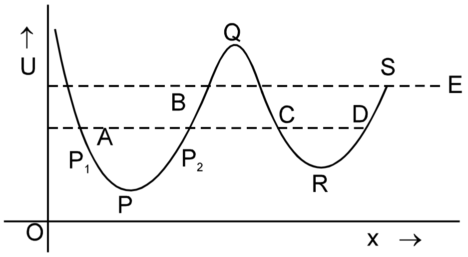
$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right)$.

कोष्ठक के अन्दर प्राप्त राशि को ढाल या ग्रेड U या ΔU से प्रदर्शित करते है। हम ΔU का प्रयोग करेंगे जिसका प्रयोग सरल होगा जहाँ पर ∇ (नेबला) सांकेतिक सदिश को बताता है।

$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$

स्थितिज ऊर्जा वक्र (Potential Energy curve) :

(a) किसी कण की स्थितिज ऊर्जा और कण के बल क्षेत्र के केन्द्र से विस्थापन के मध्य वक्र स्थितिज ऊर्जा वक्र कहलाता है।



(b) ग्राफ से, विभिन्न स्थितियों पर कण की गति की दर ज्ञात की जा सकती है।

(c) कण पर बल $F_{(x)} = -\frac{dU}{dx}$

Case-I : x का मान बढ़ाने पर, यदि U का मान बढ़ता है तो बल (–) ve x दिशा में होता है अर्थात् आकर्षण बल।

Case-II : x का मान बढ़ाने पर, यदि U में कमी होती है तो बल (+)ve x दिशा में होगा अर्थात् प्रतिकर्षण बल।

Solved Examples

Example 60. स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}kx^2$ से दी गयी है, जहॉं x स्प्रिंग मे विस्तार है, इस स्थितिज ऊर्जा से सम्बन्धित बल ज्ञात करें।

Solution : $F_x = \frac{-\partial u}{\partial x} = -kx$ $\quad F_y = 0 \quad F_z = 0.$

Example 61. मुक्त क्षेत्र में एक कण की स्थितिज ऊर्जा $U = x^2 + y^2$ है ? इस स्थितिज ऊर्जा से सम्बन्धित बल ज्ञात करें ।

Solution : $F_x = \frac{-\partial u}{\partial x} = -[2x + 0] = -2x$

$F_y = \frac{-\partial u}{\partial y} = -(2y + 0) = -2y$

$\vec{F} = -2x\hat{i} - 2y\hat{j}$

Example 62. दिये गये बल $\vec{F} = -2x\hat{i} - 2y\hat{j}$ की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करें।

Solution : $dU = -dW$

$\int dU = \int -(-2x\hat{i} - 2y\hat{j}) \bullet (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \quad \Rightarrow \quad \int dU = \int 2xdx + \int 2ydy$

$\therefore \quad U = x^2 + y^2 + C$

Example 63. बल $F = y\hat{i} + x\hat{j}$ की स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करें।

Solution : $dU = -dW$

$dU = -(y\hat{i} + x\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$

$\int dU = \int -ydx + \int -xdy \Rightarrow \quad \int dU = -\int dxy \Rightarrow \quad U = -xy + c$

Example 64. स्थितिज ऊर्जा $U = -xy$ के लिये बल ज्ञात करें।

Solution : $\vec{F} = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}\right] \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\left[\frac{\partial(-xy)}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial(-xy)}{\partial y}\hat{j}\right]$

$\vec{F} = y\hat{i} + x\hat{j}$ अतः पिछले उदाहरण को जॉंचते हुये

एक कण की साम्यवस्था
कण की विभिन्न स्थिति

साम्यवस्था की स्थिति : यदि किसी वस्तु पर कार्यरत बाह्य बलों का कुल योग शून्य हो तो वस्तु साम्यवस्था में होती है।

साम्यवस्था के लिए $\frac{dU}{dx} = 0$. स्थितिज ऊर्जा वक्र में बिन्दु P, Q, R तथा S साम्य बिन्दु कहलाते है।

साम्यवस्था के प्रकार :

- **स्थायी साम्यवस्था :** जब किसी कण को साम्यवस्था से अल्प विस्थापित करने पर वस्तु पर कार्यरत परिणामी बल यदि वस्तु को पुनः साम्यवस्था में ले आता है तो इसे स्थायी साम्यावस्था कहते है।

  आवश्यक शर्त : $-\frac{dU}{dx} = 0$, अर्थात् $\frac{d^2U}{dx^2} = +ve$ (न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा)

- **अस्थायी साम्यवस्था :** किसी कण को साम्यवस्था से अल्प विस्थापित करने पर वस्तु पर जो परिणामी बल लगता है, यदि वस्तु को विस्थापन के अनुदिश ले जाने का प्रयास करता है व वस्तु साम्यवस्था से दूर चली जाती है तो इसे अस्थायी साम्यावस्था कहते है।

  शर्त : $-\frac{dU}{dx} = 0$ अधिकतम स्थितिज ऊर्जा अर्थात् $= \frac{d^2U}{dx^2} = -ve$

- **उदासीन साम्यवस्था :** उदासीन साम्यवस्था की स्थिति में स्थितिज ऊर्जा नियत रहती है। साम्यवस्था से वस्तु को विस्थापित करने पर भी वस्तु पर कोई परिणामी बल नहीं लगता है व वस्तु विस्थापित करने पर भी साम्यवस्था की स्थिति में ही रहती है तो यह स्थिति उदासीन साम्यावस्था की स्थिति कहलाती है।

  एक कण साम्यावस्था में है यदि कण का त्वरण शून्य है। चूंकि त्वरण तंत्र पर निर्भर राशि है अतः साम्यावस्था प्रेक्षक की गति पर भी निर्भर करती है।

Solved Examples

Example 65. दो अणुओं के मध्य स्थितिज ऊर्जा, $U_{(x)}$ की उनके मध्य दूरी पर निर्भरता निम्न है $U_{(x)} = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$, जहाँ a तथा b धनात्मक नियतांक है तथा x अणुओं के मध्य दूरी है, तो निकाय स्थायी साम्यवस्था में होगा जब –

(A) $x = 0$ (B) $x = \frac{a}{2b}$ (C) $x = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$ (D) $x = \left(\frac{11a}{5b}\right)$

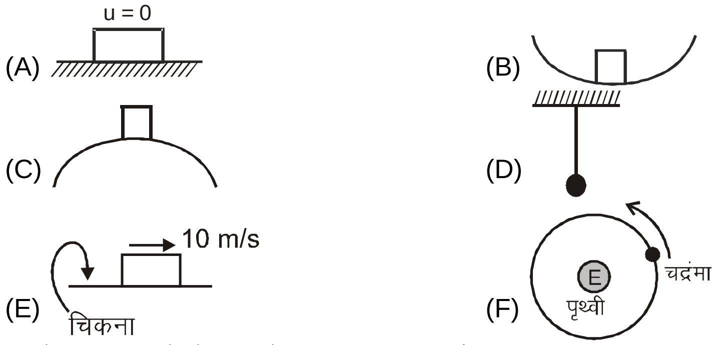
Solution : (C) दिया है, $U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$

हम जानते है $F = -\frac{du}{dx} = (-12)\,a\,x^{-13} - (-6b)\,x^{-7} = 0$

या $\frac{-6b}{x^7} = \frac{12a}{x^{13}}$ या $x^6 = 12a/6b = 2a/b$ या $x = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$

$\frac{d^2U}{dx^2} = +ve$ at $x = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$

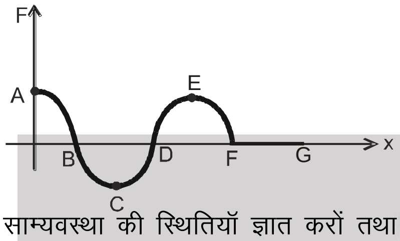
Example 66.



उपरोक्त स्थितियों में किसमें साम्यवस्था नही है।

Solution : (F) क्योकि चन्द्रमा हमेशा त्वरित है। ये अभिकेन्द्रीय त्वरण रखता है या ये हर समय वेग बदलता रहता है।

Example 67.



साम्यवस्था की स्थितियॉं ज्ञात करों तथा बताओं ये कौनसी साम्यावस्था है–स्थायी, अस्थायी या उदासीन।

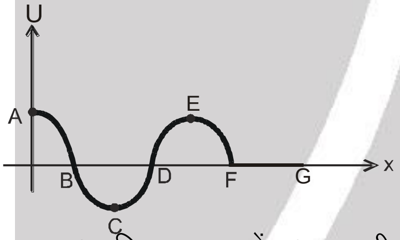
Solution : B, D, F पर बल शून्य है अतः यहॉं साम्यवस्था होगी

साम्यवस्था का प्रकार ज्ञात करने के लिये इसे थोडा सा विस्थापित कर दे।

B पर स्थायी साम्यवस्था है।

D पर अस्थायी साम्यवस्था है तथा F पर उदासीन साम्यवस्था है।

Example 68.



साम्यवस्था बिन्दु ज्ञात करों तथा उनकी प्रकृति के बारे में बताओं।

Solution : C, E, F साम्यवस्था बिन्दु है क्योकि $F = \frac{-\partial U}{\partial x}$ जब U - x वक्र का ढाल शून्य है तब F शून्य है।

नजदीकी बिन्दुओं के ढाल द्वारा स्थायित्व को जॉंचों

यदि हम दॉयी और चलते है, तो ढाल धनात्मक होना चाहिये स्थायी साम्यवस्था के लिये तथा इसका विपरीत। सूक्ष्म रूप में ये पहाडी तथा खड्डे की तरह से है।

यांत्रिक ऊर्जा (MECHANICAL ENERGY) :

परिभाषा : किसी वस्तु अथवा निकाय की स्थितिज ऊर्जा एवं गतिज ऊर्जा का योग, निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा (E) कहलाता है। E = K + U

यांत्रिक ऊर्जा से संबंधित महत्वपूर्ण तथ्य :

1. यह अदिश राशि है इसकी विमा $[ML^2T^{-2}]$ तथा SI इकाई जूल है।

2. यांत्रिक ऊर्जा निर्देश तंत्र पर निर्भर करती है।

3. एक वस्तु बिना गतिज ऊर्जा या बिना स्थितिज ऊर्जा रखे यांत्रिक ऊर्जा रख सकती है। परन्तु यदि किसी वस्तु की गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा शून्य है तो उसकी यांत्रिक ऊर्जा भी शून्य होगी परन्तु इसका विपरित सत्य भी हो सकता है ओर असत्य भी। लेकिन यदि किसी वस्तु की यांत्रिक ऊर्जा (E = 0) शून्य है, तो गतिज ऊर्जा एवं स्थितिज ऊर्जा में से कोई भी शून्य हो सकता है या स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक हो सकती है और गतिज ऊर्जा धनात्मक हो सकती है। अतः KE + PE = 0

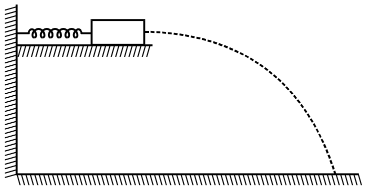
4. यांत्रिक ऊर्जा E = K + U, अर्थात् E – U = K, चूंकि K हमेशा धनात्मक होती है। इसलिए $E - U \geq 0$ अतः किसी क्षेत्र में उपस्थित कण के लिए $E \geq U$ होता है।

5. यांत्रिक ऊर्जा E = K + U, K हमेशा धनात्मक होती है, अतः यदि 'U' भी धनात्मक है तो 'E' भी धनात्मक होगी। यदि 'U' ऋणात्मक है तो यांत्रिक ऊर्जा, $K > |U|$ के लिए धनात्मक तथा $K < |U|$ के लिए ऋणात्मक होगी। अर्थात् किसी वस्तु या निकाय की यांत्रिक ऊर्जा का ऋणात्मक होने का अर्थ है स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक होगी तथा इसका परिमाण गतिज ऊर्जा से अधिक होगा। इस अवस्था को निकाय की बद्ध (बंधित) अवस्था कहते है।

उदाहरण : किसी परमाणु का इलेक्ट्रॉन या ग्रह के चारों ओर घूमता हुआ उपग्रह बंधित अवस्था में होते है।

Solved Examples

Example 69. दिये गये चित्र में एक स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय दिखाया गया है। 500 g द्रव्यमान के छोटे ब्लॉक को एक क्षैतिज स्प्रिंग के विरूद्ध 5.0 cm तक दबाया जाता है। स्प्रिंग क्षैतिज अवस्था में एक सिरे से जड़वत् है। स्प्रिंग का बल नियतांक 500 N/m है। जब इसको छोड़ा जाता है तो ब्लॉक क्षैतिज रूप से तब तक गति करता है जब तक यह स्प्रिंग को नहीं छोड़ दें। 4 m नीचे धरातल पर यह कहाँ टकरायेगा ?



Solution : जब ब्लॉक को छोड़ा जाता है तो यह क्षैतिज दिशा में स्प्रिंग को छोड़ते समय V चाल से गति करता है।

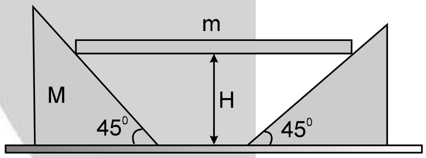
ऊर्जा संरक्षण से $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$

$V^2 = \frac{kx^2}{m} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{kx^2}{m}}$ उड्डयन काल $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

अतः स्प्रिंग के सिरे से क्षैतिज दिशा में तय की गई दूरी $= V \times t = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} \times \sqrt{\frac{2H}{g}}$

$= \sqrt{\frac{500 \times (0.05)^2}{0.5}} \times \sqrt{\frac{2 \times 4}{10}}$ = 2 m अतः यह स्प्रिंग के मुक्त सिरे से क्षैतिज दिशा में 2 m दूरी पर गिरेगा।

Example 70. m द्रव्यमान की दृढ़ वस्तु दो चिकने M द्रव्यमान के गुटकों पर H ऊचाँई पर चित्रानुसार रखी हुई है। गुटके घर्षणरहित तल पर स्थिरावस्था में है। वस्तु को छोड़ने पर यह नीचे की तरफ गति करती है तथा इन गुटको को एक सिरे पर दबाती है। जब वस्तु जमीन से h ऊचाँई पर हो तो उस समय ये गुटके एक दूसरे से किस वेग से दूर जाऐंगे।



(A) $\sqrt{\frac{2mg(H-h)}{m+2M}}$ (B) $\sqrt{\frac{2mg(H-h)}{2m+M}}$ (C) $\sqrt{\frac{8mg(H-h)}{m+2M}}$ (D) $\sqrt{\frac{8mg(H-h)}{2m+M}}$

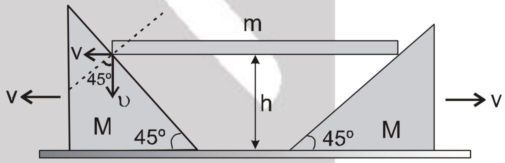
Solution : माना गुटके तथा दृढ़ वस्तु की चाल क्रमशः V तथा υ है

नत तल बंधन से

$V \cos 45^\circ = \upsilon \cos 45^\circ$

$\therefore \quad V = \upsilon$ ...(i)

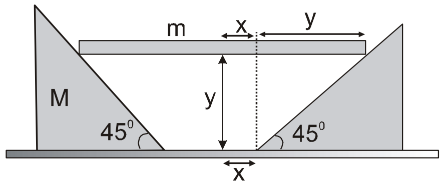
ऊर्जा संरक्षण से,



$mg(H-h) = 2\left(\frac{1}{2}MV^2\right) + \frac{1}{2}m\upsilon^2$ ...(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से $V = \sqrt{\frac{2mg(H-h)}{m+2M}}$

$\therefore$ एक दूसरे से दूर होने का वेग $= 2 \times V = \sqrt{\frac{8mg(H-h)}{m+2M}}$ अतः उत्तर **(C)** है।



वैकल्पिक : ℓ = छड़ की लम्बाई

$$x + y = \frac{\ell}{2} \quad ; \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$$

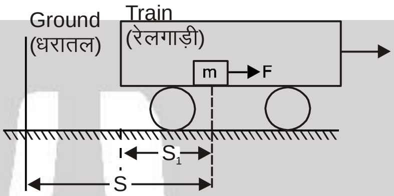
गुटके की चाल = छड़ की चाल

स्थितिज ऊर्जा में कमी = गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$mg(H-h) = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} MV^2$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{2mg(H-h)}{2M+m}} \qquad \therefore 2V = \sqrt{\frac{8mg(H-h)}{2M+m}}$$

Example 71. m द्रव्यमान का एक ब्लॉक क्षैतिज सीधी पटरियों पर v_c (जमीन के सापेक्ष) चाल से गतिशील रेलगाड़ी में स्थित घर्षण रहित मेज पर चित्रानुसार स्थिरावस्था में रखा है। रेलगाड़ी की दिशा में चलता हुआ यात्री इस ब्लॉक पर कुल क्षैतिज बल F, t समय के लिए आरोपित करता है तो



(i) रेलगाड़ी में स्थित यात्री के सापेक्ष ब्लॉक की अन्तिम चाल क्या होगी ?
(ii) जमीन पर रेलगाड़ी से बाहर खड़े हुए यात्री के सापेक्ष ब्लॉक की चाल क्या होगी ?
(iii) रेलगाड़ी में स्थित आदमी के सापेक्ष ब्लॉक की गतिज ऊर्जा में कितना परिवर्तन होगा ?
(iv) धरातल पर खड़े यात्री के सापेक्ष ब्लॉक की गतिज ऊर्जा में कितना परिवर्तन होगा ?
(v) F, m तथा t के पदों में रेलगाड़ी में स्थित यात्री के सापेक्ष इस ब्लॉक को बल कितना विस्थापित करेगा ?
(vi) धरातल पर स्थित यात्री के सापेक्ष ब्लॉक मे कितना विस्थापन होगा ?
(vii) बल द्वारा प्रत्येक के लिए किया गया कार्य कितना होगा ?
(viii) किये गये कार्य की प्रत्येक यात्री के लिए गतिज ऊर्जा से तुलना करो।
(ix) इस परिणाम से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते है ?

Ans. **(i)** $a_1 = F/m$, अतः $v_1 = a_1 t = Ft/m$. **(ii)** अतः वेगों को जोड़ने पर, $v = v_c + v_1 = v_c + Ft/m$
(iii) $\Delta K_1 = m(v_1)^2/2 = F^2t^2/2m$ **(iv)** $\Delta K = m(v_c + v_1)^2/2 - mv_c^2/2$
(v) s_1 के लिए $a_1t^2/2 = Ft^2/2m$ **(vi)** $s_1 + v_c t$
(vii) $W_g = F\left[V_c t + \frac{1}{2}\frac{Ft^2}{m}\right]$, $W_t = F\left[\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2\right]$
(viii) W व W_1 तथा ΔK व ΔK_1 की तुलना करने पर ये समान प्राप्त होते है।
(ix) कार्य ऊर्जा– प्रमेय गतिशील प्रेक्षक के लिए भी लागू होती है।

Sol. (i) रेलगाड़ी में व्यक्ति के सापेक्ष

$$v_1 = at = \frac{Ft}{m}$$

(ii) धरातल पर खडे व्यक्ति के सापेक्ष

$$v = v_c + v_1 = v_c + \frac{Ft}{m}$$

(iii) रेलगाड़ी में बेठे व्यक्ति के अनुसार

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{F^2t^2}{2m}$$

(iv) धरातल पर खडे व्यक्ति के अनुसार

$$\Delta K = \frac{1}{2} m.\left[v_c + \frac{Ft}{m}\right]^2 - \frac{1}{2}mv_c^2$$

(v) $S_1 = \frac{1}{2}\, a_1t^2 = \frac{Ft^2}{2m}$.

(vi) धरातल पर खडे व्यक्ति के अनुसार

$$S = v_ct + \frac{1}{2}\frac{F}{m}\, t^2 = \frac{Ft^2}{2m} + v_ct.$$

(vii) रेलगाड़ी में बेठे व्यक्ति के अनुसार F द्वारा किया गया कार्य $= Fs_1 = \frac{F^2t^2}{2m}$

धरातल पर खडे व्यक्ति के अनुसार

द्वारा किया गया कार्य = F.s

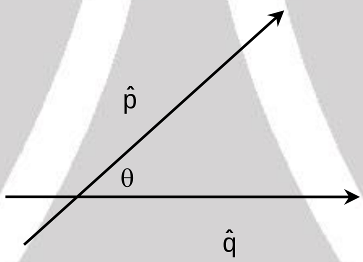
$$= F\left[\frac{Ft^2}{2m} + v_ct\right].$$

(viii) तुलना करने पर $W_g = \Delta K_g$

और $W_c = \Delta K_c$.

(ix) गतिमान तंत्रो में भी कार्य उर्जा प्रमेय लागू होती है।

Example 72. एक कण की गति एक तल में चित्रानुसार θ कोण पर झुके हुए इकाई सदिश $(\hat{p},\hat{q})$ के साथ (p, q) निर्देशांक के अलाम्बिक समुच्चय द्वारा प्रदर्शित की जाती है। यदि कण का द्रव्यमान m है तो इसकी गतिज ऊर्जा दी जाती है $\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right)$ **[Olympiad (Stage-1) 2017]**



(A) $\frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{p}\dot{q}\cos\theta)$

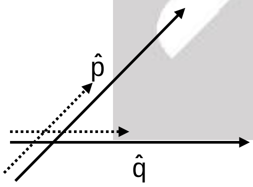
(B) $\frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 - \dot{p}\dot{q}(1 - \sin\theta)$

(C) $\frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + 2\dot{p}\dot{q}\cos\theta)$

(D) $\frac{1}{2}m(\dot{p}^2 + \dot{q}^2 + \dot{p}\dot{q}\cot\theta)$

Ans. **(C)**

Sol.



$\vec{r} = (P\hat{P} + q\hat{q})$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dp}{dt}\hat{p} + \frac{dq}{dt}\hat{q}$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + 2pq\cos\theta$

K.E. $= \frac{1}{2}m\left(p^2 + q^2 + 2pq\cos\theta\right)$