- Imagination is more important than knowledge
- Everything should be made as simple as possible, but not simpler. - Albert Einstein

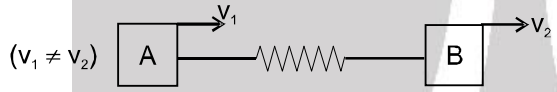
दृढ़ पिण्ड गतिकी (RIGID BODY DYNAMICS)

1. दृढ़ पिण्ड :

दृढ़ पिण्ड एक निकाय या वस्तु है, जिसमें किन्हीं भी दो कणों के बीच की दूरी सदैव नियत रहती है (समय के सापेक्ष) दृढ़ पिण्ड कहलाता है। याद रखिये दृढ़ पिण्ड एक गणितीय संकल्पना है तथा कोई निकाय दृढ़ हो सकता है जब तक वह उपर्युक्त शर्त को पूरा करता है।

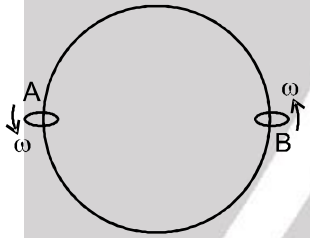
☞

निकाय दृढ़ पिण्ड की तरह व्यवहार कर रहा है

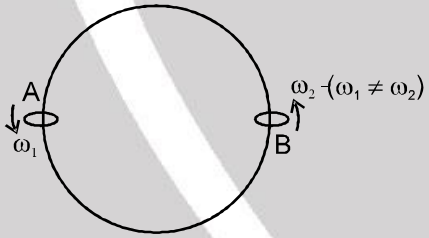


निकाय एक अदृढ़ पिण्ड की तरह व्यवहार कर रहा है

☞ A तथा B मनके हैं, जो एक स्थिर वृत्तीय छल्ले पर घूम रहे हैं।

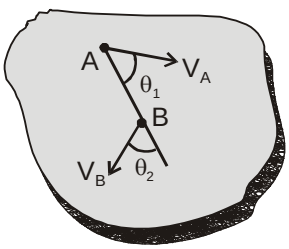


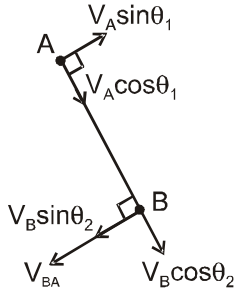
A + B एक दृढ़ पिण्ड निकाय है
जबकि A + B + छल्ला अदृढ़ निकाय है



A + B एक अदृढ़ निकाय है

- यदि एक निकाय दृढ़ है तो चूंकि निकय के किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी नहीं बदलती है, निकाय का आकार तथा आकृति नियत रहती है। अतः हम महसूस कर सकते हैं कि जबकि एक पत्थर या क्रिकेट गेंद दृढ़ पिण्ड है। एक गुब्बारा या प्रत्यास्थ डोरी अदृढ़ पिण्ड है, किन्तु उपर्युक्त निकायों में से कोई तभी तब दृढ़ है जब तक कणों के मध्य सापेक्ष दूरी नहीं बदलती है, चाहे वह एक क्रिकेट गेंद हो या गुब्बारा। परन्तु जिस समय बल्ला गेंद पर प्रहार करता है या गुब्बारा पिचकता है कणों के मध्य सापेक्ष दूरियाँ बदल जाती है और निकाय एक अदृढ़ पिण्ड की तरह व्यवहार करता है।
- किसी दृढ़ पिण्ड के किसी भी दो कणों के जोड़े के लिये कणों के बीच कोई पास आने तथा दूर जाने का कोई सापेक्ष वेग नहीं होता है, अर्थात् किसी दृढ़ पिण्ड में किसी बिन्दु B का किसी अन्य बिन्दु के सापेक्ष गति A तथा B, को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् होता है। अतः किसी कण B का किसी अन्य कण A के सापेक्ष गति एक वृत्तीय गति होती है। माना A तथा B का भूमि के सापेक्ष वेग $\vec{V}_A$ तथा $\vec{V}_B$ (चित्रानुसार) है—





यदि उपर्युक्त पिण्ड दृढ़ है तो $V_A \cos\theta_1 = V_B \cos\theta_2$ (दूर जाने/पास आने का वेग शून्य है)

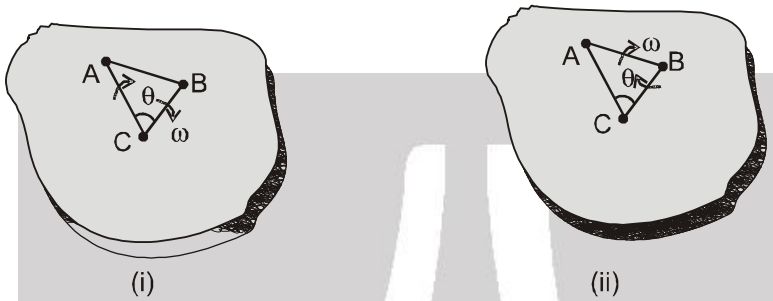
V_{BA} = B का A के सापेक्ष वेग

$V_{BA} = V_A \sin\theta_1 + V_B \sin\theta_2$ (जो AB के लम्बवत् है)

B एक वृत्त में गति करेगा, जिसके केन्द्र पर प्रेक्षक A है।

☞ किसी दृढ़ पिण्ड के किसी बिन्दु का पिण्ड के किसी भी अन्य बिन्दु से सापेक्ष कोणीय वेग समान होता है।

☞ माना A, B, C एक दृढ़ पिण्ड निकाय है, अतः किसी भी गतिकी में भुजाऐं AB, BC तथा CA बराबर कोण से घूर्णन करेगी। अतः प्रत्येक भुजाऐं समान दर से घूर्णन करेगी।



चित्र (i) से A तथा B का C के सापेक्ष कोणीय वेग ω है,

चित्र (ii) से A तथा C का B के सापेक्ष कोणीय वेग ω है,

दृढ़ पिण्ड की गतिकी के प्रकार

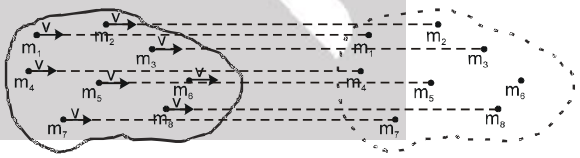
शुद्ध स्थानांतरीय गति | शुद्ध घूर्णन गति | सम्मिलित स्थानांतरीय तथा घूर्णन गति

I. शुद्ध स्थानांतरीय गति :

एक पिण्ड की गति शुद्ध स्थानांतरीय होती है, यदि प्रत्येक कण का विस्थापन समान समय–अंतराल में समान हो। ऐसी गति में किसी भी क्षण पर प्रत्येक कण का विस्थापन ($\vec{s}$), वेग ($\vec{v}$) तथा त्वरण ($\vec{a}$) समान होते हैं। माना कि $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ द्रव्यमान के n कणों का एक निकाय शुद्ध स्थानांतरीय गति कर रहा है। तब स्थानांतरीय गति की परिभाषा के अनुसार

$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_3 = \ldots\ldots \vec{a}_n = \vec{a}$ (मान लो)

और $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \ldots\ldots \vec{v}_n = \vec{v}$ (मान लो)



किसी निकाय के लिये न्यूटन के नियम से

$$\vec{F}_{ext} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \ldots\ldots$$

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}$$

जहाँ M = पिण्ड का कुल द्रव्यमान

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

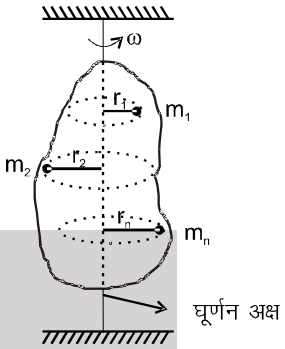
$$\vec{P} = M\vec{v}$$

पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} m_1v_1^2 + \frac{1}{2} m_2v_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2} Mv^2$

II. शुद्ध घूर्णन गति :

चित्र में किसी भी आकार का एक दृढ़ पिण्ड एक स्थिर घूर्णन अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा है। पिण्ड का प्रत्येक बिन्दु एक वृत्त में घूमता है, जिसका केन्द्र घूर्णन अक्ष पर है तथा प्रत्येक बिन्दु किसी समय अन्तराल में समान कोण घूमता है। ऐसी गति को शुद्ध घूर्णन गति कहते हैं। चूंकि पिण्ड दृढ़ है, अतः प्रत्येक कण का कोणीय वेग समान है।

अतः , $v_1 = \omega r_1$, $v_2 = \omega r_2$, $v_3 = \omega r_3$ ..... $v_n = \omega r_n$



कुल गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} m_1v_1^2 + \frac{1}{2} m_2v_2^2 + ...$

$= \frac{1}{2} [m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ...] \omega^2$

$= \frac{1}{2} I\omega^2$ जहाँ $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ...$ (जड़त्व आघूर्ण है)

ω = पिण्ड का कोणीय वेग

III. सम्मिलित स्थानांतरीय तथा घूर्णन गति :

एक पिण्ड सम्मिलित स्थानांतरीय तथा घूर्णन गति करता है, यदि पिण्ड के सभी बिन्दु किसी अक्ष के परितः घूमे तथा वह अक्ष स्वयं भूमि के सापेक्ष स्थानांतरीय गति करें। किसी दृढ़ पिण्ड की सामान्य गति को एक सम्मिलित स्थानांतरीय एवं घूर्णन गति के रूप में देखा जा सकता है।

Solved Examples

Example. 1 एक वस्तु को एक रस्सी जो घिरनी से होकर गुजर रही है के द्वारा कुंऐ में गिराया जाता है। रस्सी, घिरनी पर नहीं फिसलती है। जब वस्तु की चाल 20cm/s व त्वरण 4.0 m/s² है तो इस क्षण घिरनी का कोणीय वेग व कोणीय त्वरण ज्ञात करो। घिरनी की त्रिज्या 10 सेमी. है।

Solution : चूंकि रस्सी, घिरनी पर नहीं फिसलती है। इसलिये घिरनी की परिधि की रैखिक चाल v, वस्तु की चाल के बराबर होगी। तब घिरनी का कोणीय वेग

$\omega = v/r = \frac{20cm/s}{10cm} = 2$ rad/s

तथा घिरनी का कोणीय त्वरण

$\alpha = a/r = \frac{4.0m/s^2}{10cm} = 40$ rad/s².

Example 2. एक चकती 2.0 rad/s² के नियत त्वरण से घूमती है। यदि चकती स्थिरावस्था से प्रारम्भ होती है तो प्रथम 10 सैकण्ड में यह कितने चक्कर लगायेगी ?

Solution : प्रथम 10 सैकण्ड में कोणीय विस्थापन

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2}$ (2.0 rad/s²) (10 s)² = 100 rad.

चूंकि प्रत्येक चक्कर में चकती 2π रेडियन से घूमती है इसलिये 10s में चक्करों की संख्या $n = \frac{100}{2\pi} = 16$

Example : 3 एक मोटर का पहिया विरामावस्था से प्रारम्भ होकर एक समान त्वरण से प्रथम सैकण्ड के दौरान 5 रेडियन से घूम जाता है। अगले सैकण्ड में घूमा गया कोण ज्ञात कीजिए।

Solution : चूंकि कोणीय त्वरण नियत है इसलिए $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \alpha t^2$

इस प्रकार, 5 rad $= \frac{1}{2} \alpha$ (1s)²

$\alpha = 10$ rad/s² या $\alpha = 10$ rad/s²

प्रथम दो सैकण्ड में घूमा गया कोण $= \frac{1}{2} \times$ (10 rad/s²) (2s)² = 20 rad.

इस प्रकार, दूसरे सैकण्ड में घूमा गया कोण 20 rad – 5 rad = 15 rad.

Example : 4 विरामावस्था से प्रारम्भ होकर एक पंखा 400 rpm (चक्कर प्रति मिनट) की अधिकतम चाल प्राप्त करने में चार सैकण्ड का समय लेता है। त्वरण नियत मानते हुये पंखे द्वारा अधिकतम चाल की आधी चाल प्राप्त करने में लिया गया समय ज्ञात करो।

Solution : माना कोणीय त्वरण α है। प्रश्नानुसार

$400 \text{ rev/min} = 0 + \alpha\, 4 \text{ s}$ .....(i)

माना 200 चक्कर/मिनट की चाल जो अधिकतम की आधी है, पहुँचने तक लिया गया समय t है।

तब, $200 \text{ rev/min} = 0 + \alpha t$ .....(ii)

समीकरण (ii) का (i) में भाग देने पर

या $t = 2$ s.

Example : 5 एक इंजन की मोटर का पहिया इसकी अक्ष पर 120 rev/minute की चाल से घूर्णन कर रहा है। स्विच बन्द करने के बाद यह 10 सैक० में रूक जाता है। नियत कोणीय मन्दन मानते हुए रूकने से पहले इसके द्वारा काटे गये चक्करों की संख्या ज्ञात करो।

Solution : प्रारम्भिक कोणीय वेग = 120 चक्कर/मिनट $= (4\pi)$ rad/s.

अन्तिम कोणीय वेग = 0.

समयान्तराल = 10 s.

माना कोणीय त्वरण α है। $\omega = \omega_0 + at$, के उपयोग से

$\alpha = (-4\pi/10)$ rad/s^2

इस गति के दौरान इसके द्वारा घूमा गया कोण

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \left(4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(10\text{s}) - \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{10}\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(10\text{s})^2 = 20\pi \text{ rad} = 10 \text{ चक्कर}$$

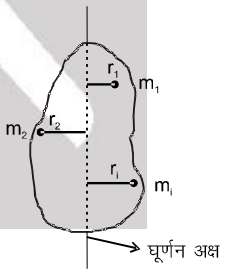
इस प्रकार मोटर रूकने से पहले 10 चक्कर लगाती है।

2. किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (I) :

(i) n कणों के एक निकाय का किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2$

अथवा $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$



जहाँ , r_i = द्रव्यमान m_i की घूर्णन अक्ष से लंबवत् दूरी

जड़त्व आघूर्ण की SI मात्रक किग्रा.मी^{2} (Kgm^2) होता है।

जड़त्व आघूर्ण की धनात्मक सदिश राशि है।

(ii) एक सतत निकाय के लिये : $I = \int r^2 (dm)$

जहाँ dm = अल्पांश का द्रव्यमान

r = dm द्रव्यमान का घूर्णन अक्ष से लंबवत् दूरी

जड़त्व आघूर्ण निर्भर करता है :

(i) वस्तु के पदार्थ के घनत्व पर (ii) वस्तु की आकृत्ति व आकार पर

(iii) घूर्णन अक्ष पर

संयुक्त रूप से हम कह सकते है कि यह घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करता है।

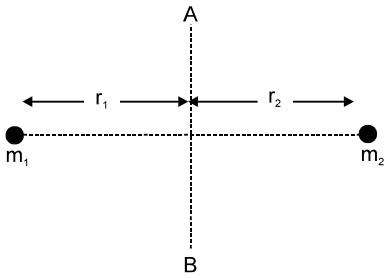
Note : जड़त्व आघूर्ण नहीं बदलता है यदि द्रव्यमान :

(i) घूर्णन अक्ष के समानान्तर विस्थापित किया जाये

(ii) घूर्णन अक्ष के प्रति नियत त्रिज्या के साथ घुमाया जाये।

Solved Examples

Example 6. दो भारी कण जिनके द्रव्यमान m_1 व m_2 है, रेखा AB के लम्बवत् क्रमशः r_1 व r_2 दूरियों पर स्थित है–



(i) अक्ष AB के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्या है ?

(ii) m_1 से गुजरने वाले व m_1 तथा m_2 को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्या है ?

(iii) m_1 व m_2 से गुजरने वाले अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्या है ?

(iv) m_1 तथा m_2 के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले तथा m_1 तथा m_2 को मिलाने वाली रेखा लंबवत् अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्या है?

Solution : (i) m_1 का जड़त्व आघूर्ण $I_1 = m_1r_1^2$.

m_2 का जड़त्व आघूर्ण $I_2 = m_2r_2^2$.

AB के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण $I = I_1 + I_2 = m_1r_2^2 + m_2r_2^2$

(ii) m_1 का जड़त्व आघूर्ण $I_1 = 0$

m_2 का जड़त्व आघूर्ण $I_2 = m_2 (r_1 + r_2)^2$

निकाय का जड़त्व आघूर्ण AB is $I = I_1 + I_2 = 0 + m_2(r_1 + r_2)^2$

(iii) m_1 का जड़त्व आघूर्ण $I_1 = 0$

m_2 का जड़त्व आघूर्ण $I_2 = 0$

निकाय का जड़त्व आघूर्ण AB is $I = I_1 + I_2 = 0 + 0$

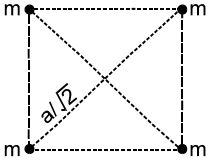
(iv) निकाय का द्रव्यमान केन्द्र $r_{CM} = m_2\left(\frac{r_1+r_2}{m_1+m_2}\right)$ = द्रव्यमान केन्द्र की m_1 से दूरी

द्रव्यमान केन्द्र की m_2 से दूरी $= m_1\left(\frac{r_1+r_2}{m_1+m_2}\right)$

अतः द्रव्यमान केन्द्र के परितः जड़त्व आघूर्ण $= I_{cm} = m_1\left(m_2\frac{r_1+r_2}{m_1+m_2}\right)^2 + m_2\left(m_1\frac{r_1+r_2}{m_1+m_2}\right)^2$

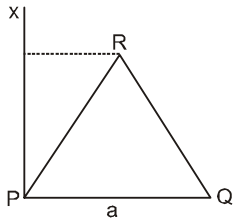
$$I_{CM} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(r_1+r_2)^2$$

Example 7. 'm' द्रव्यमान के चार कण a भुजा के वर्ग के चारों कोनों पर रखे है। वर्ग के तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution : प्रत्येक कण को दी गयी रेखा से लम्बवत् दूरी $a/\sqrt{2}$ है। इस प्रकार एक कण का जड़त्व आघूर्ण $m(a/\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}ma^2$ है। अतः निकाय का जड़त्व आघूर्ण, $4 \times \frac{1}{2}ma^2 = 2ma^2$ है।

Example 8. L भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज के तीनों शीर्षो पर m द्रव्यमान के तीन कण स्थित है।



(i) PQR के तल में PQ के लम्बवत् रेखा PX के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

(ii) ΔPQR का किसी एक भुजा के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

(iii) ΔPQR के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले तथा Δ PQR के तल के लंबवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

Solution : (i) P की PX से लम्बवत् दूरी = 0

Q की PX से लम्बवत् दूरी = a

R की PX से लम्बवत् दूरी = a/2

इस प्रकार, P पर स्थित कण का जड़त्व आघूर्ण = 0, Q पर कण का Q - ma^2, व R पर कण का = $m(a/2)^2$

अतः PX के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण $0 + ma^2 + m(a/2)^2 = \frac{5\ ma^2}{4}$

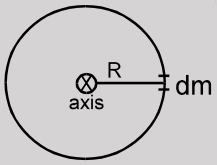
नोट करें कि अक्ष पर स्थित कण जड़त्व आघूर्ण में योगदान नहीं देते है।

(ii) PR के परितः जड़त्व आघूर्ण = कण Q का द्रव्यमान × Q की PR से लम्बवत् दूरी,

$$I_{AC} = m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{3ma^2}{4}$$

(iii) सभी कणों की द्रव्यमान केन्द्र से दूरी $\frac{a}{\sqrt{3}}$, अतः द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले तथा ΔPQR के तल के लंबवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $= I_C = 3m\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = ma^2$

Example 9. M द्रव्यमान व R त्रिज्या की सतत् वलय का इसके तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए?

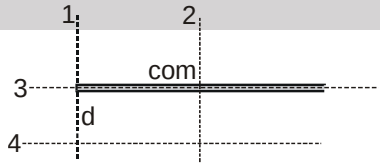


Solution : $I = \int (dm)r^2$ चूंकि प्रत्येक अल्पांश अक्ष से समान दूरी पर है। इसलिए $r = R = R^2\int dm = MR^2$

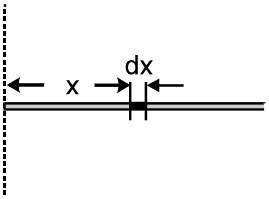
$I = MR^2$

नोट : उत्तर समान रहेगा यदि द्रव्यमान समान रूप से वितरित न हो क्योंकि $\int dm = M$ हमेशा और सभी कणों की अक्ष से दूरियाँ भी समान है।

Example 10. M द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की एक समान छड़ का अक्ष 1,2,3 तथा 4 के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution $(I_1) = \int (dm)\ r^2 = \int_0^{\ell}\left(\frac{M}{\ell}dx\right)\ x^2 = \frac{M\ell^2}{3}$

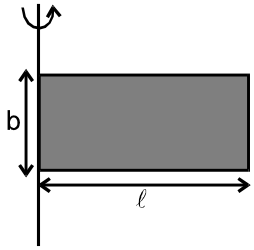


$(I_2) = \int (dm)\ r^2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2}\left(\frac{M}{\ell}dx\right)\ x^2 = \frac{M\ell^2}{12}$

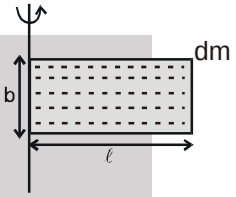
$(I_3) = 0$ (अक्ष 3 छड़ के अक्ष से गुजरता है)

$(I_4) = d^2\int (dm) = Md^2$

Example 11. सूत्र $\left(I = \frac{m\ell^2}{3}\right)$ का उपयोग करके या किसी और तरीके से 'b' व 'ℓ' भुजा वाली एक आयताकार प्लेट का जड़त्व आघूर्ण कोर 'b' से गुजरने वाले अक्ष के प्रति ज्ञात करो।



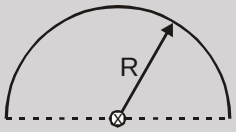
Solution : छड़ के dm द्रव्यमान के सेक्शन का कोर 'b' से गुजरने वाले अक्ष के परितः

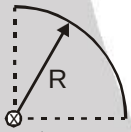


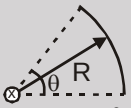
जड़त्व आघूर्ण $dI = \frac{dm\ell^2}{3}$

अतः $I = \int dI = \frac{\ell^2}{3}\int dm = \frac{M\ell^2}{3}$

Example 12. दर्शाये गये चित्रों का तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। प्रत्येक का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है ?

(a) 

(b) 

(c) 

Solution : MR^2 (R त्रिज्या की वलय को M द्रव्यमान के किसी भी भाग का जड़त्व आघूर्ण तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति MR^2 है।)

(iii) एक बड़ी वस्तु के लिये :

$I = \int dI_{element}$ जहाँ dI = छोटे अल्पांश का जड़त्व आघूर्ण

चयनित अल्पांश होना चाहिए

(i) सभी प्रकार के अल्पांशों में जितना बड़ा हो सके होना चाहिए।

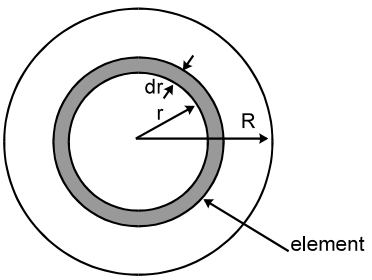
(ii) जितना सम्भव हो उतना सममित होना चाहिए।

(iii) अल्पांश का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात होना चाहिए।

Solved Examples

Example 13. M द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक समान चकती का इसके तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

Solution : $I = \int dI_{ring}$



अल्पांश - वलय $dI = dmr^2$

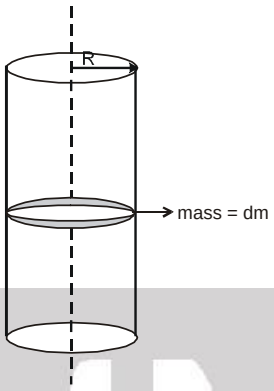
$dm = \frac{M}{\pi R^2}\ 2\pi r dr$ (यहां हमने एक समान द्रव्यमान वितरण लिया है।)

$\therefore\quad I = \int_0^R \frac{M}{\pi R^2}.(2\pi r dr).r^2$

$\Rightarrow\quad I = \frac{MR^2}{2}$

Example 14. M द्रव्यमान, त्रिज्या R तथा लम्बाई ℓ के एक समरूप खोखले बेलन का उसकी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

Solution :



खोखले बेलन का उसके अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I = \int (dm)R^2 = mR^2$

3. जड़त्व आघूर्ण पर दो महत्त्वपूर्ण प्रमेय

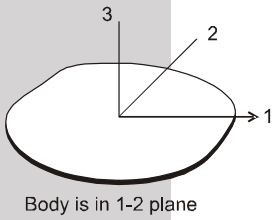
(i) लम्बवत् अक्षों की प्रमेय

केवल समतल वस्तुओं पर लागू [केवल 2-विमीय वस्तुओं के लिये)]

यदि अक्ष 1 तथा 2 वस्तु के तल में है तथा एक दूसरे के लम्बवत् है

तथा अक्ष 3 , 1 तथा 2 के तल के लंबवत् है

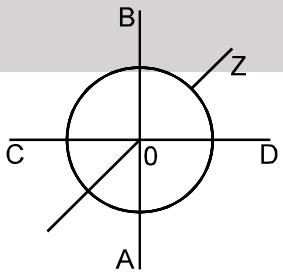
तब, $I_3 = I_1 + I_2$



☞ तीनों अक्षों का प्रतिच्छेद बिन्दु वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र पर होगा जरूरी नहीं है। यह वस्तु के तल में स्थित कोई भी बिन्दु हो सकता है, जो वस्तु के अंदर अथवा बाहर हो सकता है।

Solved Examples

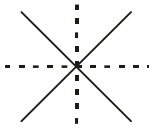
Example 15. एक समान चकती का इसके किसी व्यास के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो। वलय का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है।



Solution : माना AB व CD चकती के दो लम्बवत् व्यास है। इन्हें क्रमशः X व Y-अक्ष तथा तल के लम्बवत् केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष को Z-अक्ष लेते है। Z-अक्ष के प्रति चकती का जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{MR^2}{2}$ चूंकि चकती एक समान है। इसके सभी व्यास समरूप है और इसलिए $I_x = I_y$, लम्बवत् अक्षों की प्रमेय से

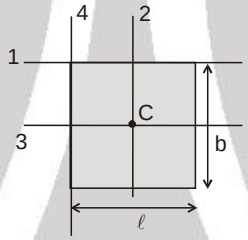
$I_z = I_x + I_y$. अतः $I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{MR^2}{2}$.

Example 16. M द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की दो एक समान छड़े चित्रानुसार क्रॉस के रूप में जोड़ी जाती है। चित्र में दर्शाये गये अर्धक के प्रति क्रॉस का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution : क्रॉस के केन्द्र से गुजरने वाला लम्बवत् अक्ष लेते है। इस अक्ष के प्रति प्रत्येक छड़ का जड़त्व आघूर्ण $\frac{M\ell^2}{12}$ होता है। अतः क्रॉस का जड़त्व आघूर्ण $\frac{M\ell^2}{6}$ होगा। क्रॉस का इसके दोंनो अर्धकों के प्रति जड़त्व आघूर्ण सममिती से समान होता है और लम्बवत् अक्षों की प्रमेय के आधार पर अर्धक के प्रति क्रॉस का जड़त्व आघूर्ण $\frac{M\ell^2}{12}$ होगा।

Example 17. दिये गये चित्र में M द्रव्यमान की एक समरूप आयताकार प्लेट जिसकी लम्बाई ℓ तथा चौड़ाई b है का जड़त्व आघूर्ण अक्ष 1,2,3 व 4 के परितः ज्ञात करें।



Solution : अक्ष 1 के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (अक्ष 1 के लम्बवत् छड़ें मानने पर)

$I_1 = Mb^2 / 3$

अक्ष 2 के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (अक्ष 2 के लम्बवत् छड़ें मानने पर)

$I_2 = M\ell^2 / 12$

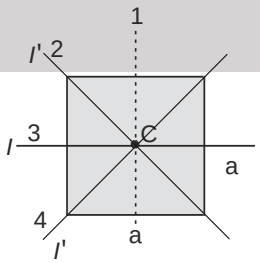
अक्ष 3 के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (अक्ष 3 के लम्बवत् छड़ें मानने पर)

$I_3 = Mb^2 / 12$

अक्ष 4 के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (अक्ष 4 के लम्बवत् छड़ें मानने पर)

$I_4 = M\ell^2 / 3$

Example 18. चित्र में दिखाये m द्रव्यमान तथा a भुजा के एक वर्गाकार प्लेट का बिन्दु C से गुजरने वाले अक्ष 2 के परितः (तथा प्लेट के तल) जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution : लम्बवत् अक्षों के प्रमेय से $I_C = I_4 + I_2 = 2I'$

लम्बवत् अक्षों के प्रमेय से $I_C = I_3 + I_1 = I + I = 2I$

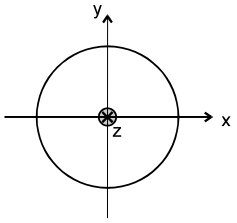
$2I' = 2I$

$I' = I$

$IC = 2I = \frac{ma^2}{6} \quad \Rightarrow \quad I' = \frac{ma^2}{12}$

Example 19. M द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक समान वलय का इसके व्यास के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

Solution : वलय के दो परस्पर लम्बवत् अक्ष x व y लें।



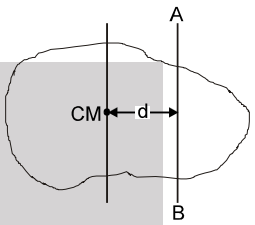
$I_x + I_y = I_z$

$I_x = I_y$ (सममितता से)

$I_z = \frac{MR^2}{2}$

$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}$

(ii) समान्तर अक्षों की प्रमेय (किसी भी प्रकार की वस्तु के लिये)



यदि I_{AB} = AB अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण

I_{CM} = AB अक्ष के समान्तर व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण

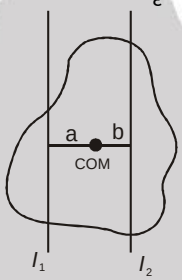
M = वस्तु का कुल द्रव्यमान

d = AB अक्ष व AB अक्ष के समान्तर द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के बीच की दूरी।

$I_{AB} = I_{CM} + Md^2$

Solved Examples

Example 20. I_1 व I_2 में संबंध ज्ञात करिए ? I_1 व I_2, m द्रव्यमान के दृढ पिण्ड के चित्र में निर्दिष्ट अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण है—



Solution : समान्तर अक्षों की प्रमेय से $I_1 = I_C + ma^2$ .....(1)

$I_2 = I_C + mb^2$ .....(2)

(1) व (2) से $I_1 - I_2 = m(a^2 - b^2)$

Example 21. m द्रव्यमान, R त्रिज्या के गोले की स्पर्शरेखीय अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करिए? यदि गोला (i) ठोस (ii) खोखला है।

Solution (i) समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$I = I_{CM} + md^2$

ठोस गोले के लिए $I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2$, $d = R$

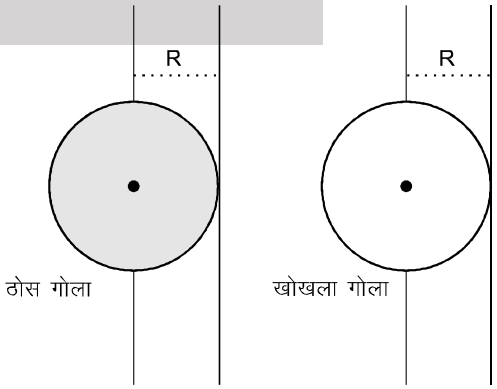
$I = \frac{7}{5}mR^2$

(ii) समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$I = I_{CM} + md^2$

खोखले गोले के लिए $I_{CM} = \frac{2}{3}mR^2$, $d = R$

$I = \frac{5}{3}mR^2$



Example 22. M द्रव्यमान व R त्रिज्या के एक खोखले बेलन का इसके अक्ष के समानान्तर व पृष्ठ से गुजरने वाले किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

Solution : बेलन का इसके अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण $= MR^2$.

समानान्तर अक्षों की प्रमेय के उपयोग से,

$I = I_0 + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2\,MR^2$.

इसी प्रकार, एक खोखला गोले का इसकी किसी स्पर्श–रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

$$\frac{2}{3}\,MR^2 + MR^2 = \frac{5}{3}\,MR^2.$$

Example 23. द्रव्यमान केन्द्र से परितः व तल के लम्बवत् अक्ष के प्रति अर्द्धवृत्तीय चकती का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करिए?

Solution : अर्द्धवृत्तीय चकती का इसके केन्द्र के परितः व तल के लम्बवत् अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण, $I = \frac{MR^2}{2}$ है।

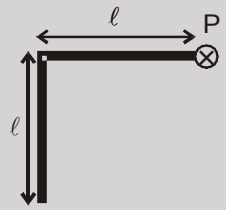
समान्तर अक्षों की प्रमेय $I = I_{CM} + Md^2$, जहाँ d समांतर अक्षों के मध्य लम्ब दूरी है का प्रयोग करने पर

$$I = \frac{MR^2}{2},\ d = \frac{4R}{3\pi}$$

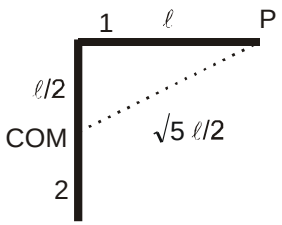
$$\Rightarrow \quad \frac{MR^2}{2} = I_{CM} + M$$

$$I_{CM} = \left[\frac{MR^2}{2} - M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2\right]$$

Example 24. दो समरूप छड़ों का जिसे चित्रानुसार युग्मित किया है का बिन्दु P के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करिए। समान्तर अक्ष प्रमेय का उपयोग करते हुए।



Solution : छड़ 1 का अक्ष P के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण , $I_1 = \frac{m\ell^2}{3}$



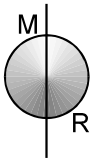
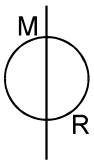
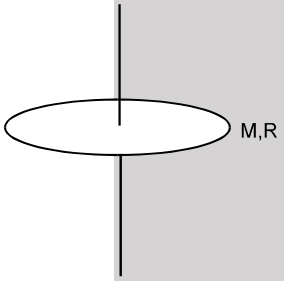
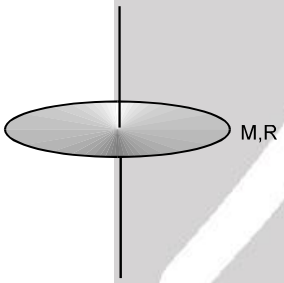
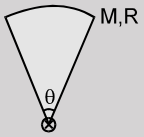
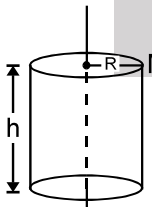
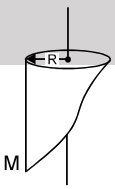
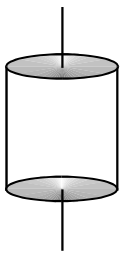
छड़ 2 का अक्ष P के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण, $I_2 = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\sqrt{5}\,\frac{\ell}{2}\right)^2$

अतः निकाय का अक्ष P के सापेक्ष कुल जड़त्व आघूर्ण,

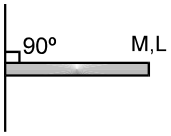
$$I = I_1 + I_2 = \frac{m\ell^2}{3} + \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\sqrt{5}\,\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{m\ell^2}{3}$$

कुछ महत्तवपूर्ण सूत्रों की सूची :

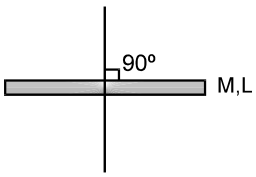
Object	Moment of Inertia
ठोस गोला 	$\frac{2}{5}MR^2$ (समरूप)
खोखला गोला 	$\frac{2}{3}MR^2$ (समरूप)
वलय 	MR^2 (समरूप या असमरूप)
चकती  	$\frac{MR^2}{2}$ (समरूप)
खोखला बेलन  	MR^2 (समरूप या असमरूप)
ठोस बेलन 	$\frac{MR^2}{2}$ (समरूप)

पतली छड़

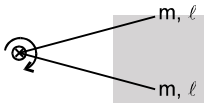


$\frac{ML^2}{3}$ (समरूप)

पतली छड़े

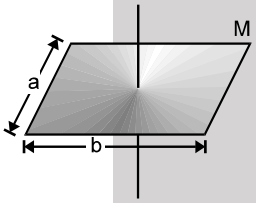


$\frac{ML^2}{12}$ (समरूप)



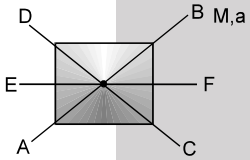
$\frac{2m\ell^2}{3}$ (समरूप)

आयताकार प्लेट



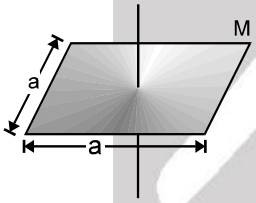
$I = \frac{M(a^2+b^2)}{12}$ (समरूप)

वर्गाकार प्लेट



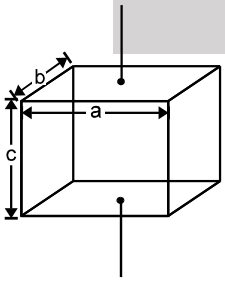
$I_{AB} = I_{CD} = I_{DF} = \frac{Ma^2}{12}$ (समरूप)

वर्गाकार प्लेट



$\frac{Ma^2}{6}$ (समरूप)

घनाभ



$\frac{M(a^2+b^2)}{12}$ (समरूप)

4. घूर्णन त्रिज्या :

मापन का वह तरीका जिसमें घूर्णन कर रहे दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जिस प्रकार वितरित है। एक नये प्राचल द्वारा परिभाषित किया जाता है जिसे घूर्णन त्रिज्या कहते है।

घूर्णन त्रिज्या, जड़त्व आघूर्ण व वस्तु के कुल द्रव्यमान से सम्बन्धित है।

$I = MK^2$

जहाँ I = वस्तु का जड़त्व कुल द्रव्यमान

M = वस्तु का द्रव्यमान

K = वस्तु की घूर्णन त्रिज्या

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

☞ लम्बाई K घूर्णन अक्ष व वस्तु का ज्यामितीय गुण है।

K का S.I. मात्रक मीटर है।

Solved Examples

Example 25. R त्रिज्या के एक समरूप ठोस गोले की घूर्णन त्रिज्या उसकी स्पर्श रेखा के परितः ज्ञात करो।

Solution : $I = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 = mK^2 \quad \Rightarrow K = \sqrt{\frac{7}{5}}R$

Example 26. R त्रिज्या के एक समरूप खोखले गोले की घूर्णन त्रिज्या उसकी स्पर्श रेखा के परितः ज्ञात करो।

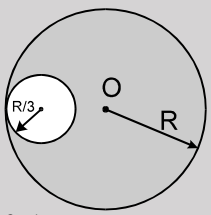
Solution : स्पर्श रेखा के परितः खोखले गोले का जड़त्व आघूर्ण, $I = \frac{5}{3}MR^2$

$$MK^2 = \frac{5}{3}MR^2 \quad \Rightarrow \quad K = \sqrt{\frac{5}{3}}R$$

5. कटी वस्तुओं का जड़त्व आघूर्ण :

Solved Example

Example 27. चित्रानुसार R त्रिज्या की एक समान चकती में से R/3 त्रिज्या की चकती काटी गयी है। चकती के शेष बचे छायांकित भाग का द्रव्यमान M है। प्रारम्भिक चकती के केन्द्र से गुजरने वाले व तल के लम्बवत् अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution : माना कि चकती के पदार्थ का इकाई क्षैत्रफल का द्रव्यमान σ है। अब खाली स्थान पर –σ और σ घनत्व माना जा सकता है।

अब $I_0 = I_\sigma + I_{-\sigma}$

$I_\sigma = (\sigma \pi R^2)R^2/2 = \sigma$ का o के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

$I_{-\sigma} = \frac{-\sigma\pi(R/3)^2(R/3)^2}{2} + [-\sigma\pi(R/3)^2](2R/3)^2 = -\sigma$ का o के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

$\therefore \quad I_0 = \frac{4}{9}MR^2$ **Ans.**

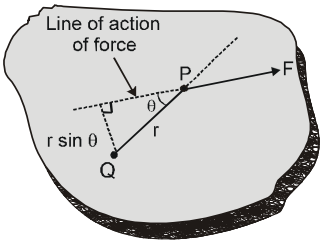
Example 28. M द्रव्यमान के R_1 त्रिज्या की एक एकसमान चकती जिसके बीच से R_2 त्रिज्या का भाग काटा गया है, का चकती के केन्द्र से गुजरने वाले व तल के लम्बवत् अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

Solution : $\rho = \frac{M}{\pi\ (R_1^2 - R_2^2)} \quad \Rightarrow \quad I = \rho \times \left(\frac{\pi R_1^4 - \pi R_2^4}{2}\right)$

$$I = \frac{M\left(R_1^{\ 2} + R_2^{\ 2}\right)}{2} \quad \textbf{Ans.}$$

6. बल आघूर्ण :

बल आघूर्ण, वस्तु की घूर्णन गति में परिवर्तन लाने वाले बल की क्षमता को दर्शाता है।



6.1 बिन्दु के प्रति बलाघूर्ण :

एक बिन्दु के परितः बल $\vec{F}$ का आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

यहाँ $\vec{F}$ = आरोपित बल

P = बल का क्रिया बिन्दु

Q = वह बिन्दु जिसके परितः हमें बलाघूर्ण ज्ञात करना है।

$\vec{r}$ = जिस बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण ज्ञात करना चाहते है उससे बल के क्रिया बिन्दु का स्थिति सदिश

$|\vec{\tau}| = r F \sin\theta = r_\perp F = r F_\perp$

यहाँ θ = बल की दिशा व Q के सापेक्ष P के स्थिति सदिश के बीच कोण।

$r_\perp$ = बिन्दु Q से बल की क्रिया रेखा की लम्बवत् दूरी

$F_\perp$ = बल भुजा

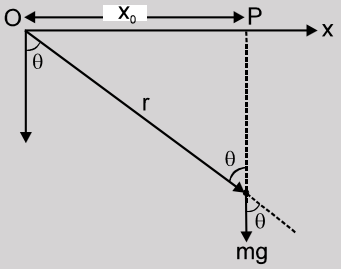
बलाघूर्ण का SI मात्रक Nm है।

☞ बलाघूर्ण एक सदिश राशि है तथा इसकी दिशा दाहिने हाथ के अंगूठे के नियम द्वारा ज्ञात की जाती है।

Solved Examples

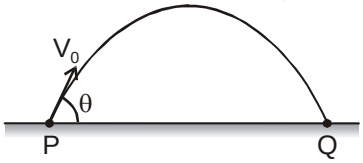
Example 29. x–अक्ष पर $x = x_0$ पर स्थित बिन्दु P से ऊर्ध्वाधर तल में M द्रव्यमान का एक कण छोड़ा जाता है। मूल बिन्दु के परितः किसी समय t पर कण पर बलाघूर्ण ज्ञात करो।

Solution : बलाघूर्ण, गुरूत्वीय बल द्वारा उत्पन्न होता है।



$\vec{\tau} = r F \sin\theta \hat{k}$ या $\tau = r_\perp F = x_0 mg = r\, mg \dfrac{x_0}{r} = mgx_0\, \hat{k}$

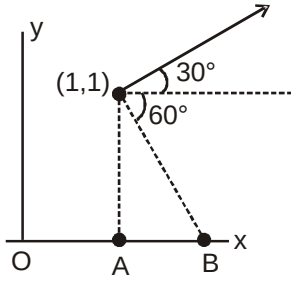
Example 30. क्षैतिज के साथ θ कोण बनाते हुए m द्रव्यमान के एक कण को v_0 वेग से धरातल पर स्थित किसी बिन्दु P, से फेंका जाता है। प्रक्षेप्य बिन्दु के परितः कण पर लगने वाला बलाघूर्ण ज्ञात करो जबकि यह अधिकतम ऊँचाई पर है ?



Solution : $\tau = rF\sin\theta = \dfrac{R}{2} mg = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} mg$

$\tau = \dfrac{mv_0^2 \sin 2\theta}{2}$

Example 31. O तथा A के परितः बल आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



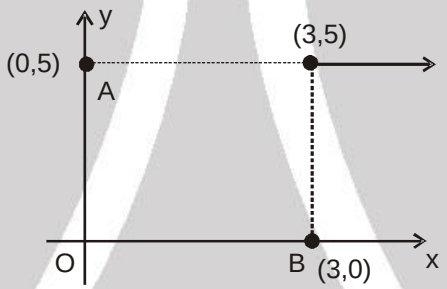
Solution : O के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau} = \vec{r}_0 \times \vec{F}$, $\vec{r}_0 = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{F} = 5\sqrt{3}\ \hat{i} + 5\hat{j}$

$\vec{\tau} = (\hat{i} + \hat{j}) \times (5\sqrt{3}\,\hat{i} + 5\hat{j}) = 5(1 - \sqrt{3})\hat{k}$

A के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau} = \vec{r}_a \times \vec{F}, \vec{r}_a = \hat{j}$, $\vec{F} = 5\sqrt{3}\,\hat{i} + 5\hat{j}$

$\vec{\tau} = \hat{j} \times (5\sqrt{3}\,\hat{i} + 5\hat{j}) = 5(-\sqrt{3})\ \hat{k}$

Example 32. बिन्दु A, O तथा B के परितः बल आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution : A के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}$, $\vec{r}_A = 3\hat{i}$, $\vec{F} = 10\hat{i}$

$\vec{\tau}_A = 3\hat{i} \times 10\hat{i} = 0$

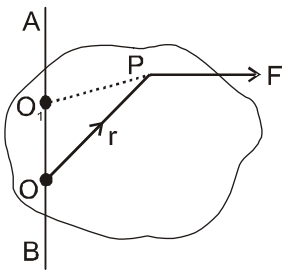
B के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau}_B = \vec{r}_B \times \vec{F}, \vec{r}_B = 5\hat{j}, \vec{F} = 10\hat{i}$

$\vec{\tau}_B = 5\hat{j} \times 10\hat{i} = -50\hat{k}$

O के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau}_O = \vec{r}_O \times \vec{F}, \vec{r}_O = 3\hat{i} + 5\hat{j}, \vec{F} = 10\hat{i}$

$\vec{\tau}_O = (3\hat{i} + 5\hat{j}) \times 10\hat{i} = -50\hat{k}$

6.2 अक्ष के परितः बल आघूर्ण :



किसी अक्ष AB के परितः बल $\vec{F}$ का बलाघूर्ण को बल $\vec{F}$ के अक्ष के किसी बिन्दु O के परितः बलाघूर्ण का अक्ष AB के अनुदिश घटक के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

दिये गये चित्र में $\vec{F}$ का O के परितः बलाघूर्ण $\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{F}$ का AB के परितः बलाघूर्ण, τ_{AB} , $\vec{\tau}_0$ का AB के अनुदिश घटक है। किसी बल की किसी अक्ष के परितः बलाघूर्ण की चार दशायें हो सकती हैं :

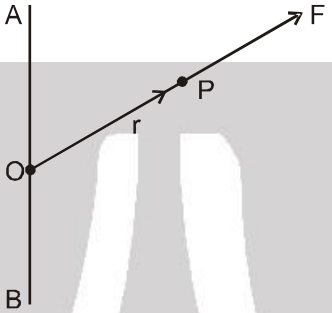
स्थिति I : बल घूर्णन अक्ष के समान्तर है, $\vec{F} \parallel \overrightarrow{AB}$

AB घूर्णन अक्ष के जिसके परितः बल आघूर्ण ज्ञात करना है

$\vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{F}$ के लम्बवत् है, लेकिन $\vec{F} \parallel \overrightarrow{AB}$, अतः $\vec{r} \times \vec{F} \perp \overrightarrow{AB}$.

$\vec{r} \times \vec{F}$ का घटक $\overrightarrow{AB}$ के अनुदिश है अतः शून्य है।

स्थिति II : बल की रेखा घूर्णन अक्ष को काटती है (F , AB को काटता है)

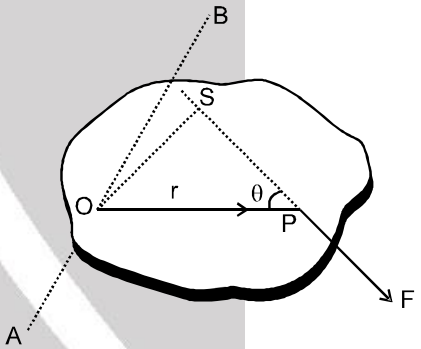


$\vec{F}$, AB को $\vec{r}$ के अनुदिश काटता है, अतः $\vec{F}$ तथा $\vec{r}$ एक ही रेखा में हैं। अतः O के परितः बल आघूर्ण $\vec{r} \times \vec{F} = 0$.

अतः इस बलाघूर्ण का AB के अनुदिश घटक भी शून्य होगा।

स्थिति III : $\vec{F}$, $\overrightarrow{AB}$ के लम्बवत् है तथा AB को प्रतिच्छेद नहीं करता है

त्रिविमा में दो रेखाऐं एक दूसरे को प्रतिच्छेद किये बिना एक दूसरे के लंबवत् हो सकती है। दो असमान्तर तथा एक दूसरे को प्रतिच्छेदन करने वाली रेखाऐं तिर्यक (skew) रेखाऐं कहलाती हैं।



चित्र में बल के कार्य बिन्दु P से होता हुआ एक तल दर्शाता है, जो घूर्णन अक्ष AB के लम्बवत् है। माना कि तल अक्ष को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है। बल F भी इसी तल में है। ($\because F \perp AB$), O पर मूल बिन्दु लेने पर,

बल आघूर्ण = $\vec{r} \times \vec{F} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$.

अतः बल आघूर्ण = $rF \sin\theta = F(OS)$

जहाँ OS, बल $\vec{F}$ की कार्य रेखा की O से लम्बवत् दूरी है। रेखा OS भी घूर्णन अक्ष के लम्बवत् है। अतः यह बल तथा घूर्णन के उभयनिष्ठ लंब की लम्बाई है।

$\vec{\tau} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$ की दिशा अक्ष AB के अनुदिश है, क्योंकि $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OP}$ तथा $\overrightarrow{AB} \perp \vec{F}$ अतः AB के परितः बलाघूर्ण $\vec{\tau}$ के परिमाण F.(OS) के बराबर है।

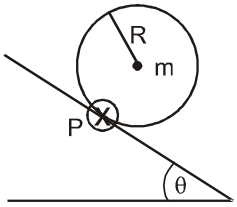
☞ अतः F का AB के परितः बलाघूर्ण = F का परिमाण × बल तथा अक्ष के उभयनिष्ठ लंब की लम्बाई के उभयनिष्ठ लंब OS का बलाघूर्ण की लीवर भुजा या आघूर्ण भुजा कहते हैं।

स्थिति IV : $\vec{F}$ तथा $\overrightarrow{AB}$ तिर्यक (skew) है परन्तु लंबवत् नहीं।

यहाँ हम $\vec{F}$ के दो घटक कर सकते हैं, एक अक्ष के समान्तर तथा एक अक्ष के लंबवत्। समांतर घटक का बलाघूर्ण शून्य है तथा लम्बवत् घटक का बलाघूर्ण **दशा (III)** में निकाले परिणाम से प्राप्त किया जा सकता है।

Solved Examples

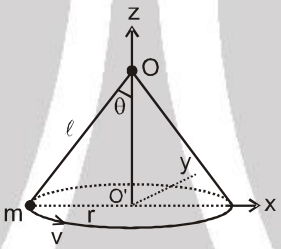
Example 33. भार का बल आघूर्ण P से गुजरने वाले अक्ष के परितः प्राप्त कीजिए।



Solution $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, r = R, \ F = mg\sin\theta$

r तथा F दोनों लम्बवत् है, अतः P के परितः बलाघूर्ण = $mgR\sin\theta$

Example 34. m द्रव्यमान के एक गोलक को ℓ लम्बाई की एक डोरी से बांधकर बिन्दु O से लटका दिया जाता है। गोलक एक क्षैतिज वृत्त में गति कर रहा है। ज्ञात कीजिए (i) O तथा O' बिन्दु के परितः गुरूत्व तथा तनाव का बलाघूर्ण ज्ञात कीजिए (ii) अक्ष OO' के परितः कुल बलाघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution (i) बिन्दु O के परितः बलाघूर्ण

तनाव का बलाघूर्ण (T), $\tau_{ten} = 0$ (तनाव बिन्दु O से पास कर रहा है।)

गुरूत्व का बलाघूर्ण $\tau_{mg} = \ell mg\sin\theta$

O' बिन्दु के परितः बलाघूर्ण

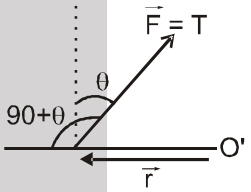
गुरूत्व का बलाघूर्ण $\tau_{mg} = mgr \quad r = \ell\sin\theta$

तनाव का बलाघूर्ण $\tau_{mg} = \ell mg\sin\theta$ (ऋणात्मक $\hat{j}$ के अनुदिश)

तनाव का बलाघूर्ण $\tau_{ten} = T\sin(90+\theta)$ ($T\cos\theta = mg$)

$\tau_{ten} = Tr\cos\theta$

$\tau_{ten} = \dfrac{mg}{\cos\theta}(\ell\sin\theta)\cos\theta = mg\ell\sin\theta$ (घनात्मक $\hat{j}$ के अनुदिश)



(ii) अक्ष OO' के परितः बलाघूर्ण

गुरूत्व का अक्ष OO' के परितः बलाघूर्ण $\tau_{mg} = 0$ (बल mg अक्ष OO' के समान्तर है)

तनाव का अक्ष OO' के परितः बलाघूर्ण $\tau_{ten} = 0$ (बल T अक्ष OO' के समान्तर है)

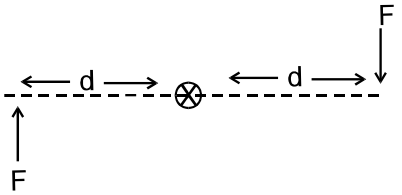
अक्ष OO' के परितः कुल बलाघूर्ण $\tau_{net} = 0$

6.3 बल युग्म :

समान परिमाण के बलों का युग्म जब विपरीत दिशा में आरोपित हो तो इसे बल युग्म कहते हैं।

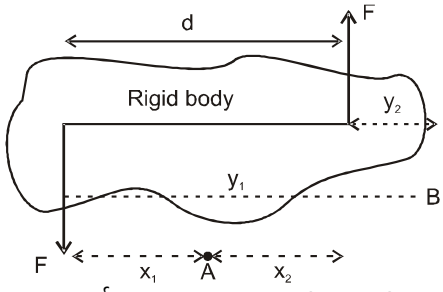
बल युग्म के कारण बल आघूर्ण = एक बल का परिमाण × उनकी बल रेखाओं के मध्य की दूरी

बल आघूर्ण का परिमाण = $\tau = F(2d)$



☞ बल युग्म वस्तु पर कुल बल नहीं लगाता यदि यह एक बल आघूर्ण लगाता है।

☞ किसी बल युग्म का कुल बल आघूर्ण किसी भी बिन्दु के परितः समान होता है।



A के परितः बलाघूर्ण $= x_1F + x_2F = F(x_1 + x_2) = Fd$

B के परितः बलाघूर्ण $= y_1F - y_2F = F(y_1 - y_2) = Fd$

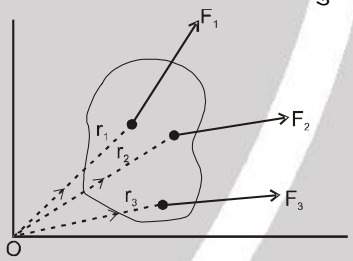
☞ यदि निकाय पर कुल बल शून्य है, तो किसी भी बिन्दु के परितः बलाघूर्ण समान होता है।

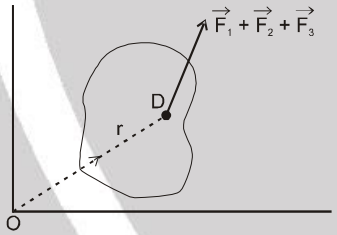
☞ इसका एक परिणाम यह है कि यदि $F_{net} = 0$ और $\tau_{net} = 0$ किसी भी एक बिन्दु के परितः, तो $\tau_{net} = 0$ सभी बिन्दु के परितः

6.4 बल का क्रिया बिंदु :

बल का क्रिया बिन्दु वह बिन्दु है जिस पर कुल बल आरोपित करने पर यह स्थानान्तरण तथा घूर्णन गति दोनों में वही प्रभाव उत्पन्न करता है, जो क्रिया बिन्दु पर आरोपित करने से पहले थे।

द्वितीयक परिभाषा के रूप में बल का क्रिया बिन्दु वह बिन्दु है जिसके परितः समस्त बलों का बलाघूर्ण शून्य होता है।



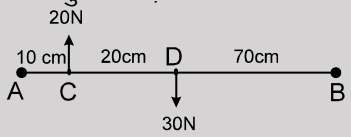


माना कि तीन बल $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ किसी वस्तु पर कार्य कर रहे हैं तथा D बल का क्रिया बिन्दु है तब $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ को D पर रखकर O के परितः मूल बलाघूर्ण के बराबर होगा

$$\left[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3\right] = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$$

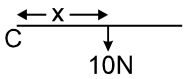
Solved Examples

Example 35. जब 20 N तथा 30 N के बल चित्रानुसार छड़ पर लग रहे हों तो बल का क्रिया बिन्दु ज्ञात कीजिए।



Solution : छड़ पर कार्यरत परिणामी बल $F_{rel} = 10N$

छड़ पर कार्यरत परिणामी बलाघूर्ण (C के परितः)



$\tau_c = (20 \times 0) + (30 \times 20) = 600$ दक्षिणावर्त

माना कि बल का क्रिया बिन्दु C से x दूरी पर है

$600 = 10\,x \Rightarrow x = 60$ cm

अतः बल का क्रिया बिन्दु A से 70 cm की दूरी पर है।

नोट : (i) गुरूत्व बल का क्रिया बिन्दु को गुरूत्व केन्द्र कहते हैं।

(ii) गुरूत्व केन्द्र तथा द्रव्यमान केन्द्र एक होते हैं यदि $\vec{g}$ का मान नियत हो।

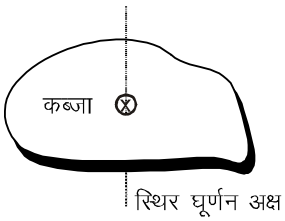
(iii) बल के क्रिया बिन्दु की संकल्पना काल्पनिक है, क्योंकि कुछ दशाओं में यह वस्तु के बाहर भी हो सकती है।

6.5 स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन :

यदि I_{Hinge} = घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ($\because$ यह अक्ष कब्जे से गुजरता है) I_{Hinge}

$\vec{\tau}_{ext}$) = वस्तु का घूर्णन अक्ष के परितः परिणामी बाह्य बलाघूर्ण

α = पिण्ड का कोणीय त्वरण $\vec{\tau}_{ext})_{Hinge} = I_{Hinge}\,\vec{\alpha}$



घूर्णन गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}.I.\omega^2$

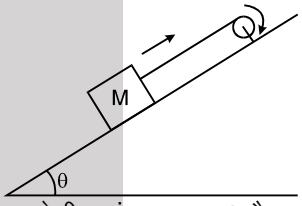
$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$; $\vec{F}_{external} = M\ \vec{a}_{CM}$

वस्तु पिण्ड पर कार्यरत परिणामी बाह्य बल के स्पर्शरेखीय तथा त्रिज्यीय घटक है।

$\Rightarrow\ F_C = ma_C = m\frac{v^2}{r_{CM}} = m\omega^2 r_{CM}\ \Rightarrow\ F_t = ma_t = m\alpha\, r_{CM}$

Solved Examples

Example 36. चित्रानुसार θ झुकाव कोण वाले नततल के शीर्ष पर r त्रिज्या की पुली जुड़ी है, पुली का इसकी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है। एक रस्सी को इसके चारो तरफ लपेटा जाता है तथा इसके मुक्त सिरे से m द्रव्यमान जुड़ा है, यह इस नत तल पर फिसल सकता है। प्रारम्भ में पुली ω_0 कोणीय वेग से तल पर ब्लॉक के फिसलने की दिशा में घूर्णन कर रही है। ब्लॉक कितनी दूर गति करेगा?



Solution : माना ब्लॉक का मंदन a है। पुली की परिधि का रेखीय मंदन भी 'a' है। पुली का कोणीय मंदन $\alpha = a/r$ है। यदि रस्सी में तनाव T हो तो गति की समीकरण निम्न है : $mg\sin\theta - T = ma$ तथा $Tr = I\alpha = Ia/r$.

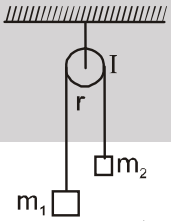
इन समीकरणों से T का विलोप करने पर, $mg\sin\theta - I\frac{a}{r^2} = ma$

दिया है, $a = \frac{mg\ r^2\sin\theta}{I + mr^2}$

नत तल के ऊपर ब्लॉक का प्रारम्भिक वेग $v = \omega r$ है। रूकने से पहले ब्लॉक द्वारा चली गई दूरी है

$$x = \frac{v^2}{2a} = \frac{\omega_0 r^2(I + mr^2)}{2m\ r^2\sin\theta} = \frac{(I + mr^2)\omega_0}{2m\ g\sin\theta}$$

Example 37. चित्रानुसार पुली का इसकी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है तथा इसकी त्रिज्या r है। दोनों ब्लॉक के त्वरण का परिमाण ज्ञात करो? यह मानना है कि रस्सी हल्की है तथा पुली पर फिसलती नहीं है।



Solution : माना बायीं रस्सी में तनाव T_1 है तथा दायीं रस्सी में तनाव T_2 है। माना m_1 द्रव्यमान वाला ब्लॉक α त्वरण से नीचे जा रहा है तथा दूसरा ब्लॉक समान त्वरण से ऊपर जा रहा है। चूंकि रस्सी पहिये की परिधि पर फिसल नहीं रही है अतः यह परिधि का स्पर्श रेखीय त्वरण भी है। इसलिए पहिये का कोणीय त्वरण $\alpha = a/R$ है। अतः m_1 द्रव्यमान, m_2 द्रव्यमान तथा पुली के लिए गति की समीकरणें निम्न हैं।

$m_1g - T_1 = m_1a$ .....(i)

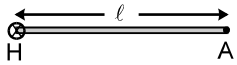
$T_2 - m_2g = m_2a$ .....(ii)

$T_1r - T_2r = I\alpha = I\alpha\ /r$ .....(iii)

(i) तथा (ii) से T_1 तथा T_2 का मान (iii) में रखने पर,

$[(m_1g - a) - m_2(g + a)]\ r = I\frac{a}{r}$ अतः $a = \frac{(m_1 - m_2)gr^3}{I + (m_1 + m_2)r^2}$

Example 38. m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की समरूप छड़ एक चिकनी क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष H बिन्दु पर कीलकित है, यह ऊर्ध्वाधर तल में घूर्णन कर सकती है।



(i) छड़ को इसकी प्रारम्भिक क्षैतिज स्थिति से विराम से मुक्त करने के तुरन्त बाद इसका कोणीय त्वरण α ज्ञात करो ?

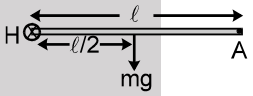
(ii) इस क्षण बिन्दु A का त्वरण (त्रिज्यीय तथा स्पर्शरेखीय) ज्ञात करो?

(iii) इस क्षण पर कुल हिन्ज बल ज्ञात कीजिए।

(iv) जब छड़ ऊर्ध्व होती है तो α तथा ω ज्ञात कीजिए।

(v) जब छड़ ऊर्ध्व होती है तो हिन्ज बल ज्ञात कीजिए।

Solution :



(i) $\tau_H = I_H \alpha$

$$mg.\frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{3}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2\ell}$$

(ii) $a_{tA} = \alpha\ell = \frac{3g}{2\ell}.\ell = \frac{3g}{2}$

$a_{CA} = \omega^2 r = 0.\ell = 0$ ($\omega = 0$ छोड़ने के तुरन्त बाद)

(iii) माना कि हिन्ज चित्र में दर्शाये अनुसार अभिलम्ब प्रतिक्रिया लगती है

ऊर्ध्व दिशा में $F_{ext} = ma_{CM}$

$\Rightarrow mg - N_1 = m.\frac{3g}{4}$ (पिछले उदाहरण से हम a_{CM} का मान प्राप्त कर सकते हैं।)

$\Rightarrow N_1 = \frac{mg}{4}$

क्षैतिज दिशा में

$F_{ext} = ma_{CM} \Rightarrow$ $N_2 = 0$ (क्षैतिज दिशा में $a_{CM} = 0$ $\omega = 0$ छोड़ने के तुरन्त बाद)

(vi) बलाघूर्ण = 0 जब छड़ ऊर्ध्व हो जाती है, अतः $\alpha = 0$

ऊर्जा संरक्षण से $\frac{mg\ell}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \left(I = \frac{m\ell^2}{3}\right)$

$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$

(v) जब छड़ ऊर्ध्व हो जाती है।

$\alpha = 0, \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$; $F_H - mg = \frac{m\omega^2\ell}{2}$; $F_H = \frac{5mg}{2}$ **Ans.**

7. साम्यावस्था :

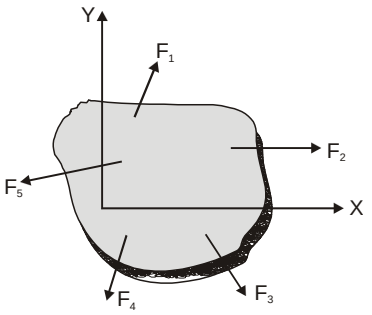
एक निकाय यांत्रिक साम्यावस्था में होता है यदि वह स्थानांतरीय तथा घूर्णन साम्यावस्था दोनों में है

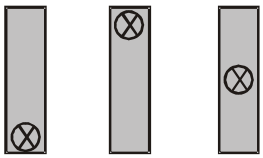
इसके लिए : $\overrightarrow{F_{net}} = 0$

$\overrightarrow{\tau_{net}} = 0$ (प्रत्येक बिन्दु के परितः)

(6.3) से यदि $\overrightarrow{F_{net}} = 0$ तो $\overrightarrow{\tau_{net}}$ प्रत्येक बिन्दु के परितः समान है

अतः साम्यावस्था के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है $\overrightarrow{F_{net}} = 0$, किसी बिन्दु के परितः $\overrightarrow{\tau_{net}} = 0$ जो हम अपनी सुविधानुसार चुन सकते हैं। ($\overrightarrow{\tau_{net}}$ अपने आप सभी बिन्दुओं के परितः शून्य हो जाएगा)



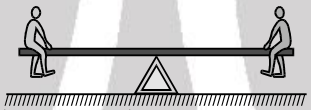


unstable equilibrium | stable equilibrium | Neutral equilibrium

यदि वस्तु को थोड़ा सा विस्थापित करने तथा मुक्त करने पर यह पुनः अपनी साम्यावस्था की स्थिति को प्राप्त कर लेती है, तो इसे वस्तु की **स्थाई साम्यावस्था** कहते हैं। यह अस्थाई होती है यदि वस्तु को थोड़ा सा विस्थापित या मुक्त करने पर यह और ज्यादा विस्थापित हो जाती है। यदि वस्तु का थोड़ा सा विस्थापित या मुक्त करने पर वस्तु साम्यावस्था में ही रहती है तो इसे **उदासीन साम्यावस्था** कहते हैं।

Solved Examples

Example 39. 20 kg तथा 25 kg के दो छोटे बच्चे 4.0m लम्बाई के सन्तुलन झूले को संतुलित करने की कोशिश कर रहे हैं। सन्तुलन झूला इसके केन्द्र पर कीलकीत है। यदि एक बच्चा इसके किनारे (छोर) पर बैठा है तो दूसरे बच्चे को कहाँ बैठना चाहिए।



Solution : स्पष्ट है कि 20 kg के बच्चे को एक किनारे पर तथा 25 kg के बच्चे को इसके केन्द्र के निकट बैठना होगा। माना कि केन्द्र से इसकी दूरी 'x' है। चूंकि बच्चे साम्यावस्था में है तो बच्चों तथा झूले के मध्य अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल बच्चों के भार के बराबर होगा। झूले को घूर्णन साम्यावस्था में मानने पर इस पर लगने वाले बलों के कारण बल आघूर्णों का योग शून्य होना चाहिए। इस पर निम्न बल कार्यरत है।

(a) 25 kg के बच्चे द्वारा (25 kg) g भार नीचे की ओर,

(b) 20 kg के बच्चे द्वारा (20 kg) g भार नीचे की ओर,

(c) झूले का भार

(d) fulcrum द्वारा अभिलम्ब बल fulcrum के सापेक्ष बल आघूर्ण (25 kg)g x = (20 kg)g (2 m) या x = 1.6 m

Example 40. 15 kg द्रव्यमान की एक समरूप छड़ चिकनी उर्ध्वाधर दीवार के साथ, खुरदरे क्षैतिज धरातल से 37º का कोण बनाते हुए चित्रानुसार रखी है तो छड़ सीढ़ी पर फर्श द्वारा लगाया गया अभिलम्ब बल तथा घर्षण बल ज्ञात करो? [g = 10 m/s^2]

Solution : चित्रानुसार सीढ़ी पर निम्न बल कार्यरत है

(a) सीढ़ी का भार W,

(b) उर्ध्वाधर दीवार द्वारा अभिलम्ब बल N_1 ,

(c) फर्श द्वारा अभिलम्ब बल N_2

(d) फर्श द्वारा घर्षण बल 'f'

उर्ध्वाधर तथा क्षैतिज घटक लेने पर,

$N_1 = f$ .....(i)

तथा $N_2 = W$ .....(ii)

B के सापेक्ष बल आघूर्ण लेने पर,

$N_1(AO) = W(CB)$

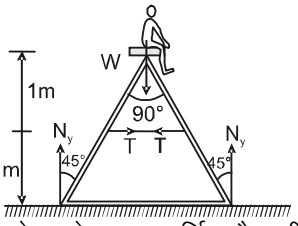
या, $N_1(AB)\cos 53° = W\ \frac{AB}{2} \sin 53°$ या $N_1\ \frac{3}{5} = \frac{W}{2}\ \frac{4}{5}$

या, $N_1 = \frac{2}{3} W$ .....(iii)

फर्श द्वारा अभिलम्ब बल $N_2 = W = (15 kg)(10 m/s^2) = 150 N.$

घर्षण बल $f = N_1 = \frac{2}{3} W = 100 N.$

Example 41. चित्रानुसार द्रव्यमानहीन सीढ़ी घर्षण रहित फर्श पर रखी है। सीढ़ी की दो टांगे क्रास बार के मध्य से जुड़ी है। दोनों टांगों के मध्य का कोण 90° है। एक 60 kg का मोटा आदमी सीढ़ी पर बैठा है। फर्श द्वारा प्रत्येक टांग पर लगने वाला सम्पर्क बल तथा क्रॉसबार में तनाव ज्ञात करो? [Take g = 10m/s^2]



Solution : चित्र में भिन्न–भिन्न भाग पर लगने वाले बल प्रदर्शित है। सीढ़ी + व्यक्ति निकाय को उर्ध्वाधर साम्यावस्था में मानने पर निकाय पर कार्यरत बल, इसका भार तथा फर्श द्वारा आरोपित $N_y + N_y = 2\,N_y$ सम्पर्क बल है। यद्यपि

$2N_y = (60\text{ kg})\,g$ या $N_y = (30\text{ kg})\,(10\text{ m/s}^2) = 300\text{ N}$.

सीढ़ी की बायीं टांग को साम्यावस्था में मानने पर

ऊपरी सिरे के सापेक्ष इस पर लगने वाले बलों के कारण बल आघूर्ण

$N_y\,(2m)\tan 45° = T(1\text{ m})$ या $T = N_y\,2 = (300\text{ N}) \times 2 = 600\text{ N}$.

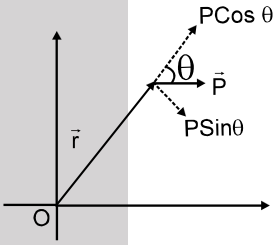
8. कोणीय संवेग ($\vec{L}$)

8. 1. किसी कण का बिन्दु के परितः कोणीय संवेग

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad \Rightarrow \quad L = rp\sin\theta$

or $|\vec{L}| = r_\perp \times P$

or $|\vec{L}| = P_\perp \times r$



जहाँ $\vec{P}$ = कण का रेखीय संवेग

$\vec{r}$ = बिन्दु O, जिसके परितः कण का कोणीय संवेग ज्ञात करना है।

θ = सदिश $\vec{r}$ & $\vec{P}$ के बीच का कोण

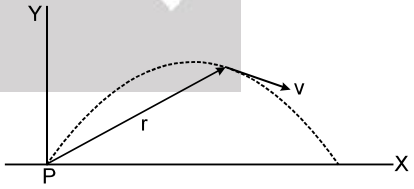
$r_\perp$ = बिन्दु O से कण की गति की दिशा के बीच की लम्बवत् दूरी

$P_\perp$ = $\vec{r}$ के लम्बवत् संवेग का घटक कोणीय संवेग का SI मात्रक kgm^2/sec. होता है।

Solved Examples

Example 42. m द्रव्यमान का एक कण को बिन्दु O से समय t = 0 पर क्षैतिज से 45° के कोण पर u चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। t = u/g समय पर कण का बिन्दु O के सापेक्ष कोणीय संवेग का परिमाण तथा दिशा ज्ञात करो?

Solution : चित्रानुसार X-अक्ष को क्षैतिज के अनुदिश तथा Y-अक्ष को उर्ध्वाधर ऊपर की ओर मानते हैं तथा बिन्दु 'P' मूल बिन्दु पर है।



$v_x = u\cos 45° = u/\sqrt{2}$

तथा $x = v_x t = \dfrac{u}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{u}{g} = \dfrac{u^2}{\sqrt{2}g}$.

उर्ध्वाधर गति के लिए,

$v_y = u\sin 45° = \dfrac{u}{\sqrt{2}} - u = \dfrac{(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\,u$ तथा $y = (u\sin 45°)\,t - \dfrac{1}{2}\,gt^2$

$= \dfrac{u^2}{\sqrt{2}g} - \dfrac{u^2}{2g} = \dfrac{u^2}{2g}\,(\sqrt{2} - 1)$.

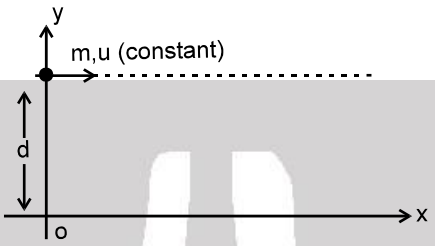
मूल बिन्दु के सापेक्ष कण का समय t पर कोणीय संवेग

$L = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = m(\hat{i}\,x + \hat{j}\,y) \times (\hat{i}\,v_x + \hat{j}\,v_y) = m\,(\hat{k}\,xv_y - \hat{k}\,yv_x)$

$$= m\hat{k}\left[\left(\frac{u^2}{\sqrt{2}\ g}\right)\frac{u}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}) - \frac{u^2}{2g}(\sqrt{2}-1)\frac{u^2}{\sqrt{2}}\right] = -\hat{k}\ \frac{mu^3}{2\sqrt{2}g}$$

कण तल में गति कर रहा है, कण का ऋणात्मक Z-अक्ष के अनुदिश कोणीय संवेग $\frac{mu^3}{2\sqrt{2}g}$ है अर्थात् गति के तल के लम्बवत्।

Example 43. एक 'm' द्रव्यमान का कण बिन्दु (o, d) से गति प्रारम्भ करके नियत वेग $u\hat{i}$ से गति कर रहा है। तो इस क्षण कण का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो? कुछ समय पश्चात् उत्तर क्या होगा ?



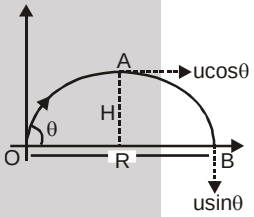
Solution : $\vec{L} = -m\,d\,u\,\hat{k}$. इसकी दिशा हमेशा दक्षिणावर्त रहती है।

Example 44. 'm' द्रव्यमान का कण क्षैतिज से θ कोण पर प्रारम्भिक वेग 'u' से प्रक्षेपित किया जाता है, तो प्रक्षेपण बिन्दु के सापेक्ष कण का कोणीय संवेग ज्ञात करो, जब -

(i) इसकी गति ठीक प्रारम्भ हुई हो (ii) यह पथ के शीर्ष बिन्दु पर हो (iii) यह धरातल से ठीक टकराये

Answer : (i) O ; (ii) $mu\cos\theta\ \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$; (iii) $mu\sin\theta\ \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$

Solution : (i) बिन्दु O के सापेक्ष कोणीय संवेग शून्य है



(ii) A के परितः कोणीय संवेग

$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

$L = H \times mu\cos\theta$

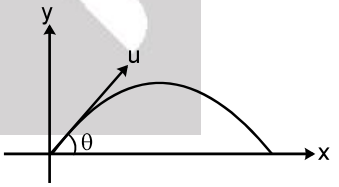
$L = mu\cos\theta\ \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$ **Ans.**

(iii) बिन्दु B के परितः कोणीय संवेग $L = R \times mu\sin\theta$

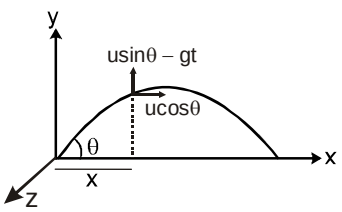
$mu\sin\theta\ \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$ **Ans.**

Example 45. एक 'm' द्रव्यमान का कण क्षैतिज से θ कोण पर प्रारम्भिक वेग 'u' से प्रक्षेपित किया जाता है तो किसी समय 't' पर कण 'P' का कोणीय संवेग ज्ञात करो।

(i) y-अक्ष के सापेक्ष (ii) z-अक्ष के सापेक्ष



Solution : (i) वेग का घटक y-अक्ष के समांतर है, अतः, L = 0



(ii) $\tau = \frac{dL}{dt} - 1/2\ mu\cos\theta.\ gt^2$

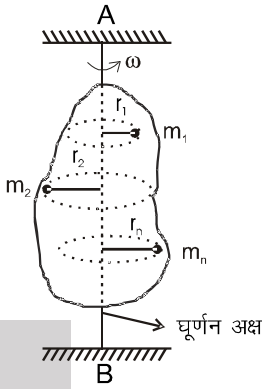
$-mgx = \frac{dL}{dt}$

$-mgx\,dt = dL$

$$\int_0^t -mgx\ dt = \int_0^L dL$$

z-अक्ष के परितः कोणीय संवेग : $L = -1/2\ mu\cos\theta.\ gt^2$ **Ans.**

8.2 स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करते हुए दृढ़ पिण्ड का कोणीय संवेग :



स्थिर अक्ष AB के सापेक्ष दृढ़ पिण्ड का कोणीय संवेग $L_{AB} = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$

$L_1 = m_1 r_1\omega r_1$, $L_2 = m_2 r_2\omega r_2$, $L_3 = m_3 r_3\omega r_3$, $L_n = m_n r_n\omega r_n$

$L_{AB} = m_1 r_1\omega r_1 + m_2 r_2\omega r_2 + m_3 r_3\omega r_3 ..... + m_n r_n\omega r_n$

$$L_{AB} = \sum_{n=1}^{n=n} m_n (r_n)^2 \times \omega$$

$L_{AB} = I_H \omega$

$L_H = I_H \omega$

L_H = पिण्ड का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग

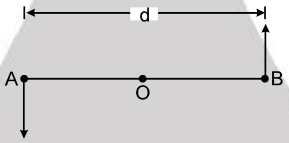
I_H = दृढ़ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण

ω = पिण्ड का कोणीय वेग

Solved Examples

Example 46. m द्रव्यमान के दो कण A तथा B, 'ℓ' लम्बाई की हल्की छड़ से इसके सिरों पर दृढ़तापूर्णक जुड़े है। यह निकाय छड़ के लम्बअर्द्धक के सापेक्ष ω कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है। इसकी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष प्रत्येक कण तथा निकाय का कोणीय संवेग ज्ञात करो?

Solution : चित्र में दी गई स्थिति मानने पर। कण A का केन्द्र O के सापेक्ष वेग $v = \frac{\omega\ell}{2}$ है। कण का अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग $L_1 = mvr = m\left(\frac{\omega\ell}{2}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{4}m\omega\ell^2$ है। दूसरे कण का कोणीय संवेग L_2 भी यही होगा। निकाय का कोणीय संवेग दोनों कणों के कोणीय संवेग के योग के बराबर होगा अर्थात् $L = 1/2\ m\omega\ell^2$



Example 47. समान द्रव्यमान m की दो गेंद 'ℓ' लम्बाई की हल्की छड़ पर एक गेंद इसके सिरे से तथा दूसरी गेंद इसके केन्द्र से जुड़ी है। छड़ दूसरे सिरे पर स्थिर है तथा क्षैतिज तल में ω कोणीय चाल से घूर्णन कर रही है। एक सिरे पर स्थित गेंद का केन्द्र पर स्थित गेंद के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो।

Solution : दी गई स्थिति चित्र में स्पष्ट है। स्थिर सिरे 'O' के सापेक्ष गेंद A का वेग $v_A = \omega(\ell/2)$ है।

O के सापेक्ष गेंद B का वेग $v_B = \omega\ell$ है। अतः B का A के सापेक्ष वेग $v_B - v_A = \omega(\ell/2)$ होगा, इसलिए गेंद B का A के सापेक्ष कोणीय संवेग है $L = mvr$

$= m\omega\left(\frac{\ell}{2}\right)\frac{\ell}{2} = \frac{1}{4}m\omega\ell^2$

इसकी दिशा घूर्णन तल के लम्बवत् है।

Example 48. 400 g द्रव्यमान तथा 10 cm त्रिज्या की समरूप वृत्ताकार वलय इसकी किसी एक व्यास के अनुदिश 20 rad/s की कोणीय चाल से घूर्णन कर रही है, तो वलय का इसकी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग तथा गतिज ऊर्जा ज्ञात करो?

Solution : वलय का इसकी व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है

$I = \frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2}(0.400\ kg)(0.10\ m)^2 = 2 \times 10^{-3}\ kg\text{-}m^2.$

गतिज ऊर्जा है .....

$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3}\ kg - m^2)(400\ rad^2/s^2) = 0.4\ J$

तथा घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग है

$L = I\omega = (2 \times 10^{-3}\ kg\text{-}m^2)(20\ rad/s) = 0.04\ kg\text{-}m^2/s = 0.04\ J\text{-}s.$

8.3 कोणीय संवेग संरक्षण :

घूर्णन में न्यूटन का द्वितीय नियम : $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

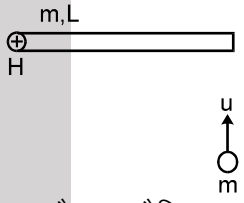
यहाँ $\vec{\tau}$ और $\vec{L}$ समान अक्ष के सापेक्ष है।

☞ यदि किसी कण या निकाय पर $\tau_{\text{बाह्य}} = 0$ हो तो कण या निकाय का कोणीय संवेग, उस बिन्दु या घूर्णन अक्ष के सापेक्ष नियत रहता है।

बलाघूर्ण का आवेग : $\int \tau dt = \Delta J$; $\Delta J \rightarrow$ कोणीय संवेग में परिवर्तन

Solved Examples

Example 49. m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की समरूप छड़ H बिन्दु पर किलकित है। यह क्षैतिज तल में ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष मुक्त रूप से घूर्णन कर सकती है। समान द्रव्यमान m का एक बिन्दु द्रव्यमान प्रारम्भिक वेग u से छड़ के लम्बवत् गति करता हुआ, छड़ के मुक्त सिरे से अप्रत्यास्थ टक्कर करता है तो टक्कर के तुरन्त बाद छड़ का कोणीय वेग ज्ञात करो ?

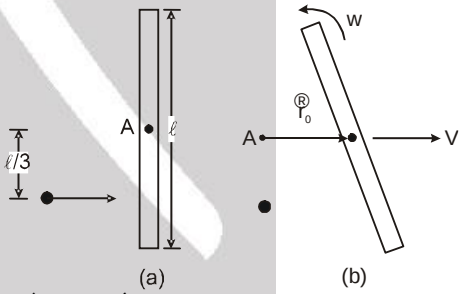


Solution : चूंकि क्षैतिज तल में कोई बाह्य बल उपस्थित नहीं है इसलिए कोणीय संवेग नियत रहता है। यह क्षैतिज तल में H के सापेक्षबल आघूर्ण उत्पन्न करता है।

$$mul = \left(\frac{m\ell^2}{3} + m\ell^2\right)\omega \Rightarrow \omega = \frac{3a}{4\ell}$$

Example 50. m_1 द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की छड़ चिकने क्षैतिज तल पर स्थित है। m_2 द्रव्यमान का कण छड़ की लम्बाई के लम्बवत् v_0 चाल से गति करता हुआ इसके केन्द्र से $\ell/3$ दूरी पर टकराता है तथा टकराने के पश्चात् यही रूक जाता है। तो (a) छड़ के केन्द्र का वेग ज्ञात करो तथा (b) टक्कर के तुरन्त बाद छड़ का इसके केन्द्र से सापेक्ष कोणीय वेग ज्ञात करो।

Solution : दी गई स्थिति चित्र में प्रदर्शित है। छड़ तथा कण को एक साथ निकाय मानने पर। चूंकि बाह्य परिणामी बल शून्य है। अतः निकाय का रेखीय संवेग संरक्षित रहेगा। यहां निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल आघूर्ण भी शून्य है तो निकाय का किसी भी रेखा के सापेक्ष कोणीय संवेग भी नियत रहेगा। माना छड़ के केन्द्र का वेग v_0 तथा केन्द्र के सापेक्ष कोणीय वेग ω है।



(a) टक्कर के पहले रेखीय संवेग mv है तथा टक्कर के पश्चात् संवेग MV है।

यद्यपि $m_2v_0 = m_1V_1$ या $V = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)v_0$

(b) जब छड़ विराम में हो तो माना A छड़ का केन्द्र है। माना AB रेखा चित्र के तल के लम्बवत् रेखा है। छड + कण निकाय का AB के सापेक्ष कोणीय संवेग है।

$L = m_2v_0 (\ell/3)$

टक्कर के पश्चात् कण विराम में आ जाता है। कण का A के सापेक्ष संवेग है।

$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + m_1\vec{r}_0 \times \vec{V}$ चूंकि $\vec{r}_0 \parallel \vec{V}$, $\vec{r}_0 \times \vec{V} = 0$

यद्यपि $\vec{L} = \vec{L}_{cm}$ अतः छड़ का AB के सापेक्ष कोणीय संवेग

$$L = I\omega = \frac{m_1\ell^2}{12}\omega \text{ या } \frac{m_2v\ell}{3} = \frac{m_1\ell^2}{12}\omega \text{ या } \omega = \frac{4m_2v_0}{m_1\ell}$$

9. एक दृढ़ पिण्ड की सम्मिलित स्थानान्तरण और घूर्णन गति

दृढ़ पिण्ड की व्यापक गति दो स्वतंत्र गतियों के योग रूप में समझी जा सकती है। एक तो पिण्ड के किसी बिन्दु की स्थानांतरित गति व दूसरी इस बिन्दु के सापेक्ष पिण्ड की घूर्णन गति। पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र इस बिन्दु के लिए चयन करना सुविधाजनक रहता है, चूंकि इससे गणितीय गणनायें स्वीकृत हो जाएगी।

☞ एक रेल में एक पंखे को, प्लेटफार्म पर खड़ा प्रेक्षक A देखता है।

यदि पंखा बंद है, जबकि रेल चल रही है, तो पंखे की गति शुद्ध स्थानांतरीय होगी, चूंकि पंखे का प्रत्येक बिन्दु समान समय में समान दूरी विस्थापित हो रहा है।

यदि पंखा चालू (शुरू) करें, जबकि रेल खड़ी है, तो पंखे की गति अंश के सापेक्ष शुद्ध घूर्णन गति है, चूंकि अक्ष पर स्थित सभी बिन्दु स्थिर है, जबकि अन्य सभी बिन्दु अक्ष के सापेक्ष समान कोणीय वेग से घूम रहे हैं।

यदि चलती रेल में पंखा चालू (शुरू) किया जाए तो प्लेटफार्म पर स्थित प्रेक्षक के लिए पंखे की गति न तो शुद्ध स्थानांतरीय है ना ही शुद्ध घूर्णन गति। इस प्रकार की गति दृढ़ पिण्ड की व्यापक गति का अच्छा उदाहरण है।

अब यदि प्रेक्षक B रेल में ही स्थित है, तो उसे पंखे की गति शुद्ध घूर्णन गति व B की (A के सापेक्ष) शुद्ध स्थानांतरीय गति के योग रूप में विघटित की जा सकती है।

इस प्रकार दृढ़ पिण्ड की व्यापक गति का शुद्ध घूर्णन व शुद्ध स्थानांतरण गति के विघटन सिर्फ रेल में स्थित पंखे के लिए ही नहीं, अपितु किसी भी दृढ़ पिण्ड की गति के लिए सही (सटीक) है।

9.1 दृढ़ पिण्ड की व्यापक गति की गतिकी :

पूर्व कथनानुसार किसी भी दृढ़ पिण्ड के किसी भी बिन्दु का इसी पिण्ड के किसी भी अन्य बिन्दु के सापेक्ष कोणीय विस्थापन (θ) , कोणीय वेग (ω), कोणीय त्वरण (α) समान होता है।

अतः यदि हम पिण्ड के किसी बिन्दु (माना A) का वेग व किसी भी बिन्दु का अन्य किसी भी बिन्दु के सापेक्ष कोणीय वेग (माना ω), जानते हैं तो इस दृढ़ पिण्ड पर स्थित किसी भी बिन्दु का वेग परिकलित किया जा सकता है। चूंकि दूरी AB नियत है।

चूंकि दूरी AB नियत है

$\vec{V}_{BA} \perp \overrightarrow{AB}$

ज्ञातव्य है कि $\omega = \frac{V_{BA\perp}}{r_{BA}}$

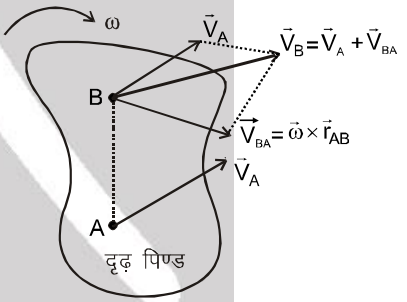
$V_{BA\perp} = V_{BA} = \omega r_{BA}$

सदिश रूप में $\vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$

सापेक्ष वेग सूत्र से : $\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

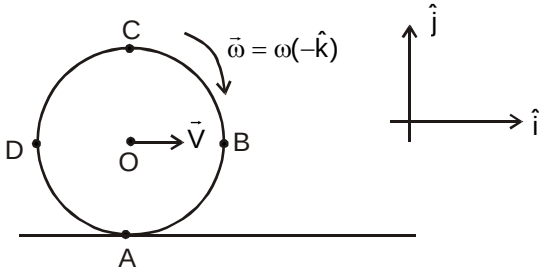
$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$

इसी प्रकार $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{BA}$ [किसी भी दृढ़ पिण्ड निकाय के लिए]



Solved Examples

Example 51. पहिए (त्रिज्या r) की व्यापक गति जिसे केन्द्र O की शुद्ध स्थानांतरीय गति (वेग v से) O के सापेक्ष शुद्ध घूर्णन गति (कोणीय वेग ω) के योग रूप में प्रेक्षित किया जा सकता है।



ज्ञात करें $\vec{v}_{AO}, \vec{v}_{BO}, \vec{v}_{CO}, \vec{v}_{DO}$ व $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C, \vec{v}_D$

Solution : $\vec{v}_{AO} = \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AO}\right)$

$\vec{v}_{AO} = \left(\omega(-\hat{k}) \times \vec{OA}\right)$

$\vec{v}_{AO} = \left(\omega(-\hat{k}) \times r(-\hat{j})\right)$

$\vec{v}_{AO} = -\omega r\hat{i}$

इसी तरह $\vec{v}_{BO} = \omega r(-\hat{j})$

$\vec{v}_{CO} = \omega r(\hat{i})$

$\vec{v}_{DO} = \omega r(\hat{j})$

$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO} = v\hat{i} - \omega r\hat{i}$

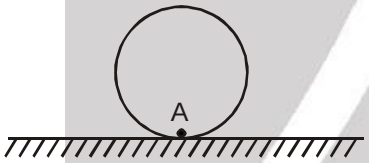
इसी तरह $\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{v}_{BO} = v\hat{i} - \omega r\hat{j}$

$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{v}_{CO} = v\hat{i} + \omega r\hat{i}$

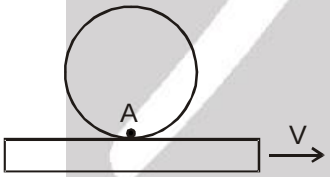
$\vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{v}_{DO} = v\hat{i} + \omega r\hat{j}$

9.2 शुद्ध लोटनी गति (या बिना फिसलन के लोटनी गति) :

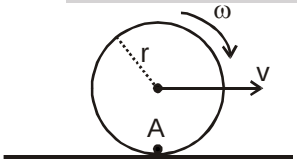
शुद्ध लोटनी गति एक दृढ़ पिण्ड जिसका अनुप्रस्थ काट वृत्तीय है (उदाहरण – पहिया, वलय, चकती, गोला) तथा जो किसी सतह पर गतिमान है के सामान्य घूर्णन का एक विशेष रूप है। अतः लोटनी गति करती हुयी वस्तु तथा स्पर्श सतह के मध्य (स्पर्श बिन्दु पर) कोई सापेक्ष गति नहीं है।



यहाँ स्पर्श बिन्दु A है, तथा स्पर्श सतह क्षैतिज धरातल है। A के शुद्ध लोटनी वेग के लिये = 0 $\Rightarrow V_A = 0$.



ऊपर दिये गये चित्रानुसार शुद्ध लोटनी गति हेतु A का वेग प्लेटफार्म के सापेक्ष शून्य है। $\Rightarrow V_A = V$.



उपरोक्त चित्र से शुद्ध लोटनी गति हेतु A का वेग धरातल के सापेक्ष शून्य है।

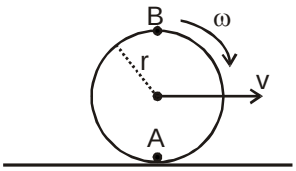
$\Rightarrow$ $v - \omega r = 0$

$v = \omega r$

इसी तरह $a = \alpha r$

Solved Examples

Example 52. चित्रानुसार एक r त्रिज्या का पहिया एक समान सड़क पर लोटनी गति करता है (बिना फिसलन के लोटनी गति)



बिन्दु A तथा B के वेग ज्ञात करो-

Solution : शुद्ध लोटनी गति हेतु स्पर्श सतह विराम में है। बिन्दु A का वेग शून्य है।

अतः $v = \omega r$

बिन्दु B का वेग $= v + \omega r = 2v$

9.3 दृढ़ पिण्ड की सामान्य गति की बल गतिकी :

इस गति को द्रव्यमान केन्द्र के स्थानान्तरण तथा द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष घूर्णन के रूप में भी देखा जा सकता है।

यदि I_{CM} = द्रव्यमान केन्द्र से पारित इस अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

τ_{cm} = द्रव्यमान केन्द्र से पारित इस अक्ष के सापेक्ष बलाघूर्ण

$\vec{a}_{CM}$ = द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण

$\vec{v}_{CM}$ = द्रव्यमान केन्द्र का वेग

$\vec{F}_{ext}$ = निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल

$\vec{P}_{system}$ = निकाय का रेखीय संवेग

$\vec{L}_{CM}$ = द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग

$\vec{r}_{CM}$ = द्रव्यमान केन्द्र का बिन्दु A के सापेक्ष स्थिति सदिश

तो (i) $\vec{\tau}_{cm} = I_{cm}\ \vec{\alpha}$

(ii) $\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$

(iii) $\vec{P}_{system} = M\vec{v}_{cm}$

(iv) कुल K.E.$= \frac{1}{2}Mv_{cm^2} + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

(v) $\vec{L}_{CM} = I_{CM}\ \vec{\omega}$

(vi) बिन्दु A के सापेक्ष कोणीय संवेग = $\vec{L}$ द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष + $\vec{L}$ का द्रव्यमान केन्द्र A के सापेक्ष

$$\vec{L}_A = I_{cm}\vec{\omega} + \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}$$

☞ $\frac{dL_A}{dt} = \frac{d}{dt}\ (I_{cm}\vec{\omega} + \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}\ ) \neq I_A \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. ध्यान दे कि बलाघूर्ण की समीकरण किसी भी दृढ़ पिण्ड के लिये सामान्य गति में केवल और केवल द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष लागू कर सकते हैं।

Solved Examples

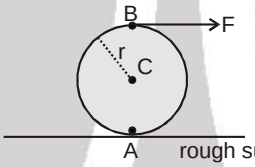
Example 53. 200 g द्रव्यमान का समरूप गोला बिना फिसले समतल सतह पर लुढ़क रहा है। इसके द्रव्यमान केन्द्र की चाल 2.00 cm/s है। इसकी गतिज ऊर्जा ज्ञात करो ?

Solution : चूंकि गोला बिना फिसले समतल सतह पर लुढ़क रहा है तो केन्द्र के सापेक्ष इसकी कोणीय चाल $\omega = \frac{v_{cm}}{r}$ है।

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 = \frac{1}{2}.\frac{2}{5} Mr^2\omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2$$

$$= \frac{1}{5} Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 = \frac{7}{10} Mv_{cm}^2 = \frac{7}{10} (0.200 \text{ kg}) (0.02 \text{ m/s})^2 = 5.6 \times 10^{-5} \text{ J}$$

Example 54. m द्रव्यमान की एकसमान चकती खुरदरे क्षैतिज तल पर रखी है। इसके शीर्ष बिन्दु पर F स्पर्श रैखीय अचर बल कार्यरत है। यदि चकती बिना फिसले लुढ़कती है तो गोले के केन्द्र C तथा बिन्दु A व B का त्वरण ज्ञात करो?



Solution : स्थिति चित्र से स्पष्ट है, जैसे ही गोले पर बल F कार्य करता है, तो इसका संपर्क बिन्दु बांयी ओर फिसलना शुरू कर देता है। जिससे गोले पर स्थैतिक घर्षण बल आगे की ओर (दायीं ओर) लगने लगता है। माना गोले की त्रिज्या r है तथा इसके केन्द्र का रैखीय त्वरण 'a' है। चूंकि यहाँ फिसलन नहीं हो रही है अतः गोले के केन्द्र के सापेक्ष कोणीय त्वरण $\alpha = a/r$ है।

केन्द्र के रैखीय वेग के लिए,

$F + f = ma$ .....(i)

तथा केन्द्र के सापेक्ष घूर्णन गति,

$$Fr - fr = I\alpha = \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{a}{r}\right) \quad \text{या} \quad F - f = \frac{1}{2}ma, \quad \text{.....(iii)}$$

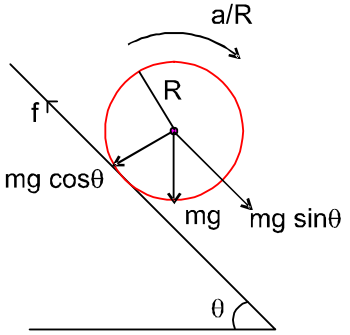
(i) तथा (ii) से, $2F = \frac{3}{2}ma$ या $a = \frac{4F}{3m}$

बिन्दु A का त्वरण = 0

बिन्दु B का त्वरण $= 2a = \frac{8F}{3m}$.

Example 55. एक R त्रिज्या, m द्रव्यमान तथा K घूर्णन त्रिज्या वाला वृत्तीय दृढ़ पिण्ड एक θ कोण वाले नत तल पर बिना फिसलन के लोटनी गति करता है। दृढ़ पिण्ड पर घूर्णन बल तथा पिण्ड का रेखीय त्वरण ज्ञात करो। घर्षण गुणांक का न्यूनतम मान क्या होना चाहिये, जिससे कि दृढ़ पिण्ड बिना फिसलन के शुद्ध लोटनी गति कर सके ?

Solution. यदि दृढ़ पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण a है तथा गोले तथा तल के मध्य घर्षण बल f है तो दृढ़ पिण्ड की स्थानांतरण तथा घूर्णन गति की समीकरण होगी।



$mg \sin\theta - f = ma$ (स्थानान्तरण गति)

$fR = I\alpha$ (घूर्णन गति)

$$f = \frac{I\alpha}{R}$$

$I = mk^2$, शुद्ध लोटनी गति के कारण $a = \alpha R$

$$mg\sin\theta - \frac{I\alpha}{R} = m\alpha R$$

$$mg\sin\theta = m\,\alpha R + \frac{I\alpha}{R}$$

$$mg\sin\theta = m\ \alpha R + \frac{mk^2\alpha}{R}$$

$$mg\sin\theta = ma + \frac{mk^2\alpha}{R}$$

$$mg\sin\theta = a\left[\frac{R^2+k^2}{R^2}\right] \Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{\left[\frac{R^2+k^2}{R^2}\right]} \Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)}$$

$$f = \frac{I\alpha}{R} \qquad \Rightarrow f = \frac{mk^2a}{R^2} \Rightarrow \frac{mgk^2\sin\theta}{R^2+k^2}$$

$$f \le \mu N$$

$$\frac{mk^2}{R^2}\ a \le \mu \le mg\cos\theta \Rightarrow R^2\frac{k^2}{R^2} \times \frac{g\sin\theta}{(k^2+R^2)} \le \mu g\cos\theta$$

$$\mu \ge \frac{\tan\ \theta}{\left[1+\frac{R^2}{k^2}\right]} \qquad \Rightarrow \mu_{min} = \frac{\tan\ \theta}{\left[1+\frac{R^2}{k^2}\right]}$$

नोट : पिछले उदाहरण से, यदि दृढ़ ठोस बेलन है, खोखला बेलन, ठोस गोला और खोखला गोला है।

(1) त्वरण का बढ़ता हुआ क्रम $a_{\text{ठोस गोला}} > a_{\text{खोखला गोला}} > a_{\text{ठोस बेलन}} > a_{\text{खोखला बेलन}}$

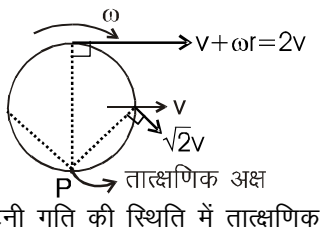
(2) शुद्ध लोटनी गति हेतु आवश्यक घर्षण बल बढ़ते हुए क्रम में $f_{\text{खोखला बेलन}} > f_{\text{खोखला गोला}} > f_{\text{ठोस बेलन}} > f_{\text{ठोस गोला}}$

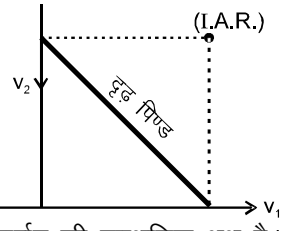
(3) शुद्ध लोटनी हेतु आवश्यक न्यूनतम घर्षण गुणांक बढ़ते हुए क्रम में $\mu_{\text{खोखला बेलन}} > \mu_{\text{खोखला गोला}} > \mu_{\text{ठोस बेलन}} > \mu_{\text{ठोस गोला}}$

9.4 घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष :

यह वह अक्ष है जिसके सापेक्ष सम्मिलित स्थानान्तरण और घूर्णन गति, शुद्ध घूर्णन गति प्रतीत होती है। द्रव्यमान केन्द्र के स्थानान्तरण और घूर्णन का सम्मिलित प्रभाव, द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष, समान कोणीय चाल से किसी स्थिर अक्ष के सापेक्ष शुद्ध घूर्णन के समान होगा। ये अक्ष घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष कहलाती है। ये किसी एक क्षण के लिये परिभाषित है तथा इसकी स्थिति समय के साथ बदलती है। उदाहरण – शुद्ध लोटनी गति में सतह के साथ संपर्क बिन्दु घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष कहलाती है।

घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष का ज्यामितीय निर्माण (I.A.R). दृढ़ पिण्ड पर स्थित दो बिन्दुओं पर वेग सदिश खींचो। घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष उन बिन्दुओं पर डाले गये लम्ब का मिलान बिन्दु है।





☞ शुद्ध लोटनी गति की स्थिति में तात्क्षणिक अक्ष निम्न बिन्दु घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष है।

शुद्ध लोटनी गति में वस्तु की गति की इस अक्ष के सापेक्ष शुद्ध घूर्णन गति के रूप में भी व्याख्या कर सकते हैं।

$\tau_P = I_P\,\alpha$

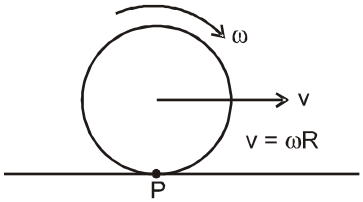
$L_P = I_P\,\omega$

K.E. = $1/2\ I_P\,\omega^2$

जहाँ I_P घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष जो P से पारित है के सापेक्ष जड़त्वाघूर्ण है।

Solved Examples

Example 56.



सिद्ध करो कि गतिज ऊर्जा = 1/2 $I_P \omega^2$

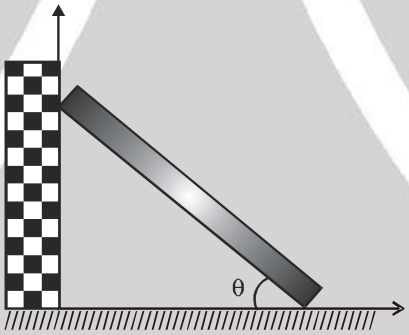
Solution : K.E. = $\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M\omega^2 R^2$

$\frac{1}{2} (I_{cm} + MR^2) \omega^2$

$\frac{1}{2}\left(I_{\text{स्पर्श बिन्दु}}\right)\omega^2$

☞ एक समान वस्तु की शुद्ध लोटनी गति में बलाघूर्ण की समीकरण को भी संपर्क बिन्दु के सापेक्ष लागू किया जा सकता है।

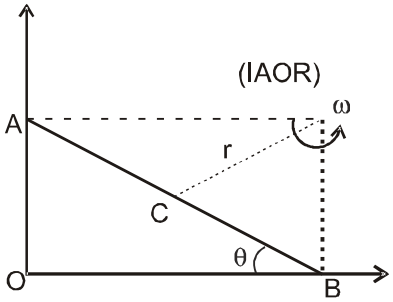
Example 57. एक एक समान बर्तन जिसकी लम्बाई ℓ तथा द्रव्यमान m है। एक उर्ध्वाधर दीवार को छुते हुए उर्ध्वाधर खड़ा हुआ है। (y-अक्ष) थोड़ा सा विचलित करने पर इसका निचला सिरा फर्श के अनुदिश सरकने लगता है। (x-अक्ष) बरतन के कोणीय वेग (ω) का θ के फलन के रूप में व्यजंक ज्ञात करो। घर्षण को हर जगह नगण्य मानें।



Solution : घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष की स्थिति (IAOR) चित्र में दर्शायी गयी है।

$C = \left(\frac{\ell}{2}\cos\theta,\ \frac{\ell}{2}\sin\theta\right)$, $r = \frac{\ell}{2}$ = विकर्ण का आधा

सभी सतह चिकनी है। अतः यांत्रिक उर्जा संरक्षित रहेगी।



∴ बर्तन की गुरूत्वीय स्थितिज उर्जा में कमी = बर्तन की IAOR के सापेक्ष घूर्णन गति में

∴ $mg \frac{\ell}{2} (1 - \sin\theta) = \frac{1}{2} I\omega^2$ .....(1)

यहाँ, $I = \frac{m\ell^2}{12} + mr^2$ (IAOR के सापेक्ष)

या $I = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}$

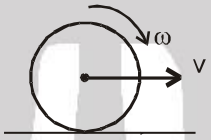
समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है

$$mg\ \frac{\ell}{2}\ (1 - \sin\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)\omega^2$$

या $\omega = \sqrt{\frac{3g\ \ (1-\sin\theta)}{\ell}}$ **Ans.**

घर्षण की प्रकृति निम्न स्थितियों में ज्ञात करो, वस्तु को पूर्णरूप से दृढ़ मानें।

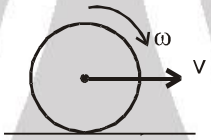
(i) $v = \omega R$



चिकनी सतह

घषर्ण नहीं है तथा शुद्ध लोटनी गति है।

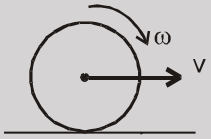
(ii) $v = \omega R$



खुरदरी सतह

घषर्ण नहीं है तथा शुद्ध लोटनी गति है। (यदि वस्तु पूर्णरूप से दृढ़ नहीं हो तो इस स्थिति में एक लघु (छोटा) घर्षण बल कार्य करेगा, जिसे लोटनी घर्षण कहते हैं।

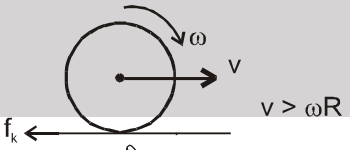
(iii) $v > \omega R$ or $v < \omega R$



चिकनी सतह

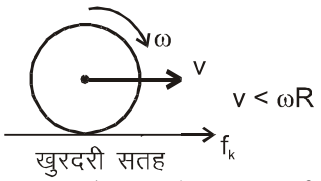
घर्षण बल नहीं परन्तु शुद्ध लोटनी गति नहीं है।

(iv) $v > \omega R$



खुरदरी सतह

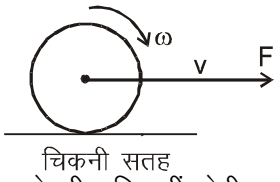
यहाँ संपर्क बिन्दु पर सापेक्ष गति है, अतः गतिज घर्षण, $f_k = \mu N$ पीछे की दिशा में लगता है। यह गतिक घर्षण v को घटाता है और ω को बढ़ाता है, अतः कुछ समय बाद $v = \omega R$ होगा और स्थिति (ii) की तरह शुद्ध लोटनी गति होगी।



खुरदरी सतह

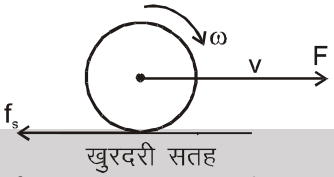
यहाँ संपर्क बिन्दु पर सापेक्ष गति है, जिससे गतिक घर्षण, $f_k = \mu N$ आगे की ओर लगता है। यह गतिक घर्षण v को बढ़ाता है और ω को घटाता है। अतः कुछ समय बाद $v = \omega R$ होगा और यह स्थिति (ii) की तरह शुद्ध लोटनी गति करेगा।

(vi) $v = \omega R$ (प्रारम्भ में)



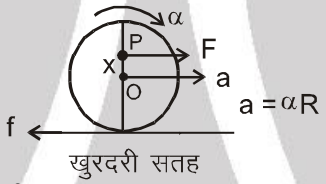
कोई घर्षण नहीं है और कोई शुद्ध लोटनी गति नहीं होगी।

(vii) $v = \omega R$ (प्रारम्भ में)



स्थैतिक घर्षण जिसका मान शून्य से $\mu_s N$ के बीच है, पीछे की ओर लगेगा। यदि घर्षण गुणांक पर्याप्त है।

Example 58. एक m द्रव्यमान और r त्रिज्या का एक दृढ़ पिण्ड एक खुरदरी सतह पर बिना फिसलन के लौटता है। चित्रानुसार केन्द्र से x दूरी पर दृढ़ पिण्ड पर एक बल लगेगा। x का वह मान ज्ञात करो, जिससे स्थैतिक घर्षण शून्य हो जायें?



Solution : द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बलाघूर्ण $Fx = I_{cm}\,\alpha$ .....(1)

$F = ma$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) से

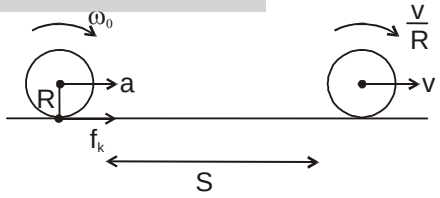
$max = I_{cm}\,\alpha$ $(a = \alpha R)$

$$x = \frac{I_{cm}}{mR}$$

नोट : शुद्ध लोटनी के लिये यदि कोई घर्षण आवश्यक है तो घर्षण बल स्थैतिक घर्षण बल होगा। यह शून्य हो सकता है या आगे की ओर या पीछे की ओर हो सकता है जो कि x के मान पर निर्भर करेगा। यदि F बिन्दु P के नीचे लगता है तो घर्षण बल आगे की ओर लगेगा और यदि F बिन्दु P के ऊपर लगता है तो घर्षण बल आगे की ओर लगेगा।

Example 59. एक बैलन को ω_0 कोणीय वेग दिया जाता है। जिसका प्रारम्भिक वेग शून्य है। यह खुदरे तल पर रखा है। बेलन द्वारा तय दूरी क्या होगी। जब तक यह शुद्ध लौटनी गति नही करता है। घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution :



$$\mu Mg\,R = \frac{MR^2 \propto}{2}$$

$$\propto = \frac{2\mu g}{R}$$ .....(1)

प्रारम्भिक वेग $u = 0$

$v^2 = u^2 + 2as$

$v^2 = 2as$ .....(2)

$f_K = Ma$

$\mu Mg = Ma$

$a = \mu g$ .....(3)

$\omega = \omega_0 - \alpha t$

समीकरण (1) से $\omega = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R}\,t$

$v = u + at$

समीकरण (3) से $v = \mu g t$

$$\omega = \omega_0 - \frac{2v}{R}$$

$$\omega = \omega_0 - 2\omega$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{3}$$

समीकरण (2) से $\left(\frac{\omega_0 R}{3}\right)^2 = (2as) = 2\mu gs$

$$s = \left(\frac{\omega_0^2 \ R^2}{18 \ \mu g}\right)$$

घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $w = (-f_k R\, d\theta + f_k \Delta s)$

$$-\mu mg R \Delta\theta + \frac{\mu mg \times \omega_0^2 R^2}{18 \ \mu g}$$

$$\Delta\theta = \omega_0 \times t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = \omega_0 \times \left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{2\mu g}{R}\left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2$$

$$\frac{\omega_0^2 R}{3\mu g} - \frac{\omega_0^2 R}{9\mu g} \Rightarrow \frac{2\omega_0^2 R}{9\mu g}$$

$$-\mu mg \times R\frac{2\omega_0^2 R}{9\mu g} + \mu mg \times \frac{\omega_0^2 R^2}{18\mu g}$$

$$-\frac{2m\omega_0^2 R^2}{9} + \frac{m\omega_0^2 R^2}{18} \Rightarrow \frac{-3m \ \omega_0^2 R^2}{18} = -\frac{m\omega_0^2 R^2}{6}$$

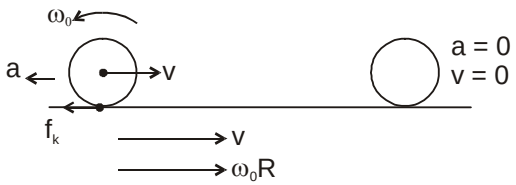
वैकल्पिक हल

(कार्य – उर्जा प्रमेय से)

$$w_g + w_a + w_{f_k} = \Delta K$$

$$w_{f_k} = \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\omega_0 R}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2} \times \left(\frac{\omega_0}{3}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2} \times \omega_0^2\right] = \left(-\frac{m\omega_0^2 R^2}{6}\right)$$

Example 60. एक खोखले गोले को v चाल तथा ω_0 कोणीय वेग से खुरदरे तल पर क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित किया जाता है। तो $\frac{v}{\omega_0}$ का मान क्या होगा, ताकि गोला कुछ देर के बाद रूक जाये।



Solution : गोले के निम्नतम बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण

$$f_k \times R = I\alpha$$

$$\mu mg \times R = \frac{2}{3}mR^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{3\mu g}{2R}$$ कोणीय वेग के विपरित दिशा में कोणीय त्वरण

$\omega = \omega_0 - \alpha t$ (अन्तिम कोणीय वेग $\omega = 0$)

$$\omega_0 = \frac{3\mu g}{2R} \times t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\omega_0 \times 2R}{3\mu g}$$

त्वरण 'a = μg'

$v_f = v - at$ (अन्तिम वेग $v_f = 0$)

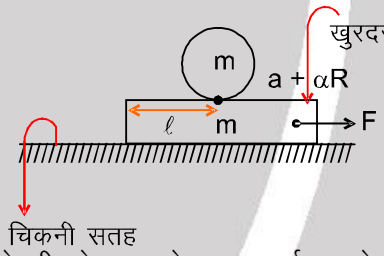
$v = \mu g \times t$

$$t = \frac{v}{\mu g}$$

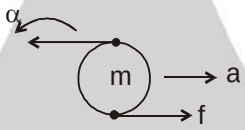
गोले के रोकने के लिये वह समय जिस पर v और ω शून्य है, समान होना चाहिये।

$$\frac{v}{\mu g} = \frac{2\omega_0 R}{3\mu g} = \frac{v}{\omega_0} = \frac{2R}{3}$$

9.5 गति करती हुई सतह पर लौटनी गति :



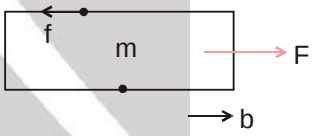
तख्ते पर घर्षण पीछे की ओर तथा बेलन पर घर्षण आगे की ओर होगा। इसलिए बेलन आगे गति करेगा।



लौटनी गति के लिए स्थितिक घर्षण f है।

$$fR = \frac{mR^2}{2}\alpha$$

$$\alpha = \frac{2f}{mR} \; ; \quad f = ma$$



$F - f = mb \Rightarrow F = m(a + b)$

$$a = \frac{\alpha R}{2}$$

सम्पर्क बिन्दु पर

$b = a + \alpha R$

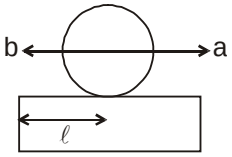
$$b = \frac{3\alpha R}{2} \quad \Rightarrow \quad b = 3a$$

$$F = 4ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{4m}$$

$$b = \frac{3F}{4m}$$

तख्ते के सापेक्ष तय दूरी = ℓ

तख्ते के सापेक्ष त्वरण (b – a)



$$\ell = \frac{1}{2}(b - a)\, t^2$$

$$\ell = \frac{1}{2} \times 2at^2 = t = \sqrt{\frac{a \times \ell}{F}} = 2\sqrt{\frac{m\ell}{F}}$$

Solved Examples

Example 61. θ झुकाव कोण तथा लम्बाई वाले नत तल के शीर्ष से ठोस गोले को विराम से छोड़ा जाता है। यदि गोला नत तल पर बिना फिसले लुढ़कता है तो इसके तली पर पहुंचने पर इसकी चाल क्या होगी?

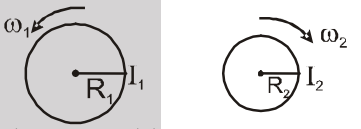
Solution : माना गोले का द्रव्यमान m तथा त्रिज्या r है। जब गोला तल पर पहुँचेगा तो माना इसकी रैखीय चाल v है। चूंकि गोला बिना फिसले लुढ़क रहा है तो इसकी अक्ष के सापेक्ष इसकी कोणीय चाल $\omega = v/r$ है। तल पर गतिज ऊर्जा होगी -

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{5}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

यह स्थितिज ऊर्जा $mg\sin\theta$ में हानि के बराबर होगी, अतः

$$\frac{7}{10}mv^2 = mg\ell\sin\theta \qquad \text{या} \qquad v = \sqrt{\frac{10}{7}g\ell\sin\theta}\,.$$

Example 62. चित्र में R_1 तथा R_2 त्रिज्या के दो बेलन प्रदर्शित है। इनके जड़त्व आघूर्ण इनकी अक्षों के सापेक्ष क्रमशः I_1 तथा I_2 है। चित्रानुसार दोनों बेलन प्रारम्भ में स्वयं की अक्षों के सापेक्ष ω_1 तथा ω_2 कोणीय चाल से घूर्णन कर रहे हैं। बेलन इनकी अक्षों को समान्तर रखते हुए एक दूसरे के पास गति करते हैं।
दोनों एक दूसरे के सम्पर्क में आने पर पहले फिसलते हैं। फिर घर्षण के कारण दोनों फिसलना बंद कर देते हैं। फिसलन बंद होने के पश्चात् दोनों की कोणीय चाल ज्ञात करो?



Solution : जब फिसलन बंद हो जाती है तो दोनों बेलनों के संपर्क बिन्दुओं के रैखीय वेग समान होंगे। यदि ω'_1 तथा ω'_2 क्रमशः इनकी कोणीय चाल हो तो रैखीय वेग है -

$\omega'_1 R_1$ तथा $\omega'_2 R_2$ .....(i)

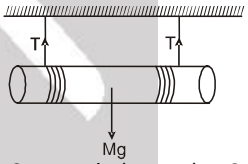
जब तक दोनों बेलनों में फिसलन होती है तब तक घर्षण कार्यरत रहता है, इसके कारण इनकी कोणीय चाल में परिवर्तन हो जाता है। यदि यह बल f, t समय तक के लिए कार्य करता है तो प्रथम बेलन पर बल आघूर्ण fR_1 तथा दूसरे बेलन पर बल आघूर्ण fR_2 है। माना $\omega_1 > \omega_2$, तो इनके सापेक्ष कोणीय आवेग $-fR_1t$ तथा fR_2t, हैं

इसलिए $-f R_1 t = I_1(\omega'_1 - \omega_1)$ तथा $fR_2 t = I_2(\omega'_2 - \omega_2)$

या, $$-\frac{I_1}{R_1}(\omega'_1 - \omega_1) = \frac{I_2}{R_2}(\omega'_2 - \omega_2) \qquad \text{.....(ii)}$$

(i) तथा (ii) को हल करने पर $\omega'_1 = \dfrac{I_1\omega_1R_2 + I_2\omega_2R_1}{I_2R_1^2 + I_1R_2^2} r_2$ तथा $\omega'_2 = \dfrac{I_1\omega_1R_2 + I_2\omega_2R_1}{I_2R_1^2 + I_1R_2^2} R_1$

Example 63. चित्रानुसार M द्रव्यमान का खोखला बेलन इसके चारो ओर लिपटी हुई रस्सी की मदद से लटका हुआ है, तो (a) रस्सी में तनाव T तथा (b) जब बेलन ℓ दूरी पर गिर जायेगा तो इसकी चाल ज्ञात करो।



Solution : छत तथा बेलन के मध्य स्थित रस्सियों का भाग विराम में है। अतः बेलन के वह बिन्दु जहाँ से इसको रस्सियाँ छोड़ेगी, विराम में है। बेलन रस्सियों पर बिना फिसले लुढ़क रहा है। माना बेलन का केन्द्र 'a' त्वरण से गिर रहा है।
चूंकि बेलन रस्सियों पर फिसल नहीं रहा है। अतः बेलन का इसकी अक्ष के सापेक्ष कोणीय त्वरण $\alpha = a/R$, है।
बेलन के द्रव्यमान केन्द्र के लिए गति की समीकरण है।

$Mg - 2T = Ma$ .....(i)

तथा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष गति के लिए, ...

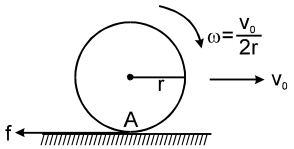
$2Tr = (Mr^2\alpha) = Mra$ या $2T = \frac{1}{2}ma$ .....(ii)

(i) तथा (ii) से, $a = \frac{g}{2}$ तथा $T = \frac{Mg}{4}$.

चूंकि बेलन का केन्द्र विराम से गति प्रारम्भ करता है, अतः h दूरी गिरने के बाद इसका वेग है -

$$v^2 = 2\left(\frac{g}{2}\right)\ell \qquad \text{या} \qquad v = \sqrt{g\ell}$$

Example 64. चित्रानुसार M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या का खोखला गोला खुरदरे क्षैतिज तल पर फिसल रहा है। किसी क्षण इसका रैखिक वेग v_0 तथा केन्द्र के सापेक्ष घूर्णन वेग $\frac{v_0}{2R}$ है। जब गोला शुद्ध लौटनी गति करने लगे तो इसका स्थानान्तरण वेग ज्ञात करो?



Solution : केन्द्र का वेग = v_0 तथा केन्द्र के सापेक्ष कोणीय वेग = $\frac{v_0}{2R}$ है। यद्यपि $v_0 > \omega_0 R$ है अतः गोला आगे की ओर फिसलता है जिससे तल द्वारा घर्षण पीछे की ओर कार्य करता है। चूंकि घर्षण गतिक है, इसका मान $\mu N = \mu Mg$ है तथा गोला $a_{cm} = f/M.$ से मंदित होगा,

$$v(t) = v_0 - \frac{f}{M}t \qquad \text{.....(i)}$$

यह घूर्णन केन्द्र के सापेक्ष बल आघूर्ण प्रदान करेगा बल आघूर्ण दक्षिणावर्त है तथा ω_0 की दिशा में है। अतः केन्द्र के सापेक्ष कोणीय त्वरण होगा–

$$\alpha = f\frac{R}{(2/3)MR^2} = \frac{3f}{2\ MR}$$

तथा 't' समय में दक्षिणावर्त कोणीय वेग होगा $\omega(t) = \omega_0 + \frac{3f}{2\ MR}t = \frac{v_0}{2R} + \frac{3f}{2MR}t$

जब $v(t) = r\,\omega(t)$ होगा तो, $v(t) = \frac{v_0}{2} + \frac{3f}{2M}t$ .....(ii)

(i) तथा (ii) से t विलोप करने पर, $\frac{3}{2}v(t) + v(t) = \frac{3}{2}v_0 + \frac{v_0}{2}$ या $v(t) = \frac{2}{5} \times 2v_0 = \frac{4}{5}v_0$

अतः गोला $4v_0/5$ स्थानान्तरण वेग से आगे की दिशा में लोटनी गति करेगा।

Example 65. 2m द्रव्यमान और ℓ लम्बाई की एक छड़ (AB) क्षैतिज घर्षणरहित सतह पर रखी हुई है। सतह के अनुदिश चलने वाला m द्रव्यमान का एक कण, छड़ को v_0 वेग से AB के लम्बवत् दिशा में टक्कर करता है। टक्कर प्रत्यास्थ है। टक्कर के बाद कण स्थिरावस्था में आ जाता है। तब टक्कर के बाद कण स्थिरावास्था में आ जाता है। तब टक्कर के बाद कण स्थिरावस्था में आ जाता है। तब टक्कर के बाद कण स्थिरावस्था में आ जाता है। तब टक्कर के बाद निम्न को ज्ञात करो–

(a) छड़ के द्रव्यमान केन्द्र का वेग (b) कोणीय वेग

Solution : (a) माना टक्कर के बाद छड़ के द्रव्यमान केन्द्र की चाल v है तथा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय वेग ω है। निकाय (छड़ + द्रव्यमान) पर क्षैतिज तल में बाह्य बल शून्य है।

अतः x दिशा में रेखीय संवेग संरक्षण से

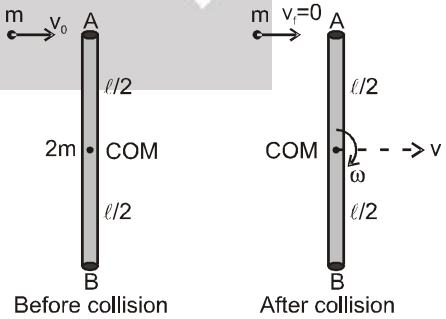
$$mv_0 = 2mv \qquad \text{....(1)}$$

निकाय पर किसी बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण शून्य है।

छड़ के द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग संरक्षण से

$$mv_0\frac{\ell}{2} = I\omega \quad \Rightarrow \quad mv_0\frac{\ell}{2} = \frac{2m\ell^2}{12}\omega$$

$$mv_0 = m\omega\frac{\ell}{3} \qquad \text{....(2)}$$

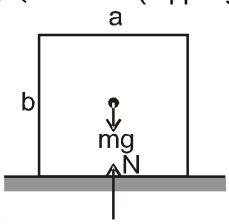


समीकरण (1) से द्रव्यमान केन्द्र का वेग $v = \frac{v_0}{2}$

समीकरण (2) से कोणीय वेग $\omega = \frac{3v_0}{\ell}$

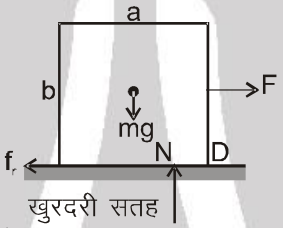
10. पलटन :

विभिन्न स्थितियों में किसी वस्तु को सतह पर फिसलने से रोकने के लिए एक बाह्य बल लगाया जाता है। कई स्थितियों में वस्तु फिसलन से पहले ही पलट जाती है। इसे पलटन (toppling) कहते हैं।



(1) यहाँ कोई क्षैतिज बल नहीं है अतः निचले भाग पर दाब एक समान है और अभिलम्ब, mg के साथ समरेखीय होगा।

(2) यदि एक बल द्रव्यमान केन्द्र पर लगाया जाता है, तो दाब एकसमान नहीं होगा तथा अभिलम्ब दायीं तरफ विस्थापित हो जायेगा, जिससे N के द्वारा बलाघूर्ण, विपरित दिशा में घर्षण के बलाघूर्ण को संतुलित कर सके।



(3) यदि F को लगातार बढ़ाया जाता है तो N दायीं तरफ विस्थापित होता है, जब तक अधिकतम बिन्दु D पर नहीं पहुंच जायें। यहाँ हम मानते हैं कि सतह पर्याप्त खुरदरी है, जिससे F का मान F_{max} तक बढ़ाने पर फिसलन शुरू हो जाए। यदि बल इसके बाद बढ़ाया जाता है, तब N के कारण बलाघूर्ण घर्षण f_r के कारण विपरित बलाघूर्ण से संतुलित नहीं होगा और वस्तु पलट जायेगी।

F का वह मान जिस पर वस्तु नहीं पलटेगी F_{max} होगी।

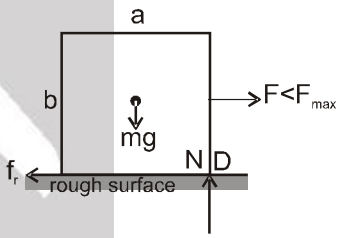
$F_{max} = f_r$

$N = mg$

$f_r \cdot b/2 = N \cdot a/2$

$f_r = Na/b = mg\ a/b$, $F_{max} = mg\ a/b$

(4) यदि सतह पर्याप्त खुरदरी नहीं है तो वस्तु पर बल F का मान $F_{max} = mg\ a/b$ होने से पहले ही फिसलन हो जायेगी, तब वस्तु पलटने से पहले फिसलेगी। जब एक बार वस्तु फिसलना शुरू करती है, तब स्थैतिक घर्षण नियत हो जाता है। अतः कोई पलटन नहीं होगी।

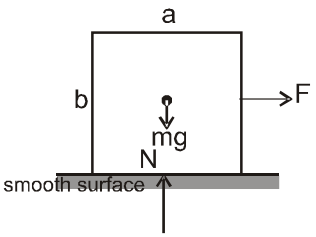


$F_{max} > f_{limit} \Rightarrow mg\ a/b > \mu mg \Rightarrow \mu < a/b$

यह स्थिति तब होगी यदि पलटने की शर्त जब $\mu \geq a/b$ है। इस स्थिति में वस्तु पलटेगी यदि $F > mg\ a/b$ लेकिन यदि $\mu < a/b$, है तो द्रव्यमान केन्द्र पर F के किसी भी मान के लिये वस्तु नहीं पलटेगी।

Solved Examples

Example 66.



ब्लॉक को पलटने toppling) के लिए न्यूनतम F का मान ज्ञात करो।

Solution : कभी नहीं पलटेगा।

Example 67. एक एकसमान घन जिसकी भुजा 'a' तथा द्रव्यमान m है। एक खुरदरी टेबल पर रखा है। क्षैतिज बल F एक फलक के लम्बवत् दिशा में एक बिन्दु जो फलक के केन्द्र से नीचे आधार से $\frac{a}{4}$ ऊँचाई पर लगाया जाता है।

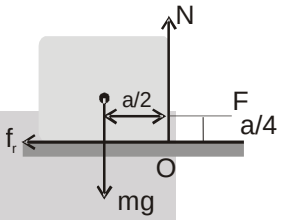
(i) F का न्यूनतम मान क्या हो, जिसके कारण घन किसी एक किनारे के सापेक्ष पलट जाये ?

(ii) पलटने की घटना के लिए μ_s का न्यूनतम मान ज्ञात करो।

(iii) यदि $\mu = \mu_{min}$ तो पलटने के लिए न्यूनतम बल ज्ञात करो।

(iv) न्यूनतम μ_s ताकि F_{min} पलट सके।

Solution : (i) सीमान्त स्थिति अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल O से गुजरेगा। घन O के सापेक्ष पलटेगा। यदि F का बलाघूर्ण O के सापेक्ष mg के बलाघूर्ण से ज्यादा हो जाये।



अतः $F\left(\frac{a}{4}\right) > mg\left(\frac{a}{2}\right)$ या $F > 2\,mg$

इसलिए F का न्यूनतम मान 2 mg है।

(ii) इस स्थिति में चूंकि ये द्रव्यमान केन्द्र पर कार्यरत नहीं है। वस्तु फिसलन शुरू होने के बाद भी पलट सकती है, क्योंकि द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बलाघूर्ण बढ़ रहा है। अतः $\mu_{min} = 0$

(iii) अब वस्तु पलटने से पहले फिसल रही है, O घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष नहीं है, अतः बलाघूर्ण की समीकरण इसके साथ लागू नहीं की जा सकती है, ये अब द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष लागू की जा सकती है।

$F \times \frac{a}{4} = N \times \frac{a}{2}$ .....(1)

$N = mg$ .....(2)

समीकरण (1) व ()2) से

$F = 2\,mg$

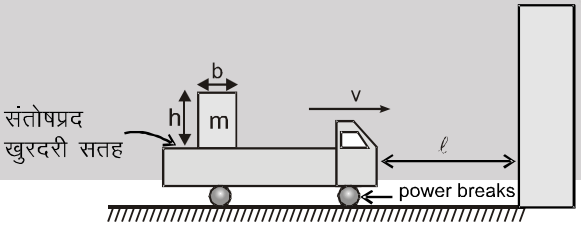
(iv) $F > 2\,mg$ .....(1) (हल (i) से)

$N = mg$ .....(2)

$F = \mu_s N = \mu_s mg$ .....(3) समीकरण (1) व (2) से

$\mu_s = 2$

Example 68. ℓ का वह मान ज्ञात करो, जिससे की ट्रक उस पर रखे बक्से को बिना पलटे टक्कर को टाल सके।

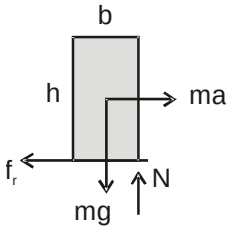


Solution : $ma\,\frac{h}{2} \le mg\,\frac{b}{2}$

$a \le \frac{b}{h}g$

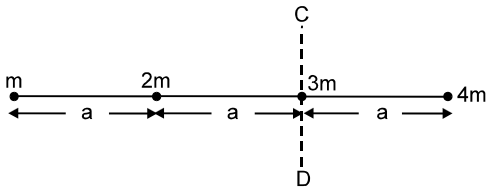
ट्रक का अन्तिम वेग शून्य है, अतः

$0 = v^2 - 2\left(\frac{b}{h}g\right)\ell \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{h}{2b}\frac{v^2}{g}$



Self Practice Problems

Problem 1. चार बिन्दुवत् द्रव्यमान एक द्रव्यमान रहित छड़ द्वारा चित्रानुसार जुड़े हुये है। CD अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो?



Solution : $I_1 = m(2a)^2$

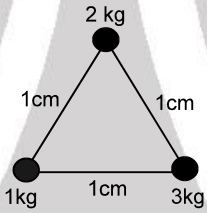
$I_2 = 2ma^2$

$I_3 = 0$

$I_4 = 4ma^2$

$I_{CD} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 10\ ma^2$ **Ans.**

Problem 2. 1 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज के तीनों शीर्षो पर तीन बिन्दुवत् कण रखे है। द्रव्यमान क्रमशः 1, 2 व 3 kg के है तथा चित्रानुसार रखे है। त्रिभुज के तल के लम्बवत् व 1 kg द्रव्यमान से गुजरने वाले अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो ?



Solution : 1 kg द्रव्यमान से पास होने वाली अक्ष के सापेक्ष 2 kg द्रव्यमानका जड़त्व आघूर्ण

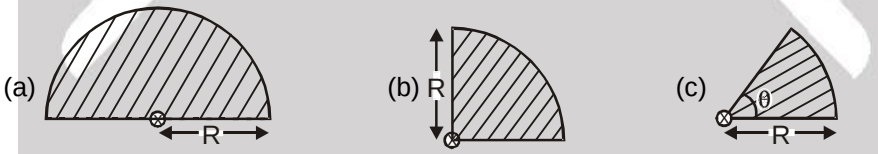
$I_1 = 2 \times (1 \times 10^{-2})^2 = 2 \times 10^{-4}$

1 kg द्रव्यमान से पास होने वाली अक्ष के सापेक्ष 3 kg द्रव्यमान का जड़त्व आघूर्ण है

$I_2 = 3 \times (1 \times 10^{-2})^2 = 3 \times 10^{-4}$

$I = I_1 + I_2 = 5 \times 10^{-4}\ kgm^2$

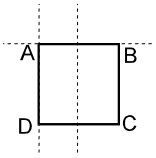
Problem 3. दर्शाये गये चित्रों का तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। प्रत्येक का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है ?



Solution : $dI = dm\dfrac{R^2}{2}$

$$I = \int dI = \frac{R^2}{2}\int dm = \frac{MR^2}{2}$$

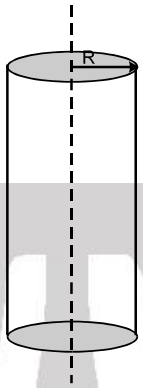
Problem 4. 'a' भुजा की M द्रव्यमान वाली एक समान वर्गाकार प्लेट का AB से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution : $dI = dm\dfrac{a^2}{3}$

$$I = \int dI = \frac{a^2}{3}\int dm = \frac{Ma^2}{3}$$

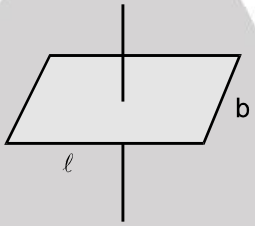
Problem 5. M द्रव्यमान, त्रिज्या R व ℓ लम्बाई के ठोस बेलन का इसके अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



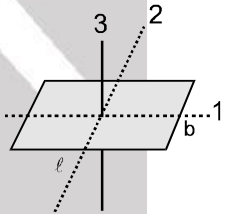
Solution : बेलन का प्रत्येक अवयव ठोस चकती है अतः $\int dI = \int dm\dfrac{R^2}{2}$

$$I = \frac{MR^2}{2}$$ **Ans.**

Problem 6. M द्रव्यमान तथा 'ℓ' लम्बाई व 'b' चौड़ाई एक समान आयताकार प्लेट का इसके लम्बवत् केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution : लम्बवत् अक्ष प्रमेय से $I_3 = I_1 + I_2$

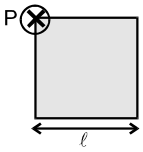


$$I_1 = \frac{Mb^2}{12}$$

$$I_2 = \frac{M\ell^2}{12}$$

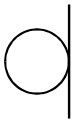
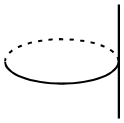
$$I_3 = \frac{M(\ell^2 + b^2)}{12}$$

Problem 7. M द्रव्यमान व 'ℓ' भुजा वाली एक समान वर्गाकार प्लेट का इसके लम्बवत् व P से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution : $I_P = \dfrac{M\ell^2}{6} + \dfrac{M\ell^2}{2} = \dfrac{2M\ell^2}{3}$

Problem 8. M द्रव्यमान की एक वलय का इसकी स्पर्श–रेखा के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो। जो (i) वलय के तल में हो (ii) वलय के तल के लम्बवत् हो।

(i)  (ii) 

Solution : **(i)** वलय के तल तथा केन्द्र से पास होने वाली अक्ष में सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$I_1 = \frac{MR^2}{2}$

समान्तर अक्ष प्रमेय से

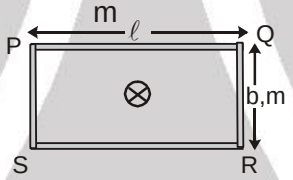
$I' = I_1 + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$

(ii) वलय के तल के लम्बवत् और केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष वलय का जड़त्व आघूर्ण

$I_C = MR^2$

समान्तर अक्ष प्रमेय से $I'' = I_C + MR^2 = 2MR^2$

Problem 9. m द्रव्यमान की एक समान छड़ों से बने एक आयताकार फ्रेम का (i) इसके केन्द्र से गुजरने वाली व तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो। (ii) PQ से गुजरने वाली अक्ष के परितः भी जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो ?



Solution : (i) फ्रेम के तल के लम्बवत् और केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$I_C = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

$I_1 = I_3,\ I_2 = I_4$

$I_C = 2I_1 + 2I_2$

$I_1 = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{mb^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

अतः , $I_C = \frac{2m}{3}(\ell^2 + b^2)$

(ii) PQ छड़ के PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_1 = 0$

PS छड़ के PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_2 = \frac{mb^2}{2}$

QR छड़ के PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_3 = \frac{mb^2}{2}$

RS छड़ के PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_4 = mb^2$

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{5mb^2}{3}$

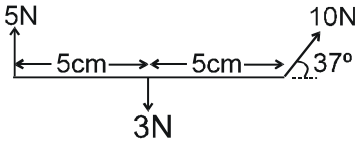
Problem 10. पिछले प्रश्न में कण की P से Q के दौरान गति में गुरूत्वीय बल का P के सापेक्ष बलाघूर्ण है -

(A) बढ़ रहा है (B) घट रहा है (C) नियत है

(D) पहले बढ़ रहा है, फिर घट रहा है

Solution : बढ़ रहा है, क्योंकि P से दूरी बढ़ रही है।

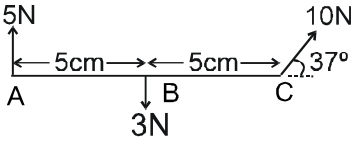
Problem 11. एक छड़ पर चित्रानुसार बल कार्यरत है तो बल का क्रिया बिन्दु ज्ञात करो?



Solution : A के सापेक्ष B का बलाघूर्ण τ_1 = 3N × 5 = 15N cm (दक्षिणावर्त)

C का A के सापेक्ष बलाघूर्ण τ_2 = 6N × 10 = 60 N cm (वामावर्त)

छड़ के लम्बवत् परिणामी बल F = 8 N

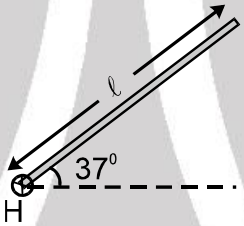


$\tau_1 + \tau_2 = F x$ (x = बिन्दु A से दूरी)

$-15 + 60 = 8x$

$x = 45/8 = 5.625$ cm

Problem 12. m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की छड़ H बिन्दु पर क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष कीलकित है। यह ऊर्ध्वाधर तल में घूर्णन कर सकती है। यह प्रारम्भिक स्थिति से 37° का कोण बना रही है। इसको यहाँ से मुक्त करने के तुरन्त बाद कोणीय त्वरण α ज्ञात करो?



Solution : कीलकीत के सापेक्ष बलाघूर्ण $= \tau_H = I\alpha$

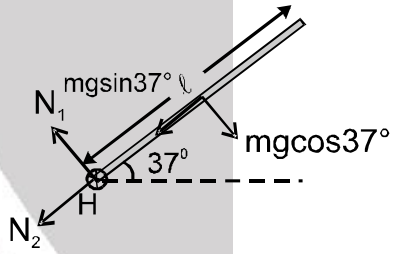
$$mg\cos 37 \frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{3}\alpha$$

$\alpha = 6g / 5\ell$

$$a_t = \alpha\frac{\ell}{2} = \frac{3g}{5}$$

$mg\cos 37 - N_1 = ma_t$

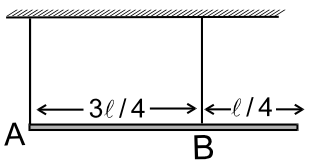
$$N_1 = \frac{mg}{5}$$



छड़ का कोणीय वेग शून्य है। अतः $N_2 = mg\sin 37° = 3mg/5$

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{\left(\frac{mg}{5}\right)^2 + \left(\frac{3mg}{5}\right)^2} = \frac{mg\sqrt{10}}{5}$$

Problem 13. चित्रानुसार, लम्बाई तथा m द्रव्यमान की छड़ दो समान लम्बाई की रस्सी द्वारा छत से लटकी है, तो दोनों रस्सी में तनाव ज्ञात करो?



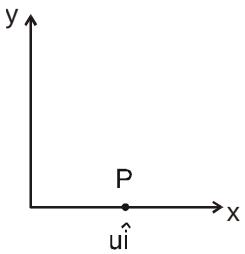
Solution : $T_A + T_B = mg$ .....(i)

बिन्दु A के सापेक्ष बलाघूर्ण शून्य है

अतः $T_B \times \frac{3\ell}{4} = mg\frac{\ell}{2}$ .....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से $T_A = mg/3$, $T_B = 2mg/3$.

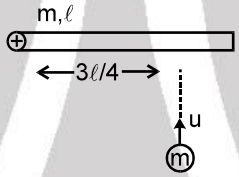
Problem 14. एक m द्रव्यमान का कण मूल बिन्दु से गति प्रारम्भ करके नियत वेग $u\hat{i}$ से गति कर रहा है। इस क्षण कण का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो? कुछ समय पश्चात् उत्तर क्या होगा?



Solution : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{L} = r\hat{i} \times mu\hat{i} = 0$

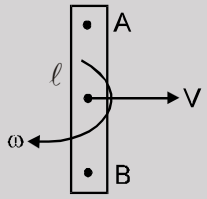
Problem 15. m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की छड़ H बिन्दु पर किलकित है। यह क्षैतिज तल में ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन कर सकती है। समान द्रव्यमान m का बिन्दु द्रव्यमान u प्रारम्भिक वेग से छड़ के लम्बवत् गति करता हुआ किलकित बिन्दु से $3\ell/4$ दूरी पर अप्रत्यास्थ टक्कर करता है तो कण का टक्कर के तुरन्त पश्चात् कोणीय वेग ज्ञात करो ?



Solution : कीलकीत बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग $L_i = L_f$

$$mu\left(\frac{3\ell}{4}\right) = \left(\frac{m\ell^2}{3} + m\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2\right)\omega \Rightarrow \omega = \frac{36u}{43\ell}$$

Problem 16. एक एकसमान तथा चिकनी ℓ लम्बाई की छड़ जिसके केन्द्र का वेग v तथा कोणीय वेग ω है, चिकनी क्षैतिज सतह पर गतिमान है, बिन्दु A तथा B के वेग ज्ञात करो।



Solution : बिन्दु A का वेग केन्द्र के सापेक्ष $\omega\frac{\ell}{2}$ है

बिन्दु A का धरातल के सापेक्ष वेग - $V_A = V + \omega\frac{\ell}{2}$

बिन्दु B का केन्द्र के सापेक्ष वेग $-\omega\frac{\ell}{2}$

बिन्दु B का धरातल के सापेक्ष वेग - $V_A = V - \omega\frac{\ell}{2}$