सापेक्ष गति (RELATIVE MOTION)

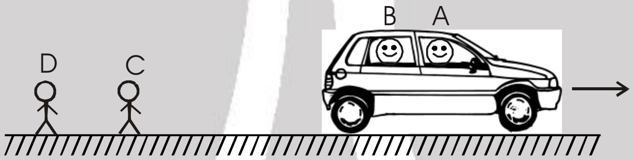
1. सापेक्ष गति

सापेक्ष गति, प्रेक्षक व प्रेक्षित वस्तु का संयुक्त गुणधर्म है। गति हमेशा सापेक्ष होती है। निरपेक्ष गति या निरपेक्ष स्थिरावस्था जैसे पद नहीं होते है। गति हमेशा प्रेक्षक या निर्देश तंत्र के सापेक्ष परिभाषित होती है।

निर्देश तन्त्र :

निर्देश तन्त्र, अक्षीय निकाय है जिससे गति को प्रेक्षित किया जाता है। इस तंत्र से सम्बन्धित घड़ी के द्वारा समय मापा जाता है। निर्देश तन्त्र गतिशील व स्थिर कुछ भी हो सकता है।

☞ नियत वेग से चलती कार में दो व्यक्ति A तथा B बैठे हैं। पृथ्वी पर स्थिर अवस्था में खड़े दो व्यक्ति C तथा D उनका प्रेक्षण करते हैं

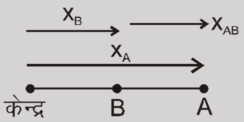


यहाँ C तथा D के लिए B गति अवस्था में दिखता है पर A के लिए स्थिर दिखाई देता हे। इसी प्रकार D के लिए C स्थिर पर A व B के लिए पीछे की तरफ गति करता हुआ दिखाई देगा।

2. एक विमीय सापेक्ष गति

2.1. सापेक्ष स्थिति :

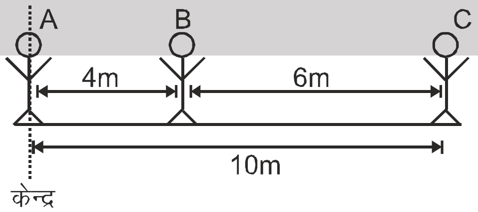
यह कण की प्रेक्षक के सापेक्ष स्थिती है। सामान्यतः A की मूल बिन्दु के सापेक्ष स्थिती x_A है और B की मूल बिन्दु के सापेक्ष स्थिती x_B तब "A की B" के सापेक्ष स्थिती x_{AB} है। जहाँ $x_{AB} = x_A - x_B$



$$\boxed{x_{AB} = x_A - x_B}$$

Solved Example

Example 1. चित्र देखिये (दायीं तरफ धन तथा बायीं तरफ ऋण दिशा लें) x_{BA}, x_{CA}, x_{CB}, x_{AB} और x_{AC} ज्ञात करो –



Solution : यहाँ, A के सापेक्ष B की स्थिति दायीं तरफ 4 m है (x_{BA} = +4m)

A के सापेक्ष C की स्थिति दायीं तरफ 10 m है (x_{CA} = +10m)

B के सापेक्ष C की स्थिति दायीं तरफ 6 m है (x_{CB} = +6m)

B के सापेक्ष A की स्थिति बायीं तरफ 4 m है (x_{AB} = –4 m)

C के सापेक्ष A की स्थिति बायीं तरफ 10 m है (x_{AC} = –10m)

2.2. सापेक्ष वेग

परिभाषा : किसी कण (वस्तु) A का B के सापेक्ष वेग वह वेग है जिसके द्वारा A, B(B को स्थिर मानने पर) की तरफ आता प्रतीत होता है। दूसरे शब्दों में यह वह वेग है, जिससे B से देखने पर A गतिमान प्रतीत होता है जबकि B को स्थिर माना जाता है।

नोट 1 : परिभाषा के अनुसार पृथ्वी अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र है। क्योंकि इसका सूर्य की तरफ अभिकेन्द्रीय त्वरण होता है। परन्तु छोटे अनुप्रयोगों के लिए पृथ्वी को स्थिर मानते है। अर्थात् यह जड़त्वीय निर्देश तन्त्र की तरह व्यवहार करती है।

एक विमीय सापेक्ष वेग :

यदि पृथ्वी के सापेक्ष A की स्थिति x_A तथा B की स्थिति x_B और B के सापेक्ष A की स्थिति x_{AB} हो तो हम कह सकते हें कि -

v_A = पृथ्वी के सापेक्ष A का वेग = $\frac{dx_A}{dt}$

v_B = पृथ्वी के सापेक्ष B का वेग = $\frac{dx_B}{dt}$

और v_{AB} = B के सापेक्ष A का वेग = $\frac{dx_{AB}}{dt} = \frac{d}{dt}(x_A - x_B) = \frac{dx_A}{dt} - \frac{dx_B}{dt}$

इसी तरह $\boxed{v_{AB} = v_A - v_B}$

नोट 2 : किसी वस्तु का स्वंय के सापेक्ष वेग शून्य होता है।

Solved Example

Example 2. वस्तु A, 5 m/s तथा वस्तु B, 20 m/s से समान दिशा में गतिशील है (धनात्मक x-दिशा में)। तो –

(i) B का A के सापेक्ष वेग ज्ञात करो।

(ii) A का B के सापेक्ष वेग ज्ञात करो।

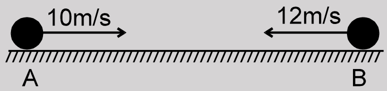
Solution :

(i) $v_B = 20\hat{i}$ m/s ⇒ $v_A = 5\hat{i}$ m/s ⇒ $v_B - v_A = 15\hat{i}$ m/s

(ii) $v_B = 20\hat{i}$ m/s, $v_A = 5\hat{i}$ m/s ; $v_{AB} = v_A - v_B = -15\hat{i}$ m/s

नोट : $v_{BA} = -v_{AB}$

Example 3. दो वस्तुऐं A व B एक–दूसरे की तरफ क्रमशः 10 m/s और 12 m/s के वेग से चित्रानुसार गति कर रही है तो–



(i) A का B के सापेक्ष वेग ज्ञात करो।

(ii) B का A के सापेक्ष वेग ज्ञात करो।

Solution :

(i) $v_{AB} = v_A - v_B = (10) - (-12) = 22$ m/s दांयी तरफ

(ii) $v_{BA} = v_B - v_A = (-12) - (10) = -22$ m/s बांयी तरफ

2.3. सापेक्ष त्वरण

यह वह दर है, जिससे सापेक्ष वेग परिवर्तनशील है।

$a_{AB} = \frac{dv_{AB}}{dt} = \frac{dv_A}{dt} - \frac{dv_B}{dt} = a_A - a_B$

गति के समीकरण जब सापेक्ष त्वरण नियत हो

$v_{\text{सापेक्ष}} = u_{\text{सापेक्ष}} + a_{\text{सापेक्ष}}\, t$

$s_{\text{सापेक्ष}} = u_{\text{सापेक्ष}}\, t + \frac{1}{2} a_{\text{सापेक्ष}}\, t^2$

$v^2_{\text{सापेक्ष}} = u^2_{\text{सापेक्ष}} + 2a_{\text{सापेक्ष}}\, s_{\text{सापेक्ष}}$

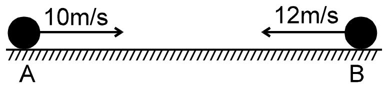
2.4. पास आने की दर(सामीप्य वेग)/अलगाव वेग

यह किसी एक कण को दूसरे कण से मिलाने वाले रेखा के अनुदिश पहले कण का दूसरे कण के सापेक्ष वेग का घटक है। यदि दो कणों के बीच की दूरी घटती है तो पास आने की दर (सामीप्य वेग) कहेगे और यदि दूरी बढ़ती है तो इसे हम अलगाव वेग कहते है।

एक विमिय गति में सापेक्ष वेग, A व B को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होता है। अतः पास आने की दर /अलगाव दर सामान्यतः A का B के सापेक्ष वेग के परिमाण के बराबर होता है।

Solved Example

Example 4. कण A दायीं तरफ 10 m/s की चाल से तथा दूसरा कण B बायीं तरफ 12 m/s की चाल से चल रहा है, तो उनके पास आने का वेग (सामीप्य गति) ज्ञात करो।

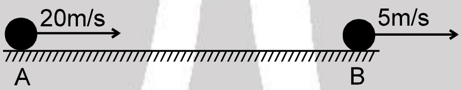


Solution : $V_A = +10$, $V_B = -12 \Rightarrow V_{AB} = V_A - V_B \Rightarrow 10 - (-12) = 22$ m/s

क्योंकि उनके बीच की दूरी कम हो रही है। अतः $V_{app} = |V_{AB}| = 22$ m/s

Ans. 22 m/s

Example 5. कण A दायीं तरफ 20 m/s की चाल से तथा कण B दायीं तरफ 5 m/s की चाल से चल रहे हैं तो उनका सामीप्य वेग ज्ञात करो।

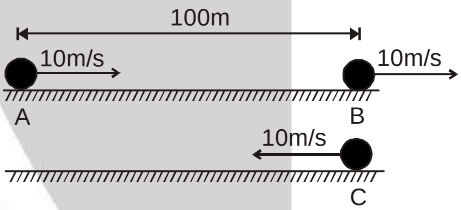


Solution : $V_A = +20$, $V_B = +5 \Rightarrow V_{AB} = V_A - V_B \Rightarrow 20 - (+5) = 15$ m/s

क्योंकि उनके मध्य दूरी कम हो रही है। अतः $V_{app} = |V_{AB}| = 15$ m/s

Ans. 15 m/s

Example 6. कण 'A' 10 m/s की चाल से दायीं तरफ तथा कण 'B' दायीं तरफ 10 m/s से और एक अन्य कण 'C' 10 m/s से बायीं तरफ से चल रहे हैं। A तथा B के मध्य दूरी 100 m है। कण C के कण B तथा A से मिलने के क्षणों के मध्य अन्तराल ज्ञात करो।

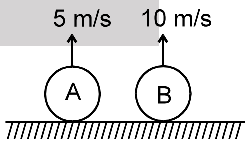


Solution : $t = \dfrac{\text{A व C के मध्य दूरी}}{\text{A व C का } V_{\text{सामिप्य}}} = \dfrac{100}{10-(-10)} = 5$ sec. **Ans.**

Note : $a_{\text{सामीप्य}} = \left(\dfrac{d}{dt}\right) v_{\text{सामिप्य}}$, $a_{\text{अलगाव}} = \dfrac{d}{dt} v_{\text{अलगाव}}$

$v_{\text{सामीप्य}} = \int a_{\text{सामिप्य}}\, dt$, $v_{\text{अलगाव}} = \int a_{\text{अलगाव}}\, dt$

Example 7. A और B को ऊपर की तरफ क्रमशः 5 m/s और 10 m/s के वेग से फैंका जाता है। तो एक सैकण्ड पश्चात् दोनों के बीच की दूरी ज्ञात करो? ($g = 10$ m/s^2)



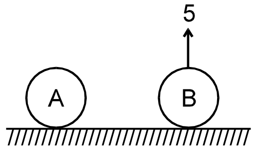
Solution : $S_A = ut - \dfrac{1}{2} gt^2$

$= 5t - \dfrac{1}{2} \times 10 \times t^2 = 5 \times 1 - 5 \times 1^2 = 5 - 5 = 0$

$S_B = ut - \dfrac{1}{2} gt^2 = 10 \times 1 - \dfrac{1}{2} \times 10 \times 1^2 = 10 - 5 = 5$

$\therefore$ बीच की दूरी $= S_B - S_A = 5$m.

वैकल्पिक हल : सापेक्ष गति द्वारा



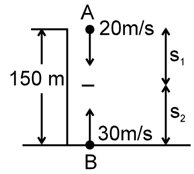
सापेक्ष त्वरण $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A = (-10) - (-10) = 0$

इसी प्रकार सापेक्ष वेग $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = 10 - 5 = 5$ m/s

$\therefore$ $\vec{s}_{BA}$ (1 सैकण्ड में) $= \vec{v}_{BA} \times t = 5 \times 1 = 5$ m

$\therefore$ 1 सैकण्ड पश्चात् A व B के बीच की दूरी = 5 m.

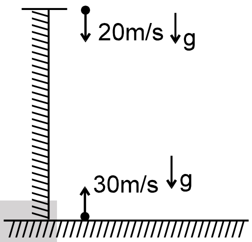
Example 8. एक गेंद को 150 m ऊँची मीनार से नीचे की तरफ 20 m/s की चाल से फैंका जाता है, उसी समय एक दूसरी गेंद को ऊपर की तरफ 30 m/s की चाल से मीनार के तल से फैंका जाता है तो वह समय ज्ञात करो जब दोनों गेंदे आपस में मिलेंगी ? ($g = 10\ m/s^2$)



Solution : $S_1 = 20\,t + 5\,t^2$

$S_2 = 30\,t - 5\,t^2$

$S_1 + S_2 = 150 \quad \Rightarrow \quad 150 = 50\,t \quad \Rightarrow \quad t = 3\ s$

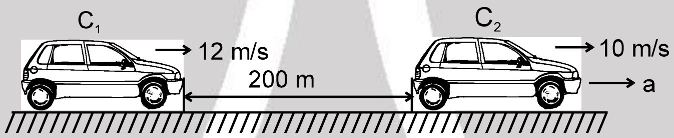


वैकल्पिक हल : दोनों के बीच सापेक्ष त्वरण शून्य है। क्योंकि दोनों का त्वरण नीचे की तरफ है।

$\vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = g - g = 0\ ;\ \vec{v}_{BA} = 30 - (-20) = 50$

$s_{BA} = v_{BA} \times t \ ;\ t = \frac{s_{BA}}{v_{BA}} = \frac{150}{50} = 3\ s$

Example 9. सीधी सड़क पर दो कारें C_1 व C_2 समान दिशा में क्रमशः 12 m/s और 10 m/s के वेग से गतिशील है। जब इनके बीच की दूरी 200 m है, तब टक्कर से बचाने के लिए C_2 को त्वरित किया जाता है। तो कार C_2 का आवश्यक न्यूनतम त्वरण क्या होना चाहिए कि टक्कर नहीं हो।



Solution : सापेक्ष गति से

$\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_{C_1} - \vec{a}_{C_2} = 0 - a = (-a)$

$\vec{u}_{12} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = 12 - 10 = 2\ m/s.$

इसलिए सापेक्षता से हम कार को रोकना चाहते है।

i.e. $v_{12} = 0$ जब $s_{12} = 200$

अब $v_{12} = 0,\ \vec{u}_{12} = 2,\ \vec{a}_{12} = -a$ और $s_{12} = 200$

$\therefore \quad v_{12}^2 - u_{12}^2 = 2a_{12}s_{12}$

$\Rightarrow \quad 0 - 2^2 = -2 \times a \times 200 \qquad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{100}\ m/s^2 = 0.1\ m/s^2 = 1\ cm/s^2.$

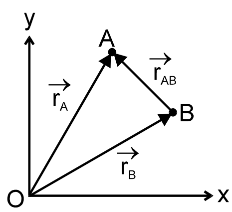
$\therefore$ कार C_2 के लिए आवश्यक न्यूनतम त्वरण = $1\ cm/s^2$

3. द्विवीमिय सापेक्ष गति

$\vec{r}_A$ = O के सापेक्ष A की स्थिति

$\vec{r}_B$ = O के सापेक्ष B की स्थिति

$\vec{r}_{AB}$ = B के सापेक्ष A की स्थिति



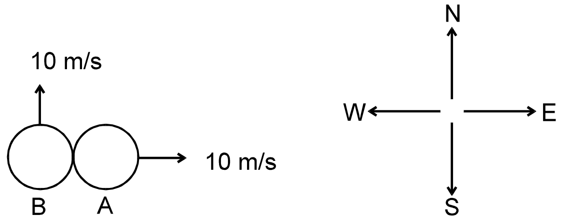
$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ (सदिश योग $\vec{r}_A - \vec{r}_B$ त्रिभुज नियम या घटक विधि से किया जा सकता है)

$\therefore \frac{d(\vec{r}_{AB})}{dt} = \frac{d(\vec{r}_A)}{dt} - \frac{d(\vec{r}_B)}{dt}. \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

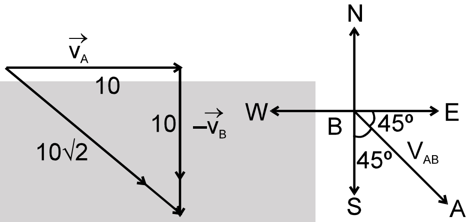
$\frac{d(\vec{v}_{AB})}{dt} = \frac{d(\vec{v}_A)}{dt} - \frac{d(\vec{v}_B)}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$

Solved Example

Example 10. वस्तु A व B का वेग 10 m/s है। A पूर्व की तरफ तथा B उत्तर की तरफ एक ही बिन्दु से चित्रानुसार गति करते है। तो A का B के सापेक्ष वेग ज्ञात करो ($\vec{v}_{AB}$)।



Solution :



Method-1. $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

$\therefore \ |\vec{v}_{AB}| = 10\sqrt{2}$

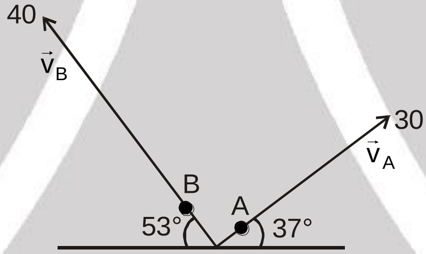
Method-2. $\vec{v}_A = 10\hat{i}$, $\vec{v}_B = 10\hat{j}$

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 10\hat{i} - 10\hat{j}$

$\therefore \ |\vec{v}_{AB}| = 10\sqrt{2}$

नोट : $|\vec{v}_A - \vec{v}_B| = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos\theta}$, जहाँ θ, $\vec{v}_A$ और $\vec{v}_B$ के बीच कोण है।

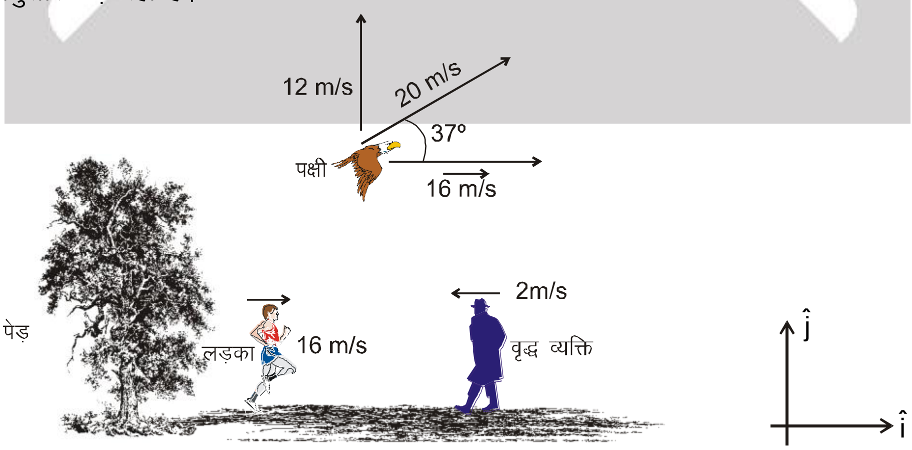
Example 11. कण A तथा B को हवा में प्रक्षेपित किया गया A को 30 m/sec तथा B को 40 m/sec के वेग से चित्रानुसार फैंका गया है, तो 1 sec बाद उनके मध्य दूरी ज्ञात करो।



Solution : $\vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = \vec{g} - \vec{g} = 0$

$\therefore \quad v_{AB} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \qquad \therefore \ s_{AB} = v_{AB}t = 50\,t = 50$ m

Example 12. एक वृद्ध व्यक्ति तथा एक लड़का एक दूसरे की तरफ चल रहे हैं तथा एक पक्षी उनके ऊपर चित्र में दिखाये अनुसार उड़ रहा है।



(1) लड़के के सापेक्ष पेड़, पक्षी और वृद्ध व्यक्ति का वेग ज्ञात करो ?

(2) वृद्ध व्यक्ति के सापेक्ष पेड़, पक्षी के सापेक्ष पेड़ और लड़के के वेग ज्ञात करो ?

(3) पक्षी के सापेक्ष पेड़, लड़के और वृद्ध व्यक्ति के वेग ज्ञात करो।

Solution :

(1) **लड़के के सापेक्ष :**

$v_{पेड़}$ = 16 m/s (←) या $-16\hat{i}$

$v_{पक्षी}$ = 12 m/s (↑) या $12\hat{j}$

$v_{वृद्ध\ व्यक्ति}$ = 18 m/s (←) या $-18\hat{i}$

(2) **वृद्ध व्यक्ति के सापेक्ष :**

$v_{लड़का}$ = 18 m/s (→) या $18\hat{i}$

$v_{पेड़}$ = 2 m/s (→) या $2\hat{i}$

$v_{पक्षी}$ = 18 m/s (→) और 12 m/s (↑) या $18\hat{i} + 12\hat{j}$

(3) **पक्षी के सापेक्ष :**

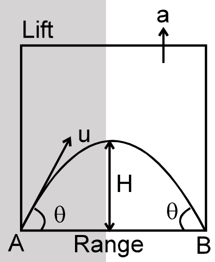
$v_{पेड़}$ = 12 m/s (↓) और 16 m/s (←) या $-12\hat{j} - 16\hat{i}$

$v_{वृद्ध\ व्यक्ति}$ = 18 m/s (←) और 12 m/s (↓) या $-18\hat{i} - 12\hat{j}$

$v_{लड़का}$ = 12 m/s (↓). या $-12\hat{j}$

3.2. लिफ्ट में सापेक्ष गति

a त्वरण से ऊपर की ओर गतिमान लिफ्ट में प्रक्षेप्य गति :



(1) लिफ्ट के निर्देश तंत्र में स्वतंत्रता पूर्वक गिरती वस्तु का त्वरण (g + a) है।

(2) अधिकतम ऊंचाई पर वेग = u cos θ

(3) $T = \dfrac{2u\sin\theta}{g+a}$

(4) अधिकतम ऊंचाई (H) = $\dfrac{u^2\sin^2\theta}{2(g+a)}$

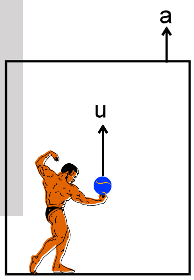
(5) परास = $\dfrac{u^2\sin 2\theta}{g+a}$

Solved Example

Example 13. लिफ्ट ऊपर की तरफ a त्वरण से गतिशील है। लिफ्ट के अन्दर स्थित आदमी एक गेंद को ऊपर की तरफ हाथ के सापेक्ष u वेग से फेंकता है तो –

(a) गेंद का उड्डयन काल क्या होगा ?

(b) लिफ्ट में गेंद द्वारा प्राप्त की गई अधिकतम ऊचाँई क्या होगी ?



Solution :

(a) $\vec{a}_{BL} = \vec{a}_B - \vec{a}_L = g + a$

$\vec{s} = \vec{u}\,t + \dfrac{1}{2}\,\vec{a}_{BL}\,t^2$

$0 = uT - \dfrac{1}{2}(g+a)T^2 \qquad \therefore\ T = \dfrac{2u}{(g+a)}$

(b) $v^2 - u^2 = 2as$

$0 - u^2 = -2(g+a)H$

$H = \dfrac{u^2}{2(g+a)}$

4. नदी प्रवाह में सापेक्ष गति

यदि एक व्यक्ति जल के सापेक्ष $\vec{v}_{mR}$ वेग से तैर सकता है और जल पृथ्वी के सापेक्ष $\vec{v}_R$ वेग से बह रहा है तो व्यक्ति का वेग $\vec{v}_m$ पृथ्वी के सापेक्ष इस तरह लिखा जायेगा :

$\vec{v}_{mR} = \vec{v}_m - \vec{v}_R$ या $\vec{v}_m = \vec{v}_{mR} + \vec{v}_R$

यदि $\vec{v}_R = 0$, तो $\vec{v}_m = \vec{v}_{mR}$

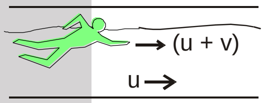
शब्दों में, स्थिर जल में व्यक्ति का वेग = नदी के सापेक्ष व्यक्ति का वेग

4.1. नदी सम्बंधी एक विमीय प्रश्न

☞ नदी का वेग u एवं व्यक्ति का स्थिर जल के सापेक्ष वेग v

Step 1.

जब व्यक्ति नदी की प्रवाह की दिशा में तैर रहा हो, इस स्थिति में नदी का वेग $v_R = +u$

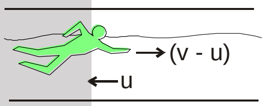


नदी के सापेक्ष व्यक्ति का वेग $v_{mR} = +v$

अब $\vec{v}_m = \vec{v}_{mR} + \vec{v}_R = u + v$

Step 2.

जब व्यक्ति नदी प्रवाह के विरूद्ध तैर रहा हो, इस स्थिति में नदी का वेग $\vec{v}_R = -u$



नदी के सापेक्ष व्यक्ति का वेग $\vec{v}_{mR} = +v$ अब $\vec{v}_m = \vec{v}_{mR} + \vec{v}_R = (v - u)$

Solved Example

Example 14. एक तैराक पानी के सापेक्ष v वेग से तैर सकता है तथा यह u वेग से प्रवाहित नदी में कूदता है। वह नदी की दिशा में d दूरी तक तैरता है और वापस अपनी प्रारम्भिक स्थिति पर लौट आता है, तो सम्पूर्ण गति में लिया गया समय ज्ञात करो?

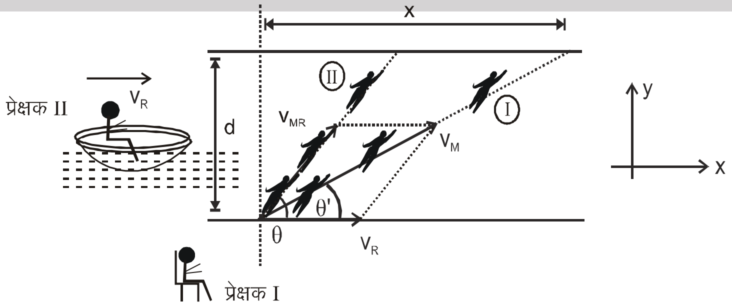
Solution : कुल समय = बहाव की दिशा में तैरने का समय + बहाव के विपरीत दिशा में तैरने का समय

$$t = t_{\text{नीचे}} + t_{\text{ऊपर}} = \frac{d}{v+u} + \frac{d}{v-u} = \frac{2dv}{v^2 - u^2}$$ **Ans.**

4.2. नदी के प्रवाह से सापेक्ष गति :

माना एक व्यक्ति नदी में, नदी के बहाव की दिशा से θ कोण बनाते हुये नदी के सापेक्ष $\vec{v}_{MR}$ वेग से तैर रहा है। नदी का वेग $\vec{V}_R$ है। माना यह दो प्रेक्षक I और प्रेक्षक II है। प्रेक्षक I धरातल पर है और प्रेक्षक II, लट्ठा (नाव की तरह लकड़ी के टुकड़े) जो कि नदी के साथ नदी के वेग से ही बह रहा है, पर है और इस तरह वह प्रेक्षक, नदी के वेग के समान गति कर रहा है। अतः प्रेक्षक II के सापेक्ष गति, नदी की सापेक्ष गति के समान होगी। इसका मतलब प्रेक्षक II के लिए व्यक्ति, नदी के साथ θ कोण पर तैरता हुआ प्रतीत होगा।

प्रेक्षक I के लिए तैराक (व्यक्ति) का वेग $\vec{v}_M = \vec{v}_{MR} + \vec{v}_R$, अतः तैराक नदी के साथ θ′ कोण पर तैरता प्रतीत होगा।



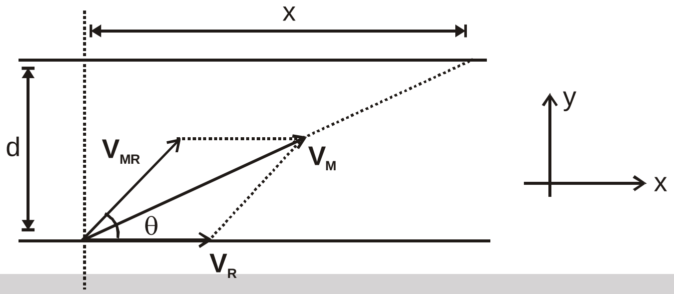
(I) : प्रेक्षक I के लिये तैराक की गति

(II) : प्रेक्षक II के लिये तैराक की गति

4.3. नदी सम्बंधी द्विवीमीय प्रश्न (नदी पार करना)

नदी के सापेक्ष $\vec{v}_{MR}$ वेग से नदी प्रवाह के साथ–साथ θ कोण पर तैर रहे व्यक्ति का चयन करते हैं –

नदी प्रवाह का वेग V_R तथा नदी की चौड़ाई d है –



$\vec{v}_M = \vec{v}_{MR} + \vec{v}_R$

$\Rightarrow \vec{v}_M = (v_{MR}\cos\theta\,\hat{i} + v_{MR}\sin\theta\,\hat{j}) + v_R\,\hat{i}$

$\Rightarrow \vec{v}_M = (v_{MR}\cos\theta + v_R)\,\hat{i} + v_{MR}\sin\theta\,\hat{j}$

यहाँ $v_{MR}\sin\theta$ व्यक्ति के वेग का नदी प्रवाह के लम्बवत् घटक है

यही घटक व्यक्ति को नदी पार करवाने के लिये जिम्मेदार है, इसलिए यदि नदी पार करने में लगा समय t है तो -

$$t = \frac{d}{v_y} = \frac{d}{v_{MR}\sin\theta}$$

अपवहन (DRIFT)

यह नदी के बहाव की दिशा में व्यक्ति के विस्थापन को चित्रानुसार दर्शाता है।

यहाँ drift (नदी के पानी की दिशा में विस्थापन), x के समान है। नदी प्रवाह की दिशा में व्यक्ति के वेग का घटक $(v_{MR}\cos\theta + v_R)$ है तथा वेग का यह घटक नदी प्रवाह के अनुदिश बहाव के लिए उत्तरदायी है। यदि अपवहन x है, तो

अपवहन $= v_x \times t$

$$x = (v_{MR}\cos\theta + v_R) \times \frac{d}{v_{MR}\sin\theta}$$

4.4. नदी को न्यूनतम समय में पार करना

जैसा कि हम जानते हैं कि $t = \frac{d}{v_{MR}\sin\theta}$ स्पष्ट है कि t न्यूनतम तब होगा जब θ = 90°। होगा अतः नदी पार करने में न्यूनतम समय लगेगा, यदि व्यक्ति नदी प्रवाह के लम्बवत् तैरेगा, जो कि $t_{\text{न्यूनतम}} = \frac{d}{v_{MR}}$.

4.5. नदी को न्यूनतम पथ से पार करना (न्यूनतम अपवहन (DRIFT))

न्यूनतम संभावित अपवहन (DRIFT), शून्य हो सकता है। यहाँ व्यक्ति नदी को, नदी के प्रवाह के लम्बवत् (धरातल से देखने पर) पार करता है। यह पथ, न्यूनतम पथ कहलाता है।

यहाँ $x_{min} = 0 \Rightarrow (v_{MR}\cos\theta + v_R) = 0$

या $\cos\theta = -\frac{v_R}{v_{MR}}$

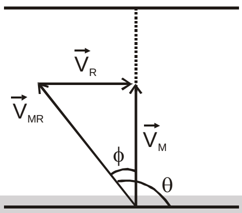
☞ क्योंकि cosθ '–ve' है, ∴ θ > 90°, न्यूनतम अपवहन (DRIFT) के लिये व्यक्ति को लम्बवत् दिशा के साथ नदी के बहाव के विपरीत कुछ कोण ϕ बनाते हुये नदी पार करनी चाहिये।

जिसे $\sin\phi = \frac{v_R}{v_{MR}}$ से दिया जाता है।

☞ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-v_R}{v_{MR}}\right)$ $\therefore \left|\frac{v_R}{v_{MR}}\right| \le 1$ i.e., $v_R \le v_{MR}$

न्यूनतम अपवहन (drift) शून्य सिर्फ तब हो सकता है, जब व्यक्ति का वेग, नदी के वेग से ज्यादा या उसके बराबर हो।

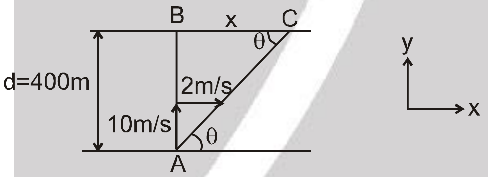
☞ न्यूनतम पथ से नदी को पार करने में लगा समय $t = \frac{d}{v_{MR}\sin\theta} = \frac{d}{\sqrt{v_{MR}^2 - V_R^2}}$



Note :
यदि $v_R > v_{MR}$ तो शून्य अपवहन (drift) संभव नहीं है। इस स्थिति में न्यूनतम पथ के लिये न्यूनतम अपवहन (drift) जो कि अशून्य होगा के लिये निम्न शर्त को सिद्ध किया जा सकता है → $\cos\theta = -\frac{v_{MR}}{v_R}$ या $\sin\phi = \frac{v_{MR}}{v_R}$

Example 15. 400 मीटर चौड़ी नदी 2.0 m/s के वेग से प्रवाहित हो रही है। एक नाव पानी के सापेक्ष 10 m/s के वेग से नदी के लम्बवत् दिशा में चलायी जाती है तो–
(a) दूसरे किनारे पर पहुँचने में नाव द्वारा लिया गया समय ज्ञात करो?
(b) सामने स्थित किनारे से नाव जल प्रवाह के कारण कितनी विस्थापित हो जाएगी?
(c) नाव वास्तव में, नदी की धारा के साथ, किस दिशा में गति करेगी? (नदी के प्रवाह की दिशा में)

Solution :



(a) नदी को पार करने में लिया गया समय $t = \frac{d}{v_y} = \frac{400m}{10m/s} = 40\ s$ **Ans.**

(b) विस्थापन $(x) = (v_x)(t) = (2m/s)\ (40s) = 80\ m$ **Ans.**

(c) नाव की वास्तविक दिशा, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10}{2}\right) = \tan^{-1} 5$, (नदी प्रवाह की दिशा में) नदी प्रवाह से

Example 16. एक आदमी स्थिर जल में 5 km/h की दर से तैर सकता है। 1 किमी० चौड़ी नदी 3 km/h की दर से प्रवाहित हो रही है। आदमी नदी के दूसरे किनारे पर प्रारम्भ बिन्दु के ठीक विपरीत बिन्दु पर पहुँचना चाहता है तो –
(a) आदमी को किस दिशा में तैरना चाहिए ?
(b) आदमी का परिणामी वेग क्या होना चाहिए ?
(c) नदी को पार करने में लिया गया समय कितना होगा ?

Solution :

(a) आदमी का नदी के सापेक्ष वेग v_{mR}= 5 km/hr, है जो कि नदी प्रवाह वेग से ज्यादा है। इसलिए वह नदी को सीधे विपरीत दिशा में पार कर सकता है (न्यूनतम पथ के अनुदिश)। तैराक के द्वारा बनाया गया कोण

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{v_r}{v_{mR}}\right) = 90^o + \sin^{-1}\left(\frac{v_r}{v_{mR}}\right) = 90^o + \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 90^o + 37^o$$

$= 127^o$ नदी प्रवाह से (विपरीत प्रवाह) या 37° लम्बवत् के साथ पीछे की ओर **Ans.**

(b) परिणामी वेग $v_m = \sqrt{v_{mR}^2 - v_R^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ km/hr नदी प्रवाह के लम्बवत् दिशा में

(c) नदी को पार करने में लिया गया समय $t = \frac{d}{\sqrt{v_{mR}^2 - v_R^2}} = \frac{1\,km}{4\,km/hr} = \frac{1}{4} h = 15$ min

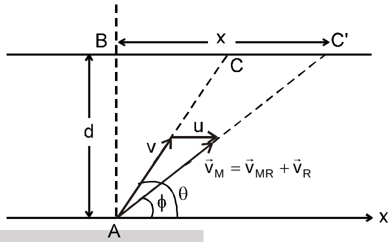
Example 17. एक आदमी जल प्रवाह से θ कोण पर u वेग से बहती नदी में कूद कर नदी को पार करना चाहता है।

(i) यदि वह ठहरे हुए जल में v चाल से तैर सकता है, तो आदमी का धरातल के सापेक्ष कुल वेग ज्ञात कीजिए ?

(ii) आदमी वास्तव में किस दिशा में गति करता है?

(iii) यदि नदी की चौड़ाई d है, तो आदमी प्रारम्भिक बिन्दु के सम्मुख स्थित दूसरे किनारे के बिन्दु से कितनी दूरी पर वास्तव में पहुंचेगा। (अपवहन)

Solution :



(i) $v_{MR} = v$, $v_R = u$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{MR} + \vec{v}_R$$

$\therefore$ आदमी का वेग, $v_M = \sqrt{u^2 + v^2 + 2vu\cos\theta}$ **Ans.**

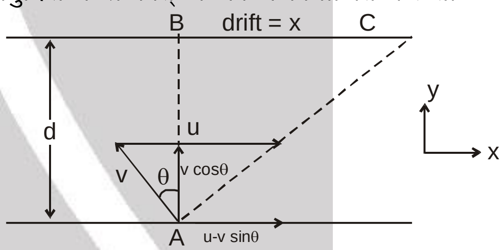
(ii) $\tan\phi = \dfrac{v\sin\theta}{u + v\cos\theta}$ **Ans.**

(iii) $(v\sin\theta)\, t = d \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{d}{v\sin\theta}$

$x = (u + v\cos\theta)\, t = (u + v\cos\theta)\dfrac{d}{v\sin\theta}$ **Ans.**

Example 18. एक नाव, नदी के सापेक्ष, नदी के वेग u से n गुना कम वेग v से गति करती है तो न्यूनतम अपवहन के लिए नाव के वेग का नदी प्रवाह की दिशा से बनाया गया कोण क्या होगा?

Solution : इस प्रश्न में एक बात ध्यान देने योग्य है कि नाव का वेग नदी प्रवाह वेग से कम है। इस स्थिति में नाव सीधे सामने किनारे पर स्थित बिन्दु पर नहीं पहुँच सकती है। अर्थात् अपवहन शून्य नहीं हो सकता है। अतः अपवहन को न्यूनतम करने के लिए नाव को लम्बवत् दिशा से नदी के प्रवाह के विपरीत दिशा में θ कोण पर चित्रानुसार तैरना होगा। अब यदि हम पुनः नाव के वेग को प्रवाह के अनुदिश व लम्बवत् घटकों में वियोजित करे तो



नदी की दिशा में वेग $v_x = u - v\sin\theta$.

और नदी के लम्बवत् वेग, $v_y = v\cos\theta$.

नदी को पार करने में लिया गया समय

$$t = \frac{d}{v_y} = \frac{d}{v\cos\theta}.$$

इस समय अपवहन $x = (v_x)t = (u - v\sin\theta)\dfrac{d}{v\cos\theta}$

या $= \dfrac{ud}{v}\sec\theta - d\tan\theta$

जब $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ हो तो अपवहन x न्यूनतम होगा।

या $\left(\dfrac{ud}{v}\right)(\sec\theta \,.\, \tan\theta) - d\sec^2\theta = 0$ या $\dfrac{u}{v}\sin\theta = 1$ या $\boxed{\sin\theta = \dfrac{v}{u}}$

अतः न्यूनतम अपवहन के लिए नाव को अभिलम्बवत् दिशा से $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ के कोण से या नदी की दिशा से $\dfrac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ के कोण पर गति करना चाहिए।

5. हवाई जहाज की हवा में गति

हवाई जहाज की गति एक प्रकार से नाव की नदी में गति के समान है। अन्तर केवल इतना है कि नाव की जगह हवाई जहाज व नदी की जगह हवा मान सकते है।

अतः हवाई जहाज का हवा के सापेक्ष वेग

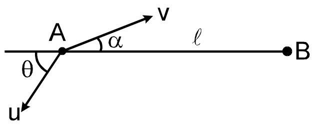
$$\vec{v}_{aw} = \vec{v}_a - \vec{v}_w \quad \text{या} \quad \vec{v}_a = \vec{v}_{aw} + \vec{v}_w$$

यहाँ $\vec{v}_a$ = हवाई जहाज का निरपेक्ष वेग और $\vec{v}_w$ = हवा का वेग है।

Solved Example

Example 19. एक हवाई जहाज सीधे पथ AB के अनुदिश उड़ता है और वापस लौट आता है। A तथा B के बीच की दूरी है और हवाई जहाज गति के दौरान स्थिर चाल v बनाये रखता है। यहाँ हवा u नियत चाल से AB से θ कोण बनाते हुए बह रही है। तो यात्रा में लिया गया कुल समय का व्यंजक ज्ञात करो।

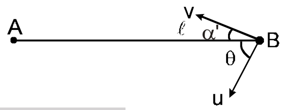
Solution : माना हवाई जहाज पथ AB के सापेक्ष α कोण पर अपना प्रयास रखती है जबकि AB की दिशा में उड़ती है।



AB के अनुदिश विमान का वेग = $v\cos\alpha - u\cos\theta$,

और रेखा AB से अविचलन के लिए :

$v\sin\alpha = u\sin\theta \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{u\sin\theta}{v}$



A से B तक लिया गया समय : $t_{AB} = \dfrac{\ell}{v\cos\alpha - u\cos\theta}$

माना हवाई जहाज सेवा AB के साथ α' कोण पर झुका है जबकि हवाई जहाज B से A तक गति करता है।

BA के अनुदिश विमान का वेग = $v\cos\alpha + u\cos\theta$ और रेखा AB से अविचलन के लिए

$v\sin\alpha = u\sin\theta \quad \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{u\sin\theta}{v} \quad \Rightarrow \alpha = \alpha'$

B से A तक लिया गया समय : $t_{BA} = \dfrac{\ell}{v\cos\alpha + u\cos\theta}$

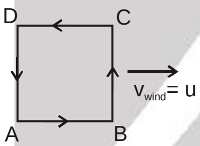
यात्रा में लिया गया कुल समय = $t_{AB} + t_{BA}$

$$= \frac{\ell}{v\cos\alpha - u\cos\theta} + \frac{\ell}{v\cos\alpha + u\cos\theta} = \frac{2v\ell\cos\alpha}{v^2\cos^2\alpha - u^2\cos^2\theta} = \frac{2v\ell\sqrt{1-\frac{u^2\sin^2\theta}{v^2}}}{v^2-u^2}.$$

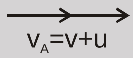
Example 20. भुजा a वाले एक वर्ग के चारों ओर घूमने में v वेग से चलती हवाई जहाज को लगा समय ज्ञात करो यदि हवा u वेग से वर्ग की किसी एक भुजा के अनुदिश चल रही है।

Answer : $\dfrac{2a}{v^2-u^2}\left(v+\sqrt{v^2-u^2}\right)$

Solution :

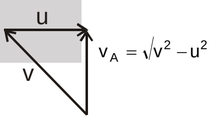


वायुयान जब AB पथ पर गति कर रहा हे तब इसका वेग



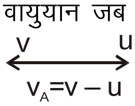
$v_A = v + u$; $t_{AB} = \dfrac{a}{v+u}$

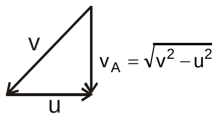
वायुयान जब BC पथ पर गति कर रहा हे तब इसका वेग $v_A = \sqrt{v^2-u^2}$;



$t_{BC} = \dfrac{a}{\sqrt{v^2-u^2}}$

वायुयान जब CD पथ पर गति कर रहा हे तब इसका वेग





$v_A = v - u$; $t_{CD} = \dfrac{a}{v-u}$

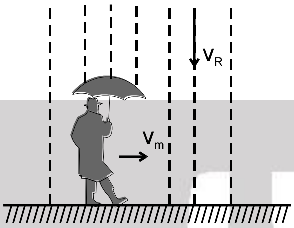
वायुयान जब DA पथ पर गति कर रहा हे तब इसका वेग $v_A = \sqrt{v^2-u^2}$; $t_{DA} = \dfrac{a}{\sqrt{v^2-u^2}}$

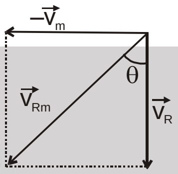
कुल समय = $t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} + t_{DA} = \dfrac{a}{v+u} + \dfrac{a}{\sqrt{v^2-u^2}} + \dfrac{a}{v-u} + \dfrac{a}{\sqrt{v^2-u^2}} = \dfrac{2a}{v^2-u^2}\left(v+\sqrt{v^2-u^2}\right)$

6. बारिश से सम्बन्धित प्रश्न

यदि बारिश $\vec{v}_R$ वेग से ऊर्ध्वाधर गिर रही है और प्रेक्षक $\vec{v}_m$, वेग से क्षैतिज दिशा में गतिशील है। तो बारिश का प्रेक्षक के सापेक्ष वेग: $\vec{v}_{Rm} = \vec{v}_R - \vec{v}_m$ या $v_{Rm} = \sqrt{v_R^2 + v_m^2}$

और दिशा चित्रानुसार ऊर्ध्वाधर से $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_m}{v_R}\right)$

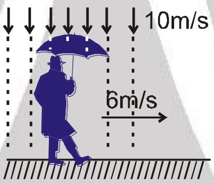




Solved Example

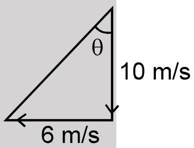
Example 21. बारिश ऊर्ध्वाधर 10 m/s से गिर रही है और एक आदमी 6 m/s के वेग से गति कर रहा है। बारिश में भीगने से बचने के लिए आदमी को छाता किस कोण पर थामना चाहिए ?

Solution :



$\vec{v}_{\text{बारिश}} = -10\hat{j}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_{\text{आदमी}} = 6\hat{j}$

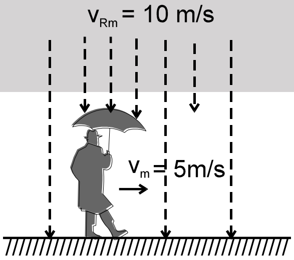
$\vec{v}_{\text{बारिश का वेग आदमी के सापेक्ष}} = -10\hat{j} - 6\hat{i}$



$\tan\theta = \frac{6}{10}$ $\Rightarrow$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

यहाँ θ ऊर्ध्वाधर से बनाया गया कोण है।

Example 22. एक आदमी 5m/s के वेग से गति करता है तो बारिश 10 m/s के वेग से ऊर्ध्वाधर आती प्रतीत होती है। धरातल के सापेक्ष बारिश का वेग व दिशा ज्ञात करो ?



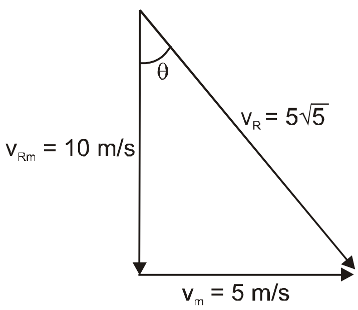
Solution : v_{RM} = 10 m/s, v_M = 5 m/s

$\vec{v}_{RM} = \vec{v}_{Ru} - \vec{v}_M$

$\vec{v}_{Ru} = \vec{v}_{RM} - \vec{v}_M$

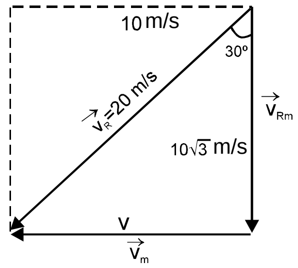
$\Rightarrow$ $\vec{v}_R = 5\sqrt{5}$

$\tan\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$.



Example 23. एक स्थिर व्यक्ति को बारिश ऊर्ध्वाधर से 30º के कोण पर 20 m/s के वेग से आती प्रतीत होती है तो –
(i) आदमी का वह वेग ज्ञात करो जिसके लिए बारिश ऊर्ध्वाधर से आती प्रतीत हो ?
(ii) आदमी का वह वेग ज्ञात करो जिसके लिए बारिश पुनः ऊर्ध्वाधर से 30º के कोण पर आती प्रतीत हो ?

Solution :



(i) $\vec{v}_m = -v\hat{i}$ (माना)

$\vec{v}_R = -10\hat{i} - 10\sqrt{3}\hat{j}$

$\vec{v}_{RM} = -(10 - v)\hat{i} - 10\sqrt{3}\hat{j}$

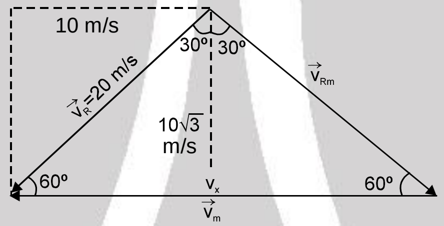
$\Rightarrow -(10 - v) = 0$ (ऊर्ध्वाधर गिरने के लिए क्षैतिज घटक निश्चित रूप से शून्य होना चाहिए।)

or $v = 10$ m/s **Ans.**

(ii) $\vec{v}_R = -10\hat{i} - 10\sqrt{3}\hat{j}$; $= -v_x\hat{i}$

$\vec{v}_{RM} = -(10 - v_x)\hat{i} - 10\sqrt{3}\hat{j}$

ऊर्ध्वाधर से कोण = 30º



$\Rightarrow \tan 30º = \dfrac{10 - v_x}{-10\sqrt{3}}$ $\Rightarrow v_x = 20$ m/s

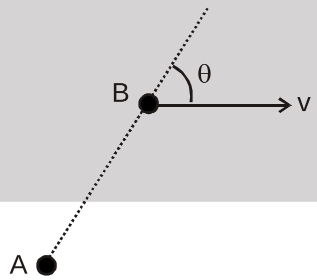
7. द्विवीमीय सामीप्य वेग/अलगाव वेग

यह एक कण के दूसरे के सापेक्ष वेग का उनको जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश घटक है।

यदि कणों के मध्य दूरी घटती है तो उसे हम सामीप्य वेग तथा उनके मध्य दूरी बढ़ती है तो उसे हम अलगाव वेग कहेंगे।

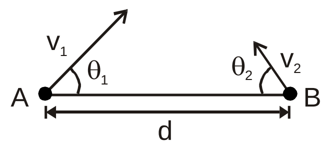
Solved Example

Example 24. कण A स्थिर है तथा कण B नियत वेग v से t = 0 पर चित्र में दिखाये अनुसार गतिमान है, उनका अलगाव वेग ज्ञात करो।



Solution : $v_{BA} = v_B - v_A = v$; $v_{\text{अलगाव}} = v_{BA}$ का रेखा AB के अनुदिश घटक $= v\cos\theta$

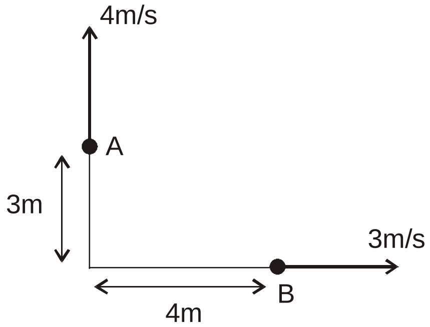
Example 25. दो कण A तथा B नियत वेग v_1 तथा v_2 से गतिमान है। t = 0, पर रेखा AB के साथ v_1 का कोण θ_1 है तथा v_2 का कोण θ_2 है तो उनका सामीप्य वेग ज्ञात करो।



Solution : रेखा AB के अनुदिश सापेक्ष वेग ही सामीप्य वेग है।

$v_{APP} = v_1\cos\theta_1 + v_2\cos\theta_2$

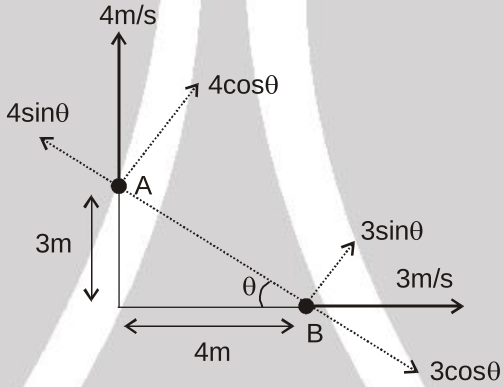
Example 26. समय t = 0 पर कण A तथा B चित्रानुसार गतिमान है। इनका अलगाव वेग ज्ञात करो –



(i) t = 0 पर
(ii) t = 1 sec. पर

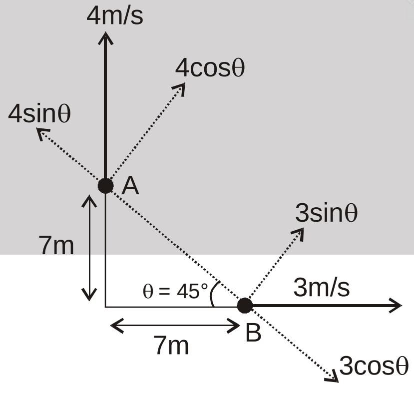
Solution :

(i) $\tan\theta = 3/4$
v_{sep} = रेखा AB के अनुदिश सापेक्ष वेग



$= 3\cos\theta + 4\sin\theta = 3.\frac{4}{5} + 4.\frac{3}{5} = \frac{24}{5} = 4.8$ m/s

(ii) $\theta = 45°$
v_{sep} = रेखा AB के अनुदिश सापेक्ष वेग



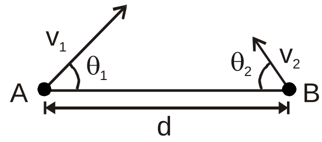
$= 3\cos\theta + 4\sin\theta = 3.\frac{1}{\sqrt{2}} + 4.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$ m/s

7.2. एक समान गतिमान कणों के टकराने की स्थिति

यदि दो कण एक समान वेग से गतिमान हैं और प्रथम कण का दूसरे कण के सापेक्ष वेग, एक दूसरे की तरफ है। तब वे आपस में टकरायेंगे।

Solved Example

Example 27. दो कण A तथा B समय t = 0 पर A तथा B को जोड़ने वाली रेखा AB के साथ कोण θ_1 तथा θ_2 बनाते हुए वेग v_1 तथा v_2 से गतिमान है।



(i) A तथा B के टकराने की स्थिति ज्ञात करो।

(ii) यदि A तथा B के मध्य दूरी d तो उनके टकराने का समय ज्ञात करो।

Solution :

(i) A तथा B के टकराने के लिए उनका सापेक्ष उनको जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश होना चाहिए, इसलिए रेखा AB के लम्बवत् उनका सापेक्ष वेग शून्य होना चाहिए। अतः $v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2$.

(ii) $v_{APP} = v_1\cos\theta_1 + v_2\cos\theta_2$

$$t = \frac{d}{v_{app}} = \frac{d}{v_1\cos\theta_1 + v_2\cos\theta_2}$$

7.3. किन्ही दो कणों के बीच न्यूनतम/अधिकतम दूरी

यदि दो कणों के बीच दूरी घटती है और उसके कुछ समय बाद यह बढ़ती है तो इनके बीच दूरी (पृथक्करण) न्यूनतम होगा।

गणितीय रूप में, S_{AB} न्यूनतम होगा जब $\frac{dS_{AB}}{dt} = 0$

इसी तरह अधिकतम पृथक्करण (अलगाव दूरी के लिये) $v_{\text{अलगाव}} = 0$.

Note :
यदि दो कणों की प्रारम्भिक स्थिति $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ व एवं वेग $\vec{v}_1$ तथा $\vec{v}_2$ है तब इन कणों के मध्य न्यूनतम दूरी

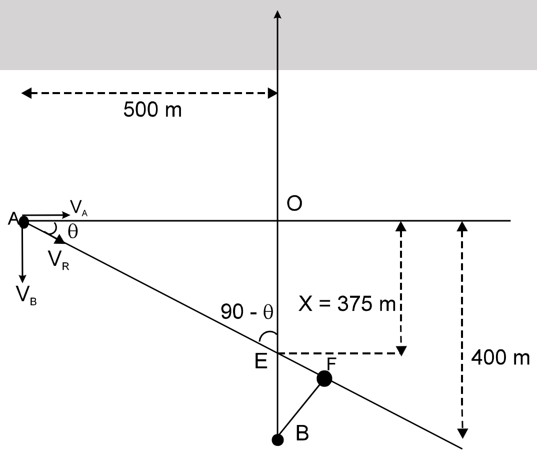
$d_{\text{न्यूनतम}} = \frac{|\vec{r}_{12} \times \vec{v}_{12}|}{|\vec{v}_{12}|}$ और वह समय जिसके बाद यह अवस्था प्राप्त होती है, वह $t = -\frac{\vec{r}_{12}\cdot\vec{v}_{12}}{|\vec{v}_{12}|^2}$ है।

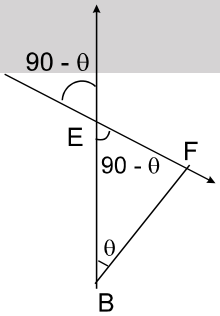
Solved Example

Example 28. दो कारें A व B लम्बवत् सड़को पर क्रमशः पश्चिम से पूर्व व दक्षिण से उत्तर की तरफ गति कर रही है। कार A दोनों सड़कों को मिलाने वाले चौराहे से 500 मीटर की दूरी पर 72 किमी० प्रति घण्टा तथा B चौराहे से 400 मीटर दूरी पर 54 किमी०/घण्टा की चाल से गतिशील है। तो इनके बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करो?

Solution : **विधि – I (सापेक्ष गति के सिद्धान्त से)**

इस विधि में A का B के सापेक्ष वेग देखते है। इसके लिए हम परिणामी वेग V_r को प्रदर्शित करते है। चूंकि दोनों वस्तुओं का त्वरण शून्य है। इसलिए दोनों के मध्य सापेक्ष त्वरण भी शून्य होगा। अतः सापेक्ष वेग नियत रहेगा। इसलिए A का B के सापेक्ष पथ सरल रेखा होगा तथा इसकी दिशा, A का B के सापेक्ष वेग की दिशा के अनुदिश होगी। जब A बिन्दु F पर होगा तब A व B के बीच की दूरी न्यूनतम होगी (अर्थात् जब B के सापेक्ष A की गति की दिशा पर B से लम्बवत् डालें) चित्र से





$$\tan\theta = \frac{V_B}{V_A} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \quad .....(i)$$

θ = परिणामी वेग सदिश का x-अक्ष से बनाया गया कोण है।

चित्र में हम देखते है कि

$OE = \frac{x}{500} = \frac{3}{4}$ .....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से हम ज्ञात करते है x = 375 m

$\therefore$ EB = OB – OE = 400 – 375 = 25 m

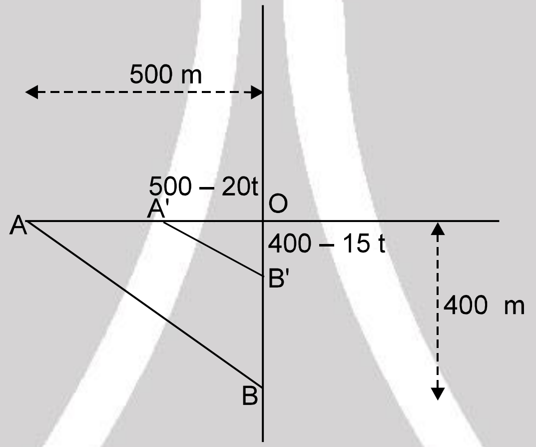
परन्तु न्यूनतम दूरी BF है।

परिवर्द्धित चित्र में हम देखते है कि $BF = EB \cos\theta = 25 \times 4/5$ $\therefore$ BF = 20 m

विधि – II (उचिष्ठ निम्ननिष्ठ के सिद्धान्त से)

माना A व B प्रारम्भिक स्थितियां व A', B', t समय बाद की अन्तिम स्थितियां है। B, 15 मीटर/सैकण्ड से गति कर रहा है। t समय मे तय दूरी BB' = 15t होगी।

इसी प्रकार A की चाल 20 मीटर/सैकण्ड है तथा t समय में तय दूरी AA' = 20t होगी। इसलिए



OA' =500 – 20 t $\Rightarrow$ OB' = 400 – 15 t

$\therefore$ $A'B'^2 = OA'^2 + OB'^2 = (500 - 20t)^2 + (400 - 15t)^2$ ....(i)

यदि A'B' न्यूनतम है तो $(A'B')^2$ भी न्यूनतम होगा

$\therefore$ $\frac{d(A'B'^2)}{dt} = \frac{d(400-15t)^2 + (500-20t)^2}{dt} = 0$

= 2(400 – 15t) (–15) + 2(500 – 20t) (–20) = 0 = – 1200 + 45t = 2000 – 80 t

$\therefore$ 125 t = 3200

$\therefore$ $t = \frac{128}{5}$ s. अतः A व B $\frac{128}{5}$ सैकण्ड पश्चात् सबसे अधिक नजदीक होंगे।

अब $\frac{d^2A'B'}{dt^2}$ का मान धनात्मक मिलता है। अतः यहां पर निम्ननिष्ठ होगा।

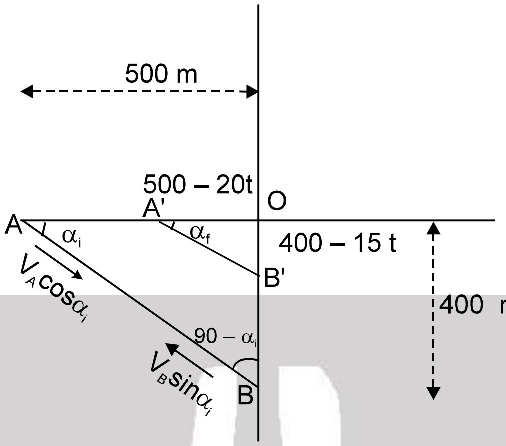
t का मान समीकरण (i) में रखने पर

$\therefore$ $A'B'^2 = \left(400 - 15 \times \frac{128}{5}\right)^2 + \left(500 - 20.\frac{128}{5}\right)^2 = \sqrt{16^2 + (-12)^2}$ = 20 m

$\therefore$ न्यूनतम दूरी A'B' = 20 m.

विधि III (पास आने के सापेक्ष वेग)

t समय पश्चात् माना A व B के वेगों के घटक AB के अनुदिश है। जब दोनों के बीच की दूरी न्यूनतम होगी तब उनके पास आने का सापेक्ष वेग शून्य होगा।



$\therefore$ $V_A \cos\alpha_f + V_B \sin\alpha_f = 0$ (यहाँ α_f रेखा A'B' का x-अक्ष से बनाया गया कोण है)

$20 \cos\alpha_f = -15 \sin\alpha_f$

$\therefore$ $\tan\alpha_f = -\frac{20}{15} = -\frac{4}{3}$

यहाँ इस कोण के लिए विधि (1) के कोण θ से भ्रमित होने की आवश्यकता नहीं है।
क्योंकि θ कोण परिणामी वेग का x–अक्ष से बनाया गया कोण है।
यहाँ α_f x-अक्ष से बनाया गया कोण है, जब पास आने का वेग शून्य है।

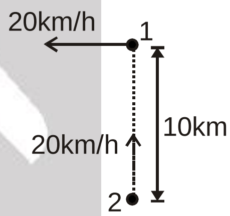
$\therefore$ $\frac{400-15t}{500-20t} = -\frac{4}{3}$

$\therefore$ $t = \frac{128}{5}$

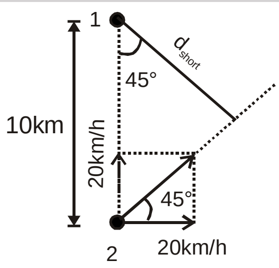
अतः, OB' = 16 m and OA' = – 12m

$A'B' = \sqrt{16^2 + (-12)^2} = 20$ m

Example 29. दो जहाज दक्षिण–उत्तर रेखा पर एक दूसरे से 10 km दूरी पर स्थित है। उत्तर दिशा की तरफ स्थित जहाज पश्चिम की तरफ 20 km h^{-1} से तथा दूसरा उत्तर की तरफ 20 km h^{-1} से चलना प्रारम्भ करते है। तो उनके पास आने की न्यूनतम दूरी क्या है तथा इसको प्राप्त करने में कितना समय लगेगा ?



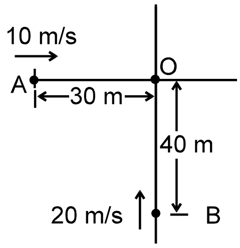
Solution : कण-1 के निर्देश



$d_{\text{न्यून}} = 10 \cos 45° = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ km

$t = \frac{10 \sin 45}{|\vec{V}_{21}|} = \frac{10 \times 1/\sqrt{2}}{20\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$ h = 15 min.

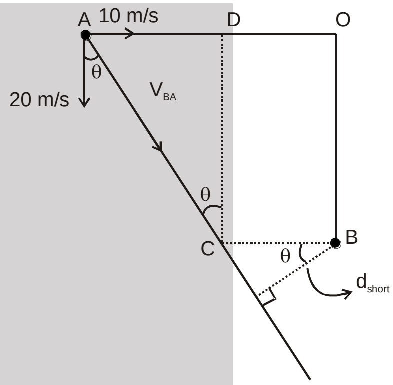
Example 30. चित्र में प्रदर्शित दो कणों A व B की स्थितियों को देखते हुए ज्ञात करो।



(i) क्या दोनों कण टकराएंगे।

(ii) दोनों कणों के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करो।

Solution : B के निर्देश तंत्र से हल करने पर



हम प्राप्त करते हैं $\tan\theta = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

पुनः $\tan\theta = \frac{AD}{CD} = \frac{AD}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 20 \Rightarrow DO = 10$

$\Rightarrow BC = 10$

$d_{न्यून} = BC\cos\theta = 10\cos\theta = \frac{10\times 2}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$ m

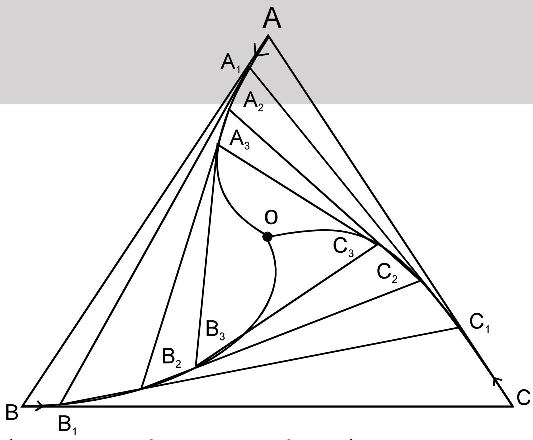
अतः न्यूनतम दूरी अशून्य है, इसलिये कण नहीं टकरायेंगे।

7.4. टक्कर से संबंधित विभिन्न प्रश्न

Solved Example

Example 31. तीन कण A, B और C एक समबाहु त्रिभुज (जिसकी भुजा a है।) ABC के कोनों पर t = 0 पर स्थित है। प्रत्येक कण नियत वेग v से इस प्रकार चलना प्रारम्भ करते है कि A हमेशा B की तरफ और B हमेशा C की तरफ तथा C हमेशा A की तरफ गति करते है। तो कितने समय पश्चात् कण आपस में मिल जाएंगे ?

Solution : कणों की गति का एक रेखा चित्र बनाते है। सममिति के कारण ये सभी कण त्रिभुज के केन्द्रक O पर मिलते है।

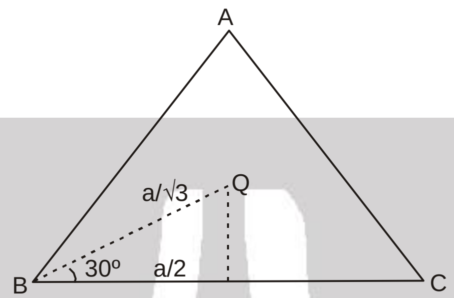


गति के किसी क्षण ये सभी कण मिलकर उभयनिष्ठ केन्द्र O का एक समबाहु त्रिभुज बनाते है तथा सभी कण केन्द्र पर मिलते है। किसी एक कण की गति को ध्यान से देखने पर, माना किसी क्षण कण B का वेग रेखा BO से 30º का कोण बनाता है तो

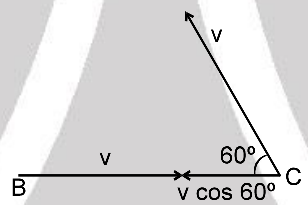
BO के अनुदिश कण B के वेग का घटक = v cos 30º है यह घटक दूरी BO की घटने की दर को बताता है। प्रारम्भ में

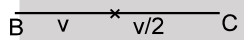
$BO = \frac{a/2}{\cos 30^o} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ = प्रत्येक कण का विस्थापन।

अतः BO दूरी को शून्य करने में लिया गया समय = $\frac{a/\sqrt{3}}{v\cos 30^o} = \frac{2a}{\sqrt{3}v \times \sqrt{3}} = \frac{2a}{3v}$.



अन्य विधि : कण B का BC रेखा के अनुदिश वेग v है। कण C का वेग CA रेखा के अनुदिश है। इसका BC के अनुदिश घटक v cos 60º = v/2 होगा। इस प्रकार दूरी BC सामीप्य वेग की दर से घटेगी।





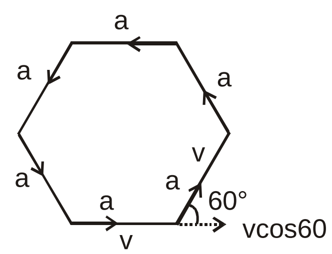
$\therefore$ पास आने का वेग $= v + \frac{v}{2} = \frac{3v}{2}$

अतः पास आने की दर नियत है। BC दूरी को शून्य करने में लिया गया समय

$t = \frac{a}{\frac{3v}{2}} = \frac{2a}{3v}$

Example 32. छः कणों को एक समषट्भुज के कोणों पर रखा गया है। ये कण नियत वेग v से अगले कण की तरफ गति बनाये रखता है तो कणों द्वारा मिलने में लिया गया समय ज्ञात करो।

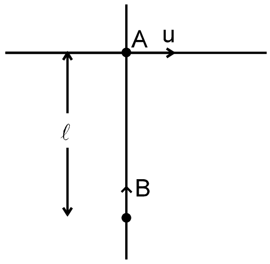
Solution : $V_{app} = V - V\cos 60°$



$= V - V/2 = V/2$

$t = \frac{a}{V_{app}} = \frac{a}{V/2} = \frac{2a}{V}$

Example 33. ‘A’ नियत वेग u से ‘x’ अक्ष पर गति करता है। B हमेशा अपने वेग की दिशा 'A' की तरफ रखता है। कितने समय बाद 'B' 'A' से मिलेगा, यदि B की चाल v नियत है तथा A व B द्वारा चली गयी दूरी भी ज्ञात करो।



Solution : माना किसी क्षण B का वेग x अक्ष के साथ α कोण बनाता है तथा टक्कर T समय बाद होती है।

$v_{app} = v - u\cos\alpha$

$$\ell = \int_0^T v_{app}\, dt = \int_0^T (v - u\cos\alpha)dt \quad .....(1)$$

x-अक्ष पर कण 'A' तथा 'B' के विस्थापन को बराबर रखने पर

$$uT = \int v\cos\alpha dt \quad .....(2)$$

अब समीकरण (1) तथा (2) से

$$\ell = vT - \int_0^T u\cos\alpha dt = vT - \frac{u}{v}\int_0^T v\cos\alpha dt = vT - \frac{u}{v}.\, uT$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ell v}{v^2 - u^2}$$

'A' तथा 'B' द्वारा तय की गयी दूरी –

$$= u \times \frac{\ell v}{v^2 - u^2} \text{ और } v \times \frac{\ell v}{v^2 - u^2} = \frac{uv\ell}{v^2 - u^2} \text{ तथा } \frac{v^2\ell}{v^2 - u^2}$$