सरल आवर्त गति (SIMPLE HARMONIC MOTION)

1. आवर्ती गति

जब कोई वस्तु या गतिशील कण, एक निश्चित समय–अन्तराल पश्चात् एक निश्चित पथ के अनुदिश अपनी गति को पुनः दोहराता है, तो ऐसी गति **आवर्ती गति** कहलाती है तथा इस समयान्तराल को **आवर्त–काल** या आवर्त गति काल (T) कहते है। आवर्ती गति का पथ रैखिक, वृत्ताकार, दीर्घवृत्ताकार या अन्य कोई वक्र हो सकता है। उदाहरणस्वरूप पृथ्वी का सूर्य के चारों ओर घूर्णन।

2. दोलन या कम्पन्न गति

इर्द–गिर्द (आना – जाना) प्रकार की गति दोलन गति कहलाती है। इसका आवर्त गति होना आवश्यक नहीं है तथा इसके निश्चित सीमान्त बिन्दु होना भी आवश्यक नहीं है। जैसे दीवार घड़ी के लोलक की गति।

जिस दोलन गति में ऊर्जा संरक्षित होती है, वह आवर्त गति भी होती है।

दोलन गति में कार्यरत बल / बल आघूर्ण (माध्य अवस्था की ओर इंगित) को प्रत्यानयन बल / बल आघूर्ण कहते हैं।

मंदित दोलनों में ऊर्जा प्रतिरोधी बलों के विरूद्ध व्ययित होती है तथा कुल यांत्रिक ऊर्जा घटती है।

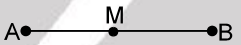
3. सरल आवर्त गति (SHM)

यदि कम्पन गति में प्रत्यानयन बल / बल आघूर्ण, कण / वस्तु के विस्थापन के सीधे समानुपाती हो तथा हमेशा माध्य स्थिति की तरफ इंगित हो तो ऐसी गति को सरल–आवर्त गति कहते है। यह कम्पन गति का सबसे सरल (व्याख्या करने में आसान) रूप है।

3.1 सरल आवर्त गति के प्रकार

(a) रैखिक सरल आवर्त गति : जब कण साम्यावस्था स्थिति के इधर–उधर सरल रेखा के अनुदिश गतिमान होता है। A तथा B सीमान्त स्थितियाँ है। M माध्य स्थिति है।

AM = MB = आयाम



(b) कोणीय सरल आवर्त गति : जब वस्तु / कण दिये गये अक्ष के परितः वक्रीय पथ पर घूर्णन के लिए स्वतन्त्र हो तो कण कोणीय दोलन करता है।

3.2 सरल आवर्त गति का समीकरण :

सरल आवर्त गति के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है :

$F = -kx$

जहाँ k = सरल आवर्त गति के लिए धनात्मक स्थिरांक = बल नियतांक

x = माध्य स्थिति से विस्थापन

या $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ [सरल आवर्त गति का अवकलन समीकरण]

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ जहाँ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

इसका हल होगा $x = A\sin(\omega t + \phi)$

3.4 सरल आवर्त गति के अभिलक्षण

नोट : दर्शाए गए चित्र में कण का पथ सरल रेखा है।

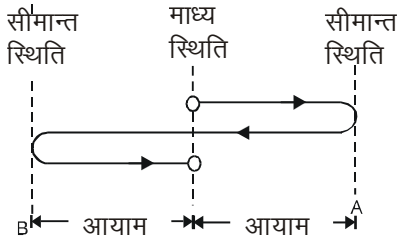
(a) विस्थापन - यह किसी क्षण कण की माध्य स्थिति से दूरी के रूप मे परिभाषित होता है।

समय t पर सरल आवर्त गति मे विस्थापन $x = A\sin(\omega t + \phi)$ से दिया जाता है।

(b) आयाम - यह कण का साम्य स्थिति से महत्तम–विस्थापन है।

आयाम = $\frac{1}{2}$ [दो सीमान्त बिन्दुओं या स्थितियों के बीच की दूरी]

यह निकाय की ऊर्जा पर निर्भर करता है।



(c) कोणीय आवृत्ति (ω) : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ तथा इसका मात्रक रेडियन /सैकण्ड है।

(d) आवृत्ति (f) : एकांक समय में दोलनों की संख्या को दोलन की आवृत्ति कहते है।

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, इसका मात्रक sec^{-1} या Hz है।

(e) आवर्त काल (T) : वह न्यूनतम समयान्तराल है जिसमें दोलनी गति पुनः दोहराई जाती है, आवर्तकाल कहलाता है।

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Solved Examples

Example 1. सरल आवर्त गति करते हुए कण की गति को समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। आवर्तकाल ज्ञात करो।

Solution. $\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \quad \omega^2 = 4 \quad \omega = 2$

आवर्त काल ; $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$

(f) कला : वह भौतिक राशि जो कण की गति की अवस्था निरूपित करती है (उदाहरणतः इसकी स्थिति तथा किसी क्षण गति की दिशा) ज्या **(sin)** फलन के कोणांक $(\omega t + \phi)$ को गति की तात्क्षणिक कला कहते है।

(g) कला–स्थिरांक (ϕ) : सरल आवर्त गति के समीकरण में स्थिरांक ϕ को कला स्थिरांक या प्रारम्भिक कला कहते है। यह प्रारम्भिक स्थिति तथा गति की दिशा पर निर्भर करती है।

(h) वेग (v) : वेग, किसी क्षण कण के विस्थापन में परिवर्तन की दर के बराबर होता है। माना कि माध्य स्थिति से विस्थापन $x = A \sin(\omega t + \phi)$ है।

वेग, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\sin(\omega t + \phi)\right]$

$v = A\omega \cos(\omega t + \phi)$ या, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

माध्य स्थिति $(x = 0)$ पर वेग महत्तम होता है।

$v_{max} = \omega A$

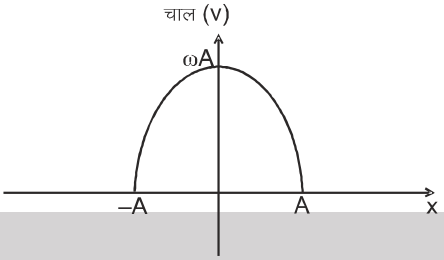
सीमान्त स्थिति $(x = A)$ पर वेग न्यूनतम होता है।

v_{min} = शून्य

चाल (v) तथा विस्थापन (x) में ग्राफ :

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ $\qquad$ $v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$

$v^2 + \omega^2x^2 = \omega^2A^2$ $\qquad$ $\dfrac{v^2}{\omega^2A^2} + \dfrac{x^2}{A^2} = 1$



ग्राफ दीर्घवृत्ताकार होगा।

(i) त्वरण : किसी क्षण त्वरण, कण के वेग में परिवर्तन की दर के बराबर होता है।

त्वरण, $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}[A\omega\cos(\omega t + \phi)]$

$a = -\omega^2A\sin(\omega t + \phi)$

$a = -\omega^2x$

Note : ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि त्वरण सदैव माध्य स्थिति की ओर निर्देशित होता है। माध्य स्थिति (x = 0) पर त्वरण न्यूनतम होता है।

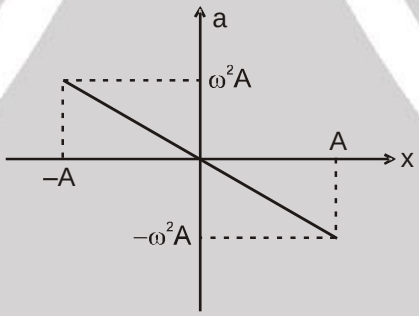
a_{min} = शून्य

सीमान्त स्थिति (x = A) पर त्वरण महत्तम होता है।

$a_{max} = \omega^2A$

त्वरण (A) तथा विस्थापन (x) में ग्राफ

$a = -\omega^2x$



Solved Examples

Example 2. सरल आवर्त गति करते हुए कण का समीकरण $x = (5\text{ m})\sin\left[(\pi s^{-1})t + \dfrac{\pi}{3}\right]$ है। कण का आयाम , आवर्तकाल तथा महत्तम चाल ज्ञात करो। t = 1 सैकण्ड पर वेग भी ज्ञात करो।

Solution. समीकरण $x = A\sin(\omega t + \delta)$ से तुलना करने पर, हम पाते है–

आयाम = 5 m

तथा आवर्तकाल = $\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\pi s^{-1}} = 2s.$

महत्तम चाल = $A\omega = 5\text{ m} \times \pi\ s^{-1} = 5\pi$ m/s.

t समय पर वेग = $\dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$

t = 1 s पर

$v = (5\text{ m})(\pi\ s^{-1})\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{5}\right) = -\dfrac{5\pi}{2}$ m/s.

Example 3. सरल आवर्त गति करते हुए कण की कोणीय आवृत्ति 6.28 s^{-1} तथा आयाम 10 cm है। ज्ञात करो (a) आवर्तकाल (b) महत्तम चाल (c) महत्तम त्वरण (d) चाल जब माध्य स्थिति से विस्थापन 6 cm हो (e) t = 0 पर गति प्रारम्भ मानते हुए t = 1/6 सैकण्ड पर चाल।

Solution. (a) आवर्तकाल $= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6.28}$ s = 1 s.

(b) महत्तम चाल = $A\omega = (0.1\text{ m})(6.28\text{ s}^{-1}) = 0.628$ m/s.

(c) महत्तम त्वरण = $A\omega^2 = (0.1\text{ m})(6.28\text{ s}^{-1})^2 = 4$ m/s^2.

(d) $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = (6.28\text{ s}^{-1})\sqrt{(10\text{cm})^2 - (6\text{cm})^2} = 50.2$ cm/s.

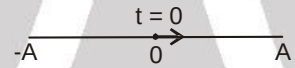
(e) t = 0 पर वेग शून्य है अर्थात् कण सीमान्त स्थिति में है। विस्थापन का समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$x = A\cos\omega t$.

वेग = $v = -A\omega\sin\omega t$.

$t = \frac{1}{6}$ s पर $v = -(0.1\text{ m})(6.28\text{ s}^{-1})\sin\left(\frac{6.28}{6}\right) = (-0.628\text{ m/s})\sin\frac{\pi}{3} = 54.4$ cm/s.

Example 4. एक कण माध्य स्थिति से शुरू होकर धनात्मक सीमान्त स्थिति की ओर दर्शाये अनुसार गति करता है। सरल आवर्त गति का समीकरण ज्ञात करो। सरल आवर्त गति का आयाम A है।



Solution. सरल आवर्त गति के सामान्य समीकरण $x = A\sin(\omega t + \phi)$ से व्यक्त करते हैं।

t = 0, x = 0

$\therefore$ $0 = A\sin\phi$

$\therefore$ $\phi = 0, \pi$ $\qquad \phi \in [0, 2\pi)$

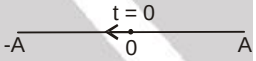
तथा t = 0, v = +ve

$\therefore$ $A\omega\cos\phi$ = +ve या $\phi = 0$

अतः कण t = 0 पर माध्य स्थिति पर होता है तथा धनात्मक सीमान्त स्थिति की ओर गतिमान है, तो सरल आवर्त गति का समीकरण

$x = A\sin\omega t$

इसी प्रकार



$\phi = \pi$ के लिए

$\therefore$ सरल आवर्त गति का समीकरण $x = A\sin(\omega t + \pi)$

या $x = -A\sin\omega t$

Note :

- यदि माध्य स्थिति मूल बिन्दु पर नहीं है, तो हम x को $x - x_0$ से प्रतिस्थापित करते है तथा समीकरण $x - x_0 = A\sin(\omega t + \phi)$ हो जाता है, यहाँ x_0 माध्य स्थिति का निर्देशांक है।

Example 5. एक कण "A" आयाम व "T" आवर्तकाल से सरल आवर्त गति कर रहा है। कण द्वारा 0 से A/2 तक जाने में लिया गया समय ज्ञात करो।

Solution. माना सरल आवर्त गति का समीकरण है ; $x = A\sin\omega t$

जब x = 0, t = 0

जब x = A/2 है तो ; $A/2 = A\sin\omega t$

या $\sin\omega t = 1/2$ $\qquad \omega t = \pi/6$

$\frac{2\pi}{T}t = \pi/6$ $\qquad t = T/12$

अतः लिया गया समय T/12 है, जहाँ T सरल आवर्त गति का आवर्तकाल है।

Example 6. 2 kg द्रव्यमान का कण एक सरल रेखा पर बल F = (8 – 2x) N के प्रभाव में गतिशील है। यह x = 6 m से विरामावस्था में छोड़ा जाता है।

(a) क्या कण सरल आवर्त गति करता है। (b) कण की साम्यावस्था ज्ञात करो।

(c) कण की गति का समीकरण ज्ञात करो। (d) सरल आवर्त गति का आवर्तकाल ज्ञात करो।

Solution. F = 8 – 2x या F = –2(x – 4)

साम्यावस्था के लिए F = 0

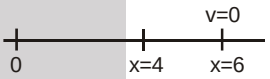
$\Rightarrow$ x = 4 पर साम्यावस्था स्थिति है।

इस प्रकार कण की गति सरल आवर्त गति है, जिसका बल नियातंक 2 व साम्यावस्था स्थिति x = 4 पर है।

(a) हाँ, गति सरल आवर्त गति है।

(b) साम्यावस्था स्थिति x = 4 पर है।

(c) x = 6 m पर कण विराम पर है ,अर्थात् यह एक सीमान्त स्थिति है।



इस प्रकार आयाम A = 2 m है तथा प्रारम्भ में कण एक सीमान्त स्थिति पर है।

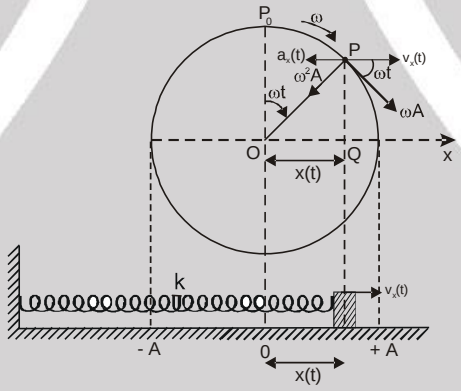
$\therefore$ सरल आवर्त गति का समीकरण

$x - 4 = 2\cos\omega t$, जहाँ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$ अर्थात् $x = 4 + 2\cos t$

(d) आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ sec.

4. एक समान वृत्ताकार गति के प्रक्षेप के रूप में सरल आवर्त गति

नियत कोणीय चाल ω से, A त्रिज्या के वृत्त में चित्रानुसार गति कर रहे एक कण पर विचार कीजिए।



माना t = 0 पर कण एक वृत्त (Y-अक्ष) के शीर्ष पर है। त्रिज्या OP, y-अक्ष के साथ t समय पर $\theta = \omega t$ कोण बनाती है। X-अक्ष पर एक लम्ब PQ डालिए। X-अक्ष के अनुदिश समय t पर स्थिति सदिश, वेग सदिश व त्वरण सदिश के घटक निम्न है।

$x(t) = A\sin\omega t$

$v_x(t) = A\omega\cos\omega t$

$a_x(t) = -\omega^2 A\sin\omega t$

उपरोक्त समीकरणें दर्शाती है कि लम्ब का पाद Q, X-अक्ष पर सरल आवर्त गति करता है। इसका आयाम A तथा कोणीय आवृत्ति ω है। इस प्रकार Y-अक्ष पर लम्ब का पाद भी A आयाम व कोणीय आवृत्ति ω[y(t) = A cos ωt] से सरल आवर्त गति करता है। दो सरल आवर्त गतियों की कला में π/2 का अन्तर है।

5. सरल आवर्त गति में विस्थापन,वेग तथा त्वरण का ग्राफीय निरूपण

विस्थापन, $x = A \sin \omega t$

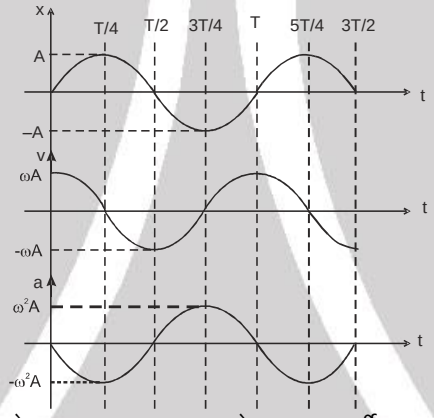
वेग, $v = A\omega \cos \omega t = A\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ या $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

त्वरण, $a = -\omega^2 A \sin\omega t = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi)$ या $a = -\omega^2 x$

नोट : $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$ $a = -\omega^2 x$

ये सम्बन्ध x के किसी भी समीकरण के लिए सत्य है।

समय, t	0	T/4	T/2	3T/4	T
विस्थापन, x	0	A	0	– A	0
वेग, v	Aω	0	– Aω	0	Aω
त्वरण, a	0	$-\omega^2 A$	0	$\omega^2 A$	0



1. समस्त तीनों राशियाँ विस्थापन, वेग तथा त्वरण समय के साथ आवर्ती रूप से समान आवर्तकाल में परिवर्तित होती है।
2. वेग आयाम, विस्थापन आयाम का ω गुना होता है। ($v_{max} = \omega A$).
3. त्वरण आयाम, विस्थापन आयाम का ω^2 गुना होता है। ($a_{max} = \omega^2 A$).
4. सरल आवर्त गति में वेग, विस्थापन से $\frac{\pi}{2}$ कला कोण आगे होता है।
5. सरल आवर्त गति में त्वरण, वेग से $\frac{\pi}{2}$ कला कोण आगे होता है।

6. सरल आवर्त गति की ऊर्जा

6.1 गतिज ऊर्जा (KE)

$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$ (x के फलन के रूप में)

$= \frac{1}{2} m A^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \theta) = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega t + \theta)$ (t के फलन के रूप में)

$KE_{max} = \frac{1}{2} kA^2$; $\langle KE \rangle_{0-T} = \frac{1}{4} kA^2$; $\langle KE \rangle_{0-A} = \frac{1}{3} kA^2$

गतिज ऊर्जा की आवृत्ति = 2 × (सरल आवर्त गति की आवृत्ति)

6.2 स्थितिज ऊर्जा (PE)

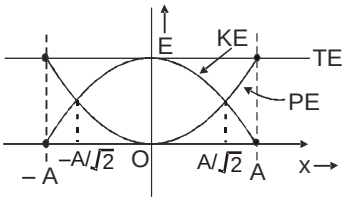
$\frac{1}{2} Kx^2$ (x के फलन के रूप में) $= \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \theta)$ (t के फलन के रूप में)

6.3 कुल यांत्रिक ऊर्जा (TME)

कुल यांत्रिक ऊर्जा = गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}$ k $(A^2 - x^2) + \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} KA^2$

अतः सरल आवर्त गति में कुल यांत्रिक ऊर्जा नियत होती है।

6.4 सरल आवर्त गति की ऊर्जा का ग्राफीय निरूपण



Solved Examples

Example 7. द्रव्यमान 0.50 किग्रा० का एक कण बल F = – (50 N/m)x के अन्तर्गत सरल आवर्त गति कर रहा है। यदि यह दोलन केन्द्र को 10 मीटर/सैकण्ड की चाल से पार करता हो, तो गति का आयाम ज्ञात करो।

Solution. कण की गतिज ऊर्जा जब यह दोलन केन्द्र पर है –

$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}$ (0.50 kg) $(10 \text{ m/s})^2 = 25$ J.

यहाँ स्थितिज ऊर्जा शून्य है। महत्तम विस्थापन x = A, पर चाल शून्य है, अतः गतिज ऊर्जा शून्य होगी। यहाँ स्थितिज ऊर्जा $\frac{1}{2} kA^2$ होगी। चूंकि यहाँ ऊर्जा–ह्रास नहीं होता है।

$$\frac{1}{2} kA^2 = 25 \text{ J} \qquad \text{.....(i)}$$

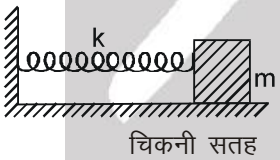
कण पर बल F = – (50 N/m)x.

इस प्रकार, स्प्रिंग नियतांक k = 50 न्यूटन/मी० है।

(i) समी० से $\frac{1}{2}$ (50 N/m) $A^2 = 25$ J या A = 1 m.

7. स्प्रिंग–द्रव्यमान निकाय

(1)

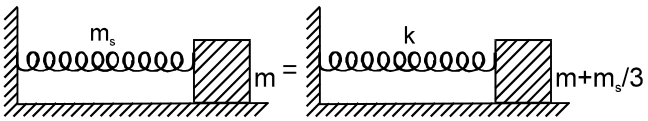


$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(2)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(3) यदि स्प्रिंग का द्रव्यमान m_s है तो



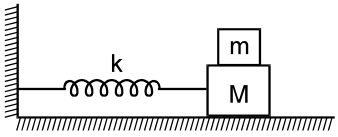
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_s}{3}}{k}}$$

Solved Examples

Example 8. द्रव्यमान 200 ग्राम का एक कण सरल आवर्त गति करता है। स्प्रिंग नियतांक 80 न्यूटन/मी० की स्प्रिंग इसको प्रत्यानयन बल प्रदान करती है। आवर्त काल ज्ञात करो।

Solution. आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{200\times10^{-3}kg}{80\ N/m}} = 2\pi \times 0.05\ s = 0.31\ s$

Example 9. चित्र में दर्शाये अनुसार दो पिण्डों के बीच घर्षण गुणांक μ तथा क्षैतिज तल चिकना है। (a) यदि निकाय को थोड़ा विस्थापित करके मुक्त करें, तो आवर्तकाल ज्ञात करो। (b) पिण्डों के बीच घर्षण बल का परिमाण ज्ञात करो जब माध्य स्थिति से विस्थापन x है। (c) यदि ऊपर वाला पिण्ड नीचे वाले पिण्ड के सापेक्ष नहीं फिसले, तो महत्तम आयाम क्या हो सकता है ?



Solution. (a) लघु आयाम के लिए दोनों पिण्ड साथ–साथ कम्पन करेंगे तथा कोणीय आवृत्ति –

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

और आवर्त काल – $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$

(b) माध्य स्थिति से x विस्थापन पर पिण्डों का त्वरण –

$$a = -\omega^2 x = \left(\frac{-kx}{M+m}\right)$$

अतः ऊपर वाले पिण्ड पर परिणामी बल –

$$ma = \left(\frac{-mkx}{M+m}\right)$$

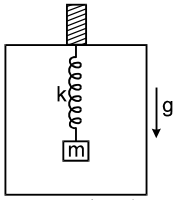
यह बल नीचे वाले पिण्ड के घर्षण बल द्वारा प्रदान किया जाता है। अतः घर्षण बल का परिमाण $\left(\frac{mk\,|x|}{M+m}\right)$ है।

(c) सीमान्त अवस्था में ऊपर वाले पिण्ड की सरल आवर्त गति के लिए आवश्यक महत्तम बल $\frac{mkA}{M+m}$ है। परन्तु महत्तम घर्षण बल μ mg हो सकता है। अतः

$$\frac{mkA}{M+m} = \mu mg \quad \text{या} \quad A = \frac{\mu(M+m)g}{k}$$

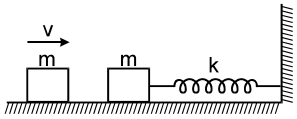
Example 10. द्रव्यमान m का पिण्ड k स्प्रिंग नियतांक की स्प्रिंग द्वारा स्थिर लिफ्ट की छत से साम्यवस्था में लटकाया जाता है। अचानक लिफ्ट की रस्सी टूट जाती है तथा लिफ्ट स्वतन्त्रतापूर्वक गिरती है। बताओ कि पिण्ड अब लिफ्ट के अन्दर mg/k आयाम से सरल आवर्त गति करेगा।

Solution. जब लिफ्ट स्थिर है, तो स्प्रिंग पिण्ड द्वारा खिंच जाती है। माना खिंचाव x तथा तनाव kx है जोकि पिण्ड के भार को सन्तुलित करती है।



इस प्रकार x = mg/k। जैसे ही रस्सी टूटती है, तो लिफ्ट 'g' त्वरण से गिरना प्रारम्भ करती है। हम लिफ्ट के निर्देश तन्त्र को लेते है तो हम छद्म बल, mg को पिण्ड पर ऊपर की ओर कार्यरत मानते है। यह बल भार को सन्तुलित करेगा। इस प्रकार, पिण्ड पर स्प्रिंग द्वारा kx परिणामी बल लगेगा जब यह स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई की स्थिति से x दूरी पर होगा। अतः इसकी गति लिफ्ट के अन्दर, स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई को माध्य स्थिति लेते हुए सरल आवर्त गति होगी। प्रारम्भ में स्प्रिंग x = mg/k से खिंची हुई है, यहाँ पिण्ड का वेग (लिफ्ट के सापेक्ष) शून्य है। इस प्रकार परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम mg/k है।

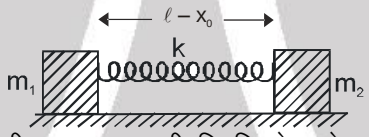
Example 11. चित्र में बांया पिण्ड, दांये पिण्ड से अप्रत्यास्थ टक्कर करता है तथा इसके साथ चिपक जाता है। परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम ज्ञात करो। सतह चिकनी है।



Solution. माना कि टक्कर बहुत अल्प समयान्तराल के लिए होती है तो हम संवेग संरक्षण के सिद्धान्त का प्रयोग कर सकते है। टक्कर के बाद उभयनिष्ठ वेग $\frac{v}{2}$ होगा। गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$ है। चूंकि इस क्षण स्प्रिंग सामान्य लम्बाई की स्थिति में है, तो यह गतिज ऊर्जा कम्पन की कुल ऊर्जा होगी। यदि आयाम A हो तो कुल ऊर्जा को $\frac{1}{2}kA^2$ लिख सकते है। इस प्रकार

$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{4}mv^2$ से $A = \sqrt{\frac{m}{2k}}\,v$ प्राप्त होता है।

Example 12. द्रव्यमान m_1 व m_2 के दो गुटके सामान्य लम्बाई ℓ व स्प्रिंग नियतांक k वाली एक स्प्रिंग से जुड़े है। निकाय एक चिकनी क्षैतिज सतह पर रखा है। प्रारम्भ में स्प्रिंग चित्रानुसार x_0 से सम्पीड़ित है।

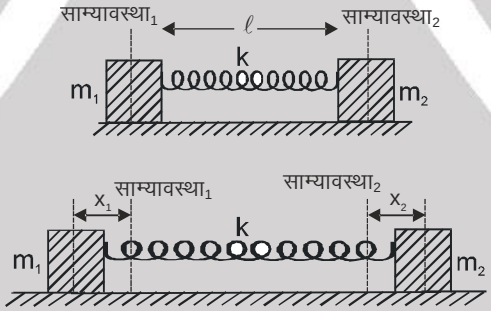


दर्शाइये कि दोनों गुटके उनकी साम्यावस्था की स्थिति के सापेक्ष सरल आवर्त गति करेंगे तथा ज्ञात करो।

(a) आवर्तकाल (b) प्रत्येक गुटके का आयाम

(c) समय के फलन के रूप में स्प्रिंग की लम्बाई

Solution : यहां दोनों गुटके समान समय पर साम्यावस्था में होंगे जब स्प्रिंग अपनी प्राकृतिक लम्बाई में है। माना साम्यावस्था$_1$ व साम्यावस्था$_2$ चित्रानुसार गुटके A व B की साम्यावस्था स्थिति है।



माना दोलनों के दौरान किसी समय पर गुटके उनकी साम्यावस्था स्थिति से x_1 व x_2 दूरी पर है।

चूंकि स्प्रिंग–गुटका निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है।

$\therefore\ (m_1 + m_2)\Delta x_{cm} = m_1x_1 - m_2x_2 = 0$

या $m_1x_1 = m_2x_2$

प्रथम कण के लिए बल समीकरण –

$$k(x_1 + x_2) = -m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad \text{या} \qquad k\left(x_1 + \frac{m_1}{m_2}x_1\right) = -m_1a_1$$

$$\text{या}\quad a_1 = -\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}x_1 \qquad \therefore \qquad \omega^2 = \frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}$$

इस प्रकार $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{K}}$ जहां $\mu = \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}$ जो प्रभावी द्रव्यमान के रूप में जाना जाता है।

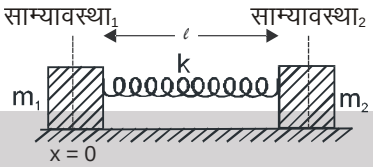
इसी प्रकार द्वितीय कण का आवर्तकाल भी ज्ञात किया जा सकता है। दोनों का आवर्तकाल समान होगा।

(b) माना गुटकों का आयाम A_1 व A_2 है। $m_1A_1 = m_2A_2$

ऊर्जा संरक्षण से ; $\frac{1}{2}k(A_1 + A_2)^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$ या $A_1 + A_2 = x_0$ या $A_1 + \frac{m_1}{m_2}A_1 = x_0$

या $A_1 = \frac{m_2x_0}{m_1+m_2}$ इसी प्रकार $A_2 = \frac{m_1x_0}{m_1+m_2}$

(c) माना प्रथम कण की साम्यावस्था स्थिति मूल बिन्दु पर है, अर्थात् $x = 0$ कण के x निर्देशांक को निम्न प्रकार लिख सकते है।

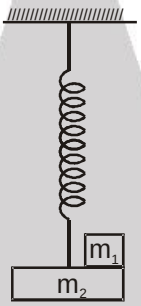


$x_1 = A_1\cos\omega t$ तथा $x_2 = \ell - A_2\cos\omega t$

इस प्रकार स्प्रिंग की लम्बाई लिखी जा सकती है ;

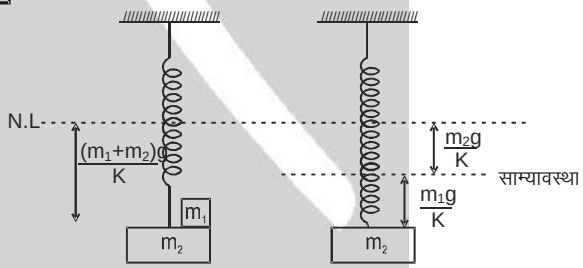
लम्बाई $= x_2 - x_1 = \ell - (A_1 + A_2)\cos\omega t$

Example 13. निकाय साम्यावस्था में एवं स्थिर है। अब द्रव्यमान m_1 को m_2 से हटा लेते है। परिणामी गति का आवर्तकाल एवं आयाम ज्ञात करो। स्प्रिंग नियतांक K है।



Solution. स्प्रिंग में प्रारम्भिक खिंचाव $x = \frac{(m_1+m_2)g}{K}$

अब यदि m_1 को हटा लेते है तो m_2 की साम्यावस्था स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई से $\frac{m_2g}{K}$ नीचे होगी।



प्रारम्भिक स्थिति पर चूंकि वेग शून्य है इसलिए यह सीमान्त स्थिति पर है।

अतः आयाम $= \frac{m_1g}{K}$, आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K}}$ चुंकि केवल m_2 द्रव्यमान की वस्तु दोलन कर रही है

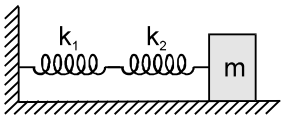
8. स्प्रिंगों का संयोजन

8.1 श्रेणीक्रम संयोजन :

कुल विस्थापन $x = x_1 + x_2$

दोनों स्प्रिंगों मे तनाव $= k_1x_1 = k_2x_2$

∴ श्रेणीक्रम संयोजन के लिए तुल्य स्थिरांक K_{eq} निम्न द्वारा व्यक्त किया जाता है



$1/k_{eq} = 1/k_1 + 1/k_2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$

नोट :

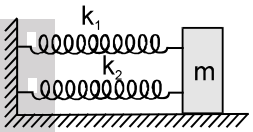
- श्रेणीक्रम संयोजन में, सभी स्प्रिंगों में तनाव समान होता है तथा खिंचाव अलग–अलग होता है। (यदि k समान हो तो खिंचाव भी समान होगा।)
- श्रेणीक्रम संयोजन में स्प्रिंग में खिंचाव, स्प्रिंग नियतांक के व्युत्क्रमानुपाती होता है।
- स्प्रिंग नियतांक, स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

  $\because k \propto 1/\ell$

  $\therefore k_1 \ell_1 = k_2 \ell_2 = k_3 \ell_3$
- यदि स्प्रिंग के 'n' टुकड़े कर दिये जायें तो प्रत्येक टुकड़े का स्प्रिंग नियतांक nk होगा।

8.2 समान्तर क्रम संयोजन :

दोनों स्प्रिंगों में खिंचाव समान होगा लेकिन दोनों पर कार्यरत बल अलग–अलग होगा। निकाय पर कार्यरत बल = F



$\therefore \quad F = -(k_1 x + k_2 x) \quad \Rightarrow \quad F = -(k_1 + k_2)x \quad \Rightarrow \quad F = -k_{eq}x$

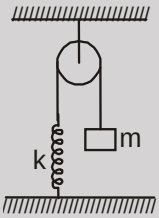
$\therefore \quad k_{eq} = k_1 + k_2 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$

9. सरल आवर्त गति में आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति ज्ञात करने की विधियाँ

(a) बल / बल आघूर्ण विधि **(b) ऊर्जा विधि**

Solved Examples

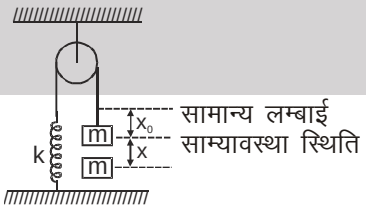
Example 14. चित्र में दर्शायी गई रस्सी, घिरनी तथा स्प्रिंग हल्की है। द्रव्यमान m का आवर्तकाल ज्ञात करो।



Solution. **(a) बल विधि**

माना ब्लॉक की साम्यावस्था में स्प्रिंग का विस्तार x_0 है।

$\therefore \quad kx_0 = mg \qquad .....(1)$



अब यदि हम ब्लॉक को x दूरी से नीचे की ओर विस्थापित करें तो ब्लॉक पर माध्य स्थिति की ओर कुल बल निम्न है–

$F = k(x + x_0) - mg = kx$ (1) का उपयोग करते हुए

इस प्रकार कुल बल माध्य स्थिति की ओर है एवं x के समानुपाती है। इसलिए कण सरल आवर्त गति करेगा तथा इसका आवर्त काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(b) ऊर्जा विधि

माना स्प्रिंग की साम्यावस्था लम्बाई पर गुटके की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य है। अब सामान्य लम्बाई से x दूरी नीचे गुटके की चाल v मानते है। चूंकि सरल आवर्त गति में कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित है।

$\therefore \quad -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 =$ नियतांक

समय के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते है

$-mgv + kxv + mva = 0$

जहाँ a त्वरण है।

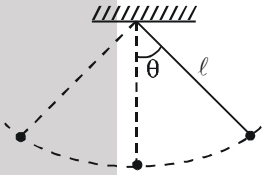
$\therefore \quad F = ma = -kx + mg$ या $F = -k(x - \frac{mg}{k})$

गति के लिए यह दर्शाता है कि बल नियतांक k तथा साम्यावस्था स्थिति $x = \frac{mg}{k}$ है।

इसलिए कण सरल आवर्त गति करेगा तथा इसका आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ होगा।

10. सरल लोलक

यदि एक भारी बिन्दुवत द्रव्यमान एक हल्की व अवितान्य डोरी के द्वारा एक दृढ़ आधार से लटकाया जाये तो यह व्यवस्था सरल लोलक कहलाती है। सरल लोलक का आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$



(कभी–कभी हम गणना की सरलता के लिए $g = \pi^2$ लेते है)

Note :

- यदि सरल लोलक का कोणीय आयाम अधिक है तो आवर्तकाल

  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)$ **(अन्य परीक्षाओं के लिए)**

  जहाँ θ_0 रेडियन में है।
- सरल लोलक के आवर्तकाल का सुत्र है यदि सरल लोलक की लम्बाई ℓ पृथ्वी की त्रिज्या R के तुलनात्मक है।

  $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\ell}\right)}}$ यहाँ, R = पृथ्वी की त्रिज्या
- अनन्त लम्बाई के सरल लोलक का आवर्त काल अधिकतम होता है जो कि $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ = 84.6 मिनट से दिया जाता है। (जहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या है।)
- सैकण्ड लोलक का आवर्तकाल 2 sec तथा ℓ = 0.993 m है।
- सरल लोलक कोणीय सरल आवर्त गति करता है परन्तु अल्प कोणीय विस्थापन के लिए इसकी गति रेखीय सरल आवर्त गति मानी जाती है।
- यदि सरल लोलक पर आधारित घड़ी का आवर्त काल बढ़ता है तो घड़ी धीमी हो जाएगी परन्तु यदि आर्वतकाल घटता है तो घड़ी तीव्र हो जाती है।
- यदि g नियत व $\Delta\ell$ लम्बाई में परिवर्तन हो तो $\frac{\Delta T}{T}\times 100 = \frac{1}{2}\ \frac{\Delta\ell}{\ell}\times 100$
- यदि ℓ नियत व Δg त्वरण में परिवर्तन हो तो, $\frac{\Delta T}{T}\times 100 = -\frac{1}{2}\ \frac{\Delta g}{g}\times 100$
- यदि $\Delta\ell$ लम्बाई में परिवर्तन तथा Δg गुरूत्व के कारण त्वरण में परिवर्तन हो तो

  $$\frac{\Delta T}{T}\times 100 = \left[\frac{1}{2}\ \frac{\Delta\ell}{\ell} - \frac{1}{2}\ \frac{\Delta g}{g}\right]\times 100$$

Solved Examples

Example 15. 40 cm लम्बाई का एक सरल लोलक 0.04 rad के कोणीय आयाम से दोलन करता है। ज्ञात करो (a) आवर्तकाल (b) गोलक का रेखीय आयाम (c) गोलक की चाल जब डोरी ऊर्ध्वाधर से 0.02 rad का कोण बनाती है तथा (d) कोणीय त्वरण जब गोलक क्षणिक विरामावस्था पर है। $g = 10\ m/s^2$ लें।

Solution : (a) कोणीय आवृत्ति $\omega = \sqrt{g/\ell} = \sqrt{\frac{10 m/s^2}{0.4m}} = 5\ s^{-1}$

आवर्तकाल $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5 s^{-1}} = 1.26$ s.

(b) रेखीय आयाम = 40 cm × 0.04 = 1.6 cm

(c) 0.02 rad विस्थापन पर कोणीय चाल $\omega = (5\ s^{-1})\sqrt{(0.04)^2 - (0.02)^2}$ rad = 0.17 rad/s.
यहाँ इस क्षण गोलक की चाल = (40 cm) × 0.175^{-1} = 6.8 cm/s.

(d) क्षणिक विरामावस्था पर, गोलक सीमान्त स्थिति पर है। अतः कोणीय त्वरण
$\alpha = (0.04\ rad)(25\ s^{-2}) = 1\ rad/s^2$.

10.1 त्वरित निर्देश तन्त्र में सरल लोलक का आवर्त काल :

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff.}}}$ जहाँ

$g_{eff.}$ = निर्देश तन्त्र में गुरूत्व के कारण प्रभावी त्वरण = $|\vec{g} - \vec{a}|$

$\vec{a}$ = निलम्बन बिन्दु का जमीन के सापेक्ष त्वरण

इस सूत्र को उपयोग करने की शर्त : $|\vec{g} - \vec{a}|$ = नियतांक

माध्य स्थिति पर $g_{eff} = \frac{\text{डोरी में त्वरण}}{\text{लोलक का द्रव्य मान}}$

Solved Examples

Example 16. एक क्षैतिज सड़क पर एक समान रूप से त्वरित कार की छत से एक सरल लोलक लटका हुआ है। यदि इसका त्वरण a_0 तथा लोलक की लम्बाई ℓ हो तो माध्य स्थिति के सापेक्ष अल्प दोलनों का दोलन काल ज्ञात कीजिए।

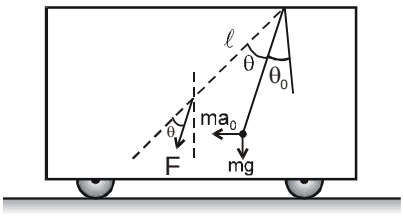
Solution. हम कार के तंत्र में कार्य करेंगे। क्योंकि यह सड़क के सापेक्ष त्वरित है, अतः m द्रव्यमान के गोलक पर एक छद्म बल ma_0 आरोपित करना होगा।

माध्य स्थिति के लिए कार के सापेक्ष गोलक का त्वरण शून्य होना चाहिए। यदि θ_0 डोरी द्वारा ऊर्ध्वाधर के साथ बनाया गया कोण हो तो इस स्थिति में तनाव, भार व छद्म बल का योग शून्य होगा।

इस प्रकार mg व ma_0 का परिणामी ($F = m\sqrt{g^2 + a_0^2}$) डोरी के अनुदिश होगा।

$\therefore \tan\theta_0 = \frac{ma_0}{mg} = \frac{a_0}{g}$

अब माना कि डोरी चित्रानुसार θ कोण से और विक्षेपित की जाती है।



अब, प्रत्यानयन बल आघुर्ण $(F\sin\theta)\ell = -m\ell^2\alpha$

F का मान रखने पर एवं अल्प θ के लिए $\sin\theta = \theta$ का उपयोग करने पर

$(m\sqrt{g^2 + a_0^2})\ell\theta = -m\ell^2\alpha$

या $\alpha = -\frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{\ell}\theta$ इसलिए $\omega^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{\ell}$

यह आवर्तकाल के साथ सरल आवर्त गति की समीकरण है।

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{\sqrt{\ell}}{(g^2 + a_0^2)^{1/4}}$

10.2 यदि $m\vec{g}$ के अतिरिक्त अन्य बल कार्य करते है तो :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff.}}} \quad \text{जहाँ} \quad g_{eff.} = \left|\vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}\right|$$

$\vec{F}$ = 'm' पर कार्यरत नियत बल।

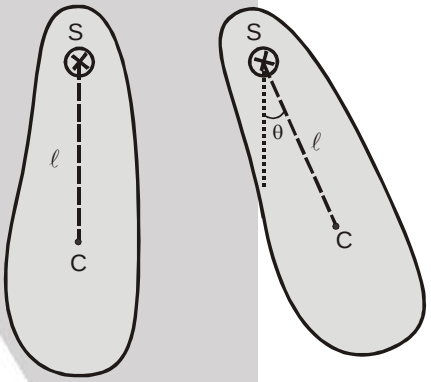
Solved Examples

Example 17. 'ℓ' लम्बाई एवं 'm' द्रव्यमान के गोलक वाला सरल लोलक जल के अन्दर कोणीय सरल आवर्त गति कर रहा है। गोलक के भार के आधे भार के बराबर नियत उत्प्लावक बल गोलक पर कार्य कर रहा है। दोलनों का आवर्त काल ज्ञात करो ?

Solution. यहाँ $g_{eff.} = g - \frac{mg/2}{m} = g/2.$ इस प्रकार $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$

11. पिण्ड लोलक/ भौतिक लोलक

जब एक दृढ़ पिण्ड को किसी अक्ष से लटकाकर इसके सापेक्ष दोलन करवाये जाये तो यह व्यवस्था पिण्ड लोलक कहलाता है।



C = द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

S = निलम्बन बिन्दु

ℓ = निलम्बन बिन्दु व द्रव्यमान केन्द्र के मध्य दूरी (यह गति के दौरान नियत रहती है।)

माध्य स्थिति से अल्प कोणीय विस्थापन "θ" के लिए

प्रत्यानयन बल आघूर्ण $\tau = -mg\ell\sin\theta$ है।

$\tau = -mg\ell\theta$ अल्प θ के लिए $\sin\theta = \theta$

या $I\alpha = -mg\ell\theta$ जहां I = निलम्बन बिन्दु के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

या $\alpha = -\frac{mg\ell}{I}\theta$ या $\omega^2 = \frac{mg\ell}{I}$ आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}}$ $I = I_{CM} + m\ell^2$

जहाँ I_{CM} = दोलन अक्ष के समान्तर व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है।

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + m\ell^2}{mg\ell}} \quad \text{जहाँ} \quad I_{CM} = mk^2$$

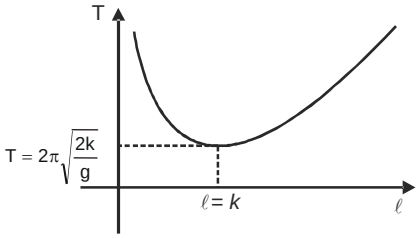
k = घूर्णन त्रिज्या (द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{mk^2 + m\ell^2}{mg\ell}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2 + \ell^2}{\ell g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}}$ $L_{eq} = \frac{k^2}{\ell} + \ell$ = सरल लोलक की तुल्य लम्बाई ;

जब $\ell = k$ हो तो T न्यूनतम होगा

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2K}{g}}$$

T व ℓ के माध्य ग्राफ



Solved Examples

Example 18. 1.00 m लम्बाई की समरूप छड़ एक सिरे से लटकायी जाती है तथा यह अल्प आयाम से गुरूत्व के प्रभाव में दोलन करती है। दोलन काल ज्ञात कीजिए। ($g = 10\ m/s^2$)

Solution. अल्प दोलनों के लिए कोणीय गति लगभग सरल आवर्त गति होती है तथा आवर्तकाल निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है –

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg(\ell/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{(m\ell^2/3)}{mg(\ell/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\times1.00m}{3\times10m/s^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}\,s$$

12. मरोड़ी लोलक

जब एक वस्तु को इसके केन्द्र पर एक हल्के मरोड़ी तार द्वारा लटकाया जाता है तो इस व्यवस्था को मरोड़ी लोलक कहते है। मरोड़ी तार आवश्यक रूप से अवितान्य होता है परन्तु यह इसकी अक्ष के सापेक्ष ऐंठन के लिए स्वतंत्र होता है। जब तार का निचला सिरा थोड़ा सा घुमाया जाता है तो तार वस्तु को घूर्णी दोलन प्रदान करने के लिए प्रत्यानयन बलाघूर्ण आरोपित करता है। तो उत्पन्न प्रत्यानयन बलाघूर्ण

$\tau = -C\theta$ जहाँ C = मरोड़ी नियतांक

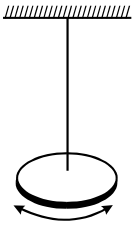
या $I\alpha = -C\theta$ जहाँ I = ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

या $\alpha = -\frac{C}{I}\theta$ $\therefore$ आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$

Solved Examples

Example 19. त्रिज्या 5.0 cm व द्रव्यमान 200 g की एक समरूप चकती के केन्द्र पर एक धात्वीय तार बंधा है, जिसका दूसरा सिरा छत से स्थिर बंधा है। लटकी हुई चकती को तार के सापेक्ष कुछ कोण से घुमाकर छोड़ देते है। यदि चकती 0.20 s के आवर्तकाल से मरोड़ी दोलन करती हो, तो तार का मरोड़ी नियतांक ज्ञात करो।

Solution. प्रदर्शित चित्र की स्थिति में चकती का तार के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण



$$I = \frac{mr^2}{2} = \frac{(0.200kg)(5.0\times10^{-2}m)^2}{2} = 2.5\times10^{-4}\ kg\text{-}m^2.$$

आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$ या $C = \frac{4\pi^2I}{T^2} = \frac{4\pi^2(2.5\times10^{-4}kg-m^2)}{(0.20\ s)^2} = 0.25\ \frac{kg-m^2}{s^2}$

13. दो सरल आवर्त गतियों (SHM) का अध्यारोपण

13.1 एक ही दिशा में, एक समान आवृत्ति के लिए

$x_1 = A_1 \sin\omega t$

$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \theta)$, तब परिणामी विस्थापन

$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin\omega t + A_2 \sin(\omega t + \theta) = A \sin(\omega t + \phi)$

जहाँ $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\theta}$ और $\phi = \tan^{-1}\left[\frac{A_2\sin\theta}{A_1 + A_2\cos\theta}\right]$

यदि $\theta = 0$, हो तो दोनों सरल आवर्त गतियाँ समान कला में होगी तथा $A = A_1 + A_2$

यदि $\theta = \pi$, हो तो दोनों सरल आवर्त गतियाँ विपरीत कला में होगी तथा $A = |A_1 - A_2|$

दो या दो से अधिक सरल आवर्त गतियो के अध्यारोपण के कारण परिणामी आयाम इस स्थिति में कला आरेख के द्वारा भी ज्ञात कर सकते है।

13.2 समान दिशा में परन्तु भिन्न–भिन्न आवृत्ति के लिए

$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$

$x_2 = A_2 \sin \omega_2 t$

तो परिणामी विस्थापन $x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$

यह परिणामी गति सरल आवर्त गति नहीं है।

13.3 दो लम्बवत् दिशाओं में

$x = A \sin \omega t$

$y = B \sin (\omega t + \theta)$

स्थिति (i) : यदि $\theta = 0$ या π हो तो $y = \pm (B/A)\, x$ होगा, इसलिए पथ सरल रेखीय होगा व परिणामी विस्थापन $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = (A^2 + B^2)^{1/2} \sin \omega t$ होगा

जो कि $\sqrt{A^2 + B^2}$ आयाम की सरल आवर्त गति का समीकरण है।

स्थिति **(ii) :** यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$ हो तो $x = A \sin \omega t$

$y = B \sin (\omega t + \pi/2) = B \cos \omega t$

इसलिए परिणामी $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ होगा, अर्थात् यह एक दीर्घवृत्त की समीकरण है, यदि $A = B$ हो तो अध्यारोपण एक वृत्त की समीकरण होगा। परिणामी गति सरल आवर्त गति नही है।

13.4 एक ही दिशा के अनुदिश सरल आवर्त गतियों का अध्यारोपण (कला आरेख का उपयोग करते हुए)

दो या दो से अधिक सरल आवर्त गतियाँ एक ही रेखा के अनुदिश है तो उनका परिणामी, कला आरेख बनाकर सदिश योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

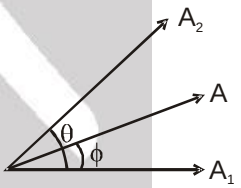
1. सरल आवर्त गति का आयाम, सदिश की लम्बाई (परिमाण) के रूप में लिया जाता है।
2. इन सदिशों के मध्य कलान्तर, इन सदिशों के मध्य कोण के रूप में लिया जाता है। सदिशों का परिणामी का परिमाण सरल आवर्त गति का परिणामी आयाम होता है तथा परिणामी सदिश का कोण परिणामी सरल आवर्त गति के लिए कला नियतांक को बताता है।

उदाहरण के लिए ;

$x_1 = A_1 \sin \omega t$

$x_2 = A_2 \sin (\omega t + \theta)$

यदि परिणामी सरल आवर्त गति की समीकरण $x = A \sin (\omega t + \phi)$ ली जाये तो



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\theta}$$

$$\tan \phi = \frac{A_2 \sin\theta}{A_1 + A_2 \cos\theta}$$

Solved Examples

Example 20 निम्न गतियों के संयोजन से प्राप्त सरल आवर्त गति का आयाम ज्ञात कीजिए।

$x_1 = (2.0\ \text{cm}) \sin \omega t$ तथा $x_2 = (2.0\ \text{cm}) \sin (\omega t + \pi/3)$.

Solution. दी गई दो समीकरणें आयाम $A_1 = 2.0$ cm तथा $A_2 = 2.0$ cm से X-अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त गतियों को प्रदर्शित करती है। दोनो सरल आवर्त गतियों के मध्य कलान्तर $\pi/3$ है। परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम A निम्न द्वारा दिया जाता है।

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\delta} = \sqrt{(2.0\text{cm})^2 + (2.0\text{cm})^2 + 2(2.0\text{cm})^2 \cos\frac{\pi}{3}} = 3.5\ \text{cm}$$

Example 21. $x_1 = 3 \sin \omega t, \quad x_2 = 4 \cos \omega t$

ज्ञात कीजिए (i) परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम (ii) परिणामी सरल आवर्त गति की समीकरण।

Solution. सबसे पहले सभी सरल आवर्त गतियों को sine (ज्या) के फलन के रूप में "ωt" को धनात्मक रखते हुए, धनात्मक आयाम के साथ लिखते है।

$\therefore \quad x_1 = 3 \sin \omega t, \quad x_2 = 4 \sin (\omega t + \pi/2)$

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan \phi = \frac{4 \sin \frac{\pi}{2}}{3 + 4 \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \qquad \phi = 53^o$$

समीकरण $x = 5 \sin (\omega t + 53^o)$

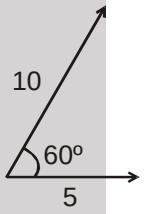
Example 22. $x_1 = 5 \sin (\omega t + 30^o)$

$x_2 = 10 \cos (\omega t)$

परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम ज्ञात करो।

Solution. $x_1 = 5 \sin (\omega t + 30^o)$

$x_2 = 10 \sin (\omega t + \frac{\pi}{2})$



कला आरेख $A = \sqrt{5^2 + 10^2 + 2 \times 5 \times 10 \cos 60^o}$

$= \sqrt{25 + 100 + 50} = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$

Example 23. एक कण दो सरल आवर्त गतियों $x_1 = A_1 \sin \omega t$ तथा $x_2 = A_2 \sin (\omega t + \pi/3)$ के अधीन गतिशील है। ज्ञात करो (a) $t = 0$ पर विस्थापन (b) कण की अधिकतम चाल व (c) कण का अधिकतम त्वरण।

Solution. (a) $t = 0$ पर $x_1 = A_1 \sin \omega t = 0$ तथा $x_2 = A_2 \sin (\omega t + \pi/3)$

$= A_2 \sin (\pi/3) = \frac{A_2\sqrt{3}}{2}$. अतः $t = 0$ पर परिणामी विस्थापन है –

$$x = x_1 + x_2 = A_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(b) दोनों गतियों का परिणामी, समान कोणीय आवृत्ति ω की एक सरल आवर्त गतिं हो तो परिणामी गति का आयाम

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\pi/3)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2}$$

अधिकतम चाल $u_{max} = A\,\omega = \omega \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2}$

(c) अधिकतम त्वरण $a_{max} = A\,\omega^2 = \omega^2 \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2}$

Example 24. समान दिशा में समान आयाम तथा समान आवृत्ति की दो सरल आवर्त गतियो के अधीन एक कण गतिशील है। यदि परिणामी आयाम किसी एक सरल आवर्त गति के आयाम के बराबर है तो दोनों गतियों के मध्य कलान्तर ज्ञात कीजिए।

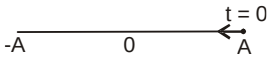
Solution. माना कि प्रत्येक गति का आयाम A है। परिणामी आयाम भी A है। यदि दोनो गतियों के मध्य कलान्तर δ हो तो

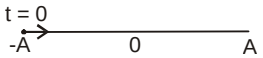
$$A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A.\ A.\cos\delta} \quad \text{या} \quad = A\sqrt{2(1+\cos\delta)} = 2A \cos\frac{\delta}{2}$$

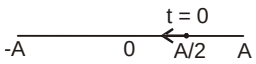
या $\cos \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}$ या $\delta = 2\pi/3.$

Solved Miscellaneous Problems

Problem 1. नीचे दिखाई गई स्थितियों के लिए सरल आवर्त गति का समीकरण लिखो ।

(a) 

(b) 

(c) 

Solution : (a) t = 0 पर x = +A

$x = A \sin(\omega t + \phi)$

$A = A \sin(\phi)$

$\phi = \pi/2$

$x = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(\omega t)$

(b) t = 0 पर x = – A

$x = A \sin(\omega t + \phi)$

$-A = A \sin\phi$

$\phi = \frac{3\pi}{2}$

$x = A \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x = -A\cos(\omega t)$

(c) t = 0 पर $x = \frac{A}{2}$

$x = A \sin(\omega t + \phi)$; $\frac{A}{2} = A \sin(\omega t + \phi)$

$\frac{1}{2} = \sin\phi \Rightarrow f = 30°, 150$

कण साम्यावस्था की ओर ऋणात्मक दिशा में गतिशील है।

वेग $v = A\omega\cos(\omega t + \phi)$

t = 0 पर v = –ve

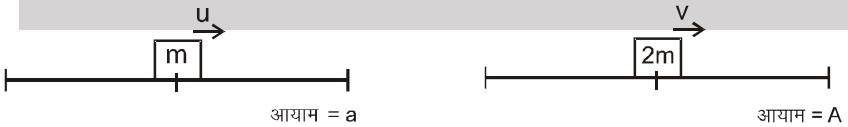
$v = A\omega\cos\phi$ अतः $\phi = 150°$

$x = A \sin(\omega t + 150^o)$

Ans. **(a)** $x = A\cos\omega t$; **(b)** $x = -A\cos\omega t$; **(c)** $x = A \sin(\omega t + 150^o)$

Problem 2. द्रव्यमान m का पिण्ड A, आयाम a से सरल आवर्त गति कर रहा है। जब पिण्ड A माध्य स्थिति से गुजरता है, तब द्रव्यमान m का एक अन्य पिण्ड B, धीरे से पिण्ड A पर रख देते है तथा B, A से चिपक जाता है। नई सरल आवर्त गति का आयाम तथा आवर्तकाल ज्ञात करो।

Solution :



द्रव्यमान m का आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

द्रव्यमान 2m का आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$

साम्यावस्था पर गतिज ऊर्जा = कुल ऊर्जा

द्रव्यमान m के लिए : $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\omega^2a^2$ .....(1)

द्रव्यमान 2m के लिए : $\frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{2}2m\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 A^2$ .....(2)

संवेग संरक्षण से $mu = 2mv$

$$v = \frac{u}{2}$$

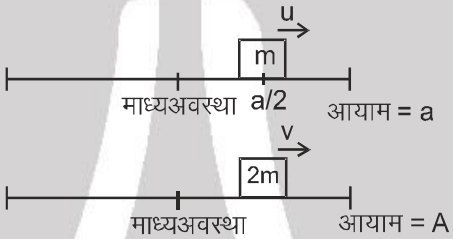
$$\therefore \quad \frac{1}{2}2m\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}2m\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 A^2 \qquad .....(3)$$

समीकरण (1) & (3) के भाग से $4 = \frac{2a^2}{A^2}$

नया आयाम $A = \frac{a}{\sqrt{2}}$ **Ans.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$ आयाम $= \frac{a}{\sqrt{2}}$

Problem 3. उपरोक्त प्रश्न में यदि B को माध्य स्थिति से $\frac{a}{2}$ दूरी पर A पर रख दिया जाय तो इसका नया आवर्तकाल व आयाम क्या होगा।

Solution : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$



$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$

संवेग संरक्षण से

$mu = 2mv \Rightarrow v = \frac{u}{2}$ $\frac{a}{2}$ पर गतिज ऊर्जा

m द्रव्यमान के लिए : $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left[a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ .....(1)

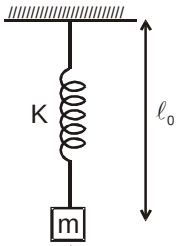
2m द्रव्यमान के लिए : $\frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{2}2m\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2\left[A^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ .....(2)

$$\frac{1}{2}2m\,\frac{u^2}{4} = \frac{1}{2}2m\,\frac{\omega^2}{2}\left[A^2 - \frac{a^2}{4}\right] \qquad .....(3)$$

समीकरण (1) & (3) के भाग से

$2 = \frac{a^2 - \frac{a^2}{4}}{A^2 - \frac{a^2}{4}}$ नया आयाम $A = \sqrt{\frac{5}{8}}a$ **Ans.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$, आयाम $= a\sqrt{\frac{5}{8}}$

Problem 4. पिण्ड को दर्शायी गयी स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई से धीरे–धीरे गिराया जाता है। स्प्रिंग में महत्तम खिंचाव ज्ञात करो।



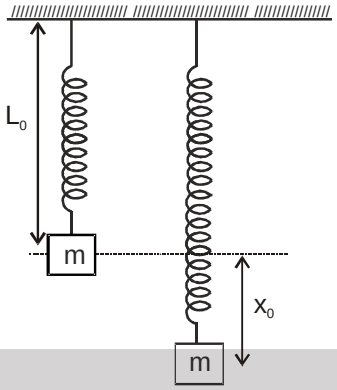
Solution : चूंकि ब्लॉक स्थिरावस्था से धीरे–धीरे गिरता है, अतः अधिकतम प्रसार होगा।

जब $mg = Kx_0$

$x_0 = \frac{mg}{K}$ अधिकतम प्रसार **Ans.** $\frac{mg}{K}$

Problem 5. उपरोक्त प्रश्न में यदि पिण्ड को मुक्त किया जाता है, तो महत्तम खिंचाव ज्ञात करो।

Solution :



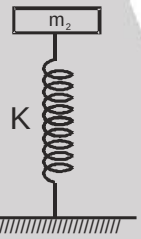
माना x_0 = अधिकतम प्रसार

ऊर्जा संरक्षण से $mgx_0 = \frac{1}{2}Kx_0^2$

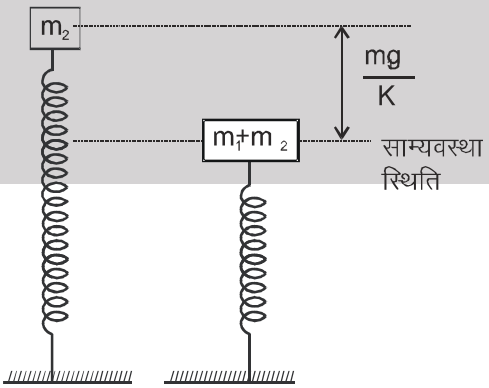
अधिकतम प्रसार पर वेग शून्य होगा

$x_0 = \frac{2mg}{K}$ अधिकतम प्रसार है। **Ans.** $\frac{2mg}{K}$

Problem 6. चित्रानुसार द्रव्यमान m_2 का ब्लॉक साम्यावस्था में है। द्रव्यमान m_1 का अन्य पिण्ड धीरे से m_2 पर रखते है। दोलन का आवर्त काल एवं आयाम ज्ञात करो।



Solution : आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{K}}$

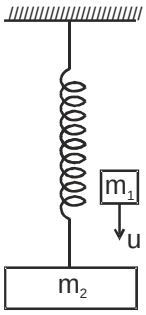


प्रारम्भिक अवस्था में चूंकि वेग शून्य है, अतः यह सीमान्त अवस्था है।

आयाम $A = \frac{m_1 g}{K}$

Ans. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{K}}$ आयाम $= \frac{m_1 g}{K}$

Problem 7. द्रव्यमान m_2 का पिण्ड स्थिर एवं साम्यावस्था में है। नीचे की ओर u वेग से गतिमान m_1 द्रव्यमान का पिण्ड m_2 से ऊर्ध्वाधर टकराता है तथा चिपक जाता है। दोलन की ऊर्जा ज्ञात करो।



Solution : माना टक्कर के पश्चात् m_1 व m_2 का वेग v है।

संवेग संरक्षण से

$$m_1u = (m_1 + m_2)v$$

$$v = \frac{m_1u}{m_1 + m_2}$$

अतः, $KE = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1+m_2}u^2$

$m_2g = Kx_1$

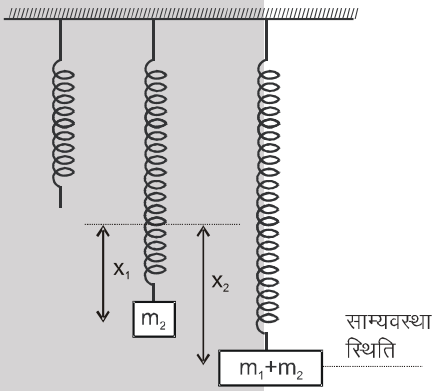
$(m_1 + m_2)g = Kx_2$

$$PE = \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{m_1g}{K}\right)^2 \Rightarrow PE = \frac{1}{2}\frac{m_1^2g^2}{K}$$

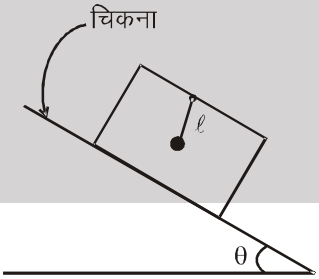
अतः दोलन की ऊर्जा है -

$E = KE + PE$

$$E = \frac{1}{2}\frac{m_1^2u^2}{m_1+m_2} + \frac{m_1^2g^2}{2K} \Rightarrow = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1^2u^2}{m_1+m_2} + \frac{m_1^2g^2}{K}\right]$$ **Ans.**



Problem 8. एक चिकने नततल पर एक ब्लॉक रखा जाता है यह गति करने के लिए स्वतंत्र है। ब्लॉक में एक सरल लोलक जुड़ा है। इसका आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।



Solution : माना F_p = छद्म बल

साम्यावस्था के लिए

$T\sin\alpha + F_P = mg\sin\theta$

$T\sin\alpha + ma = mg\sin\theta$

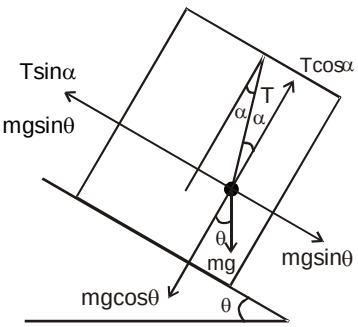
चूंकि $a = g\sin\theta$

$T\sin\alpha + mg\sin\theta = mg\sin\theta$

$T\sin\alpha = 0$

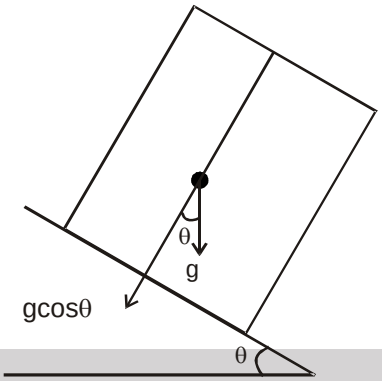
$\therefore \alpha = 0$

अतः साम्यावस्था में डोरी नत तल के लम्बवत् होगी।



अतः प्रभावी 'g' होगा -

$g_{eff} = g\cos\theta$



आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\cos\theta}}$ **Ans.**

Problem 9. $x_1 = 5\sin\omega t$

$x_2 = 5\sin(\omega t + 53^o)$

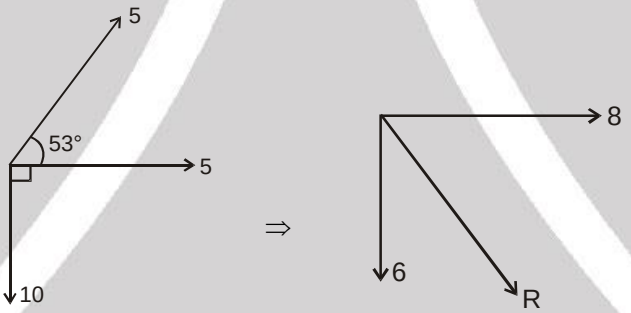
$x_3 = -10\cos\omega t$ परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम ज्ञात करो।

Solution : $x_1 = 5\sin\omega t$

$x_2 = 5\sin(\omega t + 53^o)$

$x_3 = -10\cos\omega t \Rightarrow x_3 = 10\sin(\omega t + 270°)$ लिख सकते हैं

सदिश निरूपण से परिणामी आयाम ज्ञात करने पर



परिणामी आयाम $|R| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ **Ans.**