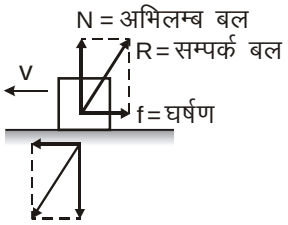
घर्षण (FRICTION)

1. घर्षण :

जब दो वस्तुएँ एक दूसरे के सम्पर्क में होती है, तो वस्तुओं की सतह पर स्थित आवेशित कणों (अणुओं) के मध्य विद्युत चुम्बकीय बल आरोपित होते है। अतः प्रत्येक वस्तु दूसरी वस्तु पर सम्पर्क बल लगाती है। दोनों वस्तुओं पर कार्यरत सम्पर्क बलों का परिमाण तो समान रहता है परन्तु इनकी दिशा विपरीत होती है। इसलिए सम्पर्क बल न्यूटन के तृतीय नियम का पालन करते है।



किसी वस्तु पर कार्यरत सम्पर्क बल की दिशा का सम्पर्क सतह के लम्बवत होना आवश्यक नहीं है। हम सम्पर्क बलों को दो घटकों में वियोजित कर सकते है, एक घटक सतह के लम्बवत और दूसरा घटक सतह के अनुदिश (चित्र)। लम्बवत घटक को अभिलम्ब सम्पर्क बल या अभिलम्ब बल (साधारणतया N से लिखते है) और अनुदिश घटक को घर्षण बल (साधारणतया f से लिखते है) कहते है।

यहाँ पर यदि R सम्पर्क बल हो तो $R = \sqrt{f^2 + N^2}$

2. घर्षण के कारण

1. एक वस्तु की वृहद सतह तथा दूसरी वस्तु की वृहद सतह के मध्य तालाबंदी के कारण।
2. सम्पर्कीत दो सतहों या वस्तुओं के अणुओं के मध्य बन्ध के कारण।

3. घर्षण बल दो प्रकार का होता है

a. गतिक b. स्थैतिक

(a) गतिक घर्षण बल

दो सम्पर्कीत सतहों के बीच गतिक घर्षण बल तब उत्पन्न होता है जब केवल दोनों सतहों के मध्य सापेक्ष गति हो। जब सतहों के मध्य सापेक्ष गति खत्म (बंद) हो जाती है तब यह (गतिक घर्षण बल) कार्य करना बन्द कर देता है।

वस्तु पर गतिक घर्षण बल की दिशा

इसकी दिशा, सम्पर्क में गतिशील एक वस्तु के दूसरी वस्तु के सापेक्ष वेग की दिशा के विपरीत होती है यह तथ्य ध्यान देने योग्य है कि इसकी दिशा कार्यरत बल की दिशा के विपरीत नहीं होती। यह केवल वस्तु की सापेक्ष गति के दिशा के विपरीत होती है जो कि दूसरी सतह के सम्पर्क में रहती है।

गतिक घर्षण बल का परिमाण

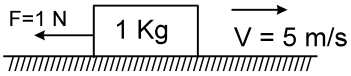
गतिक घर्षण बल का परिमाण, दो वस्तुओं के मध्य कार्यरत अभिलम्ब बल के समानुपाती होता है। अतः हम लिख सकते है।

$$f_k = \mu_k N$$

यहां N अभिलम्ब बल है। समानुपाती नियतांक μ_k गतिक घर्षण गुणांक कहलाता है तथा इसका मान सम्पर्कित सतहों की प्रकृति पर निर्भर करता है।

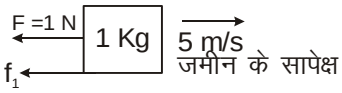
Solved Example

Example 1. गतिक घर्षण बल की दिशा ज्ञात करो –

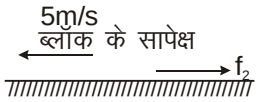


(a) जमीन द्वारा ब्लॉक पर आरोपित (b) ब्लॉक द्वारा जमीन पर आरोपित

Solution : (a)



(b)



यहां f_1 और f_2 क्रमशः ब्लॉक व जमीन पर घर्षण बल है।

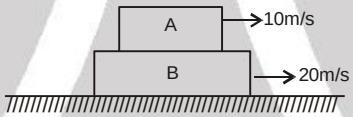
Example 2. उपरोक्त उदाहरण में f_1 व f_2 के परिमाणों बीच में सही सम्बन्ध है–

(A) $f_1 > f_2$ (B) $f_2 > f_1$

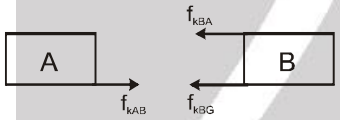
(C) $f_1 = f_2$ (D) अपर्याप्त सूचना के कारण सम्बन्ध बताना सम्भव नहीं है

Solution : न्यूटन के तृतीय नियम से उपरोक्त घर्षण बल, क्रिया–प्रतिक्रिया युग्म के रूप में बराबर परन्तु एक दूसरे के विपरीत दिशा में होते है। अतः उत्तर (C) है। यह ध्यान देने योग्य है कि गतिक घर्षण बल की दिशा आरोपित बल की दिशा से नहीं दी जा सकती है।

Example 3. चित्रानुसार सभी सतह खुरदरी है। A और B पर लगने वाले घर्षण बल को दर्शायें?

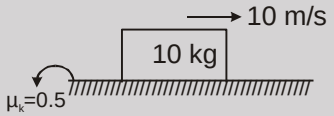


Solution :



गतिज घर्षण इस तरह से लगता है कि वह सापेक्ष गति को कम कर सके।

Example 4. चित्रानुसार ब्लॉक द्वारा रूकने से पहले, तय की गयी दूरी ज्ञात करो?



Solution :

$N - 10\,g = 0 \Rightarrow N = 100$ N

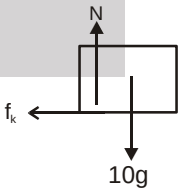
$f_x = \mu_k N \Rightarrow \mu = \mu_s = \mu_k$ जब दिया नही हो

$f_x = 0.5 \times 100 = 50$ N

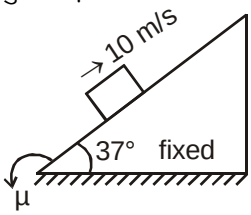
$F_x = ma \Rightarrow 50 = 10\,a \Rightarrow a = 5$

$\therefore v^2 = u^2 + 2as \Rightarrow 0^2 = 10^2 + 2(-5)(5)$

$\therefore S = 10$ m



Example 5. ब्लॉक द्वारा नततल पर रूकने से पहले तय की गयी दूरी ज्ञात करो? ब्लॉक का प्राम्भिक वेग 10 m/s है और ब्लॉक और नततल के मध्य घर्षण गुणांक $\mu = 0.5$ है।



Solution : $N = mg\cos37°$

$\therefore mg\sin 37° + \mu N = ma$

$a = 10\ m/s^2$ नततल पर नीचे की ओर

अब $v^2 = u^2 + 2as$

$0 = 10^2 + 2(-10)\ S$

$\therefore S = 5\ m$

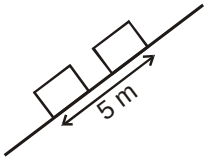
Example 6. उपरोक्त उदाहरण में ब्लॉक द्वारा प्रारम्भिक स्थिति तक पहँचने में लगा समय ज्ञात करो।

Solution : $a = g\sin 37° - \mu g\cos 37°$

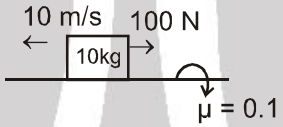
$\therefore a = 2\ m/s^2$ नततल के नीचे की ओर

$\therefore S = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}\times 2 \times t^2$

$\therefore \quad t = \frac{1}{2}\ sec.$



Example 7. किसी ब्लॉक को 10 m/s वेग दिया जाता है तथा घर्षण बल के अलावा इस पर 100 N का बल हमेशा लगता है। ब्लॉक का मंदन ज्ञात करो ?



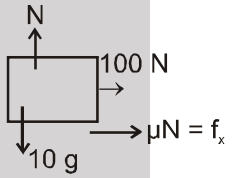
Solution : क्योकि यहाँ सापेक्ष गति है।

$\therefore$ गतिक घर्षण, इस सापेक्ष गति को कम करता है।

$f_k = \mu N = 0.1 \times 10 \times 10 = 10\ N$

$100 + 10 = 10a$

$a = \frac{110}{10} = 11\ m/s^2$



Example 8. एक वस्तु एक खुरदरे नततल के अनुदिश ऊपर की ओर तली से कुछ वेग द्वारा प्रक्षेपित की जाती है। यह नततल पर ऊपर तक जाती है तथा पुनः वापस लौटती है। यदि चढ़ने का समय t_a तथा उतरने का समय t_d हो तो –

(A) $t_a = t_d$ (B) $t_a > t_d$ (C) $t_a < t_d$ (D) आंकड़े अपर्याप्त

Solution : माना प्रक्षेपण वेग V है तथा वस्तु का वेग जब ये वापस लौटती है = V' है

तो $V > V'$ (क्योकि कुछ गतिज ऊर्जा घर्षण में क्षय हो जाती है)

अतः ऊपर जाने के दौरान औसत वेग > नीचे आने के दौरान औसत वेग

$\Rightarrow \quad t_a < t_d$

Example 9. α कोण से झुके नततल का ऊपरी हिस्सा चिकना तथा निचला हिस्सा खुरदरा है एक कण स्थिरावस्था से ऊपरी सिरे से फिसलकर निचले सिरे तक आने पर पुनः विरामावस्था मे आ जाता है। यदि चिकने और खुरदरे तल की लम्बाईयों में m : n का अनुपात हो तो घर्षण गुणांक का मान होगा –

(A) $\left[\frac{m+n}{n}\right]\tan\alpha$ (B) $\left(\frac{m+n}{n}\right)\cot\alpha$ (C) $\left(\frac{m-n}{n}\right)\cot\alpha$ (D) $\frac{1}{2}$

Solution : चिकनी सतह पर $a_1 = g\sin\alpha$

$\therefore v^2 = u^2 + 2a_1s_1 = 0 + 2\ g\sin\alpha\ .m$

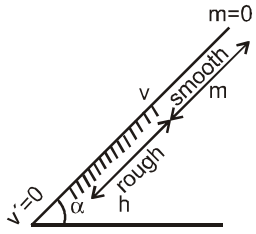
खुरदरी सतह पर

$a_2 = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$

$\therefore v'^2 = v^2 + 2a_2s_2$

$O = 2mg\sin\alpha + 2g\ (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)n$

$\Rightarrow \quad \mu = \left[\frac{m+n}{n}\right]\tan\alpha$



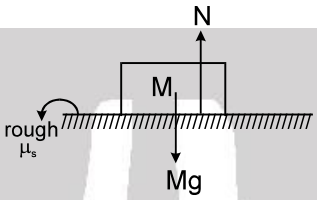
(b) स्थैतिक घर्षण :

यह दो सतहों के मध्य तब कार्यरत होता है जब दो सतहों के मध्य आपेक्षिक गति की प्रवृति हो परन्तु दोनों सम्पर्कित सतहों के अनुदिश कोई भी सापेक्ष गति उपस्थित नहीं हो।

उदाहरण के लिए कमरे में रखी चारपाई की कल्पना करते है। जब हम चारपाई को उंगलियों से धकेलते है तो चारपाई गति नहीं करती है। इस स्थिति में चारपाई लगाये गये बल की दिशा में गति करने की चेष्ठा रखती है परन्तु गति नहीं कर पाती क्योंकि यहां पर एक स्थैतिक घर्षण बल, आरोपित बल की दिशा के विपरीत कार्य करता है।

Solved Example

Example 10. ब्लॉक पर कार्यरत स्थैतिक घर्षण बल का मान क्या है।



Solution : क्षैतिज दिशा में त्वरण शून्य है। इसलिए $\Sigma F = 0$. $\therefore\ f = 0$

स्थैतिक घर्षण बल की दिशा :

वस्तु पर कार्यरत स्थैतिक घर्षण बल की दिशा, वस्तु की सतह के सापेक्ष गति करने की चेष्ठा के विपरीत दिशा में होती है। किसी वस्तु पर स्थैतिक घर्षण बल की दिशा ज्ञात करने के लिए निम्न पदों का प्रयोग करते है।

(i) दूसरी वस्तु जिस पर वस्तु रखी है, के सापेक्ष वस्तु का मुक्त वस्तु चित्र (FBD) बनाते है।

(ii) यदि सम्पर्कित सतह त्वरित है तो छदम बल को भी प्रयुक्त करते है।

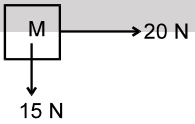
(iii) परिणामी बल को ज्ञात करते है तथा इस परिणामी बल का सतह के अनुदिश घटक ज्ञात करते है।

(iv) स्थैतिक घर्षण बल की दिशा इस परिणामी बल के घटक के विपरीत दिशा में होगी।

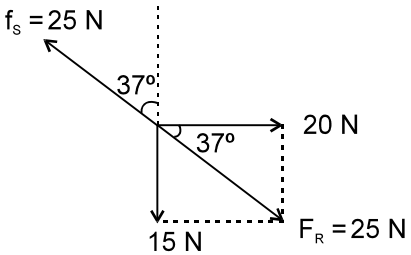
नोट : स्थैतिक घर्षण बल तभी उत्पन्न होता है जब दो सतहों के मध्य कोई भी सापेक्ष गति उपस्थित नहीं हो।

Solved Example

Example 11. प्रदर्शित चित्र में, M द्रव्यमान की वस्तु खुरदरी मेज पर रखी है तथा इसको ऊपर से देखा जाता है। इस पर चित्रानुसार बल आरोपित करते है। यदि वस्तु गति नहीं करे तो इस पर कार्यरत स्थैतिक घर्षण बल की दिशा ज्ञात करो।



Solution : सबसे पहले हम वस्तु का मुक्त वस्तु चित्र (FBD) बनाते है।



चूंकि वस्तु गति नहीं करती है अतः यह गतिक घर्षण की स्थिति नहीं है। स्थैतिक घर्षण बल की दिशा परिणामी बल F_R की दिशा के विपरीत होगी। जैसा कि चित्र में f_s द्वारा प्रदर्शित है। इसका परिमाण 25 N के बराबर है।

4. गतिक व स्थैतिक घर्षण बल का परिमाण

गतिक घर्षण

गतिक घर्षण बल का परिमाण, दो वस्तुओं के मध्य कार्यरत अभिलम्ब बल के समानुपाती होता है। अतः हम लिख सकते है।

$$f_k = \mu_k N$$

यहां N अभिलम्ब बल है। समानुपाती नियतांक μ_k गतिक घर्षण गुणांक कहलाता है तथा इसका मान सम्पर्कित सतहों की प्रकृति पर निर्भर करता है।

यदि सतह चिकनी होगी तो μ_k अल्प होगा और यदि सतह खुरदरी होगी तो μ_k अधिक होगा। यह दोनों सम्पर्कित वस्तुओं के पदार्थ पर भी निर्भर करता है।

स्थैतिक घर्षण :

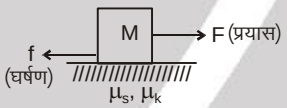
स्थैतिक घर्षण का परिमाण आरोपित बाह्य बल के बराबर व विपरीत होता है, जब तक कि आरोपित बल के कारण वस्तु स्थिर अवस्था में रहे। अर्थात यह परिवर्तित व स्वः समायोजित बल है जबकि इसका एक अधिकतम मान होता है। इस अधिकतम मान को सीमान्त घर्षण कहते है।

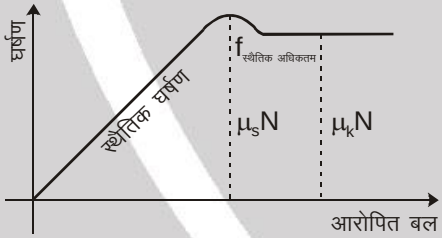
$$f_{max} = \mu_s N$$

वास्तविक स्थैतिक घर्षण बल $\mu_s N$ से कम हो सकता है तथा इसका मान, वस्तु पर कार्यरत दूसरे बलों पर भी निर्भर करता है। घर्षण बल का मान वस्तु को सापेक्ष रूप से स्थिर रखने के लिए आवश्यक अतिरिक्त बल के बराबर होता है।

$$0 \le f_s \le f_{smax}$$

यहां μ_s और μ_k समानुपाती नियतांक है। μ_s स्थैतिक घर्षण गुणांक कहलाता है तथा μ_k गतिक घर्षण गुणांक कहलाता है। ये विमाहीन राशियाँ है तथा आकार और सम्पर्कित क्षेत्रफल पर अनिर्भर है। यह दो सम्पर्कित सतहों का गुणधर्म है। दिये गये सतहों के युग्मों के लिए $\mu_s > \mu_k$ होता है। यदि दिया नहीं जाये तो $\mu_k = \mu_s$ ले सकते है। μ का मान 0 से ∞ तक कुछ भी हो सकता है।



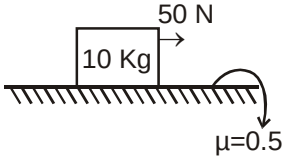


निम्न सारणी कुछ धातु जोड़ो के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक की हल्की सी जानकारी प्रदान करती है। वास्तविक मान चिकनेपन की कोटि तथा वातावरणीय कारकों पर निर्भर करता है। जैसे, लकड़ी के चिकनेपन की कोटि बढ़ाने पर घर्षण गुणांक का मान परिवर्तित होगा।

धातु	μ_s	धातु	μ_s
स्टील और स्टील	0.58	ताँबा और ताँबा	1.60
स्टील और काँसा	0.35	टेफ्लॉन और टेफ्लॉन	0.04
काँच और काँच	1.00	रबर का पहिया और सीमेन्ट की सूखी सड़क	1.0
लकड़ी और लकड़ी	0.35		
लकड़ी और धातु	0.40	रबर का पहिया और सीमेन्ट की गीली सड़क	0.7

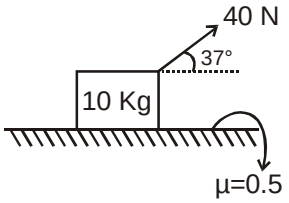
Solved Example

Example 12. ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो, जबकि ब्लॉक प्रारम्भ में विरामावस्था में है?



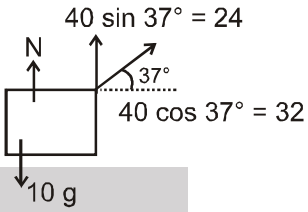
Solution : शून्य

Example 13. ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो, जबकि ब्लॉक प्रारम्भ में विरामावस्था में है?



Solution : N + 24 – 100 = 0   लम्बवत् दिशा में

$\therefore$ N = 76 N



अब $0 \le f_s \le \mu_s N$

$0 \le f_s \le 76 \times 0.5$

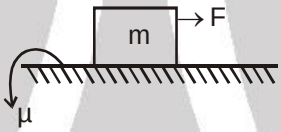
$0 \le f \le 38$ N

$\therefore$ 32 < 38

अतः f = 32

$\therefore$ ब्लॉक का त्वरण शून्य है।

Example 14. F के भिन्न–भिन्न परासों (Ranges) के लिये ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो?



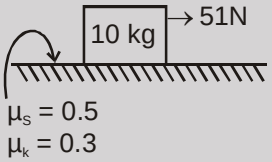
Solution : $0 \le f \le \mu_S N$

$0 \le f \le \mu_S mg$

a = 0 यदि $F \le \mu_S mg$

$a = \dfrac{F - \mu Mg}{M}$ यदि $F > \mu Mg$

Example 15. ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो, जबकि प्रारम्भ में ब्लॉक विरामावस्था में है।

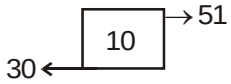


Solution : $0 \le f_s \le \mu_S N \Rightarrow 0 \le f_s \le 50$

अब 51 > 50

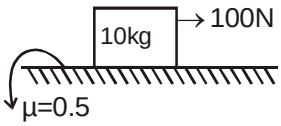
$\therefore$ ब्लॉक गति कर सकता है लेकिन यदि ब्लॉक गति करना शुरू करता है तब गतिक घर्षण लगेगा।

$K_F = \mu_k N = 0.3 \times 100 = 30$ N



$\therefore$ 51 – 30 = 10 a $\Rightarrow$ $\therefore$ a = 2.1 m/s^2

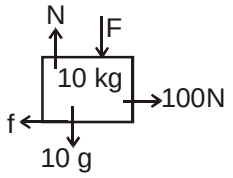
Example 16. ब्लॉक गति नही करे, इसके लिए ब्लॉक पर लम्बवत् नीचे की ओर कितना न्यूनतम बल लगाना पड़ेगा?



Solution : $100 - f_s = 0$

$\therefore \quad f_s = 100 \qquad .....(1)$

$F + 10\,g = N \quad \Rightarrow \quad N = 100 + F \qquad .....(2)$



अब $0 \le f_S \le \mu N \Rightarrow 0 \le f_s \le \mu N$

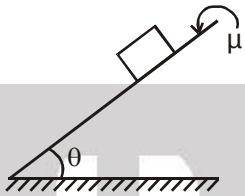
$100 \le 0.5\ [100 + F]$

$200 \le 100 + F$

$F \ge 100$ N

$\therefore$ न्यूनतम F = 100 N

Example 17. नत कोण का मान धीरे–धीरे बढ़ रहा है वह कोण जिस पर ब्लॉक गति करना शुरू कर दे, ज्ञात करो?



Solution : $0 \le f \le \mu_S N$

$mg \sin\theta > f_{smax}$

$mg \sin\theta > \mu N$

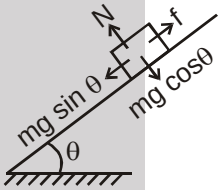
$mg \sin\theta > \mu\, mg \cos\theta$

$\therefore \quad \tan\theta > \mu$

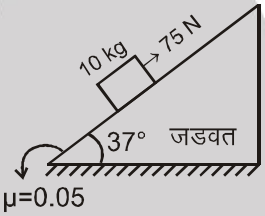
$\theta = \tan^{-1}\mu$

$\tan\theta \le \mu$ के लिये नततल पर नही फिसलेगा।

यह विधि विशेष रूप से μ निकालने में काम आती है।



Example 18. ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो ? यदि ब्लॉक प्रारम्भ में विरामावस्था में हैं



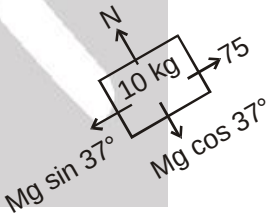
Solution : (ब्लॉक घर्षण बल को छोड़कर FBD (मुक्त वस्तु चित्र)

$N = 10\,g \cos 37° = 80$ N

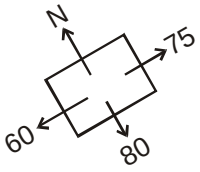
अब $0 \le f_s \le \mu N$

$0 \le f_s \le 0.5 \times 80$

$\therefore \quad f_s \le 40$ N



हम f का मान अन्त में रखते है मतलब यह अन्य बलों के परिणाम के विपरीत दिशा में है। f, नततल पर नीचे की ओर लगता है और इसका मान = (75 – 60) = 15 N होगा अतः त्वरण शून्य होगा।



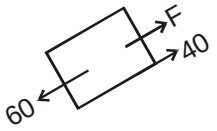
Example 19. उपरोक्त प्रश्न में 75 N के साथ कितना अतिरिक्त बल लगाया जाये जिससे ब्लॉक, नततल पर ऊपर गतिमान हो जाये ?

Solution : $\therefore \quad 60 + 40 = 75 + f_{extra}$

$\therefore \quad f_s = 25$ N

Example 20. उपरोक्त प्रश्न में, 75 N बल के स्थान पर कितना न्यूनतम बल आरोपित करे जिससे यह ब्लॉक गति नही करे।

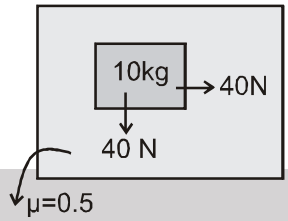
Solution : इस स्थिति में ब्लॉक, नीचे की ओर गति करेगा। अतः घर्षण ऊपर की ओर लगेगा।



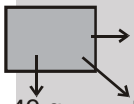
$\therefore$ F + 40 = 60

$\therefore$ F = 20 N

Example 21. चित्रानुसार किसी मेज पर रखे किसी ब्लॉक का ऊपरी दृश्य, दिखाया गया है। ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो? ($g = 10\ m/s^2$) .



Solution :



$F_R = 40\sqrt{2} \cong 56N$

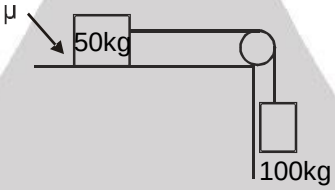
अब, $f_s \le \mu N$ $\quad\therefore\quad f_s \le 50$

$F_R > f_{smax}$

अतः ब्लॉक, गति करेगा।

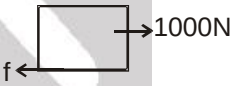
$$a = \frac{40\sqrt{2} - 50}{10} = \left(4\sqrt{2} - 5\right) m/s^2$$

Example 22. μ का न्यूनतम मान ज्ञात करो जिससे ब्लॉक स्थिर रहे ?



Solution : T = 100 g = 1000 N

$\therefore$ f = 1000 N ब्लॉक को स्थिर रखने के लिए



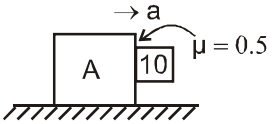
अब f_{max} = 1000N

μN = 1000 ; μ = 2

क्या μ का मान, 1 से ज्यादा हो सकता है?

हाँ $0 < \mu \le \infty$

Example 23. ब्लॉक A का न्यूनतम त्वरण ज्ञात करो जिससे 10 kg का ब्लॉक गिरे नही?



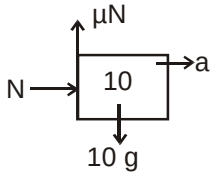
Solution : न्यूटन नियम, क्षैतिज दिशा में लगाने पर

N = 10 a .....(1)

न्यूटन का नियम, लम्बवत दिशा में लगाने पर

10 g = μ N .....(2)

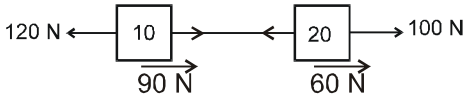
10 g = μ 10 a from (1) & (2)



$\therefore\ a = \frac{g}{\mu} = 20\ m/s^2$

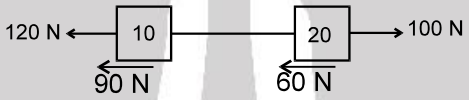
Example 24. प्रदर्शित व्यवस्था में रस्सी में तनाव ज्ञात करो, 120 N और 100 N के बल निकाय पर कार्यरत होते है। जब निकाय स्थिरावस्था में है तथा 10 kg तथा 20 kg पर अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल क्रमशः f_s = 90 N तथा f_s = 60 N है।

Solution : (i) माना निकाय बायें तरफ गति करता है जो कि मुक्त वस्तु चित्र **(FBD)** में प्रदर्शित है। क्षैतिज दिशा में कुल बल दायें तरफ कार्य करेगा अतः ये कल्पना सही नहीं है।

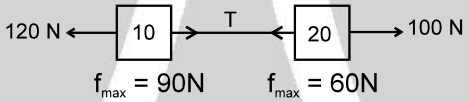


उपरोक्त कल्पना इसलिए सम्भव नहीं है क्योंकि कुल बल दायें तरफ कार्यरत है। अतः निकाय बाये तरफ गति नहीं करेगा।

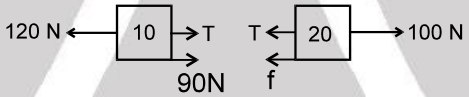
(ii) इसी प्रकार यह मानते है कि निकाय दायें तरफ गति करता।



यह कल्पना में भी सम्भव नहीं है क्योंकि निकाय पर कुल बल बायें तरफ आरोपित होता है अतः यह कल्पना भी सही नहीं है। इसी प्रकार यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि निकाय स्थिर है।



माना 10 किग्रा० का ब्लॉक सीमांत घर्षण की स्थिति में है तो मुक्त वस्तु चित्र (FBD) के प्रयोग से



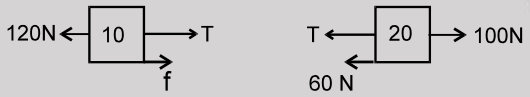
120 = T + 90 $\Rightarrow$ T = 30 N

तथा T + f = 100

$\therefore$ 30 + f = 100

f = 70 N, जो कि संभव नहीं है क्योंकि 20 kg ब्लॉक की सतह के लिए सीमांत घर्षण का मान 60N

$\therefore$ हमारी यह कल्पना भी गलत है तथा अब 20 किग्रा ब्लॉक को सीमांत स्थिति में मानते है।



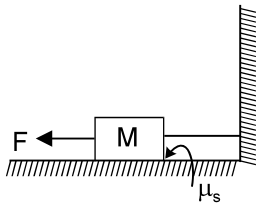
T + 60 = 100 N $\Rightarrow$ T = 40 N

यहां f + T = 120 N $\Rightarrow$ f = 80 N

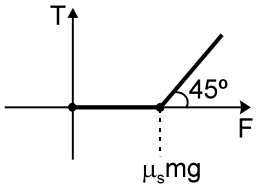
यह संभव है क्योंकि स्थैतिक घर्षण बल इस सतह के लिए 90 N से कम प्राप्त होता है।

अतः रस्सी में तनाव T = 40 N है।

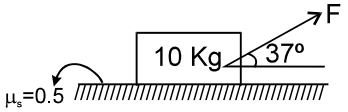
Example 25. प्रदर्शित चित्र में बल F को शून्य से धीरे–धीरे बढ़ाया जाता है बल F एवं रस्सी में तनाव T के मध्य ग्राफ खींचो। ब्लॉक और जमीन के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक μ_s है। {प्रारम्भ में रस्सी क्षैतिज है तथा इसका तनाव शून्य है।}



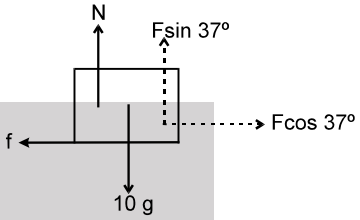
Solution : चूंकि बाह्य बल F शून्य से धीरे–धीरे लगातार बढ़ता है जो कि घर्षण बल द्वारा समायोजित होता जाता है और रस्सी में तनाव उत्पन्न नहीं होता है। जब बढ़ते हुए बल का मान सीमांत घर्षण μ_s mg के बराबर होता है तो इसके बाद F को बढ़ाने पर रस्सी में तनाव उत्पन्न होता है।



Example 26. बल F शून्य से लगातार बढ़ाया जाता है तो ज्ञात करो कि ब्लॉक पहले फिसलेगा या ऊपर उठेगा ?



Solution : ऊर्ध्वाधर व क्षेतिज दिशा में आवश्यक बल का न्यूनतम परिमाण या तो ब्लॉक को धकेलता है या ऊपर उठाता है। पहले फिसलेगा या ऊपर उठेगा यह इस पर निर्भर करता है कि बल का कौनसा न्यूनतम परिमाण कम है।



ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर उठने के लिए

$F \sin 37^o + N - Mg \geq 0.$

ऊपर उठने की स्थिति में N शून्य होगा।

$F_{lift} \geq \frac{10g}{3/5} \quad \therefore \quad F_{lift} \geq \frac{500}{3}$ N

क्षैतिज दिशा में फिसलने के लिए $\quad F \cos 37 \geq \mu_s N$

$F \cos 37^o > 0.5\,[10g - F \sin 37^o] \quad (\because \; N = 10\,g - F \sin 37^o)$

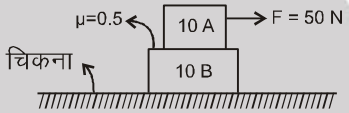
अतः $F_{slide} > \frac{50}{\cos 37^o + 0.5 \sin 37^o} = F_{slide} > \frac{500}{11}$ N

$F_{lift} > \frac{500}{3}$ N $\Rightarrow F_{slide} < F_{lift}$ अतः ब्लॉक उठने से पहले फिसलेगा।

दो ब्लॉक पर आधारित प्रश्न

Example 27. दोनों ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो। प्रारम्भ में निकाय स्थिर है तथा घर्षण गुणांक चित्र में दर्शाये अनुसार है।

Solution : **हल करने की विधि**



Step 1 : बल चित्र बनाईये।

Step 2 : स्थैतिक घर्षण बल को f से दर्शाइये क्योकि घर्षण बल अज्ञात है।

Step 3 : दोनों स्थितियों के लिए अलग–अलग हल करें।

Case 1 : यदि साथ चलें–

Step 4 : त्वरण ज्ञात करो।

Step 5 : उपरोक्त स्थिति के लिए घर्षण बल जांचिये।

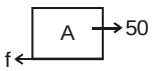
Step 6 : यदि आवश्यक घर्षण बल का मान उपलब्ध घर्षण से कम है तो दोनों ब्लॉक साथ चलेगें और उपलब्ध घर्षण जरूरत से कम हो तो वे अलग–अलग चलेगे।

Step 7(a) उपरोक्त त्वरण दोनों के लिए समान (उभयनिष्ठ) होगा।

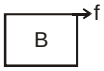
Case 2 : जब अलग–अलग गति करे–

Step 7(b) यदि दोनों ब्लॉक अलग–अलग गति करेगें तो गतिक घर्षण लगेगा जिसका मान μN होगा।

Step 8 :उपरोक्त स्थिति के लिए त्वरण ज्ञात करो।



$f_{max} = \mu N \qquad \therefore f \leq 50$ N (उपलब्ध घर्षण)



साथ साथ गति करें। $\qquad$ अलग–अलग गति करें।

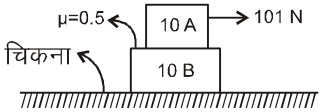
(i) $a = \frac{50}{10+10} = 2.5\ m/s^2$ हल करने की आवश्यकता नहीं।

(ii) B के लिए घर्षण जांच लें : $f = 10 \times 2.5 = 25$

25 N बल की आवश्यकता है जो कि उपलब्ध बल से कम है।

इसलिए वे साथ–साथ गति करेंगे। और $a_A = a_B = 2.5\ m/s^2$

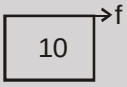
Example 28. दोनों ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो। प्रारम्भ में निकाय स्थिर है तथा घर्षण गुणांक चित्र में दर्शाये अनुसार है।



Solution : $f_{max} = 50$ N

$\therefore f \le 50$ N

(i) यदि वे साथ–साथ चलें $a = \frac{101}{20} = 5.05\ m/s^2$



(ii) B पर घर्षण जांच लें–

$f = 10 \times 5.05 = 50.5$ (आवश्यक)

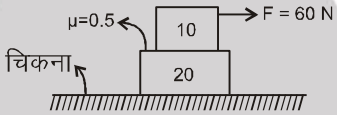
50.5 > 50 (इसलिए आवश्यक बल > उपलब्ध) इसलिए ये साथ नही चलेंगे।

(iii) चूंकि अलग–अलग चलेंगे इसलिए गतिक घर्षण उपस्थित होगा।

$\therefore a_A$ के लिए $= \frac{101-50}{10} = 5.1\ m/s^2 \Rightarrow a_B = \frac{50}{10} = 5\ m/s^2$

और $a_A > a_B$ क्योंकि बल A पर लगाया गया है।

Example 29. दोनों ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो। प्रारम्भ में निकाय स्थिर है तथा घर्षण गुणांक चित्र में दर्शाये अनुसार है।



Solution:

साथ चले	**अलग–अलग चलें**
$a = \frac{60}{30} = 2\ m/s^2$	हल करने की आवश्यकता नहीं

20 kg पर घर्षण जांच ले

$f = 20 \times 2$

$f = 40$ (जो कि चाहिए)

40 < 50 (इसलिए आवश्यक बल < उपलब्ध)

$\therefore$ साथ–साथ चलेंगे।

Example 30. उपरोक्त उदाहरण में अधिकतम बल F ज्ञात करो जिसके लिये, दोनों ब्लॉक साथ–साथ गति करे?

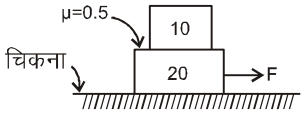
Solution : क्रान्तिक अवस्था जहाँ घर्षण, सीमान्त हो जाता है का प्रेक्षण करने पर–

$\therefore$ $F - f_{max} = 10\ a$ .....(1)

$f_{max} = 20\ a$ .....(2)

$\therefore$ $F = 75$ N

Example 31. प्रारम्भ में निकाय स्थिर है। बल F का न्यूनतम मान ज्ञात करो। जिसके लिए दोनों ब्लॉकों के मध्य फिसलन शुरू हो जाये।



Solution : फिसलन की स्थिति में सीमान्त घर्षण लगेगा।

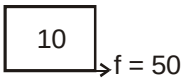
$F - 50 = 20\ a$ .....(1)

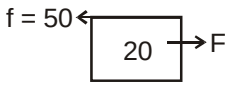
$f = 10\ a$ .....(2)

$50 = 10\ a \quad \therefore \quad a = 5\ m/s^2$

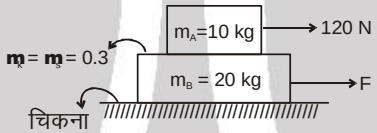
अतः $F = 50 + 20 \times 5 = 150\ N$

$\therefore F_{min} = 150\ N$





Example 32. नीचे प्रदर्शित चित्र में बल F नीचले ब्लॉक पर आरोपित है और यह शून्य से धीरे–धीरे बढ़ता है। F के भिन्न–भिन्न मान के लिए ब्लॉक के त्वरण तथा घर्षण बल की प्रकृति व दिशा के बारे में बताओं। (दिया है $g = 10$ मी/सै^{2})

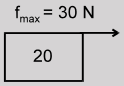


Solution : उपरोक्त स्थिति में हम देखते है कि ब्लॉकों के मध्य घर्षण का अधिकतम संभव मान $\mu_s m_A g = 0.3 \times 10 \times 10 = 30\ N$ है।

पद (i) जब F = शून्य हों

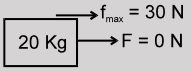
यह मानते है कि ब्लॉकों के मध्य फिसलन नहीं है। अतः निकाय का त्वरण $a = \dfrac{120}{20+10} = 4\ m/s^2$

परन्तु बल चित्र से B के द्वारा प्राप्त किया गया अधिकतम त्वरण ज्ञात कर सकते है।



$a_B = \dfrac{30}{20} = 1.5\ m/s^2$ (∵ केवल ब्लॉक A के द्वारा दिया गया घर्षण बल, B में त्वरण उत्पन्न करने के लिए जिम्मेदार है) क्योंकि $4 > 1.5\ m/s^2$ अतः हम देखते है कि ब्लॉक एक दूसरे के साथ गति नहीं करते है।

अब अलग–अलग त्वरण ज्ञात करने के लिए प्रत्येक ब्लॉक का मुक्त वस्तु चित्र (FBD) बनाने पर,



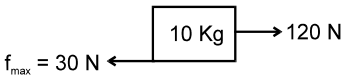
$a_A = \dfrac{120-30}{10} = 9\ m/s^2$ दायें तरफ $\qquad a_B = \dfrac{30}{20} = 1.5\ m/s^2$ दायें तरफ

पद (ii) F शून्य से तब तक बढ़ता है जब दोनों ब्लॉक साथ–साथ गति करना प्रारम्भ कर दें।

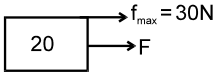
चूंकि ब्लॉक साथ–साथ गति करते है इस स्थिति में घर्षण स्थैतिक होगा तथा इसका मान सीमांत होगा।

इस स्थिति में मुक्त वस्तु चित्र से

$a_A = \dfrac{120-30}{10} = 9\ m/s^2$



$a_B = \dfrac{F+30}{20} = a_A \quad \Rightarrow \quad \dfrac{F+30}{20} = 9 \quad \therefore \quad F = 150\ N$



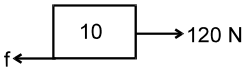
अतः जब $0 < F < 150\ N$ हो तो ब्लॉक साथ–साथ गति नहीं करेंगे और घर्षण गतिक होगा। जैसे–जैसे F बढ़ेगा। B ब्लॉक का त्वरण भी 1.5 मी/से^{2} से बढ़ता जायेगा।

F = 150 N पर सीमांत स्थैतिक घर्षण कार्यरत होगा और दोनों ब्लॉक साथ–साथ गति करने लग जायेंगे।

पद (iii) जब F, 150 N से बढ़ता है।

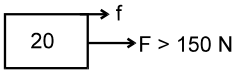
इस स्थिति में स्थैतिक घर्षण बल इस प्रकार समायोजित होता है कि दोनों ब्लॉक साथ–साथ गति करें। स्थैतिक घर्षण का मान घटना प्रारम्भ हो जाता है परन्तु दिशा अपरिवर्तित रहती है और यह तब तक होता रहता है जब तक कि घर्षण शून्य नहीं हो जाये। इस स्थिति में मुक्त वस्तु चित्र (FBD) बनाने पर।

$a_A = a_B = \frac{120 - f}{10} = \frac{F + f}{20}$



∴ जब घर्षण बल f घटकर शून्य हो जाता है तब उपरोक्त

त्वरण $a_A = \frac{120}{10} = 12\ m/s^2$

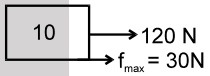


$a_B = \frac{F}{20} = a_A = 12\ m/s^2$ ∴ F = 240 N

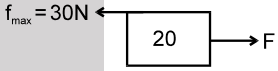
अतः जब $150 \le F \le 240$ N है तो F = 240 N पर स्थैतिक घर्षण बल लगातार अधिकतम मान से शून्य तक घटता है। F में परिवर्तन के साथ ब्लॉको के त्वरण 9 मी/से.^{2} से 12 मी/से.^{2} तक बढ़ता है।

पद (iv) जब F दुबारा 240 N से बढ़ता है तो ब्लॉक पर कार्यरत घर्षण बल की दिशा विपरीत हो जाती है परन्तु यह कुछ समय के लिए रहती है। घर्षण बल के विपरीत होने पर बल F बढ़कर इसके सीमांत मान को प्राप्त कर सकता है। इस स्थिति में मुक्त वस्तु चित्र (FBD) बनाने पर

ब्लॉक साथ–साथ गति करते है। अतः

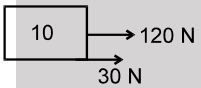


$a_A = \frac{120 + 30}{10} = 15\ m/s^2 \Rightarrow \quad a_B = \frac{F - 30}{20} = a_A = 15\ m/s^2$



∴ $\frac{F - 30}{20} = 15\ m/s^2$ अतः F = 330 N.

पद (v) : जब F, 330 N से ज्यादा बढ़ता है इस स्थिति में सीमांत घर्षण स्थिति प्राप्त होती है और ब्लॉकों के मध्य फिसलन होने लग जाती है। (गतिक घर्षण के कार्यरत होने से)



∴ $a_A = 15\ m/s^2$ जो कि नियत है

$a_B = \frac{F - 30}{20}$ मी/से.^{2} यहां F > 330 N.