रस्सी पर तरंगें (WAVE ON A STRING)

तरंगें

तरंग गति हमारे चारों ओर होने वाली तथा भौतिकी के हर शाखा में प्रक्षेपित होने वाली घटना है। द्रव्य की सतह पर तरंग गति सामान्यतः प्रेक्षित होती है। ध्वनि तथा प्रकाश तरंगे वातावरण के आभास के लिए अत्यन्त आवश्यक है। सभी तरंगों की समान गणितीय व्याख्या होती है, जो दो अलग–अलग प्रकार की तरंगों के अध्ययन में सहायक है। इस अध्याय में हम मुख्य रूप से डोरी (रस्सी) मे तरंग का अध्ययन करेंगे जो एक प्रकार की यांत्रिक तरंग है। ध्वनि तरंग तथा जल तरंग भी यांत्रिक तरंगों के दूसरे उदाहरण है। प्रकाश तरंगे यांत्रिक तरंग नहीं होती है।

ये विद्युत चुम्बकीय तरंग होती है जिनके संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती है। यांत्रिक तरंगे माध्यम में विक्षेप से उत्पन्न होती है (जैसे तालाब में पत्थर डालना) और विक्षोभ माध्यम से संचरित होता है। माध्यम के कणों के मध्य बल के कारण यांत्रिक तरंगों का संचरण होता है। प्रत्येक परमाणु अपने पास वाले परमाणु पर बल लगाते है और इस बल के द्वारा गति दूसरे परमाणु तक संचरित होती है। इसमें माध्यम के कण का किसी भी प्रकार का परिणामी विस्थापन नहीं होता है। जब तरंग गति करती है तो माध्यम कण इर्द–गिर्द गति करते है। सरलता के लिए, हम पुनः सरल आवर्त गति पर ध्यान केन्द्रित करेंगे जो कि ज्यावक्रीय व कोज्या वक्रीय फलनों से प्रदर्शित की जाती है।

यांत्रिक तरंगों के प्रकार

माध्यम के भौतिक गुणों के आधार पर यांत्रिक तरंगों को विभाजित किया जाता है। इसके लिए दूसरे तरीके भी सम्भव है।

1. **कणों की गति की दिशा :** तरंगों को माध्यम के कणों की गति की दिशा के आधार पर विभाजित किया जाता है। यदि विक्षोभ x दिशा में संचरित होता है, परन्तु माध्यम कण x अक्ष के लम्बवत् गति करते है तो तरंग अनुप्रस्थ तरंग कहलाती है और यदि माध्यम के कण तरंग संचरण के दिशा में गति करते हैं तो तरंग अनुदैर्ध्य कहलाती है। कम्पित गिटार की डोरी में अनुप्रस्थ तरंग होती है। जबकि ध्वनि तरंगे अनुदैर्ध्य होती है।

2. **दिशाओं की संख्या :** तरंग, एक दो और तीन दिशाओं में संचरित होती है। एक कसी हुई रस्सी में तरंग एक विमीय होती है। पानी में पत्थर गिराने पर उत्पन्न तरंगे द्विविमिय होती है। बंदूक चलाने पर उत्पन्न ध्वनि तरंगे त्रिविमिय होती है।

3. **आवर्तता :** एक पत्थर तालाब में डालने पर जल तरंग उत्पन्न होती है, जो दो विमाओं में बाहर की तरफ संचरित होती है। यहाँ एक से अधिक उर्मिकाऐं भी उत्पन्न हो सकती है। अन्य समान समय अन्तराल में यदि पत्थर उसी स्थान पर गिरायें जहाँ से पहला पत्थर गिराया गया है तो आवर्तित तरंगें उत्पन्न होती हैं।

4. **तरंग्राग की आकृति :** पत्थर गिराने पर पानी में उत्पन्न तरंगे वृत्ताकार होती है। एक बिन्दु स्रोत से बाहर की तरफ संचरित तरंगो का तरंग्राग गोलीय होता है। एक समतल तरंग त्रिविमिय तरंग होती है। जिनका तरंग्राग समतल होता है।

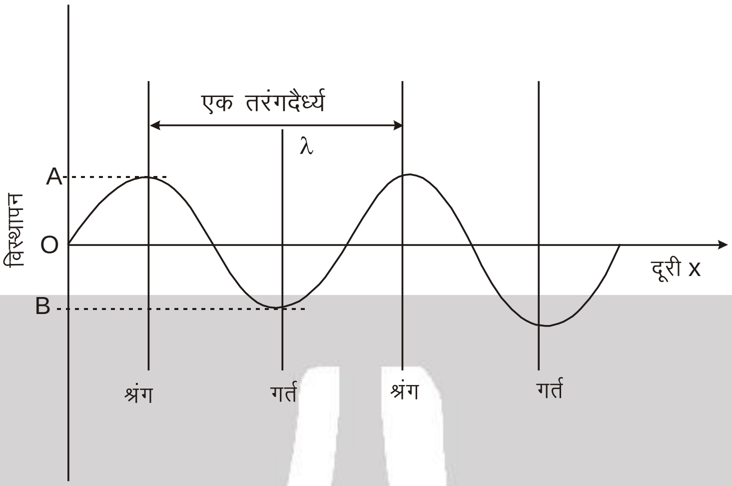
   ठोस में अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्ध्य दोंनो तरंगे संचरित होती है। एक तरल जिसकी संरचना शुद्ध रूप से परिभाषित संरचना नहीं होती है, सम्पीड़न के प्रतिरोध को अनुदैर्ध्य बल (shearing force) से अधिक सहन कर सकता है। जिसके कारण अनुदैर्ध्य तरंगे गैसों या आदर्श द्रव (अश्यान) में आसानी से संचरित हो जाती है। अनुप्रस्थ तरंगे तरल की सतह पर अस्तित्व में रह सकती है। तालाब में उत्पन्न तरंगों में पृष्ठ तनाव प्रत्यानयन बल होता है, और समुद्री तरंगों में यह गुरूत्व बल होता है। यदि विक्षोभ एक ही दिशा में संचरण के लिए बाध्य है और वहां ऊर्जा संरक्षित होती है तो विक्षोभ की दिशा नहीं बदलती है।

तरंग व्याख्या :

विस्थापन–समय व विस्थापन–दूरी दो प्रकार के ग्राफ खींचे जा सकते है।

अनुप्रस्थ तरंगों के लिए विस्थापन दूरी ग्राफ कम्पित कणों का विस्थापन y तथा किसी क्षण कण की स्रोत से दूरी x को प्रदर्शित करता है। यह किसी तरंग की आकृति को प्रदर्शित करता जो फोटोग्राफ जैसा होता है। प्रत्येक कण का माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन आयाम होता है।

चित्र 1 में OA व OB आयाम है। तरंगदैर्ध्य सामान्यतः दो श्रृंग या दो गर्तो के मध्य दूरी है। विशेष रूप से यह दो क्रमागत संगत बिन्दुओं के मध्य की दूरी है जो समान कला में है स्पष्ट रूप से यह तरंग पर समान कला के दो बिन्दुओं के बीच की दूरी है।



तरंग गति के लिए विस्थापन समय–ग्राफ भी प्रदर्शित किया जाता है जो किसी दूरी पर स्थित किसी कण के लिए समय के साथ विस्थापन के परिवर्तन को प्रदर्शित करता है। यदि यह सामान्यतः सरल आवर्त परिवर्तन है तो यह ज्या वक्र ग्राफ होता है।

तरंगदैर्ध्य, आवृत्ति तथा चाल

यदि एक स्रोत f कम्पन प्रति सैकण्ड उत्पन्न करता है तो माध्यम कण भी इसी तरह संचरित होते है। तरंग की आवृत्ति स्रोत की आवृति के तुल्य होती है।

जब स्रोत अपना एक पूर्ण कम्पन करता है, एक तरंग उत्पन्न होती है तथा विक्षोभ स्रोत से λ दूरी में फैल जाता है। यदि स्रोत f आवृत्ति से लगातार कम्पन्न करता है तो प्रति सैकण्ड f तरंगे उत्पन्न होती है तथा तरंग fλ दूरी में एक सैकण्ड में फैल जाती है। यदि v तरंग का वेग है तो $v = f\lambda$

यह संबंध सभी प्रकार की तरंग गतियों में होता है।

संचरित तंरग : माना एक रस्सी x दिशा में खींची जाती है। इसकी मूल अवस्था सीधी व समतल है। माना y कण का माध्य स्थिति से तरंग संचरण के लम्बवत् विस्थापन है। यदि रस्सी को बांये सिरे से झटका दिया जाता है तो विक्षोभ दांयी तरफ संचरित होता है। बांये सिरे का (x = 0) पर उर्ध्व विस्थापन y समय का फलन है। अतः $y(x = 0, t) = f(t)$

यदि वहाँ पर कोई घर्षण हानि नहीं होती है तो विक्षोभ बिना छोटे हुए अपनी वास्तविक स्थिति में आगे संचरित होती है। यदि विक्षोभ v वेग से आगे बढ़ता है तो किसी क्षण इसकी स्थिति x = vt होगी इसलिए x बिन्दु पर स्थित कण का विस्थापन $t - \frac{x}{v}$ पहले बांयी तरफ उत्पन्न हुआ है। [y(x, t), x तथा t दोंनो का फलन है] परन्तु किसी क्षण t पर बांयी ओर विस्थापन f(t) है तथा $(t - \frac{x}{v})$ समय पर ये विस्थापन $f(t - \frac{x}{v})$ है।

इसलिए $y(x, t) = y\,(x = 0, t - \frac{x}{v}) = f\,(t - \frac{x}{v})$

इसे निम्न प्रकार भी लिख सकते है

$\Rightarrow \quad \frac{f}{v}(vt - x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{f}{v}(x - vt) \Rightarrow \; y(x, t) = g(x - vt)$

t को कोई नियत मान लेने पर, (किसी क्षण पर), जो रस्सी की आकृत्ति प्रदर्शित करता है

यदि तरंग – x दिशा में संचरित है तो तरंग का समीकरण $y(x, t) = f(t + \frac{x}{v})$

राशि x – vt तरंग की कला कहलाती है। विक्षोभ की कला स्थिर होती है।

$x - vt =$ नियतांक

समय के साथ अवकलन $\frac{dx}{dt} = v$

जहाँ v कला वेग है यद्धपि इसे तरंग वेग भी कहते हैं। यह वह वेग है जिस पर कोई विक्षोभ की कला किसी क्षेत्र में से गति करती है।

किसी माध्यम में v वेग से संचरित तरंग का समीकरण x, v तथा t, (x + vt) या (x – vt) के रूप में अवश्य होते है। $(x - vt)^2$ स्वीकार्य है, लेकिन $x^2 - v^2t^2$ नहीं।

Solved Example

Example 1. एक डोरी में विक्षोभ 2 m/s से चलता है। किसी स्थिति x = 0 पर किसी क्षण विस्थापन $y = \frac{2}{t^2+1}$ से दिया जाता है। ज्ञात करो?

(i) फलन y =(x, t) का व्यंजक, अर्थात् कण का स्थिति x तथा समय t पर विस्थापन।

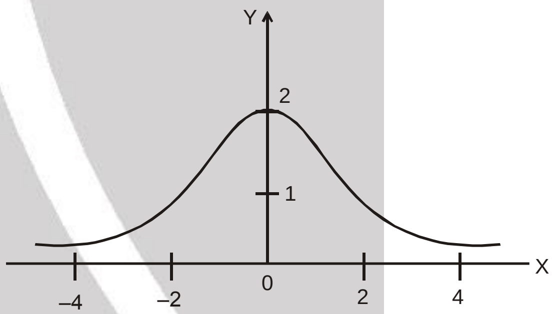
(ii) t = 0 व t = 1s पर विक्षोभ की आकृत्ति।

Solution : (i) t को $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, से बदलने पर आवश्यक तरंग

$$y = \frac{2}{\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 + 1}$$

(ii) हम तरंग फलन को किसी भी क्षण उपयोग में ले सकते है। जैसे t = 0, x का अलग–अलग मान लेकर तरंग फलन की आकृत्ति पता कर सकते है।

t = 0 पर $y = \frac{2}{\frac{x^2}{4} + 1}$



x = 0 पर y = 2

x = 2 पर y = 1

x = – 2 पर y = 1

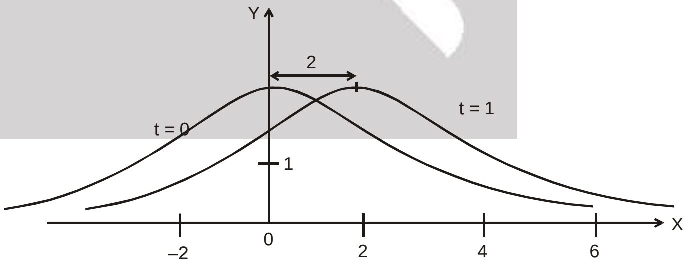
x = 4 पर y = 0.4

x = –4 पर y = 0.4

मान उपयोग कर, आकृत्ति बनायी गयी है।

इसी प्रकार t = 1s, पर आकृति बनायी जा सकती है। तो आप ग्राफ से संचरण की दिशा के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते है ? 1 सैकण्ड में विक्षोभ कितना गति करेगा यह तरंग वेग के तुल्य होगा। यहाँ तरीका दिया गया है।

$$y = \frac{2}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + 1} \quad t = 1s \text{ पर}$$



x = 2 पर y = 2 (अधिकतम मान)

x = 0 पर y = 1

x = 4 पर y = 1

स्पंद 1s में दांयी तरफ 2 इकाई चलता है।

$t - \frac{x}{2}$ = भी नियतांक है।

समय के साथ अवकलित करने पर

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2.$$

एक विमिय ज्या प्रगामी तरंग (रस्सी पर तरंगे) :

एक तरंग समीकरण $y = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ है, जो यादृच्छ तरंगों के लिए है तथा अनुप्रस्थ व अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए भी सही है।

एक तरंग की पूर्ण व्याख्या f(x) के विश्लेषण से होती है। यह भौतिक तथा अभियांत्रिकी में सबसे महत्त्वपूर्ण है जब f(x) एक ज्यावक्रीय फलन होता है अर्थात जब तरंग की आकृत्ति ज्यावक्रीय या कोज्या वक्रीय होती है। यह तब सम्भव है जब स्रोत बांयी तरफ (x=0) से रस्सी को स.आ.गति में लगातार कम्पित करता है इसके लिए स्रोत रस्सी पर लगातार कार्य करता है व लगातार ऊर्जा प्रदान करता है। तो बांये सिरे के लिए समीकरण लिख सकते है

$$f(t) = A \sin \omega t$$

जहाँ A तरंग का आयाम है जो माध्यम में कण का उसकी साम्यावस्था से अधिकतम विस्थापन है, ω कोणीय आवृत्ति है, जो $2\pi f$ के बराबर है जहाँ f स्रोत की स.आ.गति की आवृत्ति है।

कण का t समय पर x पर विस्थापन होगा

$$y = f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{या} \quad y = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \Rightarrow \quad y = A \sin(\omega t - kx)$$

जहाँ $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ तरंग संख्या कहलाती है। $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ तरंग का आवर्तकाल है, जो यह निकटतम श्रृंग या गर्त के मध्य की दूरी (यह तरंगदैर्ध्य λ है) को तय करने में लिया गया समय है।

तरंग समीकरण $y = A \sin(\omega t - kx)$ दर्शाती है कि $x = 0$ व $t = 0$ पर $y = 0$ है। यह आवश्यक नहीं है कि यह स्रोत की शर्त हो। समान परिस्थिति के लिए, y शून्य के बराबर नहीं हो सकता है। इसलिए अधिक उपयुक्त व्यंजक में कला नियतांक ϕ भी सम्मिलित होगा, जो अन्य सम्भावनाओं को अनुमति देता है।

$$y = A \sin(\omega t - kx + \phi)$$

ϕ का उपयुक्त विकल्प मिलने वाली अन्य प्रारम्भिक स्थितियों के अनुसार है। पद $kx - \omega t + \phi$ तरंग की कला कहलाती है। समान कला की दो तरंगे (2π के गुणज मे कलान्तर की) 'एक ही कला' में कहलाती है। ये समान समय से समान गति करती है।

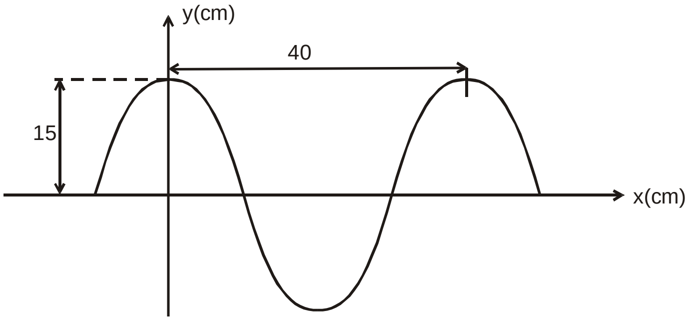
स्थिति x व समय t पर कण का वेग समीकरण द्वारा दर्शाया गया है।

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx + \phi)$$

कण को विशेष बनाने के लिए तरंग समीकरण का x को नियत रखते हुए आंशिक अवकलन करते हैं। नोट करते हैं कि तरंग वेग $\frac{dx}{dt}$, कण के वेग से भिन्न है, जबकि माध्यम के लिए तरंग वेग नियत है और यह डोरी के अनुदिश है, जैसा कि कण का वेग तरंग के वेग के लम्बवत् है और x व t पर निर्भर करता है।

Solved Example

Example 2. एक ज्यावक्रीय तरंग धनात्मक x दिशा में, 15 cm आयाम, 40 cm तरंगदैर्ध्य व 8 Hz आवृत्ति से संचरित होती है। t = 0 व x = 0 पर माध्यम का ऊर्ध्वाधर विस्थापन भी 15 cm है, जैसा दर्शाया गया है।



(a) कोणीय तरंग संख्या, आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति व कण की चाल ज्ञात कीजिए।
(b) कला नियतांक ϕ की गणना करें व तरंग फलन का सामान्य व्यंजक लिखें।

Solution : (a) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40}\frac{\text{rad}}{\text{cm}} = \frac{\pi}{20}$ rad/cm $\quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8}$ s

$\omega = 2\pi f = 16\ s^{-1}$ $\quad v = f\lambda = 320$ cm/s

(b) दिया है A = 15 cm और x = 0 व t = 0 पर y = 15 cm है $y = A \sin(\omega t - kx + \phi)$ का उपयोग करते हुए

$15 = 15 \sin\phi \Rightarrow \sin\phi = 1$ या $\phi = \frac{\pi}{2}$ rad.

इसलिए तरंग समीकरण है

$$y = A \sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right) = (15 \text{ cm}) \sin\left[(16\pi s^{-1})t - \left(\frac{\pi}{20}\frac{\text{rad}}{\text{cm}}\right).x + \frac{\pi}{2}\right]$$

Solved Example

Example 3. एक ज्यावक्रीय तरंग रस्सी के अनुदिश संचरित है। दोलित्र तरंग उत्पन्न करता है जो 30s में 60 कम्पन्न पूरे करती है। यह दिया गया है कि रस्सी के अनुदिश इसका 10.0s में अधिकतम संचरण 425cm है। तरंगदैर्ध्य क्या है ?

Solution : $v = \frac{425}{10} = 42.5$cm/s. $\Rightarrow f = \frac{60}{30} = 2$Hz $\Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 21.25$ cm.

रेखीय तरंग समीकरण :

तरंग फलन $y = A \sin(\omega t - kx + \phi)$, के उपयोग से, डोरी के किसी भी बिन्दु पर गति की व्याख्या कर सकते है। डोरी पर कोई भी बिन्दु केवल ऊर्ध्वाधर गति करता है, और इसलिए इसका x निर्देशांक अपरिवर्तित रहता है। किसी बिन्दु का अनुप्रस्थ वेग v_y और इसका अनुप्रस्थ त्वरण a_y है

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right]_{x=\text{नियत}} = \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx + \phi) \quad \text{....(1)}$$

$$a_y = \left.\frac{dv_y}{dt}\right]_{x=\text{नियत}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t - kx + \phi) \quad \text{....(2)}$$

और अतः $v_{y,\ \text{अधिकतम}} = \omega A$

$a_{y,\ \text{अधिकतम}} = \omega^2 A$

डोरी के किसी बिन्दु का अनुप्रस्थ वेग व अनुप्रस्थ त्वरण एक साथ उनके अधिकतम मान पर नहीं पहुँच सकता है। वास्तव में, अनुप्रस्थ वेग उसके अधिकतम मान (ωA) पर पहुँचता है, जब विस्थापन y = 0 है, जबकि अनुप्रस्थ त्वरण उसके अधिकतममान ($\omega^2 A$) पर आगे पहुँचता है जब $y = \pm A$ है।

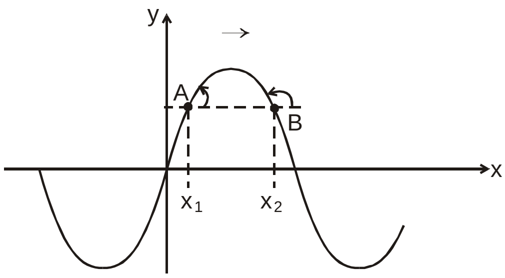
$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=\text{नियत}} = \frac{\partial y}{\partial x} = -kA \cos(\omega t - kx + \phi) \quad \text{....(3)}$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(\omega t - kx + \phi) \quad \text{....(4)}$$

(1) व (3) से $\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\omega}{k}\frac{\partial y}{\partial x}$

$\Rightarrow v_P = -v_w \times$ ढाल

अर्थात् यदि किसी बिन्दु पर ढाल ऋणात्मक है तो कण का वेग धनात्मक है और इसका विलोम भी, धनात्मक x अक्ष के अनुदिश गतिशील तरंग के लिए अर्थात् v_w धनात्मक है।



उदाहरण के लिए, एक तरंग के y-x वक्र के दो बिन्दु A व B लेते हैं, जैसा दर्शाया गया है। तरंग धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश गतिशील है।

A पर ढाल धनात्मक है इसलिए दिये गये क्षण पर इसका वेग ऋणात्मक है। इसका अर्थ है यह नीचे आ रहा है। बिन्दु B पर कण के लिए विपरीत स्थिति है।

अब समीकरण (2) व (4) का उपयोग करके

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

इसे रेखीय तरंग समीकरण या प्रगामी तरंग का अवकलन समीकरण के रूप में जानते हैं। हम माध्यम में संचरित ज्यावक्रीय यांत्रिक तरंग से रेखीय तरंग समीकरण बनाते है, लेकिन यह अधिक सामान्य है। रेखीय तरंग समीकरण स्पष्ट रूप से डोरी की तरंगो, ध्वनि तरंगो एवं विद्युत चुम्बकीय तरंगो की भी व्याख्या करती है।

Solved Example

Example 4. प्रदर्शित करो कि तरंग फलन $y = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$ एक रेखीय तरंग समीकरण का हल है, x व y सेमी में है।

Solution : x व t के सापेक्ष इस फलन का आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{12(x-3t)^2-4}{[(x-3t)^2+1]^3}, \text{ और } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{108\ \ (x-3t)^2-36}{[(x-3t)^2+1]^3} \quad \text{या} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

रेखीय तरंग समीकरण से तुलना करने पर, हम देखते है कि तरंग फलन रेखीय तरंग समीकरण का हल है, यदि चाल जिससे स्पन्द गतिशील है, 3 cm/s है। यह तरंग फलन से उत्पन्न होती है, इसलिए यह रेखीय तरंग समीकरण का हल है।

डोरी में अनुप्रस्थ तरंगो की चाल

डोरी में तरंग की चाल निम्न सूत्र द्वारा दी जाती है

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

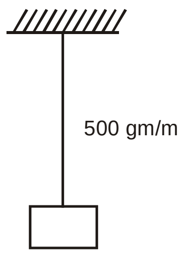
जहाँ T (न्यूटन में) तनाव है और μ डोरी का प्रति इकाई लम्बाई में द्रव्यमान (किग्रा/मी) है।

यह नोट करें कि v माध्यम (डोरी) के सापेक्ष तरंग की चाल है।

डोरी में असमान तनाव की स्थिति में या डोरी असमान रेखीय द्रव्यमान घनत्व रखती है तब v दिये गये बिन्दु पर चाल व T व μ उस बिन्दु पर संगत मान है।

Solved Example

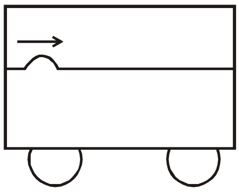
Example 5. दर्शाई गई स्थिति में डोरी में उत्पन्न तरंग की चाल ज्ञात कीजिए। मानिए कि डोरी का द्रव्यमान तनाव को प्रभावित नहीं करता है।



Solution : T = 20 × 10 = 200 N

$$v = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = 20\ \ m/s$$

Example 6. 100 N तनाव व 0.25 kg/m रेखीय द्रव्यमान घनत्व की एक तनी हुई डोरी को एक गाड़ी में डोरी के बांये सिरे से प्रारम्भ होने वाले तरंग स्पन्द को उत्पन्न करने में उपयोग करते हैं, जैसा चित्र में दर्शाया गया है। गाड़ी का वेग क्या होना चाहिए ताकि स्पन्द जमीन के सापेक्ष स्थिर रहे।



Solution : स्पन्द का वेग = $\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 20 \;\; m/s$

अब $\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PC} + \vec{v}_{CG}$

$0 = 20\,i + \vec{v}_{CG}$

$\vec{v}_{CG} = -20i$ m/s

एक ज्या वक्रीय तरंग द्वारा डोरी के अनुदिश स्थान्तरित शक्ति

जब एक प्रगामी तरंग डोरी में बनती है, ऊर्जा तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश स्थितिज व गतिज ऊर्जा के रूप में स्थान्तरित होती है।

औसत शक्ति $\langle P \rangle = 2\pi^2 f^2 A^2 \mu v$

ऊर्जा स्थान्तरण = $\int_0^t P_{av} dt$

एक आवर्त काल में ऊर्जा स्थानान्तरण = P_{av} T

यह एक तरंगदैर्ध्य में संचित ऊर्जा के बराबर है।

तीव्रता : प्रति इकाई क्षेत्रफल से प्रति सेकण्ड स्थान्तरित ऊर्जा तीव्रता कहलाती है।

$$I = \frac{\text{शक्ति}}{\text{अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल}} = \frac{P}{s} \quad \Rightarrow I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v$$

यह तरंग की औसत तीव्रता है।

एक तरंग का ऊर्जा घनत्व प्रति इकाई आयतन की ऊर्जा है।

$$= \frac{Pdt}{svdt} = \frac{I}{v}$$

Solved Examples

Example 7. रेखीय द्रव्यमान घनत्व m = 5.00 × 10^{-2} kg/m की एक डोरी में तनाव 80.0 N है। 6.00 cm आयाम व 60.0 Hz आवृत्ति की ज्यावक्रीय तरंगों को उत्पन्न करने के लिए डोरी को कितनी शक्ति दी जानी चाहिए ?

Solution : डोरी में तरंग की चाल $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \left(\frac{80.0 \;\; N}{5.00 \times 10^{-2} \;\; kg/m}\right)^{1/2}$ **= 40.0 m/s**

क्योंकि ϕ = 60 Hz, डोरी में ज्यावक्रीय तरंगों की कोणीय आवृत्ति ω का मान।

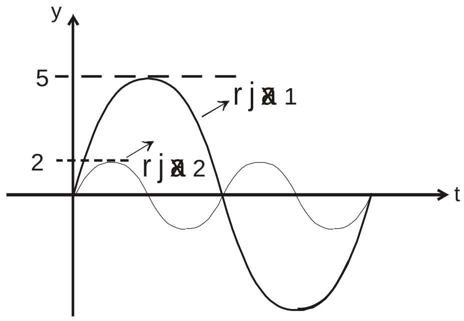
$\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0 \text{ Hz}) = 377 \text{ s}^{-1}$

शक्ति के लिए इस मान को निम्न समीकरण में उपयोग करने पर, व A = 6.00 × 10^{-2} m

$$p = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$$

$$= \frac{1}{2}(5.00 \times 10^{-2} \text{ kg/m})(377\text{s}^{-1})^2 \times (6.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2 (40.0 \text{ m/s}) = 512 \text{ W}.$$

Example 8. चित्र में y-t वक्रों द्वारा समान माध्यम में दो तरंगे दर्शाई गई है। उनके औसत तीव्रताओं का अनुपात ज्ञात कीजिए ?



Solution : $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\omega_1^2 A_1^2}{\omega_2^2 A_2^2} = \frac{f_1^2 \cdot A_1^2}{f_2^2 \cdot A_2^2} = \frac{1 \times 25}{4 \times 4} = \frac{25}{16}$

अध्यारोपण का सिद्धान्त

जब दो या दो से अधिक तरंगे किसी बिन्दु से गुजरती है तो उस बिन्दु पर परिणामी विक्षोभ प्रत्येक तरंग के स्वंय के विक्षोभ के सदिश के योग के बराबर होता है।

साधारणतया अध्यारोपण का सिद्धान्त अल्प विक्षोभ के लिए लागू होता है। यदि रस्सी को बहुत अधिक खींचा जाए तो तरंगो के स्वंय के विस्थापनों का योग परिणामी तरंग के विस्थापन के बराबर नहीं होता। ऐसी तरंगे अरेखीय तरंगे कहलाती हैं।

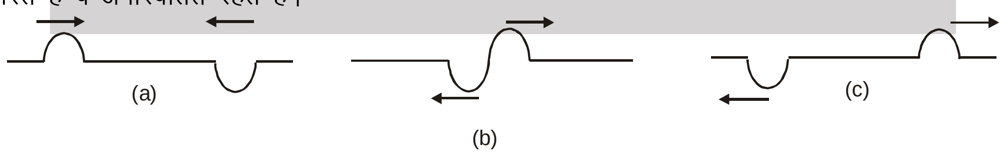
इस भाग में हम केवल रेखीय तरंगों का ही अध्ययन करेंगे, जो अध्यारोपण के सिद्धान्त का पालन करती है।

इस नियम को गणितीय रूप में रखने के लिए माना $y_1(x, t)$ व $y_2(x, t)$ रस्सी के किसी भी भाग का विस्थापन है, जब प्रत्येक तरंग अकेले गमन करती है। रस्सी के किसी भी भाग का विस्थापन $y(x, t)$ जब तरंगें एक दूसरे पर अध्यारोपित हो जाती है, निम्न प्रकार से दिया जाता है :–

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार दो तरंगों के अध्यारोपण से परिणामी तरंग का विस्थापन तरंगों के विस्थापन के बीजगणितीय योग के बराबर होता है। अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार यदि दो या दो से अधिक तरंग एक माध्यम मे गमन करती है तो परिणामी तरंग सभी तरंगों के तरंग फलन के योग का परिणामी होती है।

निम्न चित्र दो स्पंदों को प्रदर्शित कर रहा है। जो कि विपरीत दिशा में किसी तनी हुई रस्सी के अनुदिश गतिशील है। जब दो विक्षोभ अध्यारोपित होते है तो वे एक टेढ़ा–मेढ़ा प्रारूप देते हैं। जिसे (b) व (c) चित्र में दिखाया गया है। वे एक–दूसरे से गुजरते है व अपरिवर्तित रहते हैं।



इन सिद्धान्त के सभी उदाहरण तरंगों के व्यतिकरण व परावर्तन के उदाहरण है।

Solved Example

Example 9. दों तरंगे जो किसी सतह से गुजरती है को निम्न समीकरणों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है

$y = (1.0 \text{ m}) \sin [(3.14 \text{ cm}^{-1}) x - (157 \text{ s}^{-1}) t]$

तथा $y = (1.5 \text{ cm}) \sin [(1.57 \text{ cm}^{-1})x - (314 \text{ s}^{-1}) t]$.

$x = 4.5$ cm तथा $t = 5.0$ ms पर कण का विस्थापन ज्ञात करो।

Solution : अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार प्रत्येक तरंग स्वतंत्र विक्षोभ उत्पन्न करते है तथ परिणामी विक्षोभ दोनों तरंग के स्वतंत्र विक्षोभ के सदिश योग के बराबर होता है $x = 4.5$ cm तथा $t = 5.0$ ms पर कण का विस्थापन होगा

$y_1 = (1.0 \text{ cm}) \sin [(3.14 \text{ cm}^{-1}) (4.5 \text{ cm})]$
$- (157 \text{ s}^{-1}) (5.0 \times 10^{-3} \text{ s})]$

$$= (1.0 \text{ cm}) \sin \left[4.5\pi - \frac{\pi}{4}\right] = (1.0 \text{ cm}) \sin \left[4\pi + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1.0\text{cm}}{\sqrt{2}}$$

तथा $y_2 = (1.5 \text{ cm}) \sin [(1.57 \text{ cm}^{-1})(4.5 \text{ cm}) - (314 \text{ s}^{-1}) (5.0 \times 10^{-3} \text{ s})]$

$$= (1.5 \text{ cm}) \sin \left[2.25\pi - \frac{\pi}{2}\right] = (1.5 \text{ cm}) \sin \left[2\pi - \frac{\pi}{4}\right] = (1.5 \text{ cm}) \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1.5\text{cm}}{\sqrt{2}}$$

कुल विस्थापन है $y = y_1 + y_2 = \dfrac{-0.5\text{cm}}{\sqrt{2}} = -0.35$ cm.

एक दिशा में गतिशील तरंगों का व्यतिकरण

माना दो समरूप स्रोत जो x दिशा में गतिशील व ω कोणीय आवृत्ति की ज्या तरंग उत्पन्न करते है दोनों तरंगों की तरंग संख्या k व तरंग वेग भी समान है। जब दो तरंगे एक बिन्दु पर पहुँचती है, तो उनकी कला भिन्न होती है। माना कि दो तरंगों के आयाम A_1 तथा A_2 है तथा उनके मध्य कलान्तर ϕ है तो उनके समीकरण निम्न प्रकार से लिखे जा सकते है

$y_1 = A_1 \sin (kx - \omega t)$ तथा $y_2 = A_2 \sin (kx - \omega t + \phi)$.

अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार परिणामी तरंग को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin (kx - \omega t) + A_2 \sin (kx - \omega t + \phi)$.

हम पाते है $y = A \sin (kx - \omega t + \alpha)$

जहाँ $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\phi}$ (A परिणामी तरंग का आयाम है)

$\tan \alpha = \dfrac{A_2 \sin\phi}{A_1 + A_2 \cos\phi}$ (α पहली तरंग व परिणामी तरंग के मध्य कलान्तर है)

सम्पोषी व विनाशी व्यतिकरण

सम्पोषी व्यतिकरण :

जब परिणामी आयाम A अधिकतम हो।

$A = A_1 + A_2$ जब $\cos \phi = + 1$ या $\phi = 2n\pi$

जहां n एक पूर्णांक है।

विनाशी व्यकितरण :

जब परिणामी आयाम A न्यूनतम हो

या $A = |A_1 - A_2|$ जब $\cos \phi = - 1$ या $\phi = (2n + 1)\pi$

जब n एक पूर्णांक है।

Solved Example

Example 10. दो ज्या तरंगें जिनकी आवृत्ति समान है। रस्सी के अनुदिश एक ही दिशा में गतिशील है। यदि $A_1 = 3.0$ cm, $A_2 = 4.0$ cm, $\phi_1 = 0$, तथा $\phi_2 = \pi/2$ rad, हो तो परिणामी तरंग का आयाम होगा ?

Solution : परिणामी आयाम $= \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \cos 90^o} = 5$ cm.

तरंगो का परावर्तन व संचरण

जब तरंगों का परावर्तन दृढ़ या सघन माध्यम से होता है तो वे विपरीत कला में होती है लेकिन जब विरल या अर्द्ध माध्यम में होती है तो उनकी कला में कोई परिवर्तन नहीं होता। संचरित तरंगे कभी विपरीत नहीं होती लेकिन संचरण गुणांक बदल जाता है।

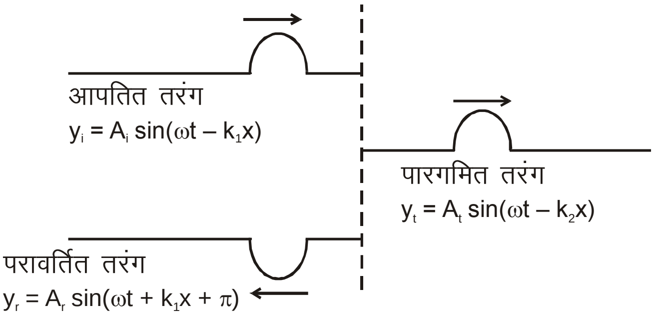


Fig. : सघन माध्यम से परावर्तन

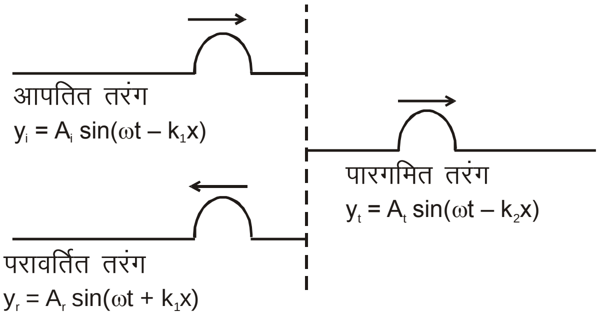


Fig. : विरल माध्यम से परावर्तन

परावर्तित व पारगमित तरंगों के आयाम :

v_1 व v_2 आपतित व पारगमित तरंगों की तरंग चाल है

$$A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A_i \qquad \Rightarrow \quad A_t = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} . \; A_i$$

यदि $v_2 > v_1$ है तो A_r धनात्मक है तरंग का परावर्तन विरल माध्यम से हुआ है।

Solved Example

Example 11. एक आवर्त तरंग रस्सी 1 के अनुदिश गतिशील है। एक रस्सी 2 के साथ सन्धि पर वह तरंग आंशिक परावर्तित व पारगमित होती है। दूसरी रस्सी का रेखीय घनत्व पहली रस्सी में रेखीय घनत्व का चार गुना है। दोंनो रस्सी की सन्धि पर x = 0 सीमा है। यदि आपतित तरंग का समीकरण $y_i = A_i \cos(k_1 x - \omega_1 t)$ है तो परावर्तित व पारगमित तरंगों के समीकरण A_i, k_1 तथा ω_1 के रूप में क्या होंगे ?

Solution : चूंकि $v = \sqrt{T/\mu}$, $T_2 = T_1$ तथा $\mu_2 = 4\mu_1$

$$v_2 = \frac{v_1}{2} \qquad .....(i)$$

आवृत्ति नहीं बदलती है,

$$\omega_1 = \omega_2 \qquad .....(ii)$$

क्योंकि $k = \omega/v$, है दोंनो रस्सियों में आवर्त तरंगो की तरंगों की संख्या में सम्बन्ध है।

$$k_2 = \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{\omega_1}{v_1/2} = 2\frac{\omega_1}{v_1} = 2k_1 \qquad ....(iii)$$

$$\text{आयाम,} \quad A_t = \left(\frac{2v_2}{v_1 + v_2}\right) A_u = \left[\frac{2(v_1/2)}{v_1 + (v_1/2)}\right] A_i = \frac{2}{3} A_i \qquad ....(iv)$$

$$\text{तथा } A_r = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right) A_u = \left[\frac{(v_1/2) - v_1}{v_1 + (v_1/2)}\right] A_i = \frac{A_i}{3} \qquad ....(v)$$

(ii), (iii) तथा (iv), की सहायता से पारगमित तरंग को लिखा जा सकता है

$$y_t = \frac{2}{3} A_i \cos(2k_1 x - \omega_1 t) \qquad \textbf{Ans.}$$

इसी तरह परिवर्तित तरंग को व्यक्त किया जा सकता है,

$$= \frac{A_i}{3} \cos(k_1 x + \omega_1 t + \pi) \qquad \textbf{Ans.}$$

अप्रगामी तरंगे :

माना कि समान आयाम व समान आवृत्ति की दो ज्या तरंगे एक लम्बी रस्सी के अनुदिश विपरीत दिशा में गतिशील है तथा दो तरंगों के समीकरण निम्न प्रकार है

$$y_1 = A \sin(\omega t - kx) \quad \text{और} \quad y_2 = A \sin(\omega t + kx + \phi).$$

इन तरंगों के व्यतिकरण से अप्रगामी तरंग प्राप्त होती है इस प्रकार की तरंगों के अध्ययन के लिए हम विशिष्ट स्थिति $\phi = 0$ प्रकरण का अध्ययन करेंगे।

दो तरंगों का परिणामी विस्थापन जब वे एक–दूसरे पर अध्यारोपित होती है निम्न है

$$y = y_1 + y_2 = A\,[\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)] = 2A \sin \omega t \cos kx$$

अथवा $y = (2A \cos kx) \sin \omega t$.

यह आवश्यक परिणाम है तथा इससे यह स्पष्ट है कि :

1. यह समीकरण तरंग समीकरण को संतुष्ट करती है,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial\ t^2}$$

यह तरंग को प्रदर्शित करता है। यदि फलन f(ax ± bt), के रूप में नहीं है तो तरंग गमन नहीं कर रही है। इसलिए इसे अप्रगामी तरंग कहते है।

2. तरंग का आयाम स्थिर नहीं है $A_s = 2A \cos kx$ लेकिन आवर्त रूप से स्थिति के साथ बदलता है (व समय के साथ नहीं जैसा कि विस्पन्द में)

3. जिन बिन्दुओं पर आयाम न्यूनतम होता है उन्हें निस्पंद कहा जाता है

$\cos kx = 0$, अर्थात् $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ अर्थात् , $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, ...$ $\left[\text{as} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}\right]$

अप्रगामी तरंग में निस्पंद समान दूरी पर होते है।

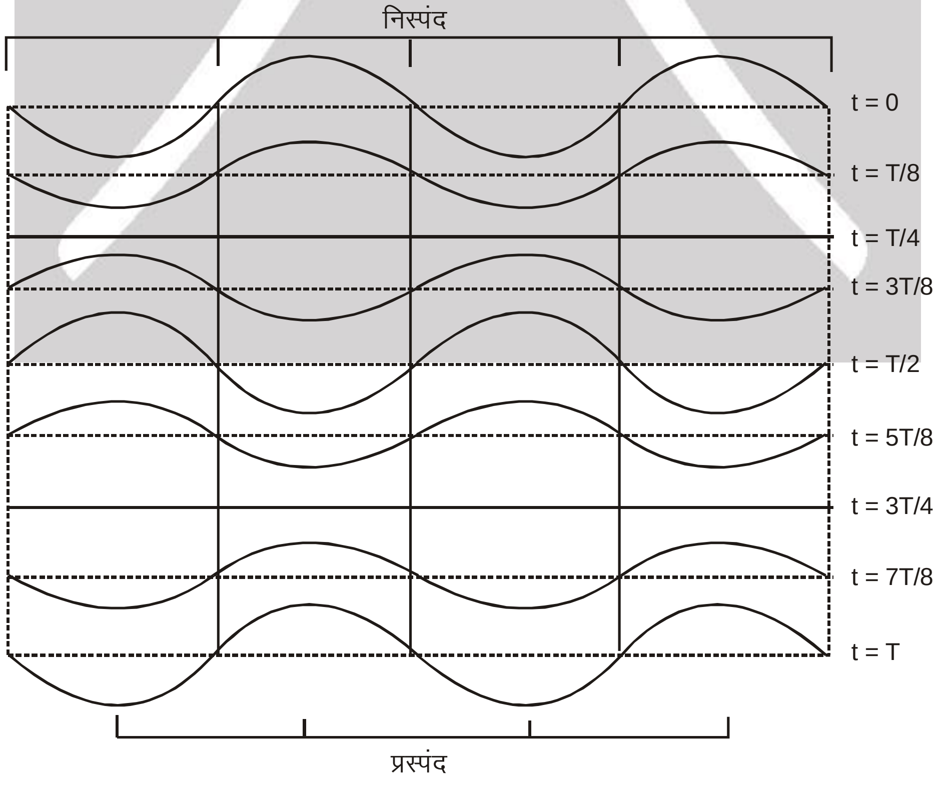
4. जिन बिन्दुओं पर आयाम अधिकतम होता है वे प्रस्पंद कहलाते है।

$\cos kx = \pm 1$, i.e., $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$

अर्थात् $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, ...$ $\left[k = \frac{2\pi}{\lambda}\right]$

निस्पंदों के समान प्रस्पंद भी $(\lambda/2)$ की समान दूरी पर स्थित होते है और $A_{\text{अधिकतम}} = \pm 2A$ होता है। निस्पन्द और प्रस्पन्द $(\lambda/4)$ दूरी पर एकान्तर क्रम में होते है।

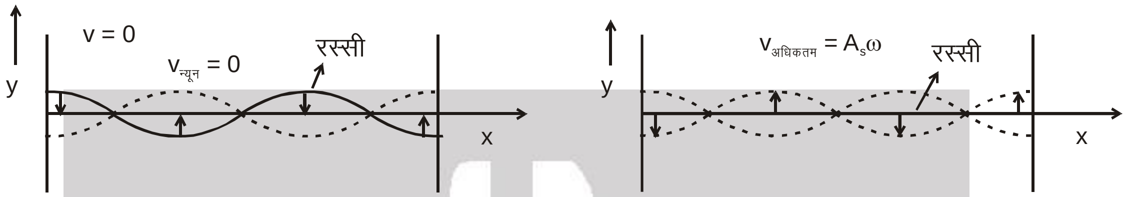
5. निस्पंद माध्यम को लूपों में विभक्त करते है। समान लूप में स्थित सभी कण समान कला में कम्पन्न करते है लेकिन निकटवर्ती लूप में स्थित सभी कण विपरीत कला में होते है। एक आवर्त में सभी कण दो बार माध्य स्थिति से अधिकतम वेग $(A_s\omega)$ से गुजरते है। प्रत्येक अर्द्ध चक्र में गति की दिशा बदल जाती है।



(a)

6. अप्रगामी तरंग अनुप्रस्थ व अनुदैर्ध्य दोंनो हो सकती है। तनित रस्सी में यदि परावर्तित तरंगे है तो वे अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग व आर्गन पाईप में है तो अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंगे है।

7. अप्रगामी तरंगों में निस्पंद स्थाई रूप से स्थिरावस्था में होते है। अतः उनकी ऊर्जा का स्थानान्तरण नहीं होता इस खण्ड में ऊर्जा स्थिर रहती है। अतः यह ऊर्जा, गतिज ऊर्जा व प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के रूप में दोलन करती है। जब सभी कण चरम बिन्दु पर होते है तो गतिज ऊर्जा न्यूनतम तथा स्थितिज ऊर्जा अधिकतम होती है लेकिन जब कण माध्य स्थिति से गुजरते है तो गतिज ऊर्जा अधिकतम व स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होती है। लेकिन लूप में कुल ऊर्जा (स्थितिज + गतिज), सदैव स्थिर रहती है।



(प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा)$_{अधिकतम}$ = E
न्यूनतम गतिज ऊर्जा = 0
(A)

(प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा)$_{न्यूनतम}$ = 0
(अधिकतम गतिज ऊर्जा) = E
(B)

Solved Examples

Example 12. विपरीत दिशा में गतिशील दो तरंग एक अप्रगामी तरंग का उत्पन्न करती है। तरंगों के स्वतंत्र समीकरण निम्न प्रकार है –

y_1 = (4.0 cm) sin (3.0x – 2.0t)
y_2 = (4.0 cm) sin (3.0x + 2.0t)

जहाँ x तथा y सेन्टीमीटर में है।

(a) x = 2.3 cm पर माध्यम के कण का अधिकतम विस्थापन बताइए।

(b) निस्पंद व प्रस्पंद की स्थिति बताइए।

Solution : (a) जब दो तरंगों का अध्यारोपण होता है तो प्राप्त अप्रगामी तरंग को निम्न गणितीय रूप से व्यक्त किया जाता है जहाँ A = 4.0 cm तथा k = 3.0 rad/cm है ;

$y = (2A \sin kx) \cos \omega t = [(8.0\text{ cm}) \sin 3.0\,x] \cos 2.0\,t$

इस प्रकार x = 2.3 cm पर कण का अधिकतम विस्थापन होगा।

$y_{max} = [(8.0\text{ cm}) \sin 3.0x]_{x = 2.3\text{ cm}} = (8.0\text{ m}) \sin (6.9\text{ rad}) = 4.6\text{ cm}$

(b) क्योंकि $k = 2\pi/\lambda = 3.0$ rad/cm, हम देखते $\lambda = 2\pi/3$cm. इसलिए प्रस्पंद स्थित है।

$$x = n\left(\frac{\pi}{6.0}\right)\text{ cm} \qquad (n = 1, 3, 5, ...)$$

तथा $x = n\,\dfrac{\lambda}{2}\left(\dfrac{\pi}{3.0}\right)$ cm (n = 1, 2, 3, ...)

अतः निस्पंद स्थित है।

Example 13. समान आयाम व समान आवृत्ति की दो प्रगामी तरंगे रस्सी के अनुदिश विपरीत दिशा में गतिशील है। उनके अध्यारोपण से निम्न समीकरण वाली अप्रगामी तरंग प्राप्त होती है।

$y = A \cos kx \sin \omega t$

जहाँ A = 1.0 mm, k = 1.57 cm^{-1} तथा ω = 78.5 s^{-1} है। (a) प्रगामी तरंग का आयाम व वेग बताइए। (b) x > 0 भाग में मूल बिन्दु से निकटतम निस्पंद की स्थिति बताइए। (c) x > 0 भाग में मूल बिन्दु से निकटतम प्रस्पंद की स्थिति बताइए। (d) x = 2.33 cm. पर स्थित कण का आयाम ज्ञात किजिए।

Solution : (a) अप्रगामी तरंगें निम्न तरगों के अध्यारोपण से प्राप्त होती हैं –

$$y_1 = \frac{A}{2}\sin(\omega t - kx) \text{ और } y_2 = \frac{A}{2}\sin(\omega t + kx).$$

किसी एक तरंग का वेग (परिमाण) है -

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{78.5 s^{-1}}{1.57 cm^{-1}} = 50 \text{ cm/s ; आयाम } = 0.5 \text{ mm.}$$

(b) निस्पंद के लिए, $\cos kx = 0$.

x का न्यूनतम धनात्मक मान जो इस संबंध को संतुष्ट करता है दिया गया है -

$kx = \pi/2$

या, $x = \frac{\pi}{2k} = \frac{3.14}{2 \times 1.57 cm^{-1}} = 1$ cm

(c) प्रस्पंद के लिए, $|\cos kx| = 1$.

x का न्यूनतम धनात्मक मान जो इस संबंध को संतुष्ट करता है दिया गया है -

$kx = \pi$ या $x = \frac{\pi}{k} = 2$ cm

(d) x दूरी पर स्थित कण के कंपन का आयाम $|A \cos kx|$ द्वारा दिया जाता है दिये गये बिन्दु के लिए -

$$kx = (1.57 \text{ cm}^{-1})(2.33 \text{ cm}) = \frac{7}{6}\pi = \pi + \frac{\pi}{6}.$$

इस प्रकार आयाम होगा -

$$(1.0 \text{ mm}) \, |\cos(\pi + \pi/6)| = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ mm} = 0.86 \text{ mm.}$$

रस्सी में कम्पन्न :

(a) दोनों सिरों से तनी हुई : माना कि एक L लम्बाई की रस्सी दोनों सिरों x=0 और x = L के बीच कसी हुई है। इस प्रकार की व्यवस्था में हम एक निरन्तर ज्या तरंग दायें सिरे की तरफ भेजते है। जब तरंग दायें सिरे पर पहुचँती है यह परावर्तित होकर पुनः लौटती हैं। यह परावर्तित तरंग आपतित तरंग पर अध्यारोपित होती है। जब परावर्तित तरंग बाएं सिरे पर पहुँचती है, तो पुनः परावर्तित होकर दांए सिरे की ओर लौटती है। पुनः बायीं सिरे की ओर गतिशील तरंग पर अध्यारोपित होती है। यह प्रक्रम निरन्तर चलता रहता है और शीघ्र ही हमें कई अध्यारोपित तरंगे प्राप्त होती है। जिनका एक दूसरे पर व्यतीकरण होता है। इस प्रकार की व्यवस्था में किसी बिन्दु x पर व t समय में दो तरंगे उपस्थित रहती है। एक बायीं ओर गतिशील होती है तथा दूसरी दांयी ओर गतिशील होती है। इसलिए

$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ (धनात्मक x दिशा में गतिशील तरंग)

और $y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t)$ (ऋणात्मक x दिशा में गतिशील तरंग).

दोनों तरंगों के लिए अध्यारोपण का सिद्धान्त लगाने पर

$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m \sin(kx - wt) + y_m \sin(kx + \omega t) = (2y_m \sin kx) \cos \omega t$

यह देखा जाता है कि अधिकतम या न्यूनतम आयाम के बिन्दु एक ही स्थिति पर रूके हुए हैं।

निस्पंद : kx के जिन मानों के लिए $\sin kx = 0$ होगा वहाँ आयाम भी शून्य होगा।

$n = 0, 1, 2, 3,.....$ के लिए $kx = n\pi$,

$k = 2\pi/\lambda$ रखने पर$x = n\frac{\lambda}{2}$, for $n = 0, 1, 2, 3,.....$

शून्य आयाम की स्थिति निस्पंद कहलाती है तथा दो क्रमागत निस्पंदों के बीच की दूरी $\frac{\lambda}{2}$ या तरंगदैर्ध्य की आधी होगी।

प्रस्पंद : kx के जिन मानों के लिए $|\sin kx| = 1$ अधिकतम होगा वहाँ आयाम भी अधिकतम होगा तथा इसका अधिकतम मान $2y_m$ होगा

n = 0, 1, 2, 3,.... के लिए $kx = (n + 1/2)\pi$

$k = 2\pi/\lambda$ रखने पर

n = 0, 1, 2, 3,.... के लिए $x = (n + 1/2)\dfrac{\lambda}{2}$

पर अधिकतम आयाम होगा। ये बिन्दु प्रस्पंद कहलाते है। प्रस्पंद के मध्य दूरी $\lambda/2$ होती है तथा ये निस्पंदो के मध्य में स्थित होते है।

L लम्बाई की दोंनो सिरों पर कसी हुई रस्सी में जिसका एक सिरा x = 0 तथा दूसरा सिरा x = L पर व्यवस्थित है। निस्पंद सिरों पर स्थित होंगे। लम्बाई L नीचे दी गई शर्त को निश्चित रूप से संतुष्ट करती है।

n = 1, 2, 3,.... के लिए $L = n\dfrac{\lambda}{2}$

यह शर्त दर्शाती है कि L लम्बाई की रस्सी पर अप्रगामी तरंगें प्रतिबन्धित तरंगदैर्ध्य की होगी जिसका मान

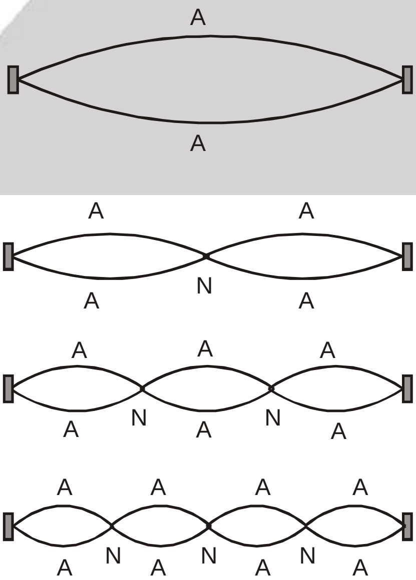
n = 1, 2, 3,..... के लिए $\lambda = \dfrac{2L}{n}$

इन तरंगदैर्ध्यों के संगत आवृत्ति का मान नीचे लिखे समीकरण से लिखा जाता है

n = 1, 2, 3,..... के लिए $\nu = n\dfrac{v}{2L}$

जहाँ v डोरी पर प्रगामी तरंग की चाल है। समीकरण द्वारा प्राप्त आवृत्तियों का समुच्चय प्राकृतिक आवृत्तियाँ या निकाय के दोलन की विधा कहलाती है। यह समीकरण दर्शाता है कि रस्सी पर प्राकृतिक आवृत्तियाँ, न्यूनतम आवृत्ति $\nu = \dfrac{v}{2L}$ की पूर्णांक गुणक है, जो n = 1 के संगत हैं न्यूनतम आवृत्ति के साथ दोलन मूल विधा या प्रथम गुणावृत्ति कहलाता है। द्वितीय गुणावृत्ति या प्रथम अधिस्वरक n = 2 की दोलन विधा है। तीसरी गुणावृत्ति और द्वितीय अधिस्वरक n = 3 के संगत है तथा इसी प्रकार आगे भी संगत होती है। इन विधाओं के संगत आवृत्तियां ν_1, ν_2, ν_3 इत्यादि से दर्शायी जाती है। सभी संभव विधाओं का संगह गुणावृत्ति श्रेणी और n को गुणावृत्ति संख्या कहते हैं।

दोनों सिरों पर बंधी तनी हुई रस्सी की कुछ गुणावृत्तियां चित्र में दिखाई गई हैं



(a) मूल या प्रथम गुणावृत्ति $\nu_0 = v/2L$

(b) द्वितीय गुणावृत्ति या प्रथम अधिस्वरक = $\nu_1 = 2\nu_0 = 2v/2L$

(c) तृतीय गुणावृत्ति या द्वितीय अधिस्वरक = $\nu_2 = 3\nu_0, = 3v/2L$

(d) चतुर्थ गुणावृत्ति या तृतीय अधिस्वरक = $\nu_3 = 3\nu_0, = 3v/2L$

Solved Example

Example 14. पियानों के मध्य C डोरी की मूल आवृत्ति 262 Hz, है और A नोट की मूल आवृत्ति 440 Hz (a) C डोरी की अगली दो गुणावृत्तियों की आवृत्तियों की गणना करो। (b) यदि A और C नोट के लिए डोरियों की लम्बाईयाँ तथा प्रति एकांक लम्बाई का द्रव्यमान समान हो तो दोनों डोरीयों में तनाव का अनुपात ज्ञात करो।

Solution : (a) क्योंकि डोरी C के लिए $f_1 = 262$ Hz हम f_2 और f_3 आवृत्तियां पाने के लिए समीकरण का प्रयोग कर सकते हैं;

$f_2 = 2f_1 = 524$ Hz

$f_3 = 3f_1 = 786$ Hz

दो रस्सीयों के उनकी मूल आवृत्तियों पर कम्पन्न के लिए समीकरण का प्रयोग करने पर

$$f_{1A} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{\mu}} \quad f_{1C} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_C}{\mu}} \quad \therefore \frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \quad \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2 = \left(\frac{440\ \text{Hz}}{262\ \text{Hz}}\right)^2 = 2.82.$$

Example 15. एक तार जिसका रेखीय द्रव्यमान घनत्व 10^{-3} kg/m है, दो दृढ आधारों के बीच तनी हुई है तथा रस्सी में तनाव 90 N है। तार 350 Hz की आवृत्ति पर अनुनादित है। अगली उच्च आवृत्ति जिस पर वही तार पुनः अनुनादित होता है 420 Hz है तार की लम्बाई ज्ञात करो।

Solution : माना तार इसकी nवीं गुणावृत्ति में 350 Hz और (n + 1)वीं गुणावृत्ति में 420 Hz पर कम्पन्न करता है।

$$350\ s^{-1} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad ....(i) \qquad \text{और} \qquad 420\ s^{-1} = \frac{(n+1)}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad ....(ii)$$

$$\frac{420}{350} = \frac{n+1}{n} \qquad \text{या} ,\ n = 5.$$

(i) में मान रखने पर ,

$$350 = \frac{5}{2\ell}\sqrt{\frac{90}{10^{-3}}} \Rightarrow 350 = \frac{5}{2\ell} \times 300 \Rightarrow \ell = \frac{1500}{700} = \frac{15}{7}\ \text{m} = 2.1\ \text{m}$$

(b) एक सिरे पर जड़वत : रस्सी के एक सिरे को कस कर मुक्त सिरे से लम्बवत् दिशा में कम्पन्न कराकर अप्रगामी तरंगें उत्पन्न की जा सकती हैं। इस तरह का मुक्त सिरा बहुत हल्की डोरी को रस्सी से संयोजित करके भी प्राप्त किया जा सकता है।

यदि किसी स्रोत द्वारा उत्पन्न कम्पन्न की आवृत्ति सही हो तो अप्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं। यदि x = 0 वाला सिरा जड़त्व हो तथा x = L वाला सिरा मुक्त हो तो अप्रगामी तरंगों का समीकरण निम्न प्रकार से दिया जा सकता है -

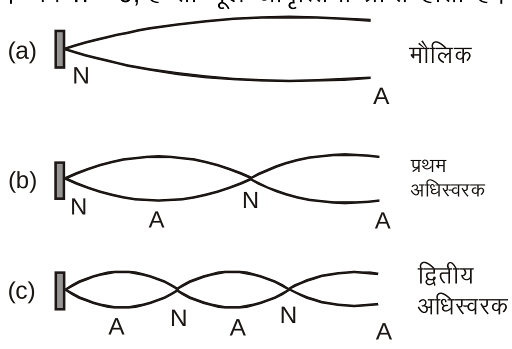
$y = 2A \sin kx \cos \omega t$

सीमान्त शर्तों के अनुसार x = L पर प्रस्पंद है तथा x = 0 पर निस्पंद है,

$\sin kL = \pm 1$

$$\text{या,}\ kL = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{या,}\ \frac{2\pi L}{\lambda} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \ \text{या,}\ \frac{2Lf}{v} = n + \frac{1}{2} \ \text{या,}\ f = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{v}{2L} = \frac{n+\frac{1}{2}}{2L}\sqrt{T/\mu}\ .....$$

ये कम्पन्न की समान आवृत्तियाँ हैं। जब n = 0, है तो मूल आवृत्तियां प्राप्त होती हैं।



$f_0 = v/4L$

अधिस्वरक आवृत्तियां हैं

$$f_1 = \frac{3v}{4L} = 3f_0$$

$$f_2 = \frac{5v}{4L} = 5f_0$$

हम देखते हैं कि सभी मूल कम्पन्नों की गुणावृत्तियां अप्रगामी तरंगों के लिए आवृत्तियाँ स्वीकार्य नहीं होती। केवल विषम गुणावृत्तियाँ ही अधिस्वरक होती हैं। चित्र में रस्सी की कुछ सामान्य विधायें प्रदर्शित की गई हैं।

डोरी के अनुप्रस्थ कम्पन के नियम - सोनोमीटर तार

(a) लम्बाई का नियम $f \alpha \frac{1}{L}$ इसलिए $\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1}$; यदि T & μ नियतांक हैं

(b) तनाव का नियम $f \alpha \sqrt{T}$ इसलिए $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$; L और μ नियतांक हैं

(c) द्रव्यमान का नियम $f \alpha \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ इसलिए $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$; T और L नियतांक हैं

Solved Miscellaneous Problems

Problem 1. एक तरंग स्पंद x अक्ष के अनुदिश संचरित है जिसे निम्न फलन से व्यक्त किया जाता है :

$$y(x, t) = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$$

जहां x cm तथा t सैकण्ड में है।

(i) तरंग किस दिशा में संचरित है ? (ii) तरंग वेग ज्ञात करो।

(iii) t = 0, t = 2s तरंग रूप क्या होगा।

Solution : $y = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$

(i) चूंकि तरंग धनात्मक x–दिशा में गतिमान y = (x, t) = f(t – x/v) = f/v(vt – x)

(ii) अब x – v t को x – 3t से तुलना करने पर

$\therefore$ v = 3 cm/sec. **Ans.** (i) धनात्मक x अक्ष (ii) 3 cm/s.

Problem 2. t = 0 पर तार में तरंग स्पंद फलन $y = \frac{6}{x^2+3}$ से व्यक्त किया जाता है। जहाँ x व y मीटर प्रदर्शित है तो y(x, t) फलन लिखें जो इस तरंग को व्यक्त करें। यदि तरंग धनात्मक x दिशा में 4.5 m/s की चाल से गति कर रही है।

Solution : $y = \frac{6}{x^2+3}$ = f(x) जैसे y(x, t) = f(x – vt) = $\frac{6}{(x-4.5t)^2+3}$ **Ans.** $\frac{6}{(x-4.5t)^2+3}$

Problem 3. डोरी में संचरित तरंग का तरंग फलन दिया गया है y (x, t) = (0.350 m) sin (10π t – 3πx +)

(a) संचरित तरंग की दिशा व चाल क्या है ?

(b) t = 0, x = 0.1 m पर डोरी का ऊर्ध्वाधर विस्थापन क्या है ?

(c) तरंग के तरंगदैर्ध्य व आवृत्ति क्या है ?

Solution : Y (x, t) = (0.350m) sin (10π t – 3 π x + $\frac{\pi}{4}$)

सभी से तुलना करने पर ; Y = A sin (wt – kx + ϕ) w = 10π, k = 3π, $\phi = \frac{\pi}{4}$

(a) चाल = $\frac{w}{k} = \frac{10}{3}$ = 3.33 m/sec और +x–अक्ष के अनुदिश

(b) y (0.1, 0) = 0.35 sin (10 π x O – 3 π (0.1) + $\frac{\pi}{4}$) = 0.35 sin $\left[\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{10}\right]$ = – 5.48 cm

(c) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = 3 π =) $\lambda = \frac{2}{3}$ cm= 0.67 cm and $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{10/3}{2/3}$ = 5 Hz.

Problem 4. दर्शाईये कि तरंग फलन $y = e^{b(x-vt)}$ एक रेखीय तरंग समीकरण का हल है।

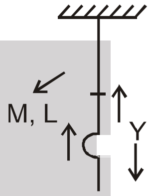
Solution : $Y = e^{b(x-v\,t)}$ $\quad \frac{\partial y}{\partial x} = be^{b(x-v\,t)}$ और $\frac{\partial y}{\partial t} = (bv)e^{b(xv-v\,t)}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = b^2\, e^{b(x-v\,t)}$ और $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (bv)^2\, e^{b(x-v\,t)}$ $\quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

जोकि एक रेखीय तरंग समीकरण है।

Problem 5. m द्रव्यमान व L लम्बाई की एक समान रस्सी एक छत से लटक रही है। (a) दर्शाओं कि डोरी की अनुप्रस्थ तरंग की चाल y का फलन है, y निचले सिरे से दूरी है, और $v = \sqrt{gy}$ द्वारा दिया गया है। (b) दर्शाओ कि रस्सी की लम्बाई को तय करने में अनुप्रस्थ तरंग द्वारा लिया गया समय $t = 2\sqrt{L/g}$ द्वारा दिया गया है।

Solution : (a) जैसे द्रव्यमान प्रति एकांक लम्बाई



$\mu = \frac{m}{L}$

$\therefore \quad V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad \therefore$ P पर तनाव = μyg

$\therefore \quad V = \sqrt{\frac{\mu yg}{\mu}} = \sqrt{yg}$

(b) अब $\frac{dy}{dt} = \sqrt{yg} \;\Rightarrow\; \int_0^{\ell}\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{g}\int_0^{t} dt \quad t = 2\sqrt{\ell/g}$

Problem 6. दो समान आवृति की ज्या तरंगे किसी स्रोत द्वारा रस्सी के अनुदिश एक ही दिशा में भेजी जाती है। एक तरंग का आयाम 5.0 mm, तथा दूसरी का आयाम 8.0 mm है। (a) परिणामी तरंग के न्यूनतम आयाम के लिए तरंगों के बीच कलान्तर ϕ_1 क्या है? (b) न्यूनतम आयाम क्या है ? (c) अधिक आयाम वाली तरंग से परिणामी तरंग का कलान्तर ϕ_2 क्या है ? (d) अधिकतम आयाम क्या है ? (e) परिणामी आयाम क्या है जब कलान्तर $(\phi_1 - \phi_2)/2$ है ?

Solution : (a) न्यूनतम आयाम हेतु ; $A_R = |A_1 - A_2|$
और यह तभी सम्भव है जब A_1 और A_2 के मध्य $\phi_1 = \pi$ है।

(b) $A_R = |A_1 - A_2| = 3$ mm

(c) अधिकतम आयाम हेतु ;
$A_R = |A_1 + A_2|$ यह तभी सम्भव है जब A_1 और A_2 के मध्य $\phi_2 = 0$ है।

(d) $A_R = |A_1 + A_2| = 13$ mm

(e) जब $\phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} = \frac{\pi - o}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad A_R = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\frac{\pi}{2}]^{1/2} = 9.4$ mm

Ans. (a) π rad; (b) 3.0 mm; (c) 0 rad; (d) 13 mm; (e) 9.4 mm

Problem 7. 120 kg द्रव्यमान तथा 8.40 m लम्बी रस्सी दोंनों सिरों पर बंधी हुई है। यदि इस पर 96.0 N तनाव बल आरोपित किया जाता है तथा दोलन कराया जाता है। तो (a) रस्सी में तरंग का वेग क्या होगा ? (b) अप्रगामी तरंग के लिए रस्सी में अधिकतम सम्भव तरंगदैर्ध्य क्या होगी ? (c) तरंग की आवृत्ति क्या होगी।

Solution : (a) $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{96}{\left(\frac{0.12}{8.4}\right)}} = 82$ m/sec.

(b) अधिकतम सम्भव तरंगदैर्ध्य हेतु ; $\frac{\lambda}{2} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\ell = 2 \times 8.4 = 16.8$ m

(c) $V = f\lambda \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{82}{16.8} = 4.88$ Hz. **Ans.** (a) 82.0 m/s, (b) 16.8 m, (c) 4.88 Hz.