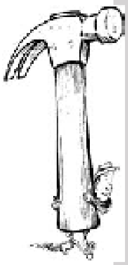
गणितीय औजार (MATHEMATICAL TOOLS)

गणित, भौतिकी की भाषा है। यदि किसी व्यक्ति को गणित का अच्छा ज्ञान हो तो वह भौतिकी के सिद्धान्तों की आसानी से व्याख्या कर सकता है, समझ सकता है एवं उन्हें उपयोग में ले सकता है।

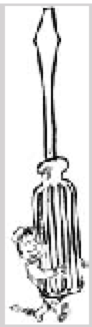
गणितीय औजार

औजार का उपयोग भौतिक कार्यों में आसानी के लिए होता है। इसी प्रकार गणितीय औजार का उपयोग संख्यात्मक प्रश्नों के हल करने में होता है।



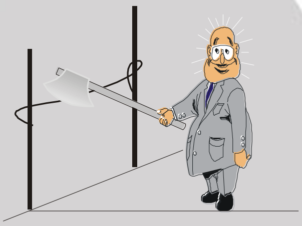
अवकलन

समाकलन



सदिश

न्यूटन ने भौतिक प्रश्नों को हल करने के लिए गणित में अवकलन व समाकलन का प्रयोग किया।



कुल्हाड़ी से डोरी को काटना

सही औज़ार का चयन अत्यधिक महत्वपूर्ण है

1. फलन (FUNCTION)

फलन दो चरों के मध्य सम्बन्ध स्थापित करने का नियम है जिनमें से एक चर को स्वतंत्र एवं दूसरे चर को परतंत्र मान सकते है।

जिस ताप पर जल उबलता है वह समुद्र की सतह से ऊँचाई पर निर्भर करता है (ऊँचाई बढ़ने पर क्वथनांक घटता है।) यहाँ समुद्र तल से ऊँचाई स्वतंत्र चर है एवं ताप परतंत्र चर है।

नकदी निवेश पर ब्याज, निवेश को जमा रखने की समयावधि पर निर्भर करता है। यहाँ समय स्वतंत्र चर है एवं ब्याज परतंत्र चर है।

प्रत्येक अवस्था में, एक परतंत्र राशि जिसको y कह सकते है यह एक अन्य स्वतंत्र चर राशि x पर निर्भर करती है। अतः y को सम्पूर्ण रूप से x के मान द्वारा प्राप्त कर सकते है, हम कह सकते है कि y, x का फलन है एवं इसे गणितीय रूप में निम्न प्रकार प्रदर्शित कर सकते हैं $y = f(x)$.

यहाँ f, फलन को, x स्वतंत्र चर को एवं y परतंत्र चर को प्रदर्शित करता है।

स्वतंत्र चर (x) के सभी संभव मान फलन के प्रांत कहलाते है।

परतंत्र चर (y) के सभी संभव मान फलन के परिसर कहलाते है।

एक फलन f के बारे में सोचिये जो एक प्रकार की मशीन है जिसमें x के मान के रूप में प्रान्त में से कुछ निवेश कराया जाये तो यह परिसर में से f(x) के रूप में निर्गत उत्पन्न करती है।

जब हम वृत्त के बारे में पढ़ते है तो क्षेत्रफल को A से तथा त्रिज्या को r से निरूपित करते है। क्षेत्रफल त्रिज्या पर निर्भर करता हैं। अतः कह सकते है, कि A, r का फलन है तथा $A = f(r)$।

समीकरण $A = \pi r^2$ एक नियम है जो हमे यह बताता है कि r के हर एक संभव निवेशी मान से किस प्रकार क्षेत्रफल A का एक निश्चित मान ज्ञात किया जाता है।

$A = f(r) = \pi r^2$. (यह सम्बन्धों का एक नियम है, जो यह बताता हें कि क्षेत्रफल, त्रिज्या के वर्ग को π से गुणा करने पर प्राप्त होता है।).

यदि $r = 1$ $A = \pi$

यदि $r = 2$ $A = 4\pi$

यदि $r = 3$ $A = 9\pi$

त्रिज्या के सभी संभव मान फलन के प्रांत कहलाते है तथा क्षेत्रफल के सभी निर्गत मान फलन के परिसर कहलाते है।

हम सामान्यतया फलन को निम्न दो प्रकार से परिभाषित कर सकते है :

1. किसी सूत्र के द्वारा जैसे $y = x^2$ जो एक फलन को निरूपित करने के लिए एक निर्भर चर y का प्रयोग करता है।

2. किसी सूत्र के द्वारा जैसे $f(x) = x^2$ फलन को प्रदर्शित करने के लिए प्रतीक f का प्रयोग करता है। यहाँ फलन को f द्वारा प्रदर्शित करते है ना कि f(x) द्वारा।, $y = \sin x$. यहाँ फलन sin है तथा x स्वतंत्र चर है।

Solved Example

Example 1. r त्रिज्या की गेंद (ठोस गोला) का आयतन V निम्न फलन द्वारा दिया जाता है $V(r) = 4/3\pi(r)^3$, 3m त्रिज्या की गेंद का आयतन ज्ञात करो ?

Solution : $V(3) = 4/3\pi(3)^3 = 36\pi\ m^3$.

Example 2. माना फलन F सभी० वास्तविक संख्याओं के लिए सूत्र $F(r) = 2(r - 1) + 3$ से दिया जाता है। निवेशी मानों 0, 2, x + 2, तथा F(2) के लिए F का मान ज्ञात कीजिये।

Solution : प्रत्येक स्थिति के लिए दिये गये मानों को सूत्र में r के स्थान पर प्रतिस्थापित करते है।

$F(0) = 2(0 - 1) + 3 = -2 + 3 = 1$

$F(2) = 2(2 - 1) + 3 = 2 + 3 = 5$

$F(x + 2) = 2(x + 2 - 1) + 3 = 2x + 5$

$F(F(2)) = F(5) = 2(5 - 1) + 3 = 11.$

Example 3. फलन $f(x)$ को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है $f(x) = x^2 + 3$, तो $f(0)$, $f(1)$, $f(x^2)$, $f(x+1)$ एवं $f(f(1))$ के मान ज्ञात करो।

Solution : $f(0) = 0^2 + 3 = 3$

$f(1) = 1^2 + 3 = 4$

$f(x^2) = (x^2)^2 + 3 = x^4 + 3$

$f(x+1) = (x + 1)^2 + 3 = x^2 + 2x + 4$

$f(f(1)) = f(4) = 4^2 + 3 = 19$

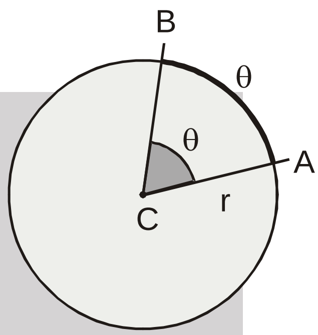
Example 4. यदि फलन F को समस्त वास्तविक संख्याओं (x) के लिए निम्न सूत्र द्वारा परिभाषित किया जाये $F(x) = x^2$ तो F का मान निम्न निवेशी मानों के लिए ज्ञात करो 0, 2, x + 2 तथा F(2)

Solution : $F(0) = 0$
$F(2) = 2^2 = 4$
$F(x+2) = (x+2)^2$
$F(F(2)) = F(4) = 4^2 = 16$

2. त्रिकोणमितीय गुणधर्म (TRIGONOMETRY)

2.1. कोणों का मापन तथा डिग्री एवं रेडियन के मध्य सम्बन्ध

समुद्र तथा अंतिरिक्ष विज्ञान में कोण डिग्री में मापा जाता है। परन्तु गणित में कोण को रेडियन में मापा जाता है। क्योकि यह आगे जाकर गणनाओं को आसान करता है।



माना ACB, r त्रिज्या के वृत्त का केन्द्रीय कोण है

कोण ACB या θ को रेडियन में निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है।

$\theta = \dfrac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{त्रिज्या}} \Rightarrow \theta = \dfrac{AB}{r}$

यदि $r = 1$ हो तो $\theta = AB$

इकाई त्रिज्या के वृत्त के लिए कोण ACB का रेडियन माप वृत्तीय चाप AB के बराबर होता है। चूंकि वृत्त की परिधि 2π है तथा एक पूरे चक्कर में 360^o घूमना होता है। अतः डिग्री तथा रेडियन में निम्न सम्बन्ध होगा।

π रेडियन = 180^o

रूपान्तरण सूत्र :

1 डिग्री = $\dfrac{\pi}{180}$ (≈ 0.02) रेडियन

डिग्री से रेडियन में परिवर्तन के लिए $\dfrac{\pi}{180}$ से गुणा

1 रेडियन $\approx$ 57 डिग्री

रेडियन से डिग्री में परिवर्तन के लिए $\dfrac{180}{\pi}$ से गुणा

Solved Example

Example 1. (i) 45^o को रेडियन में परिवर्तित करो (ii) $\pi/6$ रेडियन को डिग्री में परिवर्तित करो

Solution : (i) $45 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{4}$ rad (ii) $\dfrac{\pi}{6} \cdot \dfrac{180}{\pi} = 30^o$

Example 2. 30^o डिग्री को रेडियन में परिवर्तित करो।

Solution : $30^o \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}$ rad

Example 3. $\pi/3$ रेडियन को डिग्री में परिवर्तित करो।

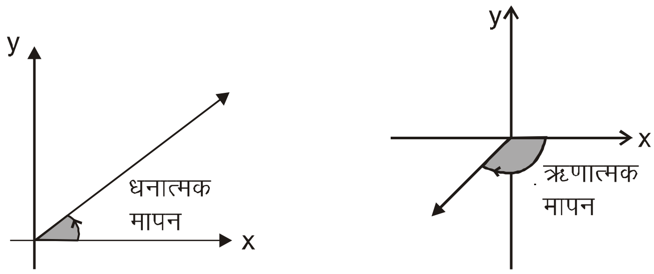
Solution : $\dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{180^o}{\pi} = 60^o$

Standard values

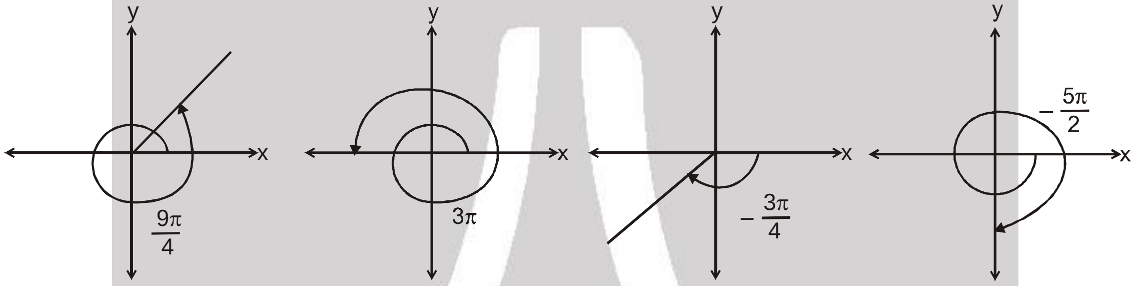
(1)	$30° = \pi/6$ rad	(2)	$45^o = \pi/4$ rad	(3)	60^o = rad
(4)	$90^o = \dfrac{\pi}{2}$ rad	(5)	$120^o = \dfrac{2\pi}{3}$ rad	(6)	135^o = rad
(7)	$150^o = \dfrac{5\pi}{6}$ rad	(8)	$180^o = \pi$ rad	(9)	$360^o = 2\pi$ rad

(उपयुक्त मानों को स्वयं जाचिये एवं पता किजिये कि यह रूपांतरण सूत्रों को संतुष्ठ करते है अथवा नहीं)

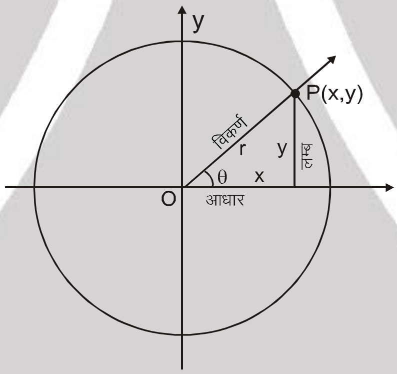
2.2. धनात्मक एवं ऋणात्मक कोणों का मापनः



कोई भी कोण xy-तल में आदर्श स्थिति में होगा यदि उसकी पूंछ मूल बिन्दु पर तथा प्रारम्भिक किरण धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश होगी। धनात्मक x-अक्ष से वामावर्त दिशा में मापे गये कोण धनात्मक होगें एवं दक्षिणावर्त दिशा में मापे गये कोण ऋणात्मक होगें।



2.3. छः मूलभूत त्रिकोणमितीय फलन :



त्रिकोणमितीय फलन के कोण θ का x, y तथा r के पदों में प्रदर्शन।

Sine : $\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{y}{r}$ Cosecant : $\text{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{r}{y}$

Cosine : $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{x}{r}$ Secant : $\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{r}{x}$

Tangent : $\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{y}{x}$ Cotangent : $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{x}{y}$

त्रिकोणमितीय फलन का मान :

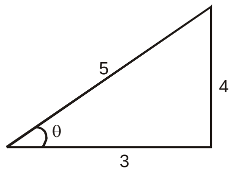
यदि चित्र में प्रदर्शित वृत की त्रिज्या r = 1 हो, तो sin θ व cos θ को परिभाषित करने वाली समीकरण निम्न होगी–

$\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$

इस स्थिति में हम cosine तथा sine के मान बिन्दु P के निर्देशांकों से सीधे ही लिख सकते है।

Solved Example

Example 1. प्रदर्शित चित्र में सभी छः त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करो।



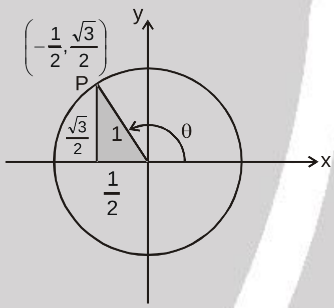
Solution : $\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{5}$

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{3}{4}$

$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ $\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{5}{4}$

Example 2. यदि इकाई वृत्त में बिन्दु P के निर्देशांक चित्रानुसार हो तो कोण θ के लिए sine एवं cosine ज्ञात कीजिए।

Solution :

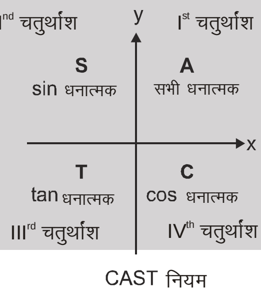


$\cos\theta$ = P का x-निर्देशांक $= -\frac{1}{2}$

$\sin\theta$ = P का y-निर्देशांक $= \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.4. 90° से बड़े कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के नियम

त्रिकोणमितीय फलनों के धनात्मक एवं ऋणात्मक होने का पता लगाने के लिए CAST नियम को उपयोग में लिया जाता हैं इसे ASTC के क्रम में याद रखा जा सकता है। (After school to college)



Step-1. → उस चतुर्थांश का चयन कीजिए जिसमें कोण विद्यमान है।

Step-2. →

(a) यदि कोण $(n\pi \pm \theta)$ हो जहाँ n एक पूर्णांक है। तब

$(n\pi \pm \theta)$ का त्रिकोणमितीय फलन $= \theta$ का समान त्रिकोणमितीय फलन (चिन्ह का निर्धारण CAST नियम द्वारा करें।)

(b) यदि कोण $\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right]$ हो जहाँ n एक पूर्णांक है। तब

$\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right]$ का त्रिकोणमितीय फलन $= \theta$ का पूरक त्रिकोणमितीय फलन

(चिन्ह का निर्धारण CAST नियम द्वारा करें।)

कुछ मानक कोणों के लिए **sin θ, cos θ** तथा **tan θ** के मान

Degree	0	30	37	45	53	60	90	120	135	180
Radians	0	$\pi/6$	$37\pi/180$	$\pi/4$	$53\pi/180$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π
sin θ	0	1/2	3/5	$1/\sqrt{2}$	4/5	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	0
cos θ	1	$\sqrt{3}/2$	4/5	$1/\sqrt{2}$	3/5	1/2	0	–1/2	$-1/\sqrt{2}$	–1
tan θ	0	$1/\sqrt{3}$	3/4	1	4/3	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	–1	0

Solved Example

Example 1. sin 120° का मान ज्ञात करो।

Solution : $\sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Aliter : $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Example 2. cos 135° का मान ज्ञात करो।

Solution : $\cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Example 3. cos 210° का मान ज्ञात करो।

Solution : $\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Example 4. tan 210° का मान ज्ञात करो।

Solution : $\tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2.5. सामान्य त्रिकोणमितीय सूत्र :

1.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta.$
$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta.$

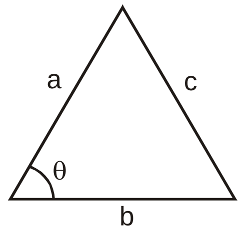
2.

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

3. $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$

4. त्रिभुज के लिए cosine नियम

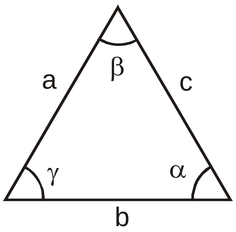
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$= 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$



$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

त्रिभुज के लिए sine नियम



$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

3. अवकलन (DIFFERENTIATION)

3.1. निश्चित अन्तर:

दो भौतिक राशियों के बीच के निश्चित अन्तर को Δ चिन्ह से प्रदर्शित करते है।

उदाहरण के लिए : y के दो मानों के बीच के अन्तर को Δy से निम्न तालिका में प्रदर्शित है –

y_2	100	100	100
y_1	50	99	99.5
$\Delta y = y_2 - y_1$	50	1	0.5

अतिसूक्ष्म अन्तर :

अति सूक्ष्म अन्तर का मतलब बहुत छोटा अन्तर होता है। इस अन्तर को 'Δ' के स्थान पर d चिन्ह से प्रदर्शित करते है।

उदाहरण के लिए y में अतिसूक्ष्म अन्तर को 'dy' से लिखते है।

यदि $y_2 = 100$ and $y_1 = 99.99999999$........

तो dy = 0.000000...................00001

3.2. अवकलन की परिभाषा :

अवकलन का दूसरा नाम अवकलज़ भी है। कल्पना कीजिए कि y, x का एक फलन है। अर्थात y = f(x), y के x के सापेक्ष अवकलन को f′(x) द्वारा प्रदर्शित करते है।

जहाँ $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ x के मान में अत्यल्प परिवर्तन dx है तथा इसके संगत y के मान में अत्यल्प परिवर्तन dy है।

y'	"y prime" or "y dash"	अच्छा व संक्षिप्त पर मुक्त चर को नहीं बताता।
$\frac{dy}{dx}$	"dy by dx"	चर को नामांकित करता है तथा d को अवकलन के लिए उपयोग करते है।
$\frac{df}{dx}$	"df by dx"	फलन के नाम को उजागर करता है।
$\frac{d}{dx}f(x)$	"d by dx of f"	अवकलन f पर की हुई एक संक्रिया है।
$D_x f$	"dx of f"	एक सामान्य संचालक संकेत।
$\dot{y}$	"y dot"	न्यूटन का एक संकेत जोकि अब समय अवकलन के रूप में, $\frac{dy}{dt}$ है।
$f'(x)$	f dash x	अत्यधिक प्रचलित संकेत। स्वतंत्र चर को नामांकित करता है तथा फलन के नाम को उजागर करता है।

संकेत : y = f(x) फलन के अवकलन को कई प्रकार से प्रदर्शित करते है। इनमें f′(x), सबसे प्रचलित संकेत है :

3.3. रेखा का ढाल :

किसी रेखा द्वारा धनात्मक x अक्ष की दिशा से वामावर्त दिशा में बनाये गये कोण का tan लेने पर उस रेखा का ढाल प्राप्त होता है ।

ढाल = $\tan\theta$ (प्रथम चतुर्थांश में $\tan\theta$ धनात्मक एवं द्वितीय में ऋणात्मक होता है)

चित्र-1 में ढाल धनात्मक है

$\theta < 90°$ (प्रथम चतुर्थांश)

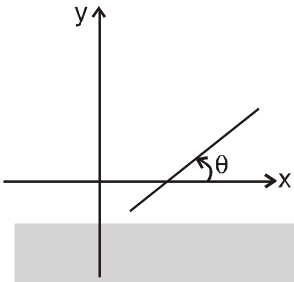


Figure - 1

चित्र-2 में ढाल ऋणात्मक है

$\theta > 90°$ (द्वितीय चतुर्थांश)

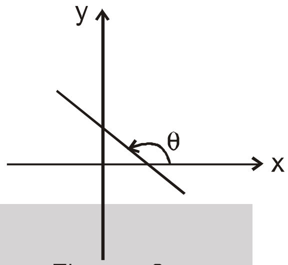


Figure - 2

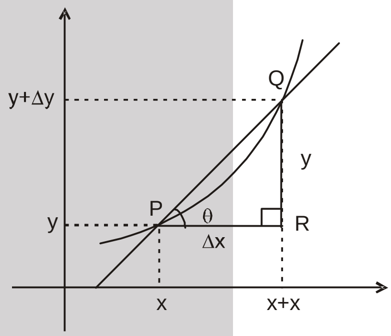
3.4. परिवर्तन की औसत दर :

दिए हुए फलन $y = f(x)$, के लिए अन्तराल $(x\ ,\ x + \Delta x)$ के बीच हम y के परिवर्तन की औसत दर x के सापेक्ष ज्ञात करने के लिए y के मान में परिवर्तन को $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, को अन्तराल की अवधि Δx से विभाजित करते है। अन्तराल $[x, x + \Delta x]$ में x के सापेक्ष y के परिवर्तन की

औसत दर = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

ज्यामितीय रूप में $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{QR}{PR} = \tan\theta$ = रेखा PQ का ढाल

अतः हम यह कह सकते है कि y के मान में x के सापेक्ष परिवर्तन की औसत दर रेखा PQ के ढाल के बराबर होती है।



त्रिभुज QPR में $\tan\theta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

3.5. फलन का अवकलन

हम जानते है कि y की x के सापेक्ष परिवर्तन की औसत दर = $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

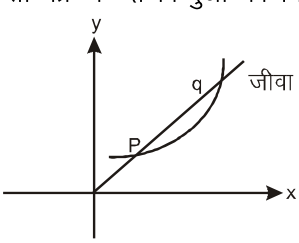
यदि $\Delta x \to 0$, हो तो यह फलन का अवकलज कहलाता है। $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

3.6. अवकलन का ज्यामितीय अर्थ :

भौतिकी में ग्राफ के अध्ययन के लिए अवकलन के ज्यामितीय अर्थो का महत्व अत्यधिक होता है। अवकलज के ज्यामितीय अर्थ को समझने के लिए हमें किसी वक्र की जीवां एवं स्पर्श रेखा का ज्ञान होना जरूरी है।

वक्र की जीवा एवं स्पर्श रेखा

जीवा : किसी वक्र के दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा वक्र की जीवां कहलाती है।



स्पर्श रेखा : वक्र के किसी बिन्दु को स्पर्श करके गुजरने वाली सरल रेखा स्पर्श रेखा कहलाती है। वक्र की स्पर्श रेखा जीवां की वह विशेष स्थिति है जब जीवां किन्ही दो निकटस्थ बिन्दुओं को काटती हो।

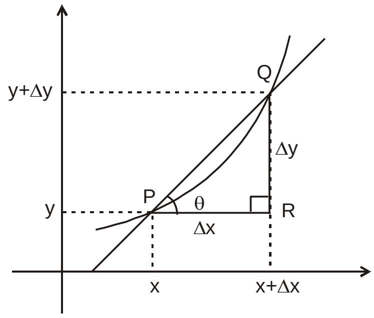


Figure - 1

प्रदर्शित चित्र-2 में यदि Δx के मान को धीरे–धीरे कम किया जाये तो बिन्दु Q बिन्दु P की ओर गति करेगा। यदि उपरोक्त प्रक्रम को निरन्तर किया जाये तो Δx का मान अत्यल्प हो जायेगा एवं जीवां PQ स्पर्श रेखा बन जायेगी। इसलिए

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

अतः हम यह कह सकते है कि y का x, के सापेक्ष अवकलन $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ बिन्दु P (x, y) पर स्पर्श रेखा के ढाल के बराबर होता है।

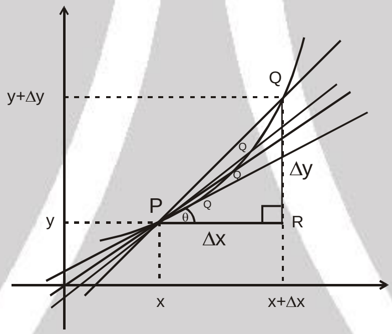


Figure - 2

$\tan\theta = dy/dx$

(उपरोक्त चित्र 1 में y की x से x + Δx तक परिवर्तन की औसत दर जीवां PQ के ढाल के बराबर होती है।)

3.7. अवकलन के लिए नियम

नियम संख्या 1 : अचर का अवकलन

अवकलन का प्रथम नियम है कि प्रत्येक अचर फलन का अवकलन शून्य है।

यदि c अचर है, तब $\frac{d}{dx}c = 0.$

Example 1. $\frac{d}{dx}(8) = 0$, $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\right) = 0$

नियम संख्या 2 : घात नियम

यदि n एक वास्तविक संख्या है, तब $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

घात नियम के उपयोग के लिए, हम मूल घातांक (n) में से एक 1 घटा देते है और परिणाम को n से गुणा कर देते है।

Example 2.

f	x	x^2	x^3	x^4	....
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	....

Example 3. (i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^3}\right) = 4\frac{d}{dx}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$.

Example 4. (a) $\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

फलन $x \geq 0$ के लिए परिभाषित है। अवकलन केवल $x > 0$ के लिए परिभाषित है।

(b) $\frac{d}{dx}(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$

फलन $x \geq 0$ के लिए परिभाषित है। अवकलन $x = 0$ पर परिभाषित नहीं हैं।

नियम संख्या 3 : अचर गुणांक नियम

यदि u,x का अवकलनीय फलन है और c एक अचर है तब $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$

विशेष रूप से, यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है, तब $\frac{d}{dx}(cx^n) = cn\,x^{n-1}$

Example 1. अवकलन सूत्र $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3(2x) = 6x$ दर्शाता है कि यदि हम $y = x^2$ के आरेख को पुनः मूल्यांकित करते है तो y-निर्देशांक को 3 से गुणा करते हैं, तब प्रत्येक बिन्दु पर ढाल को 3 से गुणा करते है।

Example 2. विशेष उपयोगी स्थिति एक अवकलनीय फलन के ऋणात्मक फलन का अवकलन, फलन के अवकलन का ऋणात्मक होता है। नियम 3 से, $c = -1$ देता है।

$$\frac{d}{dx}(-u) = \frac{d}{dx}(-1\cdot u) = -1\cdot\frac{d}{dx}(u) = -\frac{d}{dx}(u)$$

नियम संख्या 4 : योग नियम

दो अवकलनीय फलनों के योग का अवकलन उनके अवकलनों का योग होता है।

यदि u व v यह दोनों x के अवकलनीय फलन हो तो उनका योग u + v प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय होंगा, जहां u व v दोंनो उनके अवकलनों के अवकलनीय फलन है।

$$\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{d}{dx}[u + (-1)v] = \frac{du}{dx} + (-1)\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

योग नियम को , दो से अधिक फलनों के लिए और विस्तारित रूप से केवल परिमित संख्या के फलनों के योग के लिए प्रयुक्त कर सकते है। यदि u_1, u_2,.......u_n ,x के अवकलनीय फलन है, तब $u_1 + u_2 + ...+ u_n$ भी x का अवकलनीय फलन है और

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + ... + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + ... + \frac{du_n}{dx}.$$

Example 1. **(a)** $y = x^4 + 12x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x)$$

$= 4x^3 + 12$

(b) $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1)$$

$= 3x^2 + \frac{4}{3}.2x - 5 + 0 = 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5.$

ध्यान दें कि हम किसी भी बहुपदीय फलन का अवकलन एक के बाद एक अलग–अलग फलन का अवकलन करके ज्ञात कर सकते है, जैसा की उपरोक्त उदाहरण में बहुपदीय पदों का अवकलन किया गया है।

नियम संख्या 5 : गुणनफल नियम

यदि u व v, x पर अवकलनीय है तब uv के गुणनफल का अवकलन निम्न प्रकार से होता है।

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

uv के गुणनफल का अवकलन v के अवकलन का u गुणा व u के अवकलन का v गुणा का योग है। प्रारम्भिक संकेतों में, $(uv)' = uv' + vu'$

जबकि दो फलनों के योग का अवकलन उनके अवकलनों का योग है लेकिन दो फलनों के गुणनफल का अवकलन उनके अवकलन का गुणनफल नही होता है। इसके लिए,

$\frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, जबकि $\frac{d}{dx}(x).\frac{d}{dx}(x) = 1.1 = 1.$

Example 1. $y = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ का अवकलन ज्ञात कीजिए।

Solution : गुणनफन नियम से $u = x^2 + 1$ व $v = x^3 + 3$,

हम ज्ञात करते है $\frac{d}{dx}[(x^2+1)(x^3+3)] = (x^2 + 1)(3x^2) + (x^3 + 3)(2x)$

$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x = 5x^4 + 3x^2 + 6x.$

परिणामी अवकलन को दिये गये वास्तविक फलन को गुणा करके भी ज्ञात कर सकते है।

$y = (x^2 + 1)(x^3 + 3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3$

$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 + 6x.$

यह हमारी पहली गणना का परिमाण है। इस समय इस प्रकार के उदाहरणों के लिए यह नियम प्रयोग में लेते है।

Example 2. माना $y = uv$ फलन u व v का गुणनफल है। ज्ञात करो $y'(2)$ यदि $u(2) = 3$, $u'(2) = -4$, $v(2) = 1$, तथा $v'(2) = 2$

Solution : गुणनफन नियम से, $y' = (uv)' = uv' + vu'$,

अतः $y'(2) = u(2)v'(2) + v(2)u'(2) = (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2.$

नियम संख्या 6 : विभाजक नियम

यदि u व v, x पर अवकलनीय है तथा $v(x) \neq 0$, तो u/v, x पर अवकलनीय है।

तथा $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

दो अवकलनीय फलनों के गुणनफल का अवकलन उनके अवकलन के गुणनफल के समान नहीं होता। इसी प्रकार दो भाजक फलनों का अवकलन उनके अवकलनों का भाजक नहीं होता है।

Example 1. $y = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ का अवकलन ज्ञात करो।

Solution : हम विभाजक नियम लगाऐंगे $u = t^2 - 1$ तथा $v = t^2 + 1$:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^2+1).2t - (t^2-1).2t}{(t^2+1)^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2}$$

$$= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}.$$

नियम संख्या 7 : ज्या फलन का अवकलन

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

Example 1. (a) $y = x^2 - \sin x : \dfrac{dy}{dx} = 2x - \dfrac{d}{dx}(\sin x)$ अन्तर नियम

$= 2x - \cos x$

(b) $y = x^2 \sin x : \dfrac{dy}{dx} = x^2 \dfrac{d}{dx}(\sin x) + 2x \sin x$ गुणन नियम

$= x^2 \cos x + 2x \sin x$

(c) $y = \dfrac{\sin x}{x} : \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x.\dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x.1}{x^2}$ भाजक नियम

$= \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$

नियम संख्या 8 : कोज्या फलन का अवकलन

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

Example 1. (a) $y = 5x + \cos x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(5x) + \dfrac{d}{dx}(\cos x)$ योग का नियम

$= 5 - \sin x$

(b) $y = \sin x \cos x$

$\dfrac{dy}{dx} = \sin x \dfrac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \dfrac{d}{dx}(\sin x)$ गुणन का नियम

$= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

नियम संख्या 9 : कुछ त्रिकोणमिति फलनों के अवकलन

क्योंकि sin x तथा cos x अवकलित फलन है, संबंधित फलन

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$

x के उस प्रत्येक मान के लिए अवकलनीय है जिस पर वे परिभाषित है। उनके अवकलन भिन्न नियम (भाजक नियम) से निम्नलिखित सूत्रों के द्वारा दिया जाता है।

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \; ; \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\,\text{cosec}^2 x \; ; \qquad \frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = -\,\text{cosec } x \cot x$$

Example 1. dy/dx ज्ञात करो यदि $y = \tan x$

Solution : $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$

$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

Example 2. (a) $\frac{d}{dx}(3x + \cot x) = 3 + (\cot x) = \frac{d}{dx} 3 - \text{cosec}^2 x$

(b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sin x}\right) = \frac{d}{dx}(2\text{cosec } x) = 2\frac{d}{dx}(\text{cosec } x)$

$= 2(-\text{cosec } x \cot x) = -2\,\text{cosec } x \cot x$

नियम संख्या 10 : लघुगणकीय तथा चर घातांकी फलनों का अवकलन

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Example 1. $y = e^x . \log_e(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) . \log(x) + . \frac{d}{dx}[\log_e(x)]\, e^x \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^x . \log_e(x) + \frac{e^x}{x}$

नियम संख्या 11 : श्रृंखला नियम या "अंतः बाह्य" नियम

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

श्रृंखला नियम को निम्न प्रकार सोचने पर कुछ लाभ हो सकता है यदि $y = f(g(x))$, $\frac{dy}{dx} = f'[g(x)].g'(x)$.

शब्दों में : dy/dx प्राप्त करने के लिए पहले बाहरी फलन f को अवकलित कर g(x) को अकेला छोड़ देते है, इसके बाद आन्तरिक फलन को अवकलित कर गुणा कर देते है।

हम जानते है कि sin x तथा $x^2 - 4$, का अवकलन किस प्रकार किया जाता है, परन्तु अब हमें $\sin(x^2 - 4)$ जैसे मिश्रित फलनों का अवकलन करना है। इसको हम श्रृंखला नियम से कर सकते है जिसके अनुसार दो अवकलनीय फलनों से बने मिश्रित फलन का अवकलन उस बिन्दु पर उनके अवकलनों का गुणनफल होता है। श्रृंखला का नियम सभी अवकलन में सबसे अधिक प्रयुक्त किये जाने वाला अवकलन नियम है।

Solved Example

Example 1. फलन $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ दो फलनों $y = 2u$ तथा $u = 3x - 5$ का मिश्रण है। इन तीनों फलनों के अवकलन किस प्रकार सम्बन्धित है ?

Solution : हम जानते है कि $\frac{dy}{dx} = 6$, $\frac{dy}{du} = 2$, $\frac{du}{dx} = 3$.

चूंकि $6 = 2.3$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$

क्या यह दुर्घटना है ?

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

यदि हम अवकलन को परिवर्तन की दर समझते है तो हम महसूस कर सकते है कि यह सम्बन्ध सार्थक है। $y = f(u)$ तथा $u = g(x)$, यदि y में परिवर्तन की दर u में परिवर्तन की दर का दुगना तथा u में परिवर्तन की दर x से 3 गुणा हो तो y में परिवर्तन की दर x में परिवर्तन की दर से 6 गुणा तेज होगी।

Example 2. अवकलन करने के लिए हम कभी–कभी दो से अधिक बार भी श्रृंखला नियम प्रयुक्त करते है। यह एक उदाहरण लेते है। $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$

Solution : $g'(t) = \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t) = \sec^2(5 - \sin 2t). \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t)$

tan u का अवकलन
u = 5 – sin 2t के साथ

5 – sin u
का अवकलन u = 2t के साथ

$= \sec^2(5 - \sin 2t) . (0 - (\cos 2t) . \frac{d}{dt}(2t)$

$= \sec^2(5 - \sin 2t) . (-\cos 2t).2 = -2(\cos 2t) \sec^2(5 - \sin 2t)$

Example 3. (a) $\frac{d}{dx}(1 - x^2)^{1/4} = \frac{1}{4}(1 - x^2)^{-3/4}(-2x)$ $\quad u = 1 - x^2$ और $n = 1/4$

फलन [–1 , 1] पर परिभाषित है

$\frac{-x}{2(1 - x^2)^{3/4}}$

अवकलज केवल (–1 ,1) पर परिभाषित है

(b) $\frac{d}{dx}\sin 2x = \cos 2x \frac{d}{dx} 2x = \cos 2x . 2 = 2\cos 2x$

(c) $\frac{d}{dt}(A\sin(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t + \phi) \frac{d}{dt}(\omega t + \phi)$

$= A\cos(\omega t + \phi). \omega. = A\,\omega\cos(\omega t + \phi)$

नियम संख्या 12 : घात श्रृंखला नियम

यदि u(x) एक अवकलनीय फलन है तथा जहाँ n एक वास्तविक संख्या है तो u^n अवकलनीय होता है।

$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}, \quad \forall n \in R$

Example 1. (a) $\frac{d}{dx}\sin^5 x = 5\sin^4 x \frac{d}{dx}(\sin x)$ $\quad$ [u = sin x तथा n = 5]

$= 5\sin^4 x \cos x$

(b) $\frac{d}{dx}(2x + 1)^{-3} = -3(2x + 1)^{-4}\frac{d}{dx}(2x + 1)$ $\quad$ [u = 2x + 1, n = –3]

$= -3(2x + 1)^{-4}(2) = -6(2x + 1)^{-4}$

(d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x - 2}\right) = \frac{d}{dx}(3x - 2)^{-1}$ $\quad$ [u = 3x – 2 तथा n = –1]

$= -1(3x - 2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x - 2) = -1(3x - 2)^{-2}(3) = -\frac{3}{(3x - 2)^2}$

(d) में हम भाजक नियम से भी अवकलन प्राप्त कर सकते है।

Example 2. $\frac{d}{dx}(Ax+B)^n$ का मान ज्ञात कीजिए।

Solution : यहाँ u = Ax + B, du/dx = A

$\therefore$ $d/dx\,(Ax+B)^n = n(Ax+B)^{n-1}\,.\,A$

नियम संख्या 13 : रेडियन का डिग्री के साथ अवकलन

$$\frac{d}{dx}\sin(x^\circ) = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x^\circ)\,.$$

3.8. f}vodyu

यदि f एक अवकलनीय फलन है तो इसका अवकलज f' भी एक फलन होगा। इसलिये f' का भी स्वयं का अवकलज हो सकता है जिसे $(f')' = f''$ से व्यक्त करते हें। यह नया फलन f'', f का द्वितीय अवकलज कहलाता है, क्योंकि ये f के अवकलज का अवकलज है। लेबनीज के संकेतांकों का उपयोग करते हुए, हम $y = f(x)$ का द्वितीय अवकलज ऐसे लिख सकते हैं : $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$

दूसरे संकेतांक है $f''(x) = D_2 f(x) = D^2 f(x)$

Solved Example

Example 1. यदि f(x) = x cos x, तो f″(x) ज्ञात करो।

Solution : गुणन नियम से, हम जानते हैं कि $f'(x) = x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\,\frac{d}{dx}(x) = -x\sin x + \cos x$

f″(x) ज्ञात करने के लिये हम $f'(x)$ का अवकलन करते हैं :

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-x\sin x + \cos x) = -x\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(-x) + \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= -x\cos x - \sin x - \sin x = -x\cos x - 2\sin x$$

द्वितीय अवकलज का अर्थ

हम $f''(x)$ की व्याख्या वक्र $y = f'(x)$ के बिन्दु $(x, f'(x))$ पर झुकाव (slope) से कर सकते है। दूसरे शब्दों में, ये वास्तविक वक्र y = f(x) के झुकाव में परिवर्तन की दर है। सामान्यतया हम द्वितीय अवकलज की व्याख्या वास्तविक वक्र के झुकाव में परिवर्तन की दर से कर सकते हैं।

यदि s = s(t) एक वस्तु का स्थिति सदिश है जो कि एक सरल रेखा में गति करती है तो हम जानते हैं कि इसका प्रथम अवकलज वस्तु के वेग v(t) को समय के फलन के रूप में व्यक्त करता है।

$v(t) = s'(t) = ds/dt$

समय के सापेक्ष वेग की तात्क्षणिक परिवर्तन की दर को वस्तु का त्वरण a(t) कहते हैं। अतः त्वरण फलन, वेग फलन का अवकलज है, इसलिये ये स्थिति फलन का द्वितीय अवकलज है :

$a(t) = v'(t) = s''(t)$ या लेबनीज के संकेतों में, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

Example 2. एक कण की स्थिति एक समीकरण के द्वारा नीचे दी गई है, $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ यहाँ t से. में तथा s मी. में है

(a) समय t पर त्वरण ज्ञात करो ? 4 से. के पश्चात् त्वरण क्या होगा ?

Solution : (a) वेग फलन स्थिति फलन का अवकलज है इसीलिये

$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t \Rightarrow v(t) = ds/dt = 3t^2 - 12t + 9$

त्वरण वेग फलन का अवकलज है इसीलिये :

$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \Rightarrow a(4) = 6(4) - 12 = 12\ m/s^2$

3.9. अवकलज के अनुप्रयोग

3.9.1 अवकलन : (परिवर्तन की दर)

'y' में 'x' के सापेक्ष परिवर्तन की दर = dy/dx

उदाहरण के लिए :

(i) v = dx/dt इसका मतलब वेग 'v' ; विस्थापन 'x' की समय 't' के सापेक्ष परिवर्तन की दर है।

(ii) a = dv/dt इसका मतलब त्वरण 'a' ; वेग 'v' की समय 't' के सापेक्ष परिवर्तन की दर है।

(iii) F = dp/dt इसका मतलब बल 'F' ; संवेग 'p' की समय 't' के सापेक्ष परिवर्तन की दर है।

(iv) τ = dL/dt इसका मतलब बलआघूर्ण 'τ' ; कोणीय संवेग 'L' की समय 't' के सापेक्ष परिवर्तन की दर है।

(v) Power (शक्ति) = dW/dt इसका मतलब शक्ति 'P' ; कार्य 'W' की समय 't' के सापेक्ष परिवर्तन की दर है।

(vi) I = dq/dt इसका मतलब धारा 'I' ; आवेश 'q' की समय 't' के सापेक्ष परिवर्तन की दर है।

Solved Example

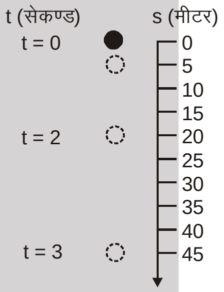
Example 1. वृत्त का क्षेत्रफल A उसके व्यास से $A = \frac{\pi}{4}D^2$ समीकरण द्वारा संबंधित है। व्यास के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर कितनी तेज होगी, जब व्यास 10 m है ?

Solution : व्यास के सापेक्ष क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर (तात्क्षणिक) $\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4}2D = \frac{\pi D}{2}$ जब D = 10 m हो तो क्षेत्रफल परिवर्तन की दर $(\pi/2)\, 10 = 5\pi\ m^2/m$ है। इसका अर्थ है कि व्यास में छोटा ΔD m परिमाण का परिवर्तन होने पर वृत्त के क्षेत्रफल में लगभग $5\pi\, \Delta D\ m^2$ का परिवर्तन होगा।

Example 2. प्रायोगिक व सैद्धान्तिक जाँच दर्शाती है कि विरामावस्था से एक वस्तु को छोड़ने पर दूरी s समय t के वर्ग के समानुपाती होती है, यदि गिरने के दौरान लगा समय t है तो इसे हम व्यक्त करते है।

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

जहाँs दूरी है और g पृथ्वी के गुरूत्व के कारण त्वरण है। यह समीकरण निर्वात के लिए है, जहाँवायु का प्रतिरोध नही है, लेकिन यह अधिक घनत्व, भारी वस्तु के गिरने के मॉडल के निकट है।



एक गेंद विरामावस्था से गिरती है

चित्र में एक भारी गैंद बेंयरिंग को t = 0 समय पर मुक्त रूप से गिरता हुआ दर्शाया गया है।

(a) प्रथम 2 सेकण्ड में गैंद द्वारा गिरी हुई दूरी मीटर में है।

(b) तब इसका वेग, चाल व त्वरण क्या है

Solution :

(a) मुक्त रूप से गिरने की समीकरण $s = 4.9\, t^2$ है। प्रथम 2 sec. में गैंद गिरती है।

$s(2) = 4.9(2)^2 = 19.6$ m,

(b) किसी समय t पर वेग, विस्थापन का अवकलन है।

$$v(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}(4.9t^2) = 9.8\, t.$$

t = 2 पर वेग है

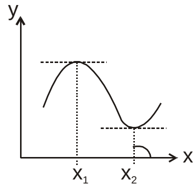
v(2) = 19.6 m/sec

नीचे की ओर (बढ़ता हुआ) t = 2 पर चाल

चाल = |v(2)| = 19.6 m/sec.

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 9.8\ m/s^2$$

3.9.2 उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ

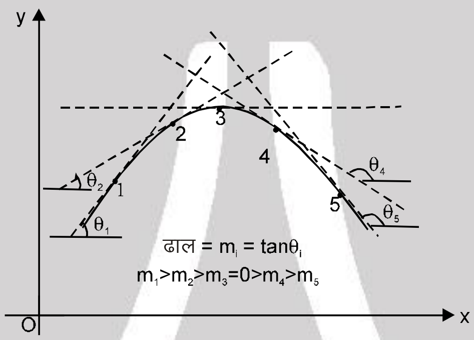


माना राशि y दूसरी राशि x पर चित्रानुसार निर्भर करती है। यह x_1 पर अधिकतम व x_2 पर न्यूनतम हो जाती है। वक्र के इन बिन्दुओं पर खींची गई स्पर्श रेखा x–अक्ष के समान्तर होती है। अतः इसकी प्रवणता $\tan\theta = 0$ है। इसलिए उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ के लिए
प्रवणता = dy/dx = 0.

उच्चिष्ठ

उच्चिष्ठ मान से ठीक पहले ढाल (प्रवणता) धनात्मक है तथा उच्चिष्ठ मान पर ढाल शून्य है तथा उच्चिष्ठ मान के ठीक बाद ढाल ऋणात्मक है। अतः उच्चिष्ठ पर dy/dx, घटती है। अतः उच्चिष्ठ पर dy/dx के परिवर्तन की दर ऋणात्मक है

अर्थात् उच्चिष्ठ पर $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) < 0$



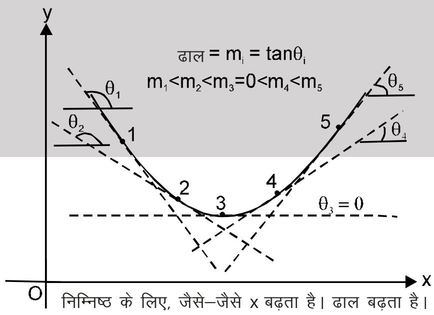
उच्चिष्ठ के लिए, जैसे–जैसे x बढ़ता है। ढाल घटता है।

राशि $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ढाल के परिवर्तन दर बताती है। यह $\frac{d^2y}{dx^2}$ द्वारा लिखी जाती है।

उच्चिष्ठ के लिए शर्त :– (a) $\frac{dy}{dx} = 0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

निम्निष्ठ

इसी प्रकार, निम्निष्ठ पर ढाल ऋणात्मक से परिवर्तित होकर धनात्मक हो जाती है। इस प्रकार के निम्निष्ठ बिन्दु पर ढाल बढ़ती है। अतः निम्निष्ठ पर $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0$



निम्निष्ठ के लिए, जैसे–जैसे x बढ़ता है। ढाल बढ़ता है।

निम्निष्ठ के लिये शर्ते : (a) $\frac{dy}{dx} = 0$ (b) $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

अक्सर भौतिक स्थिति से भी यह स्पष्ट हो जाता है कि राशि उच्चिष्ठ है या निम्निष्ठ है। तब $\frac{d^2y}{dx^2}$ का परिक्षण छोड़ सकते है।

Solved Example

Example 1. कण की स्थिति समय के साथ फलन $x = 5t^2 - 9t + 3$ के अनुसार दी जाती है तो स्थिति निर्देशांक का अधिकतम मान क्या होगा ? ग्राफ भी बनाओ।

Solution : $x = 5t^2 - 9t + 3$

$$\frac{dx}{dt} = 10t - 9 = 0$$

$\therefore \quad t = 9/10 = 0.9$

परीक्षण करो कि यह उच्चिष्ठ है या निम्निष्ठ है $\frac{d^2x}{dt^2} = 10 > 0$

$\therefore \quad t = 0.9$ पर निम्निष्ठ है।

सीमान्त मानों पर परीक्षण करो।

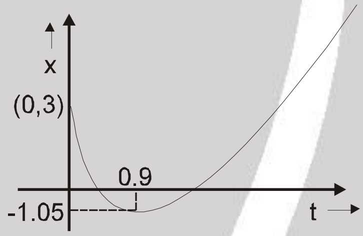
जब $\quad t = 0 ; \quad x = 3$

$\quad t = \infty ; \quad x = \infty$

अतः, अधिकतम स्थिति निर्देशांक का अस्तित्व नहीं है।

ग्राफ

समी० मे $t = 0.9$ रखने पर $x = 5(0.9)^2 - 9(0.9) + 3 = -1.05$



NOTE : यदि t^2 का गुणांक धनात्मक हो तो वक्र का मुँह ऊपर की तरफ खुला होगा।

3.10. अवकलन के अनुप्रयोग पर आधारित उदाहरण

Example 1. क्या वक्र $y = x^4 - 2x^2 + 2$ कोई क्षैतिज स्पर्श रेखा रखता है ? यदि हाँ, तो कहाँ पर?

Solution : यदि क्षैतिज स्पर्श रेखा होगी तो यह वहाँ पर होगी जहाँ ढाल (dy/dx) शून्य हो। अतः इन बिन्दुओं की गणना करते हैं

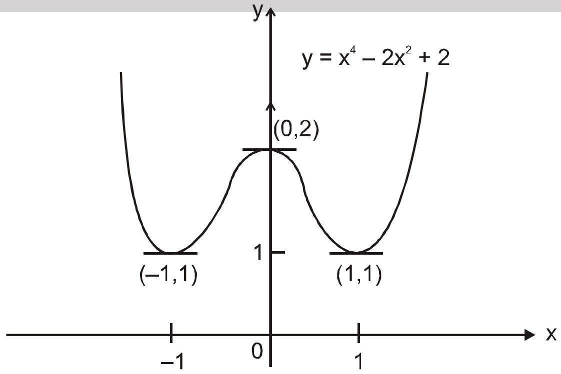
1. dy/dx की गणना : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$

2. x के लिए समीकरण को हल करें : $\frac{dy}{dx} = 0$: $4x^3 - 4x = 0$

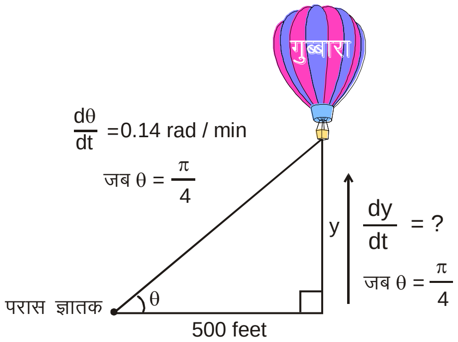
$4x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0, 1, -1$

वक्र $y = x^4 - 2x^2 + 2$, $x = 0, 1$ व -1 पर क्षैतिज स्पर्श रेखा रखता है। वक्र पर संबंधित बिन्दु निम्न है। (0, 2) (1, 1) व (–1, 1)। चित्र देखें



Example 2. जमीन से सीधे ऊपर उठते हुए गर्म वायु के गुब्बारे को उड़ान बिदु से 500 ft दूरी पर स्थित एक परास ज्ञातक यंत्र द्वारा अनुरेखित (प्रेक्षित) किया जाता है। जिस क्षण परास ज्ञातक का उन्नयन कोण $\pi/4$ है, उस समय कोण 0.14 रेडियन/मिनिट की दर से बढ़ रहा है। इस क्षण गुब्बारा कितनी तेजी से ऊपर जा रहा है।



Solution : हम प्रश्न का उत्तर छह पदों में देंगे।

☞ **पद 1 :** चित्र बनाए तथा चर व नियतांको के नाम लिखे। चित्र में चर θ = धरातल के साथ परास ज्ञातक का कोण (रेडियन) है। y = गुब्बारे की ऊँचाई (फीट).
माना की t समय को बताता है तथा θ व y, t के अवकलनीय फलन है चित्र में एक नियतांक (s) उड़ान बिन्दु सें परास ज्ञातक की दूरी है इसे कोई विशेष संकेत देने की आवश्यकता नही है।

☞ **पद 2 :** अतिरिक्त संख्यात्मक सूचना लिखे। $\frac{d\theta}{dt}$ = 0.14 रेडियन/मिनिट जब $\theta = \pi/4$

☞ **पद 3 :** जो ज्ञात करने के लिए पूछा है उसे लिखे। जब $\theta = \pi/4$ तब y का dy/dt हमें चाहिए।

☞ **पद 4 :** चर y व θ को सम्बंधित करने वाली समीकरण ज्ञात करे।

$$\frac{y}{500} = \tan\theta, \quad \text{या } y = 500 \tan\theta$$

☞ **पद 5 :** श्रंखला नियम का उपयोग कर t के सापेक्ष अवकलित करने पर परिमाण हमें dy/dt (जो हमें चाहिए) का $d\theta/dt$ (जो हमे ज्ञात है) के साथ सम्बन्ध दर्शाता है।

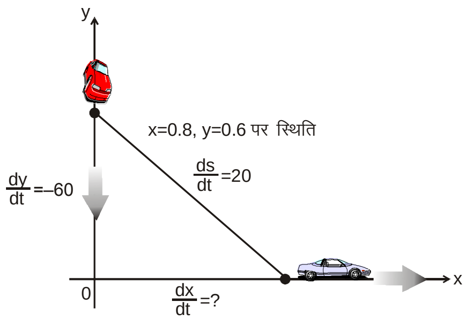
$$\frac{dy}{dt} = 500 \sec^2\theta \, \frac{d\theta}{dt}$$

☞ **पद 6 :** $\theta = \pi/4$ के साथ गणना करने पर $d\theta / dt = 0.14$, dy/dt ज्ञात करने के लिए

$$\frac{dy}{dt} = 500(0.14) = \left(\sqrt{2}\right)^2 (1000)\ (0.14) = 140\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

अतः प्रश्न में दिए हुए क्षण पर, गुब्बारा 140 फीट/मिनिट की दर से उठ रहा है।

Example 3. राजमार्ग पर एक पुलिस क्रुजर एक तीव्रगति कार जो कोने से घूमकर अब सीधे पूर्व दिशा में दौड़ रही है को पकड़ने के लिए उत्तर दिशा वाले मार्ग के लम्बवत् प्रतिच्छेद की ओर अग्रसर है। जब क्रुजर प्रतिच्छेद बिन्दु से उत्तर दिशा में 0.6 m है तो कार पूर्व में 0.8 m है। पुलिस रेडार से ज्ञात करती है कि कार व उनके मध्य की दूरी 20 mph से बढ़ रही है। यदि मापन के क्षण क्रुजर 60 mph से गतिमान है तो कार की चाल ज्ञात करो।



Solution : हम आधारभूत प्रणाली के पदों को लेते है।

☞ **पद 1 :** चित्र एवं चर : निर्देश तंत्र में हम कार व क्रुजर को देखते है धनात्मक x-अक्ष को पूरब राजमार्ग तथा धनात्मक y-अक्ष को उत्तर राजमार्ग की ओर लेने पर (चित्र)।

माना की t समय को प्रदर्शित करता है तथा x = समय t पर कार की स्थिति

y = समय t पर क्रुजर की स्थिति

s = समय t पर कार व क्रुजर के मध्य दूरी

माना की x, y तथा s ; t के अवकलनीय फलन है।

$x = 0.8$ m, $y = 0.6$ m, $\frac{dy}{dt} = -60$ mph, $\frac{ds}{dt} = 20$ mph

(dy/dt ऋणात्मक है क्योंकि y घट रहा है।)

☞ **पद 2 :** $\frac{dx}{dt}$ को ज्ञात करना है।

☞ **पद 3 :** चर $s^2 = x^2 + y^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से) के द्वारा एक दूसरे से सम्बन्धित है।

($s = \sqrt{x^2+y^2}$ समीकरण भी ले सकते है।)

☞ **पद 4 :** t के सापेक्ष अवकलन करने पर $2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$ श्रृंखला नियम

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

☞ **पद 5 :** x = 0.8, y = 0.6, dy/dt = – 60, ds/dt = 20 के लिए dx/dt हल करो।

$$20 = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(0.8)^2+(0.6)^2}}_{1}}\left(0.8\frac{dx}{dt} + (0.6)(-60)\right)$$

$$20 = 0.8\frac{dx}{dt} - 36 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{20+36}{0.8} = 70$$

प्रश्न में इस क्षण पर कार की चाल 70 mph है।

4. समाकलन (INTEGRATION)

गणित में प्रत्येक गणितीय प्रक्रिया के लिये उसकी व्युत्क्रम प्रक्रिया परिभाषित होती है।

उदाहरण के लिये – योग की व्युत्क्रम प्रक्रिया घटाना (बाकी) है, गुणन की व्युत्क्रम प्रक्रिया भाग है और वर्ग की व्युत्क्रम प्रक्रिया वर्गमूल है। इसी तरह अवकलन की व्युत्क्रम प्रक्रिया भी होती है, जिसे समाकलन कहा जाता है।

4.1. समाकलन अथवा अनिश्चित समाकलन

परिभाषा :

एक फलन F(x), f(x) का प्रति अवकलन गुणांक है यदि $F'(x) = f(x)$

सभी x जो की f परास में है। x के सापेक्ष समाकलन f के सभी अनिश्चित समाकलनों के समुच्चयों को निम्न प्रकार प्रदर्शित करते है।

फलन समाकलनीय है।

x समाकलन का चर है।

समाकलन का चिन्ह

$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{f \text{ का समाकलन}}$$

चिन्ह $\int$ समाकलन चिन्ह है। f समाकलित फलन तथा x समाकलन का चर है।

उदाहरण के लिए यदि $f(x) = x^3$ तब $f'(x) = 3x^2$ अतः $3x^2$ का समाकल x^3 है।

इसी तरह यदि $f(x) = x^3 + 4$ है तब $f'(x) = 3x^2$ अतः $3x^2$ का समाकल $x^3 + 4$ है।

$3x^2$ का सामान्य (general) समाकल $x^3 + C$ है जहाँ C नियतांक है।

किसी फलन f का समाकलन (F) तथा दूसरे समाकलन को (F) से नियतांक से फर्क किया जाता है। इसे समाकलन में निम्न प्रकार से प्रदर्शित करेंगे :

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad ......(i)$$

C को समाकलन नियतांक या कोई नियतांक कहते हैं समीकरण (i) को पढ़ सकते हैं कि इसे 'f' का x के साथ अनिश्चित समाकलन F(x) + C से पढ़ते हैं। जब हमें F(x) + C, प्राप्त होता है तो इसे f का समाकलन कहते हैं।

Solved Example

Example 1. $\int$ 2x dx की गणना करो

Solution : $\int 2x\,dx = x^2 + C$

(2x का अवकलन गुणांक: x^2; एक नियतांक: C)

सूत्र $x^2 + C$ के सभी समाकलन गुणांक 2x है। फलन $x^2 + 1$, $x^2 - \pi$, तथा $x^2 + \sqrt{2}$ सभी 2x के समाकलन गुणांक हैं।

4.2. समाकलन सूत्र (Rules for Integration)

अनिश्चित समाकलन	व्युत्क्रम अवकलनीय सूत्र
1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$, n परिमेय	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$
2. $\int dx = \int 1dx = x + C$ (विशिष्ट स्थिति)	$\frac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\int \sin(Ax+B)dx = \frac{-\cos(Ax+B)}{A} + C$	$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$
4. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$
5. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
6. $\int \mathrm{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$	$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \mathrm{cosec}^2 x$
7. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$	$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$
8. $\int \mathrm{cosec}\, x \cot x\, dx = -\mathrm{cosec}\, x + C$	$\frac{d}{dx}(-\mathrm{cosec}\, x) = \mathrm{cosec}\, x \cot x$
9. $\int \frac{1}{(ax+b)} = \frac{1}{a}\ell n(ax+b) + C$	

Solved Example

Example 1. उपरोक्त सूत्रों पर आधारित उदाहरण :

(a) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$ — Formula 1 with n = 5

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$ — Formula 1 with n = –1/2

(c) $\int \sin 2x\, dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C$ — Formula 2 with k = 2

(d) $\int \cos\frac{x}{2} dx = \int \cos\frac{1}{2} x dx = \frac{\sin(1/2)x}{1/2} + C = 2\sin\frac{x}{2} + C$ — Formula 3 with k = 1/2

Example 2. **सत्य :** $\int$ x cosx dx = x sin x + cos x + C

कारण : दाहिने सिरे के अवकलन गुणांक को समाकलित करने पर :

परीक्षण : $\frac{d}{dx}$ (x sin x + cos x + C) = x cos x + sin x – sin x + 0 = x cos x.

असत्य : $\int$ x cosx dx = x sin x + C

कारण : दाहिने सिरे के अवकलन गुणांक को समाकलित करने पर :

परीक्षण : $\frac{d}{dx}$ (x sin x + C) = x cos x + sin x + 0 x cos x

4.3. समाकलन का नियम

नियम संख्या 1 : नियतांक गुणन नियम

फलन f के अचर गुणांक kf का समाकलन, फलन f के समाकलन का k गुणा हो जाता है।

$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ है।

यह f प्रतिअवकलन का k गुना हो। जहाँ k एक नियतांक है।

Example 1. समाकलन नियतांक को फिर से लिखने पर

$\int$ 5 sec x tan x d x = $\int$ 5 sec x tan x d x — नियम 1

= 5 (sec x + C) — सूत्र 6

= 5 sec x + 5C — पहला रूप

= 5 sec x + C´ — छोटा रूप, जहाँ C' = 5C है।

सामान्य रूप–अभाज्य नहीं क्योंकि स्वैच्छिक नियतांक का 5 गुना भी नियतांक होगा हम इसे 'C' नाम देते हैं।

उपयुक्त सभी उदाहरण से समी. f (x) = 5 sec x tan x. के समाकलन दिये हैं। अतः प्रत्येक सही है। इसमें से सबसे सरल तथा साधारण उपयोग में

$\int$ 5 sec x tan x d x = 5 sec x + C.

जैसे जोड़ व घटाना नियम में हम सभी फलन को जोड़ व घटाने के पदों में अवकलन करते हैं उसी प्रकार समाकलन में भी करते हैं। अतः हम समाकलन नियतांकों को जोड़कर एक आखिर में अन्तिम समाकलन नियतांक रख देते हैं।

नियम संख्या 2 : योग तथा अन्तर नियम

एक फलन योग या अन्तर (f ± g) का समाकलन यदि और केवल यदि यह इनके समाकलन f व समाकलन g के योग या अन्तर के बराबर होता है।

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Solved Example

Example 1. क्रमागत पदों में समाकलन ज्ञात करो।

$$\int (x^2 - 2x + 5)\, dx.$$

Solution : यदि $(x^3/3) - x^2 + 5x$ को $x^2 - 2x + 5$, का अवकलन गुणांक मानें तो समाकलन -

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \overbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}^{\text{प्रतिअवकलन}} + C. \quad \text{(स्वैच्छिक नियतांक)}$$

समाकलन के लिए प्रत्येक पद को जोड़ तथा अन्तर नियम से मानने पर :

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx = \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3.$$

यह सूत्र आवश्यकता से अधिक जटिल हैं यदि हम C_1, C_2 और C_3 को एक नियतांक $C = C_1 + C_2 + C_3$, में संयोजित करें, तो सूत्र इस रूप में सरल होता है

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

और फिर भी यह यहाँ सभी समाकलन देता है। इस कारण से हमारा सुझाव है कि आप सीधे अंतिम रूप तक जायें, हांलाकि आप उन्हें एक–एक पद का समाकलन करके करें, लिखिये -

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C.$$

प्रत्येक भाग के लिए सरलतम समाकलन निकालिये और अंत में नियतांक जोड़ दें।

Example 2. कभी–कभी हम जिन समाकलनों का मान निकालना नहीं जानते हैं उन्हें ऐसे समाकलनों में रूपांतरित करने से जिनका हम मान निकालना जानते हैं, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का प्रयोग कर सकते हैं। $\sin^2 x$ और $\cos^2 x$ के समाकलन सूत्र अधिकांशतः प्रयोग में आते हैं -

(a) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

(b) $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$ जैसा कि भाग (a) में है, लेकिन चिन्ह परिवर्तन के साथ,

Example 3. एक पिण्ड का वेग इसके त्वरण और प्रारम्भिक वेग की सहायता से निकालिये। पृथ्वी की सतह के पास गुरूत्वीय त्वरण 9.8 मी/से^{2} है। इसका अर्थ यह है कि निर्वात में स्वतंत्रतापूर्वक गिरते हुए पिण्ड के वेग v के बदलने की दर $\frac{dv}{dt}$ = 9.8 मी/से^{2}. होती है। यदि पिण्ड को विरामावस्था से गिराया जाये, तो इसके छोड़े जाने के t सेकण्ड बाद इसका वेग क्या होगा?

Solution : गणितीय रूप में, हम प्रारम्भिक मान समीकरण को हल करना चाहते हैं, जिसका अवकल समीकरण है : $\frac{dv}{dt} = 9.8$

प्रारम्भिक स्थिति : $\upsilon = 0$ जब $t = 0$ (इसे $v(0) = 0$ से दिखाया जाता है) हम पहले अवकल समीकरण को दोनों ओर t के सापेक्ष समाकलित करते हैं :

$\frac{dv}{dt} = 9.8$ अवकल समीकरण

$\int \frac{dv}{dt} dt = \int 9.8 dt$ t के सापेक्ष समाकलन करो

$v + C_1 = 9.8t + C_2$ समाकल के मान आ गये

$v = 9.8t + C.$ नियतांकों को एक में संयोजित करो

यह अंतिम समीकरण यह बताती है कि पिण्ड का वेग t सेकण्ड गिरने पर 9.8t + C मी/से. है। C के मान के लिए : हम इसे प्रारम्भिक स्थिति से निकालते हैं :

$$v = 9.8t + C$$
$$0 = 9.8(0) + C \quad \upsilon(0) = 0$$
$$C = 0.$$

निष्कर्ष : पिण्ड का वेग t सेकण्ड गिरने पर $v = 9.8t + 0 = 9.8t$ m/sec.

फलन f(x) का अनिश्चित समाकलन F(x) + C अवकल समीकरण dy/dx = f(x) का व्यापक हल देता है। व्यापक हल समीकरण के सभी हल देता है। (C के प्रत्येक मान के लिए यह अनन्त हल है) हम अवकल समीकरण को इसके व्यापक हल को निकालकर हल करते हैं। तब हम प्रारम्भिक मान समीकरण को विशिष्ट हल निकालकर हल करते हैं जो प्रारम्भिक शर्त $y(x_0) = y_0$ को संतुष्ट करता है। (y का मान y_0 है जब $x = x_0$.).

नियम संख्या 3 : समाकलन में प्रतिस्थापन नियम

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(u)du$ 1. प्रतिस्थापन $u = g(x)$, $du = g'(x)\, dx$.

$= F(u) + C$ 2. f(u) के एक समाकल को निकालकर मान निकालिये।

$= F(g(x)) + C$ 3. u को g(x) से प्रतिस्थापित करने पर।

Example 1. $\int (x+2)^5 dx$ का मान निकालिये

हम इस समाकल को इस रूप में रख सकते हैं

$\int u^n du$

यदि हम प्रतिस्थापित करें

$u = x + 2$, $du = d(x + 2) = d/dx\,(x + 2).\, dx = 1.dx = dx.$

तब $\int (x+2)^5 dx = \int u^5 du$ $u = x + 2$, $du = dx = u^6/6 + C$

n = 5 के साथ नियम 3 के प्रयोग से समाकलन करने पर

$= \frac{(x+2)^6}{6} + C.$ u को x + 2 से प्रतिस्थापित करने पर

Example 2. $\int \sqrt{1+y^2} \cdot 2y\, dy$ ज्ञात करो।

Solution: $\int \sqrt{1+y^2} \cdot 2y\, dy = \int u^{1/2} du$ माना $u = 1 + y^2$, $du = 2y\, dy$.

$= \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1}$ n = 1/2 के साथ नियम 3 के प्रयोग से समाकलन करने पर

$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$ अधिक सरल रूप

$= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} = C$ u को $1 + y^2$ से प्रतिस्थापित करने पर

Example 3. $\int \cos\ (7\theta + 5)\ d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{7} du$ माना u = 7θ + 5, du = 7dθ, (1/7) du = dθ.

$= \frac{1}{7}\int \cos u du$ 1/7 को बाहर निकालने पर अब समाकल मानक रूप में है

$= \frac{1}{7}\sin u + C$ u के सापेक्ष समाकलन करने पर

$= \frac{1}{7}\sin\ (7\theta + 5) + C$ u को 7θ + 5 से प्रतिस्थापित करने पर

Example 4. $\int x^2 \sin(x)^3 dx = \int \sin(x)^3 \cdot x^2\ dx$

$= \int \sin u \cdot \frac{1}{3} du$ माना $u = x^3$, $du = 3x^2dx$ $(1/3)\ du = x^2dx$.

$= \frac{1}{3}\int \sin u du$ $= \frac{1}{3}\ (-\cos u) + C$ u के सापेक्ष समाकलन करने पर

$= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C$ u को x^3 से प्रतिस्थापित करने पर

Example 5. $\int \frac{1}{\cos^2 2\theta} d\theta = \int \sec^2\ 2\theta\ d\theta$ $\therefore$ $\sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta}$

$= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2} du$ माना u = 2θ, du =2dθ, dθ = (1/2)du.

$= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\ du$ $= \frac{1}{2}\tan u + C$ समीकरण (4) का प्रयोग करके समाकलन करने पर

$= \frac{1}{2}\tan 2\theta + C$ u को 2θ से प्रतिस्थापित करने पर

वापस देखें : $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\tan 2\theta + C\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\theta}\ (\tan 2\theta) + 0$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sec^2 2\theta \cdot \frac{d}{d\theta} 2\theta\right)$ श्रृंखला नियम

$= \frac{1}{2} \cdot \sec^2 2\theta \cdot 2 = \frac{1}{\cos^2 2\theta}$.

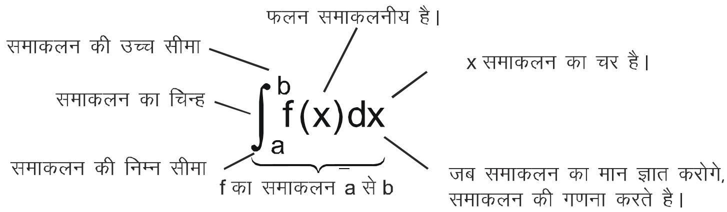
Example 6. $\int \sin^4 t \cos t\, dt = \int u^4 du$ माना u = sin t, du = cos t dt.

$= \frac{u^5}{5} + C$ u के सापेक्ष समाकलन करने पर

$= \frac{\sin^5 t}{5} + C$ u को प्रतिस्थापित करने पर

प्रतिस्थापन विधि की सफलता प्रतिस्थापन के ढूंढने पर करती है, समाकलन में परिवर्तन यह प्रदर्शित करता है कि हम जिसका समाकलन सीधे ही जानते हैं उनमें से कोई एक प्रकार बन जाये। यदि पहला प्रतिस्थापन असफल हो जाए, हम दुबारा कोशिश करके अतिरिक्त प्रतिस्थापन से समाकलन को सरल कर हल करते हैं।

4.4. निश्चित समाकलन या सीमा के साथ समाकलन (definite integration or integration with limits)



$\int_a^b f(x)\,dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a)$ यहाँ g(x), f(x) का समाकलन है अर्थात् $g'(x) = f(x)$

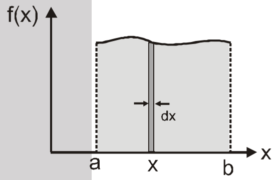
Solved Example

Example 1. $\int_{-1}^{4} 3dx = 3\int_{-1}^{4} dx = 3[x]_{-1}^{4} = 3[4 - (-1)] = (3)\,(5) = 15$

$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = -0 + 1 = 1$

4.5. निश्चित समाकल के अनुप्रयोग

वक्र के क्षेत्रफल की गणना



ग्राफ जो कि चित्र में दर्शाया गया है से यदि हम संपूर्ण क्षेत्रफल को छोटे–छोटे dx चौड़ाई के अनन्त अल्पांशों में विभाजित कर दें तथा हम अल्पांश जो कि dx चौड़ाई का है तथा x पर स्थित है को लेते हैं तो इस अल्पांश का अल्प क्षेत्रफल $dA = f(x)\,dx$

तो वक्र तथा x–अक्ष के मध्य का सम्पूर्ण क्षेत्रफल = सारे अल्पांशों का योग = $\int_a^b f(x)dx$

माना f(x) 0 में [a,b] में सतत् है। f के आरेख व x-अक्ष के मध्य क्षेत्रफल है।

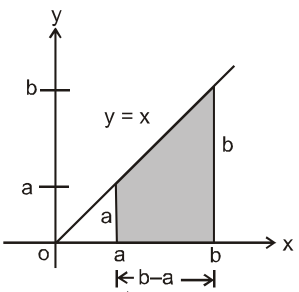
$A = \int_a^b f(x)\,dx$

Solved Example

Example 1. क्षेत्रफल के उपयोग से निश्चित समाकल की गणना करो।

$\int_a^b x\,dx \quad 0 < a < b.$

Solution : हम वक्र $y = x$, $a \le x \le b$ (चित्र) के नीचे के क्षेत्र को आरेखित करते है और देखते है कि समलम्ब चतुर्भज जिसकी ऊँचाई (b – a) व आधार a एवं b है। समाकलन का मान इस समलम्ब चतुर्भज का क्षेत्रफल है।



उदाहरण में छायाकिंत भाग

$\int_a^b x\,dx = (b - a)\cdot \int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$

☞ ध्यान दे कि $x^2/2$, x का प्रति अवकलन है,प्रति अवकलन व योगफल के मध्य सम्बन्ध से ज्ञात होता है।

Example 2. $I = \int_0^{2\pi} \sin(\theta+\phi).d\theta$ जहाँ ϕ नियतांक है। तो I का मान होगा :

(A) धनात्मक हो सकता है (B) ऋणात्मक हो सकता है

(C) शून्य हो सकता है (D*) ϕ के किसी भी मान के लिए सदैव शून्य होगा

Solution : $\int_0^{2n} \sin(\theta+\phi)d\theta$

$= \left|-\cos(\theta+\phi)\right|_0^{2\pi}$

$= -[\cos(2n+\phi) - \cos(\phi)]$

$= -[\cos\phi - \cos\phi] = 0$

Example 3. यदि $x_1 = 3\sin\omega t$ तथा $x_2 = 4\cos\omega t$ हैं तो

(A) $\frac{x_1}{x_2}$ का मान t से स्वतंत्र होगा

(B*) $<x_1^2 + x_2^2>$ का $t = 0$ से $t = \frac{2\pi}{\omega}$ समय तक औसत मान 12.5 होगा

(C*) $\left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2 = 1$

(D*) $<x_1 . x_2>$ का $t = 0$ से $t = \frac{2\pi}{\omega}$ समय तक औसत मान शून्य होगा

Solution : (A) $\frac{x_1}{x_2} = \frac{3\sin\omega t}{4\cos\omega t} = \frac{3}{4}\tan\omega t$

t पर निर्भर है।

(B) $< x_1^2 + x_2^2 > = < 9\sin^2\omega t + 16\cos^2\omega t >$

$$= 9\frac{\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2\omega t\,dt}{\int_0^{2\pi/\omega}dt} + 16\frac{\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2\omega t\,dt}{\int_0^{2\pi/\omega}dt}$$

$$= 9\frac{\int_0^{2\pi/\omega}\frac{(1-\cos2\omega t)}{2}dt}{\int_0^{2\pi/\omega}dt} + 16\frac{\int_0^{2\pi/\omega}\frac{(1+\cos2\omega t)}{2}dt}{\int_0^{2\pi/\omega}dt}$$

$= 9 . \frac{1}{2} + 16 . \frac{1}{2}$

$= 12.5$ **Ans.**

(C) $\left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2 = \left(\frac{3\sin\omega t}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\cos\omega t}{4}\right)^2 = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$ **Ans.**

(D) $<x_1 x_2> = <3\sin\omega t . 4\cos\omega t> = 6 < 2\sin\omega t\cos\omega t >$

$$= 6 < \sin2\omega t > = 6\frac{\int_0^{2\pi/\omega}\sin2\omega t\,dt}{\int_0^{2\pi/\omega}dt} = 6 \times 0 = 0$$ Ans.

5. सदिश (VECTOR)

भौतिकी में हम दो भौतिक राशियों की बात करते हैं एक अदिश और दूसरी सदिश राशियाँ। प्रत्येक अदिश राशिँ परिमाण और मात्रक रखती है। किसी भौतिक राशि के परिमाण का अर्थ आंकिक मान तथा उस भौतिक राशि के मात्रक का गुणनफल होता है।

उदाहरण के लिए द्रव्यमान = 4kg

द्रव्यमान का परिमाण = 4kg

और द्रव्यमान का मात्रक = kg

अदिश राशियों के अन्य उदाहरण :– द्रव्यमान, चाल, दूरी इत्यादी

अदिश राशियों का जोड़, बाँयी और गुणा, बीजीय गणित के सामान्य नियमों द्वारा किया जा सकता है।

5.1. सदिश :

यदि किसी भौतिक राशि में परिमाण के साथ–साथ

(a) एक निश्चित दिशा हो

(b) योग के समान्तर चतुर्भज नियम का पालन करें

(c) तथा इनका संयोजन क्रम विनिमय हो अर्थात् $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$.

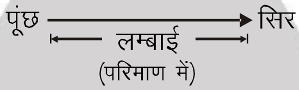
तो ये राशियाँ केवल और केवल सदिश राशियाँ कहलाती है। यदि कोई भी भौतिक राशि उपरोक्त नियमों में से एक भी नियम का पालन नहीं करें तो यह राशि सदिश राशि नहीं हो सकती है।

यदि कोई भी भौतिक राशि सदिश है तो इसकी एक निश्चित दिशा होगी। परन्तु इसका व्युत्क्रम सत्य हो भी सकता है और नहीं भी अर्थात् यदि किसी भौतिक राशि की एक निश्चित दिशा हो तो यह सदिश हो भी सकती है और नहीं भी।

सदिश ($\vec{A}$) का परिमाण सदिश का निरपेक्ष मान होता है। इसको $|\vec{A}|$ या A से प्रदर्शित करते है।

सदिश को व्यक्त करना :

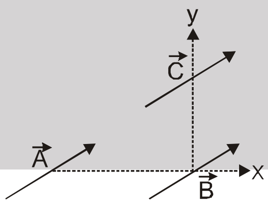
ज्यामितीय रूप से, सदिश को एक तीर के निशान वाली रेखा द्वारा (→) व्यक्त किया जाता है जो कि सदिश की दिशा को व्यक्त करता हैं



गणितीय रूप से, सदिश को $\vec{A}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। कभी–कभी इसे गहरे काले शब्द **A** द्वारा व्यक्त किया जाता है।

मुख्य बिन्दु :

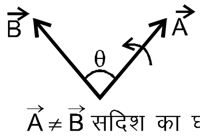
☞ यदि किसी सदिश को स्वंय के सापेक्ष समान्तर स्थानान्तरित कर दिया जाय तो यह परिवर्तित नहीं होता है। चित्र देखो।



$\vec{A}=\vec{B}=\vec{C}$

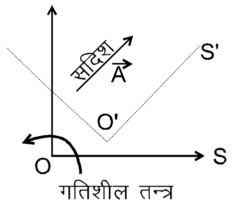
सदिश का स्वंय के सापेक्ष समान्तर स्थानान्तरण

☞ यदि किसी सदिश को कोण 2π (or 360°) के गुणक के अलावा किसी अन्य कोण पर घुमा दिया जाय तो यह सदिश परिवर्तित हो जाता है। चित्र देखो।



$\vec{A}\neq\vec{B}$ सदिश का घूर्णन

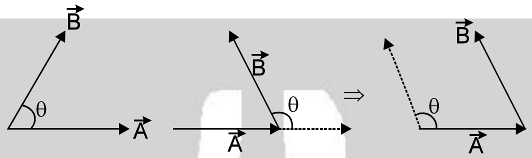
☞ यदि निर्देश तन्त्र को स्थानान्तरित या घुमा दिया जाय तो सदिश परिवर्तित नहीं होता (केवल इसके घटक बदल सकते है) है। चित्र देखो।



गतिशील तन्त्र

☞ दो सदिश बराबर कहलाएंगे यदि इनके परिमाण व दिशा समान हो तथा दोनों समान भौतिक राशि के मान को प्रदर्शित करें।

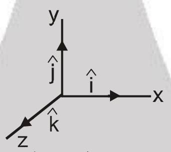
☞ दो सदिशों के बीच कोण का अर्थ है कि जब दो सदिशों को स्वंय के सापेक्ष समान्तर स्थानान्तरित करके दोनों की पूंछ मिलाने पर बने दोनों कोणों में से छोटा कोण दोनों सदिशों के बीच का कोण कहलाता है। (अर्थात् $0 \le \theta \le \pi$).



5.2. एकांक सदिश (Unit Vector) :

वह सदिश जिसका परिमाण एक (इकाई) हो तथा एक निश्चित दिशा की तरफ निर्देशित हों एकांक सदिश कहलाता है। किसी भी सदिश $(\vec{A})$ को इसकी दिशा में एकांक सदिश $(\hat{A})$ व इसके परिमाण के गुणन के रूप मे लिख सकते है।

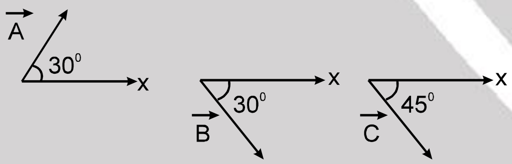
अर्थात् $\vec{A} = A\hat{A}$ या $\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{A}$



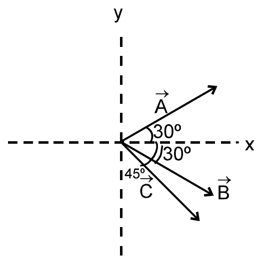
एकांक सदिश की कोई भी विमा या मात्रक नहीं होता है। त्रिविमिय निर्देश तन्त्र में x, y और z-अक्षों के अनुदिश एकांक सदिश क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ के द्वारा प्रदर्शित किये जाते है। इनके परिमाण $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$ होते है।

Solved Example

Example 1. तीन सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ चित्र में प्रदर्शित है तो निम्न के मध्य कोण बताइये। (i) $\vec{A}$ और $\vec{B}$, (ii) $\vec{B}$ और $\vec{C}$, (iii) $\vec{A}$ और $\vec{C}$.



Solution : दो सदिशों के बीच कोण ज्ञात करने के लिए हम दोनों सदिशों की पूंछो को जोड़ते है। इसके लिए $\vec{B}$ को समान्तर इस प्रकार स्थानान्तरित करते है कि $\vec{A}$, $\vec{B}$ और $\vec{C}$ पूंछे चित्रानुसार मिल जाय।



इस प्रकार हम आसानी से देख सकते है कि $\vec{A}$ और $\vec{B}$ के बीच कोण 60°, $\vec{B}$ और $\vec{C}$ के मध्य 15° तथा $\vec{A}$ और $\vec{C}$ के बीच कोण 75° है।

Example 2. पूर्व दिशा के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{i}$ है। 10^5 डाइन बल पश्चिम दिशा मे कार्यरत है। बल को $\hat{i}$ के पदों में व्यक्त करो।

Solution : $\vec{F} = -10^5 \hat{i}$ डाईन

5.3. सदिश राशि का अदिश राशि से गुणन (Multiplication of a Vector by a Scalar)

किसी सदिश $\vec{A}$ को धनात्मक संख्या λ से गुणा करने पर प्राप्त सदिश $\vec{B}$ $(= \lambda\vec{A})$ का परिमाण λ के गुणक के रूप में बदल जाता है। परन्तु दिशा सदिश $\vec{A}$ के समान ही रहती है। किसी सदिश $\vec{A}$ को ऋणात्मक संख्या λ से गुणा करने पर प्राप्त सदिश $\vec{B}$ की दिशा, $\vec{A}$ की दिशा के विपरीत तथा इसका परिमाण $|\vec{A}|$ का $-\lambda$ गुना होता है।

Solved Example

Example 1. एक भौतिक राशि (m = 3kg) को सदिश $\vec{a}$ के गुणन के रूप में $\vec{F} = m\vec{a}$ के अनुसार दिया जाता है तो $\vec{F}$ का परिमाण व दिशा ज्ञात करो यदि

(i) $\vec{a} = 3 m/s^2$ पूर्व दिशा में

(ii) $\vec{a} = -4 m/s^2$ उत्तर दिशा में

Solution :

(i) $\vec{F} = m\vec{a} = 3\text{ kg} \times 3\text{ ms}^{-2}$ पूर्व दिशा में = 9 N पूर्व दिशा में

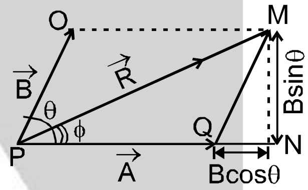
(ii) $\vec{F} = m\vec{a} = 3 \times (-4)$ N उत्तर दिशा में = – 12N उत्तर दिशा में

= 12 N दक्षिण दिशा में

5.4. सदिशों का संयोजन (Addition of Vectors)

सदिशों के संयोजन के लिए मुख्य रूप से दो नियमों का प्रयोग किया जाता है। जो निम्न है –

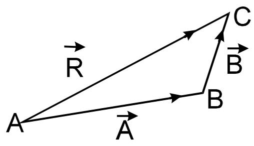
(a) सदिशों के संयोजन का समान्तर चर्तुभुज नियम : यदि दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ किसी समान्तर चर्तुभुज की बाहर की तरफ निर्देशित (इनकी पूंछ एक बिन्दु पर स्थित है) दो क्रमागत भुजाओं को निरूपित करते है तो इन सदिशों के प्रतिच्छेद या कटान बिन्दु से खींची गई विकर्ण दोनों सदिशों के परिणामी को व्यक्त करती है। (अर्थात् $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के सदिश योग को)



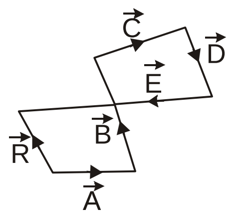
$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

परिणामी सदिश $\vec{R}$ का, $\vec{A}$ की दिशा से बनाया गया कोण $\tan\phi = \dfrac{MN}{PN} = \dfrac{MN}{PQ+QN} = \dfrac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$

(b) सदिश संयोजन का त्रिभुज नियम : दो सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ को जोड़ने के लिए दोनों में से किसी एक सदिश को स्वंय के सापेक्ष समान्तर विस्थापित करके $\vec{B}$ की पूंछ को $\vec{A}$ के सिर पर रखते है। $\vec{A}$ + $\vec{B}$ के परिणामी सदिश $\vec{R}$ को ,सदिश $\vec{A}$ की पूंछ से, सदिश के $\vec{B}$ सिर तक रेखा खींचकर प्रदर्शित किया जाता है। अर्थात् $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$ है तथा इन सदिशों $\vec{A}, \vec{B}$ और $\vec{R}$ के निरूपण से बना इस प्रकार से निरूपित चित्र त्रिभुज को प्रदर्शित करता है। इसलिए सदिशों के संयोजन की इस विधि को 'त्रिभुज विधि' कहते है। यदि त्रिभुज नियम के द्वारा बहुत सारे सदिशों को जोड़ने के विस्तारित प्रक्रम को चित्र द्वारा देखें तो इसके द्वारा बनी आकृत्ति एक बहुभुज को प्रदर्शित करती है तथा सदिशों के संयोजन के इस नियम को बहुभुज नियम कहते है।



$\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$



$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$

मुख्य बिन्दु :

☞ सदिशों के लिए केवल समान प्रकार के सदिशों को ही जोड़ा जा सकता है तथा परिणामी सदिश भी समान प्रकार का प्राप्त होता है।

☞ यदि $R = [A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta]^{1/2}$ हो तो R अधिकतम होगा जब $\cos\theta$ = अधिकतम = 1 हो अर्थात् $\theta = 0^o$, अर्थात् दोनों सदिश समान्तर हो और $R_{अधिकतम} = A + B$

☞ परिणामी सदिश न्यूनतम होगा यदि $\cos\theta$ = न्यूनतम = –1, अर्थात् $\theta = 180^o$ अर्थात् दोनों सदिश प्रतिसमान्तर (विपरीत दिशा में) हो और $R_{न्यूनतम} = A \sim B$

☞ यदि सदिश A व B लम्बवत् हो तो $\theta = 90^o$ और $R = \sqrt{A^2 + B^2}$

☞ उपरोक्त कथनों में प्रदर्शित है कि दो सदिशों के परिणामी का मान $(A \sim B)$ से $(A + B)$ के बीच कुछ भी हो सकता है। यह इन सदिशों के बीच के कोण पर निर्भर करता है और परिणामी सदिशों का परिमाण θ (0^o से 180^o) बढ़ने के साथ घटता है।

☞ समतलीय असमान सदिशों की न्यूनतम संख्या जिनका परिणामी शून्य हो तीन होती है।

☞ तीन अतलीय सदिशों का परिणामी कभी भी शून्य नहीं हो सकता या अतलीय सदिशों की न्यूनतम संख्या जिनका परिणामी शून्य हो चार होती है।

☞ किसी सदिश में से सदिश को घटाना वास्तव में ऋणात्मक सदिश को जोड़ना होता है

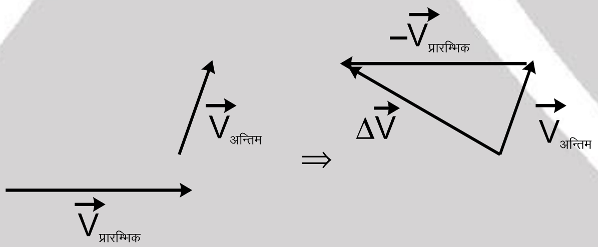
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

(a) चित्र से अच्छी तरह समझे सकते है कि $\vec{A} - \vec{B}$ सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ सदिश के व्युत्क्रम का योग है।

$$|\vec{A} - \vec{B}| = [(A)^2 + (B^2) + 2AB\cos(180^o - \theta)]^{1/2}$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

(b) भौतिक सदिश राशि में परिवर्तन का अर्थ अन्तिम सदिश में से प्रारम्भिक सदिश को घटाना है।



Solved Example

Example 1. समान परिमाण F_0 वाले दो सदिशों का परिणामी ज्ञात करो। यदि इनके बीच कोण θ है।.

Solution : $F^2_{परिणामी} = F_0^2 + F_0^2 + 2F_0^2\cos\theta$

$= 2F_0^2(1 + \cos\theta) = 2F_0^2(1 + 2\cos^2\theta/2 - 1) = 2F_0^2 \times 2\cos^2\theta/2$

$F_{परिणामी} = 2F_0\cos\theta/2$

Example 2. दो अशून्य सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ में सम्बन्ध $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ है। तो $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण ज्ञात करो?

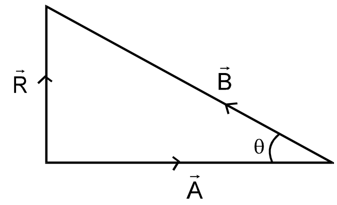
Solution : $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}| \Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$

$\Rightarrow 4AB\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = \pi/2$

Example 3. दो वेग सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ का परिणामी सदिश $\vec{A}$ के लम्बवत् है। परिणामी सदिश $\vec{R}$ का परिमाण $\vec{B}$ के परिमाण का आधा है तो $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण ज्ञात करो ?

Solution : सदिश $\vec{R}$, सदिश $\vec{A}$ के लम्बवत् है। चित्र में तीनों सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$ और $\vec{R}$ प्रदर्शित है।



$\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण $\pi - \theta$ है।

$\sin\theta = \frac{R}{B} = \frac{B}{2B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^o \Rightarrow$ $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण 150^o होगा।

Example 4. यदि दो इकाई सदिशों का योग भी इकाई सदिश हो तो इनके अन्तर का परिमाण ज्ञात करो ?

Solution : माना $\hat{A}$ व $\hat{B}$ दो इकाई सदिश दिये गये है और इनका परिणामी $\hat{R}$ हो तो

$|\hat{R}| = |\hat{A} + \hat{B}|$

$1 = \sqrt{(\hat{A})^2 + (\hat{B})^2 + 2|\hat{A}||\hat{B}|\cos\theta}$

$1 = 1 + 1 + 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -1/2$

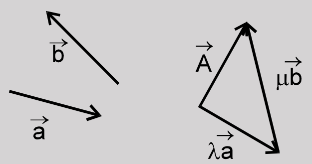
$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(\hat{A})^2 + (\hat{B})^2 - 2|\hat{A}||\hat{B}|\cos\theta} = \sqrt{1 + 1 - 2\times1\times1(-\frac{1}{2})} = \sqrt{3}$

5.5. सदिशों को वियोजन (Resolution of Vectors)

यदि भिन्न–भिन्न दिशाओं वाले दो अशून्य सदिश $\vec{a}$ व $\vec{b}$ एक तल में स्थित है और एक अन्य सदिश $\vec{A}$ भी समान तल में स्थित हो तो $\vec{A}$ को $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के अलग–अलग वास्तविक संख्याओं के गुणनफल के योग के रूप में व्यक्त कर सकते है।

अर्थात् $\vec{A} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ (यहां λ और μ वास्तविक संख्याऐं है।)

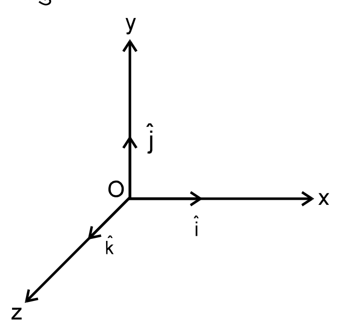
अर्थात् हम कह सकते हे कि $\vec{A}$ को दो सदिश घटको $\lambda\vec{a}$ व $\mu\vec{b}$ में वियोजित किया गया है।



$\lambda\vec{a}$ और $\mu\vec{b}$ क्रमशः $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के अनुदिश है। अर्थात् दिये गये एक सदिश को दो सदिशों के समुच्चय के अनुदिश सदिश घटकों में वियोजित कर सकते हे। ये दोनों एक ही तल में स्थित होते हे।

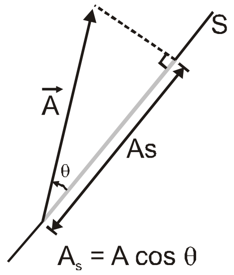
समकोणीय घटकों के अनुदिश वियोजन :

एक सामान्य सदिश को समकोणीय निर्देश तन्त्र की अक्षों के अनुदिश चित्रानुसार एकांक सदिशों (जैसे x, y और z अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{i}, \hat{j}$ और $\hat{k}$) के अनुदिश वियोजित करना आसान है।



द्विविमिय वियोजन :

एक सदिश $\vec{A}$ की कल्पना करो जो चित्रानुसार xy तल में स्थित है।

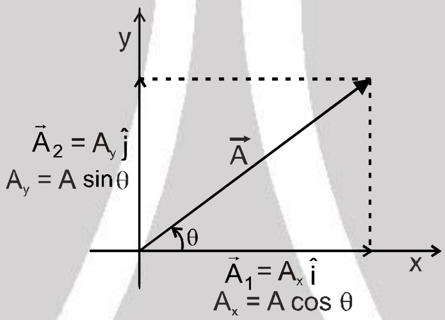


$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

$\vec{A}_1 = A_x\hat{i}, \ \vec{A}_2 = A_y\hat{j} \Rightarrow \quad \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

राशियाँ A_x व A_y क्रमशः सदिश $\vec{A}$ के x तथा y घटक कहलाते है। A_x स्वंय सदिश नहीं है। परन्तु $A_x\hat{i}$ व $A_y\hat{j}$ एक सदिश राशि है।

$A_x = A \cos\theta$ और $A_y = A \sin\theta$



उपरोक्त समीकरण से सिद्ध होता है कि किसी सदिश के घटक धनात्मक,ऋणात्मक व शून्य कुछ भी हो सकते है। यह θ के मान पर निर्भर करते है। एक सदिश $\vec{A}$ को किसी तल मे दो प्रकार से प्रदर्शित कर सकते है।

(a) इसको परिमाण A व x-अक्ष की दिशा द्वारा बनाये गये θ कोण के रूप में और

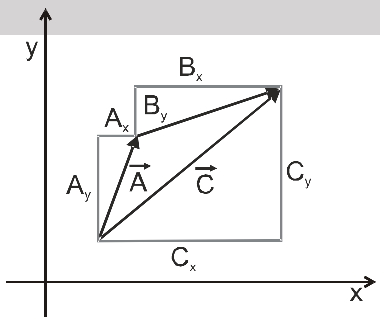
(b) इसको A_x व A_y के घटकों रूप में

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x}$

नोट : यदि $A = A_x \Rightarrow A_y = 0$ और यदि $A = A_y \Rightarrow A_x = 0$ हो

अर्थात् सदिश के घटक स्वंय के लम्ववत् हमेशा शून्य होते है।

प्रत्येक सदिश के लम्बवत् घटको का योग तथा दोंनो सदिशों के योग के लम्बवत् घटक आपस में अलग–अलग बराबर होते है। अर्थात् $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ है तो



$C_x = A_x + B_x$ तथा $C_y = A_y + B_y$

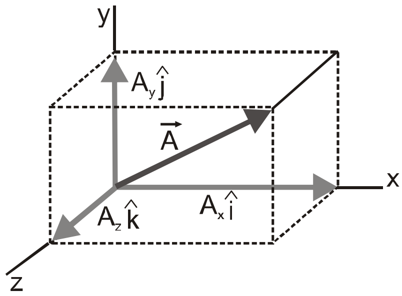
त्रिविमिय वियोजन : त्रिविमिय दिशा में किसी सदिश $\vec{A}$ को x, y तथा z-अक्ष के अनुदिश घटकों के रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते है :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_Z + \vec{A}_x + \vec{A}_y = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_Z = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$A_x = A\cos\alpha$, $A_y = A\cos\beta$, $A_z = A\cos\gamma$

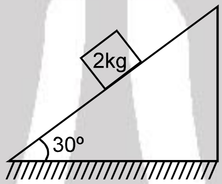


यहां $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ को दिये गये सदिश $\vec{A}$ की दिक् कोज्याएं **(Direction Cosines)** कहते है।

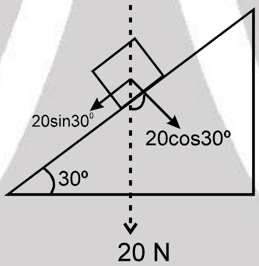
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Solved Example

Example 1. 2 kg का द्रव्यमान नततल पर चित्रानुसार रखा है। इसके भार को नततल के अनुदिश व लम्बवत् घटकों में वियोजित करो। (माना $g = 10\ m/s^2$)

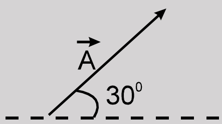


Solution : नततल के अनुदिश घटक = 20 sin 30 = 10 N



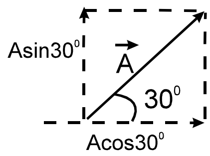
नततल के लम्बवत् घटक $= 20\cos 30 = 10\sqrt{3}$ N

Example 2. एक सदिश क्षैतिज से 30º का कोण बनाता है। यदि सदिश का क्षैतिज घटक 250 हो तो सदिश का परिमाण व उर्ध्वाधर घटक ज्ञात करो ?



Solution : माना सदिश $\vec{A}$ है

$$A_x = A\cos 30° = 250 = \frac{A\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{500}{\sqrt{3}}$$



$$A_y = A\sin 30° = \frac{500}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{250}{\sqrt{3}}$$

Example 3. $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ है। जब एक सदिश $\vec{B}$ को सदिश $\vec{A}$ में जोड़ा जाता है तो x-अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश प्राप्त होता है। सदिश $\vec{B}$ ज्ञात करो तथा इसका परिमाण भी बताओ ?

Solution : $\vec{A} + \vec{B} = \hat{i}$

$\vec{B} = \hat{i} - \vec{A} = \hat{i} - (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = -2\hat{j} + 3\hat{k}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

Example 4. उपरोक्त प्रश्न में $\vec{B}$ के अनुदिश एकांक सदिश ज्ञात करो ?

Solution : $\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{-2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{13}}$

Example 5. सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$ और $\vec{C}$ के परिमाण क्रमशः $5, 5\sqrt{2}$ और 5 है। $\vec{A}$, $\vec{B}$ और $\vec{C}$ की दिशायें क्रमशः पूर्व, उत्तर–पूर्व और उत्तर की ओर है। यदि $\hat{i}$ और $\hat{j}$ क्रमशः पूर्व व उत्तर दिशा के अनुदिश एकांक सदिश हो तो $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ को $\hat{i}$, $\hat{j}$ के पदों में व्यक्त करो तथा परिणामी सदिश का परिमाण व दिशा भी बताओ ?

Solution : $\vec{A} = 5\hat{i}$

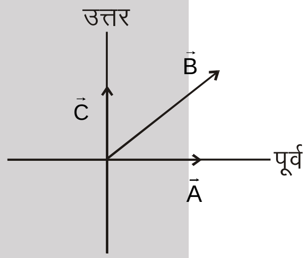
$\vec{C} = 5\hat{j}$

$\vec{B} = 5\sqrt{2}\cos 45\hat{i} + 5\sqrt{2}\sin 45\hat{j} = 5\hat{i} + 5\hat{j}$

$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 5\hat{i} + 5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{j} = 10\hat{i} + 10\hat{j}$

$|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{2}$

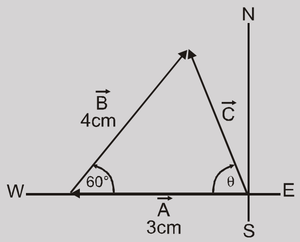
$\tan\theta = 10/10 = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 45^o$ पूर्व से



Example 6. तुम 3 Km पश्चिम में तत्पश्चात् 60^o पूर्व से उत्तर की ओर 4 Km चलते हो तो निम्न विधियों द्वारा परिणामी विस्थापन ज्ञात करो।

(a) ग्राफीय विधि (b) सदिश घटकों का उपयोग करके।

Solution : तीन सदिशों के द्वारा बनाया गया त्रिभुज, समकोण त्रिभुज नहीं है। इसलिए तीनों सदिशों के परिमाण पाइथोगोरस प्रमेय से सम्बन्धित नहीं है। हम दोंनो सदिशों का चित्र बनाकर परिणामी प्राप्त कर सकते है तथा उसकी लम्बाई मापकर उसकी दिशा भी ज्ञात कर सकते है।



(a) यदि हम प्रथम विस्थापन सदिश को 3 cm लम्बी रेखा से प्रदर्शित करें तथा द्वितीय को 4 cm लम्बी रेखा से प्रदर्शित करें तो हमें परिणामी की लम्बाई लगभग 3.5 cm प्राप्त होगी। अतः परिणामी विस्थापन 3.5Km होगा। परिणामी विस्थापन तथा पश्चिम दिशा के मध्य बनने वाला कोण θ 'डी' (चांदे) की सहायता से मापा जा सकता है। यह लगभग 75° है।

(b)

1. माना $\vec{A}$ प्रथम विस्थापन है और x-अक्ष को पूर्व दिशा माना है। समीकरणों से A_x तथा A_y ज्ञात करते है।

$A_x = -3, A_y = 0$

2. इसी प्रकार, दूसरे विस्थापन $\vec{B}$ के घटक ज्ञात करते है।

$B_x = 4\cos 60° = 2, B_y = 4\sin 60° = 2\sqrt{3}$

3. परिणामी विस्थापन के घटक $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ के योग से मिलता है।

$$\vec{C} = (-3+2)\hat{i} + (2\sqrt{3})\hat{j} = -\hat{i} + 2\sqrt{3}\,\hat{j}$$

4. पाइथागोरस प्रमेय से $\vec{C}$ का परिमाण मिलता है।

$$C = \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{13} = 3.6$$

5. C_y व C_x का अनुपात $\vec{C}$ व x अक्ष के मध्य कोण θ का tangent देता है।

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{-1} \;\Rightarrow\; \theta = -74°$$

टिप्पणी : चूंकि विस्थापन पूछा गया है (जोकि सदिश राशि है) अर्थात् उत्तर में परिमाण के साथ–साथ दिशा भी सम्मिलित होगी या दोंनो घटक सम्मिलित होंगे। प्रश्न (b) में हम पद 3 पर रूक जायेंगे क्योंकि x तथा y घटक विस्थापन सदिश को पूर्णतः परिभाषित करते है। हम भाग (a) के उत्तर की (b) के साथ तुलना कर सकते है। (b) के 5 पद पर ध्यान दें, केल्कुलेटर –74° कोण देता है। लेकिन केल्कुलेटर यह अन्तर स्पष्ट नहीं करता है कौनसा घटक x या y ऋणात्मक होगा। हम चित्र से देख सकते है कि परिणामी विस्थापन ऋणात्मक x–अक्ष से 75° का कोण बनाता है तथा धनात्मक x अक्ष से लगभग 105° कोण बनाता है। यह हमारे मापन की परिभाषा से (a) के परिणामों का समर्थन करता है।

5.6. सदिशों का गुणनफल (अदिश व सदिश गुणनफल)

5.6.1 अदिश गुणन

दो सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ का अदिश गुणनफल या बिन्दु गुणनफल $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ ($\vec{A}$ डॉट $\vec{B}$) से प्रदर्शित किया जाता है। इसको इन सदिशों के परिमाणों व उनके बीच के कोण की कोज्या के गुणन के रूप में व्यक्त करते है। अर्थात् $\vec{A}\,.\,\vec{B} = AB\cos\theta$ {यहां θ दोनों सदिशों के बीच का कोण है।}

गुणधर्म :

☞ यह हमेशा अदिश होता है। यदि दोनों के बीच का कोण न्यूनकोण (i.e. $< 90^o$) है तो यह धनात्मक होगा और यदि कोण अधिक कोण (i.e. $90^o < \theta \le 180^o$) हो तो यह ऋणात्मक होगा।

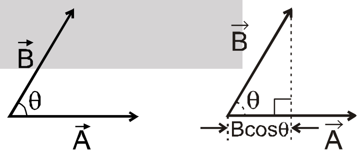
☞ यह क्रम विनिमय का पालन करता है। अर्थात् $\vec{A}\,.\,\vec{B} = \vec{B}\,.\,\vec{A}$

☞ यह वितरण नियम (distributive law) का पालन करता है अर्थात् $\vec{A}\,.\,(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\,.\,\vec{B} + \vec{A}\,.\,\vec{C}$

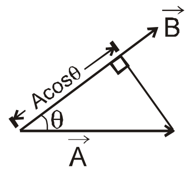
☞ परिभाषा से $\vec{A}\,.\,\vec{B} = AB\cos\theta$ तो दोनों सदिशों के बीच कोण $\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}\right]$

☞ $\vec{A}\,.\,\vec{B} = A(B\cos\theta) = B\,(A\cos\theta)$

ज्यामितीय रूप से चित्रानुसार $B\cos\theta$ सदिश $\vec{B}$ का सदिश $\vec{A}$ पर प्रक्षेप है और $A\cos\theta$ सदिश $\vec{A}$ का $\vec{B}$ पर प्रक्षेप है। इसलिए $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ को $\vec{A}$ के परिमाण व $\vec{B}$ का $\vec{A}$ के अनुदिश घटक के गुणनफल के रूप में व्यक्त करते है और इसका विपरीत भी सत्य है।



$\vec{B}$ का $\vec{A}$ के अनुदिश घटक = $B\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A} = \hat{A}\,.\,\vec{B}$



$\vec{A}$ का $\vec{B}$ अनुदिश घटक = A cosθ = $\frac{\vec{A}.\vec{B}}{B}$ = $\vec{A}.\hat{B}$

☞ दो सदिशों का अदिश गुणनफल अधिकतम होता है, जब cos θ = अधिकतम = 1, अर्थात् θ = 0º अर्थात् सदिश समान्तर हो ⇒ $(\vec{A}.\vec{B})_{\text{अधिकतम}} = AB$

☞ यदि दो अशून्य सदिशों का अदिश गुणनफल शून्य हो तो सदिश एक दूसरे के लम्बवत् होंगे। किसी सदिश का स्वंय के साथ अदिश गुणनफल स्व अदिश गुणन कहलाता है।

$(\vec{A})^2 = \vec{A}.\vec{A} = AA\cos 0^\circ = A^2$

⇒ $A = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}}$

☞ एकांक सदिश $\hat{n}$ की स्थिति में

$\hat{n}.\hat{n} = 1 \times 1 \times \cos 0^\circ = 1$

⇒ $\hat{n}.\hat{n} = \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

☞ लम्बवत् एकांक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ की स्थिति में $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

☞ $\vec{A}.\vec{B} = (\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z)\cdot(\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z) = [A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z]$

Solved Example

Example 1. यदि सदिश $\vec{P} = a\hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{Q} = a\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ एक दूसरे के लम्ववत् हो तो a का मान ज्ञात करो ?

Solution : यदि सदिश $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ लम्बवत् है तो

⇒ $\vec{P}\cdot\vec{Q} = 0$ ⇒ $(a\hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}).(a\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) = 0$

⇒ $a^2 - 2a - 3 = 0$ ⇒ $a^2 - 3a + a - 3 = 0$

⇒ $a(a-3) + 1(a-3) = 0$ ⇒ $a = -1, 3$

Example 2. $3\hat{i} + 4\hat{j}$ का $\hat{i} + \hat{j}$ के अनुदिश घटक ज्ञात करो ?

Solution : सदिश $\vec{A}$ का $\vec{B}$ के अनुदिश घटक $\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B}$ से दिया जाता है।

$= \frac{(3\hat{i}+4\hat{j})\cdot(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$

Example 3. $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ और $\vec{B} = 12\hat{i} + 5\hat{j}$ के बीच कोण ज्ञात करो ?

Solution : हम जानते है कि $\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{(3\hat{i}+4\hat{j})\cdot(12\hat{i}+5\hat{j})}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{12^2+5^2}}$

$\cos\theta = \frac{36+20}{5\times 13} = \frac{56}{65}$ ⇒ $\theta = \cos^{-1}\frac{56}{65}$

5.7. सदिश गुणन

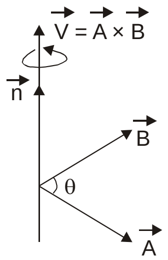
दो सदिशों $\vec{A}$ और $\vec{B}$ का सदिश गुणन या क्रॉस गुणन $\vec{A} \times \vec{B}$ के रूप में लिखा जाता है और $\vec{A}\times\vec{B}$ को निम्न प्रकार परिभाषित करते है।

$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$, यहां θ दोनों सदिशों के बीच का कोण है तथा $\hat{n}$ की दिशा दांये हाथ के अंगूठे के नियम द्वारा दी जाती है।

दांहिने हाथ–अंगूठे का नियम :

$\hat{n}$ की दिशा ज्ञात करने के लिये दो सदिश $\vec{A}$ और $\vec{B}$ को उनकी पूंछ से पूंछ मिलाकर खींचों अब अपनी खिंची हुई दाहिने हाथ की हथेली को $\vec{A}$ और $\vec{B}$ के तल के लम्बवत् इस प्रकार रखों कि अंगूलियां सदिश $\vec{A}$ के अनुदिश हो और जब अंगूलियां हथेली की तरफ मूड़े या बंद हो तो वह $\vec{B}$ की तरफ जायें तो अंगूठे की दिशा ही $\hat{n}$ की दिशा होगी।



गुणधर्म :

☞ दो सदिशों का सदिश गुणनफल एक सदिश होता है और दोनों सदिशों के तल के लम्बवत् होता है अर्थात् दोनों सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के लम्बवत् होता है। चाहे सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ लम्बवत् हो या न हो।

☞ सदिश गुणन क्रम विनिमय नियम का पालन नहीं करता है, अर्थात् $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$.

परन्तु $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{B}\times\vec{A}| = AB\sin\theta$

☞ सदिश गुणन वितरित होता है। जब सदिशों का क्रम निश्चित हो अर्थात् $A\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$.

जब $\sin\theta$ = अधिकतम = 1, अर्थात्, $\theta = 90^o$ हो तो दो सदिशों का सदिश गुणनफल अधिकतम होगा।

$[\vec{A}\times\vec{B}]_{\text{अधिकतम}} = \vec{A}\vec{B}\,\hat{n}$ अर्थात् यदि सदिश लम्ब कोणीय हो तो उनका सदिश गुणनफल अधिकतम होता है।

☞ जब $|\sin\theta|$ = न्यूनतम = 0, अर्थात् $\theta = 0^o$ या 180^o हो तो दोंनो अशून्य सदिशों का सदिश गुणनफल न्यूनतम होगा।

$[\vec{A}\times\vec{B}]_{\text{न्यूनतम}} = 0$ अर्थात् यदि दो अशून्य सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य है तो सदिश संरेखीय होते है।

Note : जब $\theta = 0^o$ हो तो सदिश, समानसदिश या समान्तर सदिश कहलाते है तथा जब $\theta = 180^o$ हो तो सदिश असमान सदिश या प्रतिसमान्तर सदिश कहलाते है।

☞ किसी सदिश का स्वंय के साथ सदिश गुणनफल स्व सदिश गुणन कहलाता है तथा यह शून्य सदिश होता है।

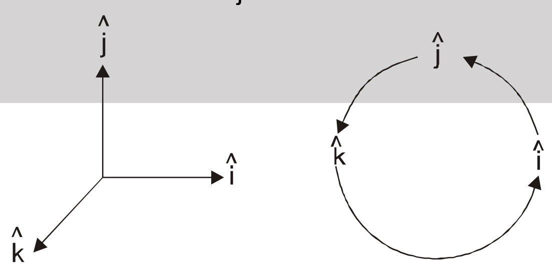
$\vec{A}\times\vec{A} = AA\sin 0^o\,\hat{n} = \vec{0}$.

Note : शून्य सदिश : वह सदिश जिसका परिमाण शून्य होता है, शून्य सदिश कहलाता है। शून्य सदिश की दिशा अनिर्धारित होती है।

☞ एकांक सदिश $\hat{n}$ की स्थिति में, $\hat{n}\times\hat{n} = \vec{0} \Rightarrow \hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$

☞ लम्बवत् एकांक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ की स्थिति में $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$,

$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$



(A) (B)

☞ घटकों के पदों में, $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$

$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$

☞ यदि एक समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाएं सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ द्वारा प्रदर्शित की जाये तो समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का परिमाण $|\vec{A}\times\vec{B}|$ होगा।

Solved Example

Example 1. $\vec{A}$ पूर्व की तरफ व $\vec{B}$ नीचे की तरफ है तो $\vec{A} \times \vec{B}$ की दिशा ज्ञात करो ?

Solution : दांये हाथ के अंगूठे के नियम से $\vec{A} \times \vec{B}$ की दिशा उत्तर की तरफ प्राप्त होती है।

Example 2. यदि $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}\times\vec{B}|$ हो तो $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण ज्ञात करो ?

Solution : $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}\times\vec{B}| \Rightarrow$ AB cos θ = AB sin θ ⇒ tan θ = 1 ⇒ θ = 45º

Example 3. दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ एक दूसरे से θ कोण पर स्थित है तो $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के लम्बवत् एकांक सदिश ज्ञात करो ?

Solution : $\vec{A}\times\vec{B} = AB \sin\theta\, \hat{n}$

$\hat{n} = \dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{AB\sin\theta}$ यहां $\hat{n}$ दोनों सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के लम्बवत् है।

Example 4. यदि $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ हो तो $\vec{A} \times \vec{B}$ ज्ञात करो।

Solution : $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-4-(-4)) - \hat{j}(2-12) + \hat{k}(-1-(-6)) = 10\hat{j} + 5\hat{k}$

MISCELLANEOUS PROBLEMS

Problem 1. निम्न के मान ज्ञात करों।

(a) sin (– θ) (b) cos (– θ) (c) tan (– θ)

(d) $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ (e) $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$ (f) $\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$

(g) sin (π – θ) (h) cos (π – θ) (i) $\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)$

(j) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)$ (k) $\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta)$ (l) $\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)$

(m) $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$ (n) $\cot(\frac{\pi}{2} - \theta)$

Answer : (a) – sin θ (b) cos θ (c) – tan θ (d) sin θ (e) cos θ
(f) – sin θ (g) sin θ (h) – cos θ (i) – cos θ (j) – sin θ
(k) – cos θ (l) sin θ (m) cot θ (n) tan θ

Problem 2.

Problem 3. (i) m के किस मान के लिए सदिश $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}, \vec{B} = 3\hat{i} - m\hat{j} + 6\hat{k}$ लम्बवत् होंगे।

(ii) $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ का $\hat{i} + \hat{j}$ की दिशा में घटक ज्ञात करो ?

Answer : (i) m = –10 (ii) $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Problem 4. (i) $\vec{A}$ उत्तर–पूर्व की तरफ और $\vec{B}$ नीचे की तरफ है तो $\vec{A} \times \vec{B}$ की दिशा ज्ञात करो।

(ii) यदि $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ हो तो $\vec{B} \times \vec{A}$ ज्ञात करो।

Answer : (i) उत्तर–पश्चिम (ii) $-4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$