प्रक्षेप्य गति (PROJECTILE MOTION)

1. कुछ मूल सिद्धान्त

1.1. प्रक्षेप्य

किसी वस्तु को तिर्यक प्रारम्भिक वेग देकर छोडने पर परिणामी नियत बल (इस अध्याय में नियत बल, गुरूत्वीय बल है) के प्रभाव में वस्तु जिस पथ पर गति करती है, वह गति प्रक्षेप्य गति कहलाती है।

प्रक्षेप्य गति के उदाहरण

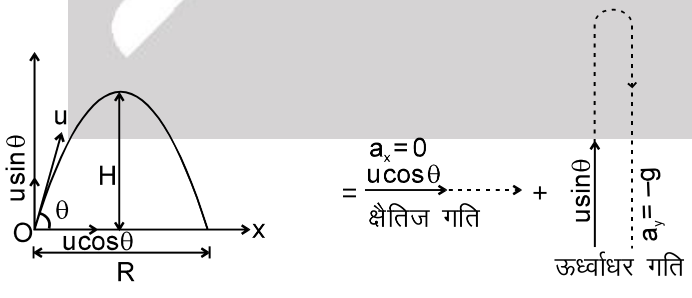
- किक मारने के बाद फुटबॉल की गति,
- क्रिकेट बाल की गति, पृथ्वी से फेंके गए पत्थर की गति,
- हवाई जहाज से गिराए गए भोजन पैकेट की गति
- गति के दौरान प्रक्षेप्य द्वारा बनाए गए पथ को प्रक्षेप्य का पथ कहते है।

1.2. प्रक्षेप्य गति की परिकल्पनाऐं

- इसमें केवल छोटी परास वाली प्रक्षेप्य गति का ही अध्ययन करेंगे, जिसमें गुरूत्वीय बल की दिशा तथा परिमाण प्रत्येक बिन्दु पर समान रहता है।
- अध्ययन में सरलता के लिए हम हवा के प्रतिरोध, पृथ्वी की घूर्णन गति और वक्रता के प्रभाव को नगण्य मानेंगे। अतः हमारे परिणाम (सूत्र) स्थिर तथा समतल पृथ्वी पर निर्वात में गति के लिए ही सार्थक होंगे।

1.3. प्रक्षेप्य गति

- प्रक्षेप्य की गति को प्रक्षेप्य गति कहते है।
- यह नियत त्वरण के अंतर्गत द्वि–विमीय गति का उदाहरण है।
- प्रक्षेप्य गति, साथ–साथ होने वाली दो परस्पर लम्बवत् गतियों का मिश्रण है, ये दोनों गतियाँ (क्षैतिज दिशा में गति और ऊर्ध्वाधर दिशा में गति) परस्पर एक–दूसरे से स्वतंत्र होती है।

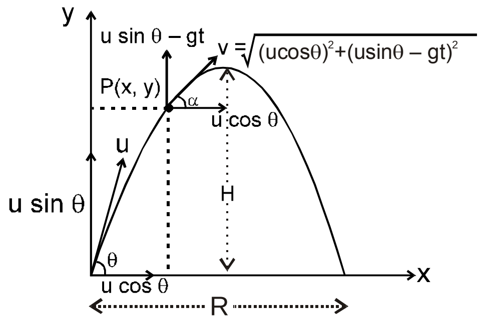


प्रक्षेप्य गति = ऊर्ध्वाधर गति + क्षैतिज गति

गैलीलियो का कथन

गति की दो लम्बवत् दिशायें परस्पर एक दूसरे से स्वतंत्र होती है। दूसरे शब्दों में किसी दिशा में निर्देशित सदिश इसके लम्बवत् सदिश द्वारा अप्रभावी रहता है।

2. क्षैतिज से किसी कोण पर फेंका गया प्रक्षेप्य



- माना एक प्रक्षेप्य क्षैतिज के साथ θ कोण बनाते हुए u वेग से फेंका जाता है।
- प्रारम्भिक वेग u को दो घटकों में बाँटते है। क्षैतिज दिशा में और ऊर्ध्वाधर दिशा में। क्षैतिज दिशा को x-अक्ष और ऊर्ध्वाधर दिशा को y-अक्ष मानते है तथा प्रक्षेप्य को जिस बिन्दु से फेंका गया है, उसे मूल बिन्दु (0, 0) मानते है।

  $u_x = u \cos\theta$

  $u_y = u \sin\theta$
- प्रक्षेप्य गति को क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशा में गतियो का संयोजन मान सकते है।

  इसलिए,

	क्षैतिज दिशा में	**ऊर्ध्वाधर दिशा में**
(a)	प्रारम्भिक वेग, $u_x = u \cos\theta$	प्रारम्भिक वेग, $u_y = u \sin\theta$
(b)	त्वरण, $a_x = 0$	त्वरण, $a_y = g$
(c)	t समय बाद वेग, $v_x = u \cos\theta$	t समय बाद वेग, $v_y = u \sin\theta - gt$

2.1. प्रक्षेप्य उड्डयन काल :

चूंकि उर्ध्वाधर दिशा में विस्थापन नहीं होता है। अतः

ऊर्ध्वाधर दिशा के अनुदिश कुल विस्थापन = 0

$$(u \sin\theta)\, T - \frac{1}{2} g T^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2u\sin\theta}{g}$$

2.2. क्षैतिज परास

$$R = u_x .T \quad \Rightarrow \quad R = u \cos\theta . \frac{2u\sin\theta}{g} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

2.3. प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई

प्रक्षेप्य के उच्चतम बिन्दु पर कण क्षैतिज दिशा में गति करता है अर्थात् वेग का उर्ध्वाधर घटक शून्य होता है। अतः उर्ध्वाधर दिशा में गति के 3rd समीकरण से $v^2 = u^2 + 2as$ उर्ध्वाधर दिशा में

$$0 = u^2 \sin^2\theta - 2gH \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

2.4. प्रक्षेप्य का परिणामी वेग :

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = u \cos\theta\, \hat{i} + (u \sin\theta - gt)\, \hat{j}$$

यहाँ $|\vec{v}| = \sqrt{u^2\cos^2\theta + (u\sin\theta - gt)^2}$ और $\tan\alpha = v_y / v_x$ तथा $v\cos\alpha = u\cos\theta \Rightarrow v = \frac{u\cos\theta}{\cos\alpha}$

नोट:
- बिन्दु 2.1, 2.2 और 2.3 के निष्कर्ष तभी मान्य है जब प्रक्षेप्य को जमीन से ही फेंका जाय और प्रक्षेप्य उसी क्षैतिज तल में जमीन पर वापस गिरता है।
- यदि ऊपर की दिशा को धनात्मक लेते है तो जब पिण्ड ऊपर जा रहा हो तब उसके वेग का ऊर्ध्वाधर घटक धनात्मक होगा और यदि पिण्ड नीचे जा रहा है तो उसके वेग का ऊर्ध्वाधर घटक ऋणात्मक होगा।

2.5. कुछ विशेष परिणाम :

- अधिकतम परास के लिए $\theta = 45^o$

  $R_{max} = \frac{u^2}{g} \Rightarrow H_{max} = \frac{R_{max}}{2}$

- प्रक्षेपण कोण α और $(90 - \alpha)$ के लिए हमें समान परास मिलती है। लेकिन दोनों स्थितियों मे कण द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई असमान है। ऐसा इसलिए है क्योंकि $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$ और

  $\sin 2\,(90 - \alpha) = \sin 180 - 2\alpha = \sin 2\alpha$

- यदि R = H i.e., $\frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g} \Rightarrow \tan \theta = 4$

- परास को ऐसे भी लिखा जा सकता है $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{2u\sin\theta . u\cos\theta}{g} = \frac{2u_x u_y}{g}$

Solved Example

Example 1. एक पिण्ड को ऊर्ध्वाधर से 30^0 पर $30\ ms^{-1}$ की चाल से फेंका गया है। इस पिण्ड द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई, उड्डयन काल तथा क्षैतिज परास ज्ञात करो। [Take $g = 10\ m/s^2$]

Solution : यहाँ $u = 30\ ms^{-1}$, प्रक्षेपण कोण $\theta = 90 - 30 = 60^o$

अधिकतम ऊँचाई $H = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{30^2 \sin^2 60^o}{10} = \frac{900}{20} \times \frac{3}{4} = \frac{135}{4}$ m

उड्डयन चाल, $T = \frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{2 \times 30 \times \sin 60^0}{10} = 3\sqrt{3}$ sec.

क्षैतिज परास = $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{30 \times 30 \times 2\sin 60^o \cos 60^o}{10} = 45\sqrt{3}\,m$

Example 2. एक प्रक्षेप्य को क्षैतिज से 60° कोण पर 100 m/s के वेग से ऊपर की तरफ फेंका गया है। कितने न्यूनतम समय बाद क्षैतिज के साथ उसकी गति का झुकाव 45° हो जाएगा।

Solution : $u_x = 100 \times \cos 60° = 50$

$u_y = 100 \times \sin 60° = 50\sqrt{3}$

$v_y = u_y + a_y t = 50\sqrt{3} - gt$ तथा $v_x = u_x = 50$

जब कोण 45° है, तब

$\tan 45° = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow v_y = v_x$

$\Rightarrow 50 - \sqrt{3}\,gt = 50 \Rightarrow 50 = (\sqrt{3} - 1)\,gt \Rightarrow t = 5(\sqrt{3} - 1)\,s$

Example 3. समान चाल v से लेकिन भिन्न–भिन्न कोण पर बहुत सारी गोलियां सभी दिशाओं में दागी जाती है। जमीन पर अधिकतम कितने क्षेत्रफल में गोलियां फैल जाएगी ?

Solution : एक गोली को इसकी अधिकतम परास तक ही फैंक सकते हैं। अतः $R_{max} = \frac{v^2}{g}$

अधिकतम क्षेत्रफल = $\pi(R_{max})^2 = \frac{\pi v^4}{g^2}$.

Example 4. किसी प्रक्षेप्य का प्रारम्भिक वेग $\vec{u} = 5\hat{i} + 10\hat{j}$ है तो ज्ञात करो –

(a) उड्डयन काल,

(b) अधिकतम ऊँचाई,

(c) परास

Solution : हम जानते है – $u_x = 5 \quad u_y = 10$

(a) उड्डयन काल = $\frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{2u_y}{g} = \frac{2\times10}{10} = 2\text{ s}$

(b) अधिकतम ऊँचाई = $\frac{u^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{{u_y}^2}{2g} = \frac{10\times10}{2\times10} = 5\text{ m}$

(c) परास = $\frac{2u\sin\theta . u\cos\theta}{g} = \frac{2\times10\times5}{10} = 10\text{ m}$

Example 5. एक कण को क्षैतिज से 30° के कोण पर 20 m/s के वेग से प्रक्षेपित किया जाता है :

(i) कण का 1 सेकण्ड पश्चात्, स्थिति सदिश ज्ञात करो।

(ii) t = 1 सेकण्ड पर वेग सदिश तथा स्थिति सदिश के मध्य कोण ज्ञात करो।

Solution : (i) $s_x = u\cos\theta\, t = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times t = 10\sqrt{3}\text{ m}$

$s_y = u\sin\theta\, t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 = 20 \times \frac{1}{2} \times 1 - 5\,(1)^2 = 5\text{m}$

$\vec{r}$ = स्थिति सदिश = $10\sqrt{3}\,\hat{i} + 5\,\hat{j}$

(ii) $v_x = 10\sqrt{3}\,\hat{i}$ $\qquad v_y = u_y + a_y t = 10 - 10 = 0$

$\vec{v} = 10\sqrt{3}\,\hat{i}$ $\qquad \vec{v}\,.\,\vec{r} = |v|\,|r| \cos\theta$

$\cos\theta = \frac{10\sqrt{3}\times10\sqrt{3}}{10\sqrt{3}\times\sqrt{325}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{325}} = 2\sqrt{\frac{3}{13}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(2\sqrt{\frac{3}{13}}\right)$

3. प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण (बिन्दुपथ) :

कण द्वारा प्रक्षेप्य गति के दौरान तय किया गया पथ उसका बिन्दुपथ कहलाता है या प्रक्षेप्य का पथ कहलाता है। प्रक्षेप्य का पथ कण के तात्क्षणिक निर्देशांकों (यहाँ x और y निर्देशांक) के मध्य संबंध है।

क्षैतिज दिशा में विस्थापन

$x = u_x.t$

$x = u\cos\theta .\, t$ .....(1)

ऊर्ध्वाधर दिशा में विस्थापन :

$y = u_y\,.\,t - 1/2\,gt^2 = u\sin\theta\,.\,t - 1/2\,gt^2$ .....(2)

समीकरण (1) से t का मान निकालकर समीकरण (2) में रखने पर

$$y = u\sin\theta\,.\,\frac{x}{u\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2 \Rightarrow y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}$$

यह समीकरण एक परवलय का समीकरण है। जिसे प्रक्षेप्य के **पथ का समीकरण (बिन्दुपथ)** नीचे की ओर कहते है।

अन्य रूप में प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण :

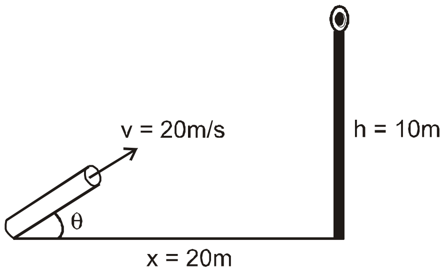
- $y = x\tan\theta - \frac{gx^2(1+\tan^2\theta)}{2u^2}$
- $y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}$

$\Rightarrow y = x\tan\theta \left[1 - \frac{gx}{2u^2\cos^2\theta\tan\theta}\right]$

$\Rightarrow y = x\tan\theta \left[1 - \frac{gx}{2u^2\sin\theta\cos\theta}\right] \qquad \Rightarrow \qquad y = x\tan\theta\left[1 - \frac{x}{R}\right]$

Solved Example

Example 1. दिये गये चित्र में उस कोण θ का मान ज्ञात करो जिससे प्रक्षेप्य लक्ष्य को भेद सके ?



Solution $y = x \tan\theta - \dfrac{gx^2(1+\tan^2\theta)}{2u^2}$

$\Rightarrow$ $10 = 20 \tan\theta - \dfrac{5\times(20)^2}{(20)^2}(1 + \tan^2\theta)$

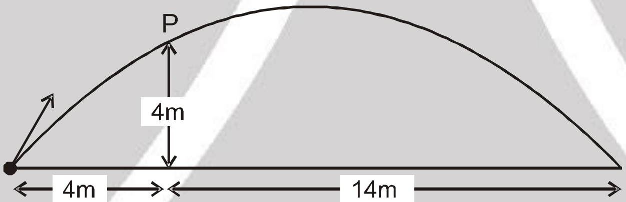
$\Rightarrow$ $2 = 4 \tan\theta - (1 + \tan^2\theta)$

$\Rightarrow$ $\tan^2\theta - 4\tan\theta + 3 = 0$ $\Rightarrow$ $(\tan\theta - 3)(\tan\theta - 1) = 0$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = 3, 1$ $\Rightarrow$ $\theta = 45°, \tan^{-1}(3)$

Example 2. एक गेंद को क्षैतिज से ऐसे फैका गया, कि वह 4 m दूरी पर 4 m की ऊँची दीवार को ठीक पार करती है, और दीवार से 14 m क्षैतिज दूरी पर जमीन पर गिर जाती है, तो गेंद के प्रारंभिक वेग का परिमाण और दिशा ज्ञात करों। चित्र नीचे प्रदर्शित है।

Solution :



गेंद बिन्दु P(4, 4) से गुजर रही है। अतः इसकी परास = 4 + 14 = 18 m है। गेंद के पथ का नया समीकरण (परास के पदों में)

$y = x \tan\theta \left(1 - \dfrac{x}{R}\right)$

अब x = 4m, y = 4m और R = 18 m

$\therefore$ $4 = 4\tan\theta\left[1 - \dfrac{4}{18}\right] = 4\tan\theta \times \dfrac{7}{9}$

या $\tan\theta = \dfrac{9}{7}$ $\Rightarrow$ $\theta = \tan^{-1}\dfrac{9}{7}$ और $R = \dfrac{2u^2\sin\theta\cos\theta}{g}$

या $18 = \dfrac{2}{9.8} \times u^2 \times \dfrac{9}{\sqrt{130}} \times \dfrac{7}{\sqrt{130}}$

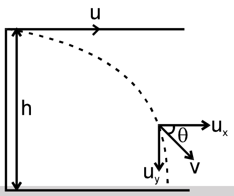
या $u^2 = \dfrac{18\times9.8\times130}{2\times9\times7} = 182$

या $u = \sqrt{182}$

और $\theta = \tan^{-1}\dfrac{9}{7}$.

4. किसी ऊँचाई से क्षैतिज के समानांतर फैंका गया प्रक्षेप्य –

एक प्रक्षेप्य को जमीन से h उँचाई पर से क्षैतिज दिशा में u वेग से फैका जाता है। इसकी गति का अध्ययन करने के लिए हम क्षैतिज और उंर्ध्वाधर गतियों को अलग–अलग देखते हैं।



	क्षैतिज दिशा में	**ऊर्ध्वाधर दिशा में**
(i)	प्रारंभिक वेग $u_x = u$	प्रारंभिक वेग $u_y = 0$
(ii)	त्वरण $a_x = 0$	त्वरण $a_y = g$ (नीचे की ओर)

4.1. उड्डयन काल :

प्रक्षेप्य को जमीन पर वापस पहुँचने में लगे समय को उड्डयन काल कहते हैं।

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$

उर्ध्वाधर दिशा के लिए $-h = v_y t + \frac{1}{2}(-g)t^2$

उच्चतम बिन्दु पर $v_y = 0 \quad h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

4.2. क्षैतिज परास :

प्रक्षैप्य बिन्दु तथा धरातल पर टकराने वाले बिन्दु के मध्य क्षैतिज दिशा में तय की गई दूरी को क्षैतिज परास कहते हैं।

$R = u_x . t$

$R = u\sqrt{\frac{2h}{g}}$

4.3. किसी बिन्दु P(x, y) पर वेग का परिमाण

$v = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$

t समय पश्चात प्रक्षैप्य का क्षैतिज वेग $v_x = u$

t समय पश्चात प्रक्षैप्य का उर्ध्वाधर वेग –

$v_y = 0 + (-g)t = -gt = gt$ (नीचे की तरफ)

$\therefore \quad v = \sqrt{u^2 + g^2t^2}$ और $\tan\theta = v_y/v_x$

4.4. वह वेग जिससे प्रक्षेप्य धरातल पर टकराता है :

$V_x = u$

$V_y^2 = 0^2 - 2g(-h)$

$V_y = \sqrt{2gh}$

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad \Rightarrow V = \sqrt{\mathbf{u^2 + 2gh}}$

4.5. प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण

प्रक्षेप्य पथ (बिन्दु पथ) को प्रक्षेप्य पथ समीकरण कहते है।

t समय बाद

$x = ut$ ......(1)

$y = \frac{-1}{2} gt^2$ ......(2)

समीकरण (1) से $t = x/u$ का मान समीकरण (2) में रखने पर

$$y = \frac{-1}{2} g . \frac{x^2}{u^2}$$

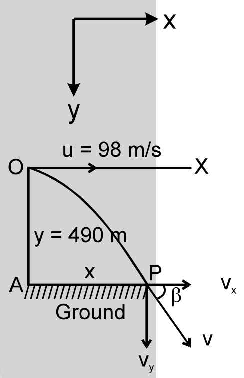
यह उक्त प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण होगा।

Solved Example

किसी ऊँचाई से क्षैतिज दिशा में फैके गये प्रक्षेप्य पर आधारित उदाहरण :

Example 1. 490 m ऊँचे एक पहाड़ की चोटी से एक प्रक्षेप्य को 98m/s के वेग से क्षैतिज दिशा में फैका जाता है। ज्ञात करो।
(i) जमीन पर पहुँचने में लगा समय।
(ii) पहाड़ से कितनी क्षैतिज दूरी पर यह जमीन से टकराएगा।
(iii) वेग जिससे यह प्रक्षेप्य जमीन से टकराएगा। ($g = 9.8\ m/s^2$)

Solution : (i) चित्रानुसार, क्षैतिज दिशा Ox में एक प्रक्षेप्य को पहाड़ की चोटी O से $u = 98\ ms^{-1}$ की चाल से फैंकते है। यह ऊध्वार्धर गहराई।
OA पर स्थित लक्ष्य P पर पहुँचता है। OA = y = 490 m



अतः, $y = \frac{1}{2} gt^2$

$\therefore \quad 490 = \frac{1}{2} \times 9.8\ t^2$

या $t = \sqrt{100} = 10$ s.

(ii) लक्ष्य की पहाड़ से क्षैतिज दूरी होगी –
AP = x = क्षैतिज वेग × समय = 98 × 10 = 980 m.

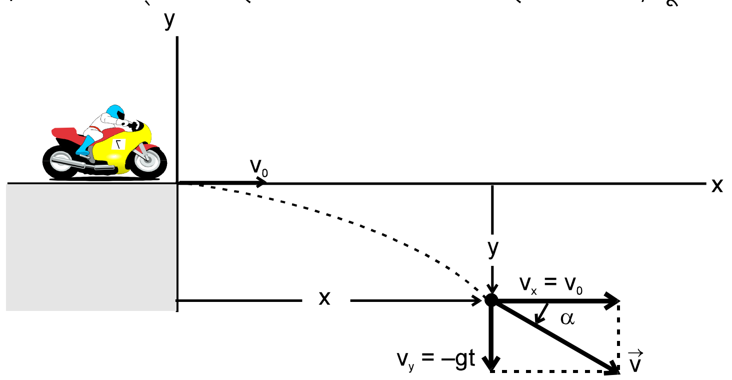
(iii) बिन्दु P पर प्रक्षेप्य के वेग v के क्षैतिज और उर्ध्वाधर घटक $v_x = u = 98\ ms^{-1}$

$v_y = u_y + gt = 0 + 9.8 \times 10 = 98\ ms^{-1}$

$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{98^2 + 98^2} = 98\sqrt{2}\ ms^{-1}$

यदि परिणामी वेग v क्षैतिज के साथ β कोण बनाए तो $\tan\beta = \frac{v_y}{v_u} = \frac{98}{98} = 1 \therefore \quad \beta = 45^o$

Example 2. एक मोटरसाइकिल सवार एक पहाड़ी के कोने तक पहुँच जाता है। ठीक कोने पर उसका वेग 9.0 m/s क्षैतिज दिशा में है। 0.5s पश्चात् मोटरसाइकिल की कोने के सापेक्ष इसकी स्थिति, दूरी और उसका वेग ज्ञात करो।



Solution : $t = 0.50$ s, पर इसके x और y-निर्देशांक : $x = v_0t = (9.0\ m/s)\ (0.50\ s) = 4.5\ m$

$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(10\ m/s^2)\ (0.50\ s)^2 = -\frac{5}{4}m$

y का ऋणात्मक मान बताता है कि इस वक्त मोटरसाइकिल प्रारंभिक बिन्दु से नीचे है।

इस समय मोटरसाइकिल की कोने (मूल बिन्दु) से दूरी :

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(4.5m)^2+(-1.2m)^2} = \sqrt{\left(\frac{45}{10}m\right)^2+\left(-\frac{12}{10}m\right)^2} = \frac{3}{10}\sqrt{(15)^2+(4)^2} = \frac{\sqrt{349}}{4}m$

इस समय वेग के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर घटक : $v_x = v_0 = 9.0\ m/s$

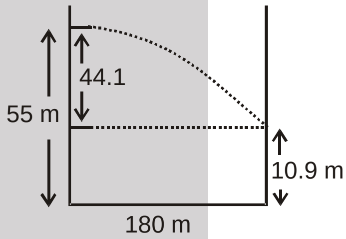
$v_y = -gt = (-10\ m/s^2)\ (0.50\ s) = -5\ m/s.$

इस समय मोटरसाइकिल की चाल (वेग का परिमाण) $v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{(9.0m/s)^2+(-5m/s)^2} = \sqrt{106}\ m/s$

और इस समय वेग सदिश का क्षैतिज से कोण $\alpha = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-5m/s}{9.0m/s}\right)$

Example 3. दो ऊँची ईमारतें आमने–सामने, एक दूसरे से 180 m दूरी पर स्थित है। एक ईमारत की जमीन से 55 m उँचाई पर स्थित खिड़की से एक गेंद को कितने क्षैतिज वेग से फैंका जाये कि यह दूसरी बिल्डिंग की जमीन से 10.9 m ऊंचाई पर स्थित खिड़की में प्रवेश कर जाए। ($g = 9.8\ m/s^2$)

Solution : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 44.1}{9.8}}$



$t = 3$ sec.

$R = uT$

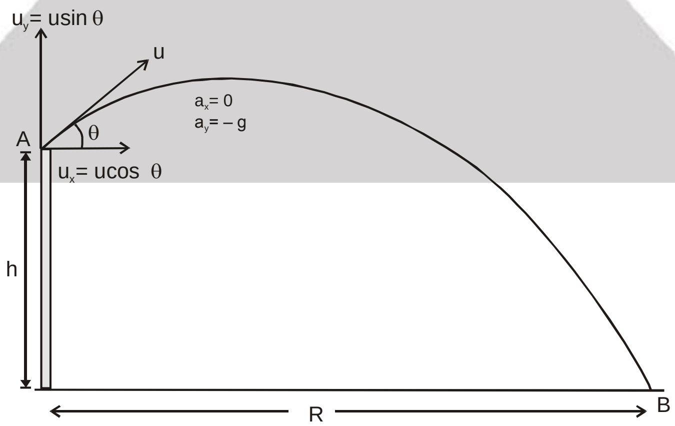
$\frac{180}{3} = u \quad u = 60\ m/s$

5. मीनार से फैंका गया प्रक्षेप्य

Case (i) : क्षैतिज प्रक्षेपण

$u_x = u\ ;\ u_y = 0\ ;\ a_y = -g$

Case (ii) : क्षैतिज से ऊपर की ओर θ कोण बनाते हुए प्रक्षैपण



$u_y = u\cos\theta\ ;\ u_y = u\sin\theta;\ a_y = -g$

A व B के मध्य गति की समीकरण (Y दिशा में)

$S_y = -h,\ u_y = u\sin\theta,\ a_y = -g,\ t = T$

$S_y = u_yt + \frac{1}{2}a_yt^2 \quad \Rightarrow -h = u\sin\theta\ t - \frac{1}{2}gt^2$

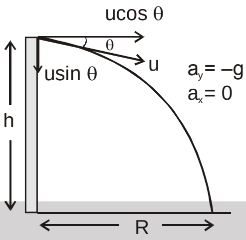
समीकरण को हल करने पर हमें उड्डयन काल T प्राप्त होगा और क्षैतिज परास $R = u_x T = u\cos\theta\ T$

तथा $v_y^2 = u_y^2 + 2a_yS_y = u^2 \sin^2\theta + 2gh$

$v_x = u\cos\theta$

$v_B = \sqrt{v_y^2 + v_x^2} \Rightarrow v_B = \sqrt{u^2 + 2gh}$

Case (iii) : क्षैतिज से नीचे की ओर θ कोण बनाते हुए प्रक्षेपण



$u_x = u\cos\theta$; $u_y = -u\sin\theta$; $a_y = -g$

$S_y = u_yt + \frac{1}{2}a_yt^2$

$S_y = -h$, $u_y = -u\sin\theta$, $t = T$, $a_y = -g \Rightarrow -h = -u\sin\theta\, T - \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow h = u\sin\theta\, T + \frac{1}{2}gT^2$.

समीकरण को हल करने पर हमें उड्डयन काल T प्राप्त होगा और क्षैतिज परास $R = u_x T = u\cos\theta\, T$

$v_x = u\cos\theta$

$v_y^2 = u_y^2 + 2a_yS_y = u^2\sin^2\theta + 2(-g)(-h)$

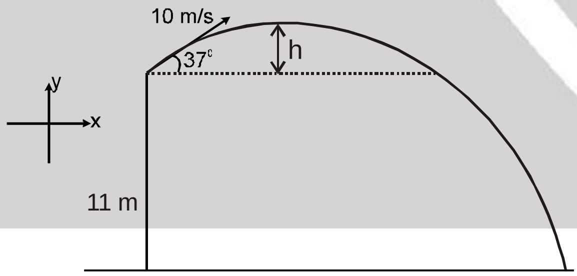
$v_y^2 = u^2\sin^2\theta + 2gh$

$v_B = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{u^2 + 2gh}$

नोट : समान ऊँचाई व समान प्रारम्भिक वेग से विभिन्न दिशाओं में फैंकी गयी वस्तुऐं धरातल पर समान अन्तिम वेग से टकरायेगी, परन्तु उनका उड्डयन काल भिन्न–भिन्न होगा।

Solved Examples

Example 1. 11 m ऊँची मीनार के ऊपरी सिरे से एक पत्थर चित्रानुसार 37° के कोण पर 10 m/s के वेग से प्रक्षेपित किया जाता है तो ज्ञात करो



(a) 2s पश्चात् चाल

(b) उड्डयन काल

(c) क्षैतिज परास

(d) पत्थर द्वारा प्राप्त की गई अधिकतम ऊँचाई

(e) धरातल पर टकराने से पूर्व चाल

Solution :

(a) क्षैतिज दिशा में प्रारम्भिक वेग = 10 cos 37° = 8 m/s

ऊर्ध्वाधर दिशा में प्रारम्भिक वेग = 10 sin 37° = 6 m/s

2 सेकण्ड पश्चात् चाल

$v = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} = 8\hat{i} + (u_y + a_y t)\,\hat{j} = 8\hat{i} + (6 - 10 \times 2)\,\hat{j} = 8\hat{i} - 14\hat{j}$

(b) $S_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow -11 = 6 \times t + \frac{1}{2} \times (-10) t^2$

$5t^2 - 6t - 11 = 0 \Rightarrow (t + 1)(5t - 11) = 0 \Rightarrow t = \frac{11}{5}$ sec.

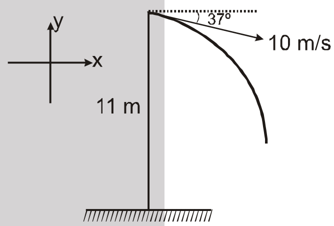
(c) परास $= 8 \times \frac{11}{5} = \frac{88}{5}$ m

(d) प्रक्षेपण स्तर से अधिकतम ऊँचाई $h = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{6^2}{2 \times 10} = 1.8$ m

$\therefore$ धरातल से अधिकतम ऊँचाई $= 11 + 1.8 = 12.8$ m

(e) $v = \sqrt{u^2 + 2gh} = \sqrt{100 + 2 \times 10 \times 11} \Rightarrow v = 8\sqrt{5}$ m/s

Example 2. 11 m ऊँची मीनार के ऊपरी सिरे से एक पत्थर चित्रानुसार 37° के कोण पर 10 m/s के वेग से प्रक्षेपित किया जाता है तो ज्ञात करो।



(a) उड्डयन काल
(b) क्षैतिज परास
(c) धरातल पर टकराने से पूर्व चाल

Solution : $u_x = 10 \cos 37^o = 8$ m/s, $u_y = -10 \sin 37^o = -6$ m/s

(a) $S_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow -11 = -6 \times t + \frac{1}{2} \times (-10) t^2$

$5t^2 + 6t - 11 = 0 \Rightarrow (t - 1)(5t + 11) = 0 \Rightarrow t = 1$ sec

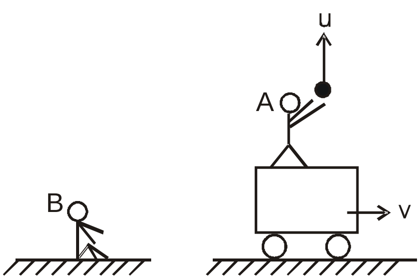
(b) परास $= 8 \times 1 = 8$ m

(c) $v = \sqrt{u^2 + 2gh} = \sqrt{100 + 2 \times 10 \times 11}$

$v = \sqrt{320}$ m/s $= 8\sqrt{5}$ m/s

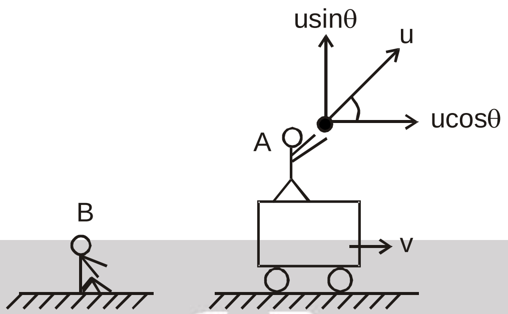
Ex.11 और Ex.12 में वस्तुऐं समान ऊँचाई एवं समान प्रारम्भिक वेग से भिन्न–भिन्न दिशाओं में फैंकी गयी हें तथा वस्तुऐं धरातल पर समान अन्तिम वेग से टकराती हैं। परन्तु समान्तराल भिन्न–भिन्न हैं।

6. गतिशील गाड़ी से फैका गया प्रक्षैप्य

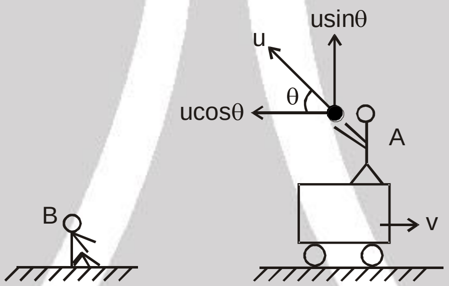


CASE (1) : एक समान चाल से गतिशील एक ट्रक से जब एक गेंद को ऊपर फैंका जाता है तो ट्रक में खड़े प्रेक्षक A को गेंद सीधी उर्ध्वाधर रेखा में गति करती हुई नजर आयेगी (उपर ओर नीचे) सड़क पर खड़े प्रेक्षक B को गेंद परवलयिक पथ पर गति करती हुई नजर आयेगी। गेंद की क्षैतिज चाल ट्रक की चाल के बराबर है।

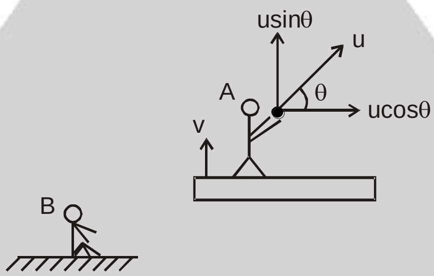
CASE (2) : जब गेंद को ट्रक की गति की दिशा में किसी कोण 'θ' पर फैंका जाता है तो गेंद के वेग के क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटक ट्रक पर खड़े हुए प्रेक्षक A के सापेक्ष क्रमशः $u\cos\theta$ व $u\sin\theta$ होंगे। धरातल पर खड़े हुए प्रेक्षक B के सापेक्ष गेंद के वेग के क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटक क्रमशः $u_x = u\cos\theta + v$ और $u_y = u\sin\theta$ होंगे।



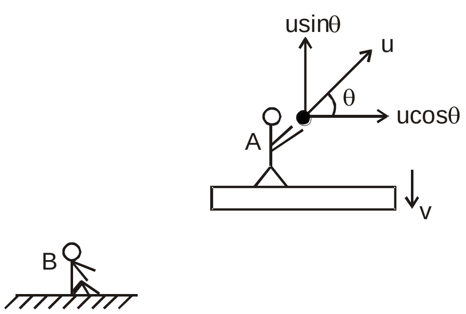
CASE (3) : जब गेंद को ट्रक की गति की विपरीत दिशा में किसी कोण 'θ' पर फैंका जाता है तो गेंद के वेग के क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटक ट्रक पर खड़े हुए प्रेक्षक A के सापेक्ष क्रमशः $u\cos\theta$ व $u\sin\theta$ होंगे। धरातल पर खड़े हुए प्रेक्षक B के सापेक्ष गेंद के वेग के क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटक क्रमशः $u_x = u\cos\theta - v$ और $u_y = u\sin\theta$ होंगे।



CASE (4) : जब एक गेंद को एक एकसमान गति v से ऊपर की ओर गतिशील प्लेटफार्म से किसी कोण 'θ' पर फैंका जाता है तो गेंद के वेग के क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटक प्लेटफार्म पर खड़े हुए प्रेक्षक A के सापेक्ष क्रमशः $u\cos\theta$ व $u\sin\theta$ होंगे। धरातल पर खड़े हुए प्रेक्षक B के सापेक्ष गेंद के वेग के क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटक क्रमशः $u_x = u\cos\theta$ और $u_y = u\sin\theta + v$ होंगे।



CASE (5) : जब एक गेंद को एक एकसमान गति v से नीचे की ओर गतिशील प्लेटफार्म से किसी कोण 'θ' पर फैंका जाता है तो गेंद के वेग के क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटक प्लेटफार्म पर खड़े हुए प्रेक्षक A के सापेक्ष क्रमशः $u\cos\theta$ व $u\sin\theta$ होंगे। धरातल पर खड़े हुए प्रेक्षक B के सापेक्ष गेंद के वेग के क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटक क्रमशः $u_x = u\cos\theta$ और $u_y = u\sin\theta - v$ होंगे।



Solved Examples

Example 1. एक लड़का एक लम्बी कार पर खड़ा है, और एक गेंद को 9.8 m/s के वेग से ऊपर की ओर फैंकता है। कार स्वयं भी क्षैतिज सड़क पर 1 m/s^2 के त्वरण से चल रही है। जब गेंद वापस कार में गिरेगी, तो वह लड़के से कितना पीछे गिरेगी ?

Solution : माना कार का प्रारंभिक वेग u है।

$t = \frac{2u_{\perp}}{g} = 2$

जहाँ $u_{\perp}$ = वेग का उर्ध्वाधर दिशा में घटक है।

x_c = कार द्वारा तय की गई दूरी

$x_c = u \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 = 2u + 2$

x_b = गेंद द्वारा तय की गई दूरी

$x_b = 2u$

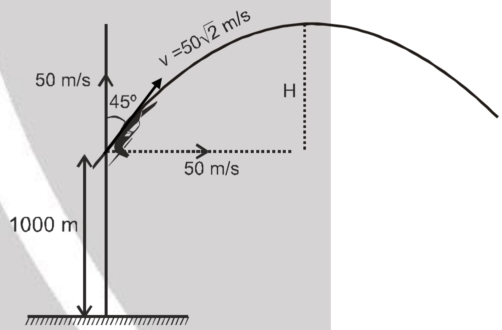
$x_c - x_b = 2u + 2 - 2u = 2m$ **Ans.**

Example 2. एक लड़ाकू यान ऊर्ध्व से 45° के कोण पर $50\sqrt{2}$ m/s की चाल से ऊपर उड़ते हुए, एक गोला छोड़ता है तो ज्ञात करो

(a) उड्डयन काल

(b) धरातल से गोले द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई

Solution :



(a) $y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$

$-1000 = 50t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$

$t^2 - 10t - 200 = 0$

$(t - 20)(t + 10) = 0$

$t = 20$ sec

(b) $H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{50^2}{2g} = \frac{50 \times 50}{20} = 125$ m

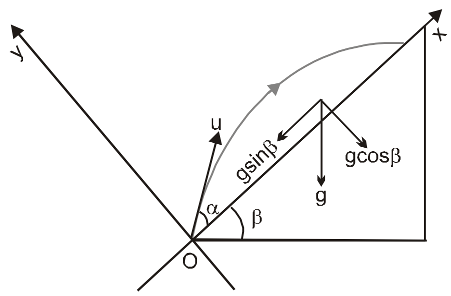
अतः धरातल से गोले की अधिकतम ऊँचाई

$H = 1000 + 125 = 1125$ m

7. नत तल पर प्रक्षेपण

स्थिति (i) : नत तल पर ऊपर की ओर प्रक्षेपण

यहाँ α नत तल के साथ प्रक्षेपण कोण है।



x व y अक्ष को चित्रानुसार क्रमशः नत तल के अनुदिश तथा लम्बवत् लिया गया है

$a_x = -g\sin\beta$

$u_x = u\cos\alpha$

$a_y = -g\cos\beta$

$u_y = u\sin\alpha$

7.1. उड्डयन काल (T) :

जब कण नततल पर टकरायेगा तब y शून्य होगा

$$y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = u\sin\alpha T - \frac{1}{2} g\cos\beta T^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta} = \frac{2u_\perp}{g_\perp}$$

यहाँ $u_\perp$ और $g_\perp$ क्रमशः u व g के नत तल के लम्बवत् घटक हैं।

7.2. अधिकतम ऊँचाई (H) :

उड्डयन काल के आधे समय में प्रक्षेप्य का y निर्देशांक अधिकतम ऊंचाई के बराबर होगा

$$H = u\sin\alpha\left(\frac{u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right) - \frac{1}{2} g\cos\beta\left(\frac{u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g\cos\beta} = \frac{u_\perp^2}{2g_\perp}$$

7.3. नततल के अनुदिश परास (R) :

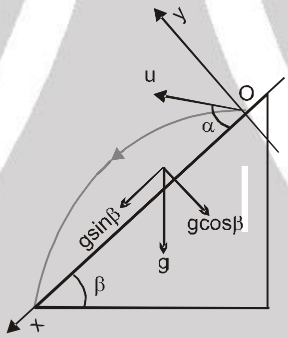
जब कण नततल पर टकरायेगा तब x निर्देशांक कण की परास के बराबर होगा–

$$x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$\Rightarrow R = u\cos\alpha\left(\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right) - \frac{1}{2} g\sin\beta\left(\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2u^2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}$$

स्थिति (ii) : नत तल पर नीचे की ओर प्रक्षेपण

इस स्थिति में :



$a_x = g\sin\beta$

$u_x = u\cos\alpha$

$a_y = -g\cos\beta$

$u_y = u\sin\alpha$

7.4. उड्डयन काल (T) :

जब कण नततल पर टकरायेगा तब y निर्देशांक शून्य होगा

$$y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow 0 = u\sin\alpha T - \frac{1}{2} g\cos\beta T^2 \Rightarrow \quad T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta} = \frac{2u_\perp}{g_\perp}$$

7.5. अधिकतम ऊँचाई (H) :

उड्डयन काल के आधे समय में प्रक्षेप्य का y निर्देशांक अधिकतम ऊंचाई के बराबर होगा

$$H = u\sin\alpha\left(\frac{u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right) - \frac{1}{2} g\sin\beta\left(\frac{u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g\cos\beta} = \frac{u_\perp^2}{2g_\perp}$$

7.6. नततल के अनुदिश परास (R) :

जब कण नततल पर टकरायेगा तब x निर्देशांक कण की परास के बराबर होगा –

$$x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow R = u\cos\alpha\left(\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right) + \frac{1}{2} g\sin\beta\left(\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{2u^2\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}$$

7.7. नत तल पर प्रक्षेप्य गति के कुछ मानक सूत्र

	नत तल पर ऊपर की ओर	नत तल पर नीचे की ओर
परास	$\frac{2u^2 \sin\alpha \cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}$	$\frac{2u^2 \sin\alpha \cos(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}$
उड्डयन चाल	$\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}$	$\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}$
अधिकतम परास के लिए प्रक्षेपण कोण	$\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$	$\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$
अधिकतम परास	$\frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$	$\frac{u^2}{g(1-\sin\beta)}$

यहाँ α नत तल से प्रक्षेपण कोण है, और β नत तल का क्षैतिज के साथ बनाया गया कोण है।

Note:
- किसी निश्चित चाल के लिए, अधिकतम परास प्राप्त करने के लिए आवश्यक प्रक्षेपण की दिशा, नत तल और उर्ध्वाधर के मध्य कोण को समद्विभाजित करने वाली दिशा होती है।

Solved Examples

Example 1. क्षैतिज से 30° पर झुके हुए एक नत तल के निचले सिरे से एक गोली को नत तल से θ = 37° पर दागा जाता है, तो ज्ञात करो

(i) नत तल से गोली की अधिकतम ऊँचाई की स्थिति

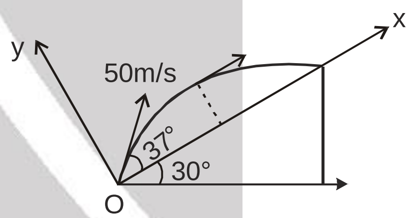
(ii) उड्डयन काल

(iii) नत तल के अनुदिश क्षैतिज परास

(iv) θ का वह मान जिसके लिए परास अधिकतम होगी

(v) अधिकतम परास

Solution : (i) चित्रानुसार x, y अक्ष लें



उच्चतम बिन्दु पर $V_y = 0$

$V_y^2 = U_y^2 + 2a_y y$

$0 = 30\sqrt{3}\ (30)^2 - 2g\cos30^o y$

y = (अधिकतम ऊँचाई) .....(1)

(ii) वापस x निर्देशांक के लिए

$V_y = U_y + a_y t$

$0 = 30 - g\cos30^o \times t$

$t = 2\sqrt{3}$

$T = 2 \times 2\sqrt{3}$ sec उड्डयन काल

(iii) $x = U_x t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$x = 40\times 4\sqrt{3} - \frac{1}{2}g\sin30^o \times (4\sqrt{3})^2$

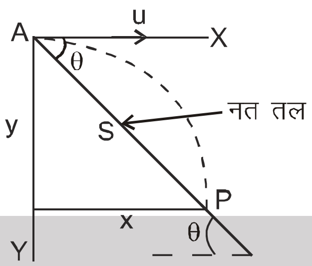
$x = 40\ (4\sqrt{3} - 3)$ m परास

(iv) $\frac{\pi}{4} - \frac{30^\circ}{2} = 45^o - 15^o = 30^o$

(v) $\frac{u^2}{g(1+\sin\ \beta)} = \frac{50\times50}{10\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2500}{15} = \frac{500}{3}$ m

Example 2. क्षैतिज से θ कोण पर झुके हुए नत–तल के ऊपरी बिन्दु से एक पिण्ड को u वेग से क्षैतिज दिशा में प्रक्षैपित किया जाता है। प्रक्षेपण बिन्दु से कितनी दूरी पर यह नत तल से टकराएगा।

Solution : चित्रानुसार X, Y-अक्ष लें। माना कि कण तल पर बिन्दु P पर टकराता है जहाँ उसके निर्देशांक (x, y) हैं। बिन्दु A और P के मध्य गति का अध्ययन करने पर



माना कि A और P के मध्य दूरी S है।

तो P की स्थिति है -

$x = S \cos \theta \;\; y = - S \sin \theta$

बिन्दु पथ के समीकरण का उपयोग करने पर (साधारण प्रक्षेप्य गति के लिए) $y = x \tan \theta - \dfrac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta}$

यहाँ $y = - S \sin \theta$

$x = S \cos \theta$

θ = क्षैतिज के साथ प्रक्षेपण कोण = 0º

$- S \sin \theta = S \cos \theta\,(0) - \dfrac{g(S\cos\theta)^2}{2u^2} \qquad S = \dfrac{2u^2 \sin\theta}{g\cos^2\theta}$

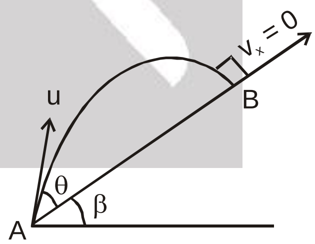
वैकल्पिक : $R = \dfrac{2u^2 \sin\alpha \cos(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta} \;\Rightarrow$ Here $\alpha = \beta = \theta \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{2u^2\sin\theta}{g\cos^2\theta}$

Example 3. चित्रानुसार β उन्नयन कोण वाले एक नत तल से एक प्रक्षैप्य को नत तल से θ कोण पर फैका जाता है। तो β और θ के मध्य सम्बन्ध बताइये यदि :

(a) प्रक्षैप्य, नततल के सापेक्ष नत तल पर लम्बवत् टकराए।

(b) प्रक्षैप्य नत तल से जमीन के सापेक्ष क्षैतिज दिशा में गति करता हुआ टकराए।

Solution : (a) यदि प्रक्षैप्य नत तल से लम्बवत् टकराता है तो, टकराते वक्त $v_x = 0$



$v_x = u_x + a_x t$

$0 = u \cos \theta - g \sin \beta T$

$T = \dfrac{u\cos\theta}{g\sin\beta}$

सूत्र से हम जानते हैं कि

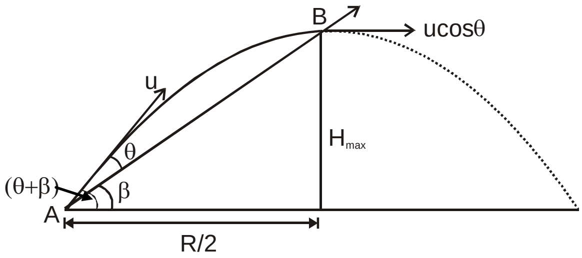
$\Rightarrow \quad \dfrac{u\cos\theta}{g\sin\beta} = \dfrac{2u\sin\theta}{g\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad 2 \tan \theta = \cot \beta$

(b) यदि प्रक्षेप्य नत तल से क्षैतिज टकराता है तो टकराते समय यह जमीन से उच्चतम ऊँचाई पर होगा।

अतः A से B तक जाने में लिया गया समय

$t_{AB} = \dfrac{1}{2}$ क्षैतिज तल पर उड्डयन काल $= \dfrac{2u\sin(\theta+\beta)}{2\times g}$

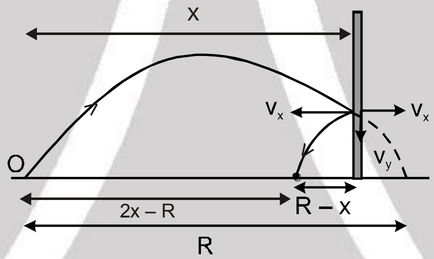
तथा t_{AB} = नत तल पर उड्डयन काल $= \dfrac{2u\sin\theta}{g\cos\beta}$



t_{AB} को बराबर करने पर, $\dfrac{2u\sin\theta}{g\cos\beta} = \dfrac{2u\sin(\theta+\beta)}{2g} \Rightarrow 2\sin\theta = \sin(\theta+\beta)\cos\beta$.

7.8. एक प्रक्षेप्य की दीवार से प्रत्यास्थ टक्कर

माना एक प्रक्षैप्य को जमीन पर स्थित बिन्दु O से θ कोण पर u वेग से फैंका जाता है। प्रक्षैप्य की परास R है। यदि प्रक्षैप्य के रास्ते में बिन्दु O से x दूरी पर एक दीवार आ जाऐ तो यह प्रक्षैप्य दीवार के साथ प्रत्यास्थ टक्कर करेगा, टकराने के बाद वेग का y घटक तो अपरिवर्तित रहेगा, लेकिन उसका x घटक उल्टा हो जाएगा। अतः बची हुई (R – x) दूरी यह पीछे की ओर तय करेगा, और प्रक्षेप्य दीवार से (R – x) दूरी पर गिरेगा तथा उड्डयन काल तथा अधिकतम उर्ध्वाधर ऊँचाई, चिकनी और प्रत्यास्थ दीवार से टक्कर के बावजूद परिवर्तित नहीं होते हैं, क्योंकि यह वेग के केवल y घटक पर निर्भर करते हैं।

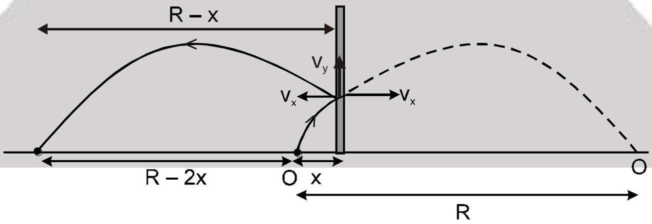


स्थिति I : यदि $x \geq \dfrac{R}{2}$

इस स्थिति में प्रक्षेप्य प्रक्षेपण बिन्दु O से (2x – R) दूरी पर गिरता है।

स्थिति II : यदि $x < \dfrac{R}{2}$

इस स्थिति में प्रक्षेप्य प्रक्षेपण बिन्दु O से (R – 2x) दूरी पर गिरता है।



Solved Examples

Example 1. धरातल से कोण θ = 37º पर u = 20 m/s की चाल से फैंकी गयी एक गेंद प्रक्षेपण बिन्दु से 18.4 मीटर दूरी पर स्थित एक उर्ध्वाधर दीवार से टकराती है। अंततः गेंद प्रत्यास्थ रूप से टकराकर (वापस आकर) दीवार से कुछ दूरी पर गिर जाती है, तो सम्पूर्ण गति के लिए ज्ञात करो , (i) अधिकतम ऊँचाई (ii) उड्डयन काल (iii) दीवार से वह दूरी जहाँ गेंद गिरेगी। (iv) प्रक्षेपण बिन्दु से वह दूरी जहाँ गेंद गिरेगी।

Solution :

(i) $H = \dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g} = \dfrac{(20)^2\sin^2 37^\circ}{2\times10} = \dfrac{20\times20}{2\times10}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5} = 7.2$ m

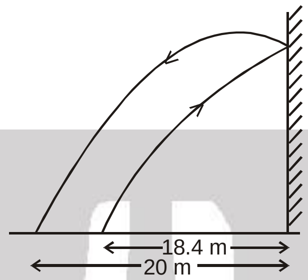
(ii) $T = \dfrac{2u\sin\theta}{g} = \dfrac{2\times20\times\sin37^\circ}{10} = 2.4$ sec.

(iii) $R = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \dfrac{u^2}{g} \times 2\sin\theta\cos\theta$

$\Rightarrow\ R = \dfrac{(20)^2}{10} \times 2\sin 37^\circ \cos 37^\circ = 38.4$ m

दीवार से दूरी जहाँ गेंद गिरेगी = R – x = 38.4 – 18.4 = **20 m. Ans.**

(iv) प्रक्षेपण बिन्दु से दूरी = | R – 2x | = | 38.4 – 2 × 18.4| = 1.6 m

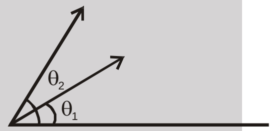


SOLVED MISCELLANEOUS PROBLEMS

Problem 1 दो प्रक्षेप्य भिन्न–भिन्न वेग एवं भिन्न–भिन्न कोणों पर इस प्रकार प्रक्षेपित किये गए है, ताकि दोनों समान अधिकतम ऊँचाई तय करें, तो दोनों प्रक्षेप्य को उच्चतम बिन्दु तक पहुँचने में लगे समयों का योग ज्ञात करो? यदि उड्डयन काल T है।

Answer : T = (किसी एक प्रक्षेप्य का उड्डयन काल)

Solution : $H_1 = H_2$ (दिया है) ; $\dfrac{u_1^2 \sin^2\theta_1}{2g} = \dfrac{u_2^2 \sin^2\theta_2}{2g}$



$u_1^2 \sin^2\theta_1 = u_2^2 \sin^2\theta_2$ ......(1)

अधिकतम ऊँचाई पर अन्तिम वेग = 0 ; $v^2 = u_1^2 - 2gH_1$

$U_1^2 = 2gH_1$ इसी प्रकार $U_2^2 = 2gH_2$

$U_1 = U_2$

समीकरण (1) में रखने पर

$u_1^2 \sin^2\theta_1 = u_2^2 \sin^2\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \theta_2$

$T_1 = \dfrac{2u_1 \sin\theta_1}{g} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \dfrac{2u_2 \sin\theta_2}{g} \qquad \therefore\ T_1 = T_2$

पहले प्रक्षेप्य द्वारा अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लिया गया समय = $\dfrac{T_1}{2}$

दूसरे प्रक्षेप्य द्वारा अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में लिया गया समय = $\dfrac{T_2}{2}$

$\therefore$ प्रत्येक द्वारा उच्चतम बिन्दु पर पहुँचने में लिये गये समय का योग

$= \dfrac{T_1}{2} + \dfrac{T_2}{2} = 2\dfrac{T_1}{2}$ (या $2\dfrac{T_2}{2}$) = T_1 (या T_2)

किसी भी प्रक्षेप्य द्वारा लिया गया कुल समय **Ans.**

Problem 2 एक पिण्ड को क्षैतिज से 60º का कोण बनाते हुए 10 m/s वेग से प्रक्षैपित किया जाता है। ज्ञात करो

(a) उड्डयन चाल (b) परास

(c) अधिकतम उँचाई (d) एक सैकण्ड पश्चात् पिण्ड का वेग।

(e) पिण्ड का वेग जब वह जमीन से 1 m उँचाई पर हो।

Answer : (a) $\sqrt{3}$ sec. (b) $5\sqrt{3}$ m (c) $\dfrac{15}{4}$ m (d) $10\sqrt{2-\sqrt{3}}$ m/s (e) $\vec{v} = 5\hat{i} \pm \sqrt{55}\hat{j}$

Solution : (a) $T = \dfrac{2u\sin\theta}{g} = \dfrac{2\times5\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$ sec.

(b) परास $= \dfrac{u^2\sin2\theta}{g} = \dfrac{10\times10\times2\times\sin60^\circ\cos60^\circ}{10} = 0.20 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{2} = 5\sqrt{3}$ m.

(c) अधिकतम ऊँचाई $H = \dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g} = \dfrac{10\times10\times.3}{2\times10\times4} = \dfrac{15}{4}$ m

(d) किसी समय 't' पर वेग

$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_x = \vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad v_x = 5$

$\vec{v}_y = \vec{u}_y + \vec{a}_y\,t \quad \Rightarrow \quad v_y = 5\sqrt{3} - 10 \times 1$

$\vec{v} = 5\hat{i} + (5\sqrt{3} - 10\hat{j}) \quad \Rightarrow \quad v = 10\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)$ m/s

(e) $v^2 = u^2 + 2gh$

किसी ऊँचाई 'h' पर वेग $\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j}$

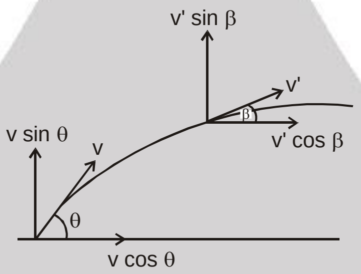
$v_x = u_x = 5$

$v_y = u_y^2 - 2gh = \left(5\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times 10 \times 1$; $v_y = \sqrt{55} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 5\,\hat{i} \pm \sqrt{55}\,\hat{j}$

Problem 3 एक पत्थर v वेग से क्षैतिज से θ कोण पर फेंका गया है। जब यह क्षैतिज के साथ β कोण बनाता है, तब इसकी चाल क्या होगी।

Answer : $\dfrac{v\cos\beta}{\cos\theta}$

Solution : चूंकि वेग का क्षैतिज घटक स्थिर रहता है। अतः $v\cos\theta = v'\cos\beta$



$v' = \dfrac{v\cos\theta}{\cos\beta}$

Problem 4 दो समान्तर कागज के पर्दे A और B परस्पर 100 m की दूरी पर स्थित है। एक दागी गई गोली पहले A को ओर बाद में B को छेदती है। B में बना छेद A में बने छेद से 10 cm नीचे पाया गया। यदि A को छेदते समय गोली का वेग पूर्णतः क्षैतिज हो तो वह वेग ज्ञात करो जब वह पर्दे A को भेदती है। वायु का प्रतिरोध और कागज के प्रतिरोध को नगण्य मानिये।

Answer : 700 m/s

Solution : x दिशा में गति के नियम से

$100 = v \times t$

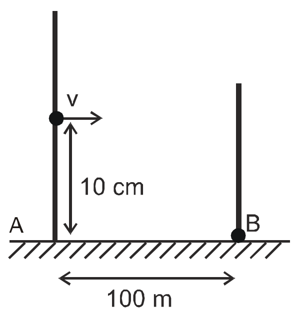
$t = \dfrac{100}{v}$ ......(1)

y दिशा में

$0.1 = 1/2 \times 9.8 \times t^2$ ......(2)

$0.1 = 1/2 \times 9.8 \times (100/v)^2$

समीकरण (1) व (2) को हल करने पर $u = 700$ m/s



Problem 5 दो पत्थरो A और B को एक साथ, एक 100 m ऊंची मीनार से प्रक्षेपित किया जाता है। पत्थर B, 10 m/s के वेग से क्षैतिज फैंका जाता है, और पत्थर A को मीनार से गिराया जाता है। ज्ञात करो–

(a) दोनों पत्थरों का उड्डयन काल

(b) 3 sec पश्चात दोनों पत्थरों के मध्य दूरी

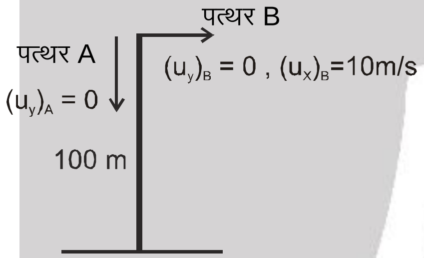
(c) पत्थर B, जमीन से किस कोण पर टकराएगा।

(d) पत्थर B की क्षैतिज परास

Answer : (a) $2\sqrt{5}$ sec. (b) x_B = 30 m, y_B = 45 m (c) $\tan^{-1} 2\sqrt{5}$ (d) $20\sqrt{5}$ m

Solution :

(a) उड्डयन काल (दोनों पत्थरों के लिए) ज्ञात करने के लिये y दिशा में गति के समीकरण लगाने पर

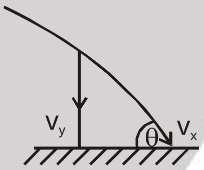


$100 = 1/2\ gt^2 \Rightarrow t = 2\sqrt{5}$ sec.

(b) $X_B = 10 \times 3 = 30$ mt

$Y_B = 1/2 \times g \times t^2 = 1/2 \times 10 \times 3 \times 3$

$Y_B = 45$ m



3 sec. बाद दोनों पत्थरों के मध्य दूरी $X_B = 30$, $Y_B = 45$ अतः दूरी = $\sqrt{(30)^2 + (45)^2}$

(c) धरातल पर टकराते समय कोण $v_y^2 = u_y^2 + 2gh = 0 + 2 \times 10 \times 100$

$v_y = 20\sqrt{5}$ m/s

$v_x = 10$ m/s

$\because \vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$ $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{20\sqrt{5}}{10}\right) = \tan^{-1}(2\sqrt{5})$

(d) कण 'B' की क्षैतिज परास $X_B = 10 \times (2\sqrt{5}) = 20\sqrt{5}$ m

Problem 6 दो कणों को समान ऊर्ध्वाधर तल में एक समान चाल V से एक साथ क्रमशः θ व 2 θ (θ < 45º) कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है। तो किस समय पर दोनों के वेग समान्तर होगे।

Answer : $\dfrac{v}{g}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)$

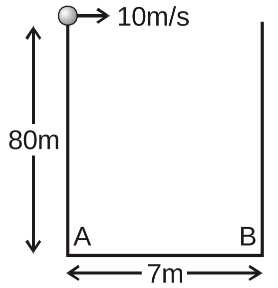
Solution : θ कोण पर प्रक्षेपित कण का t समय पश्चात् वेग $\vec{V}_1 = (v\cos\theta\,\hat{i} + v\sin\theta\,\hat{j}) - (gt\,\hat{j})$

2θ कोण पर प्रक्षेपित कण का t समय पश्चात् वेग $\vec{V}_2 = (v\cos 2\theta\,\hat{i} + v\sin 2\theta\,\hat{j}) - (gt\,\hat{j})$

चुंकि वेग समान्तर है अतः $\dfrac{v_x}{v'_x} = \dfrac{v_y}{v'_y}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{v\cos\theta}{v\cos 2\theta} = \dfrac{v\sin\theta - gt}{v\sin 2\theta - gt}$

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर $t = \dfrac{v}{g}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3\theta}{2}\right)$.

Problem 7 एक गेंद 80 m गहरे कुएँ के ऊपरी सिरे से 10 m/s के वेग से क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित की जाती है। गेंद कुएँ के तल में कितनी दूरी पर गिरेगी (कुएँ की चिकनी दीवारों से गेंद की सभी टक्करें प्रत्याथ है) :



(A) A से 5 m (B) B से 5 m (C) A से 2 m (D) B से 2 m

Answer : (B),(C)

Solution : तल तक पहुँचने में गेंद द्वारा लिया गया कुल समय = $\sqrt{\dfrac{2H}{g}} = \sqrt{\dfrac{2x80}{10}}$ = 4 sec.

माना कि एक टक्कर में लिया गया समय t है। तो t x 10 = 7

t = .7 sec.

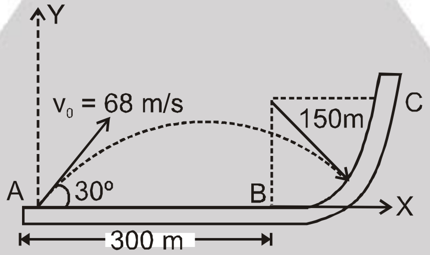
कुल टक्करो की संख्या = $\dfrac{4}{.7} = 5\dfrac{5}{7}$ (दीवार B से 5th टक्कर)

दो परस्पर टक्करो कें मध्य तय की गई क्षैतिज दूरी = 7 m

$\therefore$ टक्कर के 5/7 वे भाग में तय की गई दूरी = $\dfrac{5}{7}$x7 = 5 m

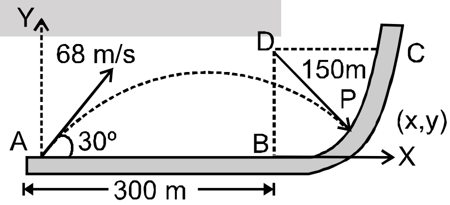
A से दूरी होगी 2 m. **Ans.**

Problem 8 दिये गये चित्र के अनुसार एक प्रक्षेप्य बिन्दु 'A' से फैंका जाता है तो वापस सतह से टकराने वाले बिन्दु के 'x' व 'y' निर्देशांक क्या होगें। BC भाग 150 m त्रिज्या का वृत्ताकार भाग है। जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है।



Solution : माना कि प्रक्षेप्य वृत्तीय पथ पर बिन्दु (x,y) पर टकराता है।
और 'A' मूल बिन्दु है चित्रानुसार वृत्तीय पथ के केन्द्र के निर्देशांक (300, 150) है। तो वृत्तीय पथ का समीकरण होगा।

$(x - 300)^2 + (y - 150)^2 = (150)^2$ .....(1)



प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण है

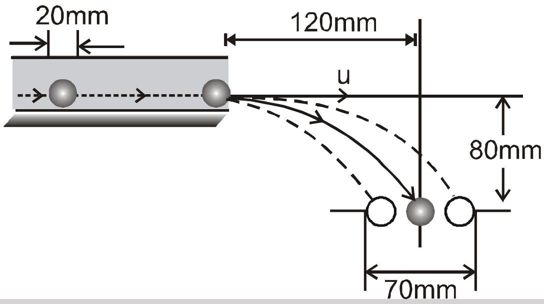
$$y = x \tan 30^o - \frac{1}{2}\ \frac{gx^2}{(68)^2 \cos^2 30^o}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^2 g}{9248} \quad .....(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

x = 373 m ; y = 18.75 m

Problem 9 बॉल बीयरिंग क्षेतिज दिशा में 'u' वेग के परिमाण से फेंकी जाती है। और चित्रानुसार एक 70mm के व्यास वाले छेद में जाकर गिरती है 'u' की परास क्या होना चाहिए जिससे की गेंद छेद में जाकर गिरे

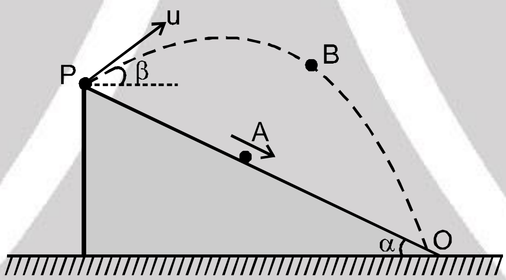


Solution : $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0.08}{9.8}} = 0.13s$

$u_{min} = \frac{(120 - 35 + 10) \times 10^{-3}}{0.13} = 0.73$ m/s

और $u_{max} = \frac{(120 + 35 - 10) \times 10^{-3}}{0.13} = 1.11$ m/s.

Problem 10 कण A चिकने नततल के P बिन्दु से छोड़ा जाता है यहां नततल क्षेतिज से α कोण पर है। उसी समय एक दूसरा कण B क्षेतिज से β कोण पर P बिन्दु से ही प्रारम्भिक u वेग से फेंका जाता है यदि दोनो कण वापस नततल पर मिलते है। तो α व β के मध्य सम्बन्ध क्या होगा।



Solution : तल के समानान्तर B की गति

प्रारम्भिक वेग = $u \cos(\alpha + \beta)$

त्वरण = $g \sin \alpha$

$\therefore \quad OP = u \cos(\alpha + \beta)\, t + \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2$ ......(i)

तल के समानान्तर A की गति

प्रारम्भिक वेग = 0

त्वरण = $g \sin \alpha$

$\therefore \quad OP = \frac{1}{2} g \sin \alpha\, t^2$ .....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से $u \cos(\alpha + \beta)\, t = 0$

तो $t = 0$ होगा या $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

तो कणो के वापस टकराने की शर्त होगी

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.