## HANDOUT–3 प्रत्यास्थता और श्यानता (ELASTICITY & VISCOSITY)

### प्रत्यास्थता व अप्रत्यास्थता

किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण जिसके कारण यह अपना मूल विन्यास फिर से प्राप्त कर लेती है (अर्थात् आकृति व आकार) जब बाह्य विरूपक बल हटा लिया जाता है, तो यह गुण प्रत्यास्थता कहलाता है। किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण जिसके कारण वस्तु अपना मूल विन्यास फिर से प्राप्त नहीं करती जब बाह्य बल हटा लिया जाता है। यह गुण सुघट्यता (अप्रत्यास्थता) कहलाती है।

विरूपक बल **:** एक बाह्य बल जो किसी वस्तु पर आरोपित करने पर इसका आकार या आकृति या दोनों परिवर्तित कर देता है। विरूपक बल कहलाता है।

पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु **:** जब विरूपक बल हटा लिया जाता है तो यदि वस्तु अपनी मूल आकृति को पूर्णतया फिर से प्राप्त कर लेती है तो यह पूर्ण प्रत्यास्थ कहलाती है। चूंकि कोई भी वस्तु अपनी मूल आकृति फिर से पूर्णतया नहीं प्राप्त कर सकती इसलिए पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु का विचार केवल काल्पनिक विचार है। क्वार्टज फाइबर, पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु के निकटतम है।

पूर्ण सुघट्य **(**अप्रत्यास्थ वस्तु**) :** एक वस्तु पूर्ण अप्रत्यास्थ कहलाती है, यदि यह अपनी मूल आकृति थोड़ी सी भी प्राप्त नहीं करती हो चाहे विरूपक बल हटा लिया जाये। चूंकि प्रत्येक पदार्थ विरूपक बल हटाने पर आंशिक रूप से अपनी मूल आकृति प्राप्त करता है। इसलिये पूर्ण सुघट्य (अप्रत्यास्थ) वस्तु का विचार भी एक काल्पनिक विचार है पैराफिन वेक्स, गीली मिट्टी पूर्ण सुघट्य (अप्रत्यास्थ) वस्तु के निकटतम है।

प्रत्यास्थता का कारण **:** एक ठोस में परमाणु व अणु इस प्रकार व्यवस्थित होते है कि प्रत्येक अणु पर पड़ौसी अणुओं के कारण बल लगता है। ये बल अन्तराणविक बल कहलाते है। जब वस्तु पर कोई विरूपक बल आरोपित नहीं होता तब ठोस (अर्थात् वस्तु) का प्रत्येक अणु इसकी साम्यावस्था स्थिति में होता है और ठोस के अणुओं के मध्य अन्तराणविक बल न्यूनतम होता है।
वस्तु पर विरूपक बल आरोपित करने पर अणु या तो एक दूसरे के पास आते है या एक दूसरे से दूर जाते है। इसके परिणामस्वरूप अणु उनकी साम्यावस्था से विस्थापित हो जाते हैं। दूसरे शब्दों में अन्तराणविक बल परिवर्तित हो जाते है व अणुओं पर प्रत्यानयन बल उत्पन्न होते हैं। जब विरूपक बल हटा लिया जाता है, तो ये प्रत्यानयन बल ठोस के अणुओं को उनकी अपनी साम्यावस्था स्थितियों में लाते है और इस प्रकार ठोस (या वस्तु) अपनी मूल आकृति फिर से प्राप्त करता है।

### प्रतिबल

जब वस्तु पर विरूपक बल आरोपित किया जाता है तो वस्तु के अन्दर समान प्रत्यानयन बल विपरीत दिशा में उत्पन्न होता है। वस्तु के प्रति इकाई क्षेत्रफल पर प्रत्यानयन बल प्रतिबल कहलाता है।

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{प्रत्यानयन बल}}{\text{वस्तु का क्षेत्रफल}} = \frac{F}{A}$$

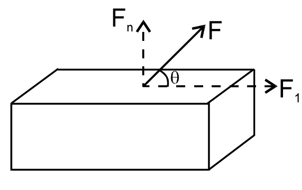
प्रतिबल की इकाई $N/m^2$ है। प्रतिबल तीन प्रकार का होता है।

**1.** अनुदैर्ध्य या अभिलम्ब प्रतिबल
जब वस्तु एक विमीय है तो प्रति इकाई क्षेत्रफल पर बल, अनुदैर्ध्य प्रतिबल कहलाता है।
यह दो प्रकार का होता है : (a) सम्पीड़न प्रतिबल (b) तनन प्रतिबल


उदाहरण **:**

(i) चित्र में दर्शाये एक ठोस गुटके पर विचार करें। माना F उस फलक पर आरोपित किया जाता है, जिसका क्षेत्रफल A है। को दो घटकों में वियोजित करने पर :
$F_n = F \sin\theta$ अभिलम्ब बल तथा $F_t = F \cos\theta$ स्पर्श रेखीय बल कहलाता है।

$\therefore$ अभिलम्ब (तनन) प्रतिबल $= \dfrac{F_n}{A} = \dfrac{F\sin\theta}{A}$



(b)

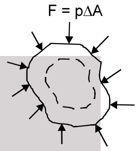
**2.** स्पर्श रेखीय या अपरूपण प्रतिबल

यह, वस्तु के पृष्ठ के स्पर्श रेखीय प्रति इकाई क्षेत्रफल पर कार्यरत प्रत्यानयन बल के रूप में परिभाषित किया जाता है। उपरोक्त प्रदर्शित चित्र के संदर्भ में।

स्पर्श रेखीय **(**अपरूपण**)** प्रतिबल = $\frac{F_t}{A} = \frac{F\cos\theta}{A}$

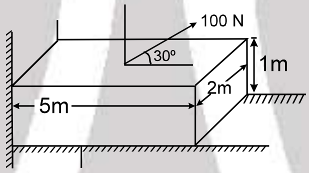
प्रतिबल का प्रभाव विरूपण उत्पन्न करना या आकार, आयतन और आकृति में परिवर्तन करना है। (अर्थात् वस्तु का अभिविन्यास)

**3.** आयतन प्रतिबल : जब वस्तु की सम्पूर्ण सतह पर, सतह के लम्बवत् बल कार्यरत होता है, तो प्रति इकाई क्षेत्रफल पर कार्यरत बल दाब कहलाता है। दाब का प्रभाव आयतन परिवर्तन करना है। वस्तु की समांगता पर निर्भर करते हुए वस्तु की आकृति बदल भी सकती है और नहीं भी।




## Solved Example

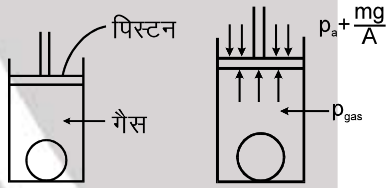
**Example 1.** एक स्थिर गुटके पर अनुदैर्ध्य प्रतिबल और स्पर्श रेखीय प्रतिबल ज्ञात करो।




**Solution :** अनुदैर्ध्य या अभिलम्ब प्रतिबल $\Rightarrow$ $\sigma_l = \frac{100\sin 30^o}{5\times 2} = 5\ N/m^2$

स्पर्श रेखीय प्रतिबल $\Rightarrow$ $\sigma_t = \frac{100\ \cos\ 30^o}{5\times 2} = 5\sqrt{3}N/m^2$

**Example 2.** $\frac{10}{\pi}$ सेमी० त्रिज्या की गोलाकार वस्तु पर आयतन प्रतिबल ज्ञात करो यदि पिस्टन का क्षेत्रफल व द्रव्यमान क्रमशः 50 $cm^2$ व 50 kg है। यह गैस से भरे एक बेलन में है।




**Solution :** $p_{gas} = \frac{mg}{A} + p_a = \frac{50\times 10}{50\times 10^{-4}} + 1\times 10^5 = 2\times 10^5\ N/m^2$

आयतन प्रतिबल = $p_{gas} = 2\times 10^5\ N/m^2$

### विकृति

वस्तु के विन्यास (अर्थात् आकृति, लम्बाई या आयतन) में परिवर्तन तथा इसके मूल विन्यास का अनुपात विकृति कहलाता है।

अर्थात् विकृति $\in$ = $\frac{\text{विन्यास में परिवर्तन}}{\text{मूल विन्यास}}$ यह ईकाईहीन है।

विकृति के प्रकार

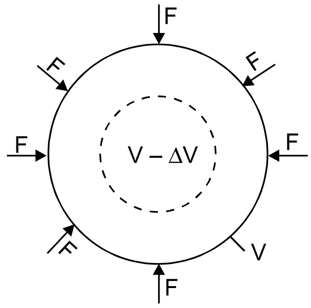
विकृति तीन प्रकार की होती है –

**(i)** अनुदैर्ध्य विकृति **:** इस प्रकार की विकृति तब उत्पन्न होती है जब विरूपक बल वस्तु की लम्बाई में परिवर्तन करता है। यह वस्तु की लम्बाई में परिवर्तन व मूल लम्बाई के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है।

L लम्बाई के तार पर विचार करें **:** जब तार को बल F के द्वारा खींचा जाता है, तो माना तार की लम्बाई में परिवर्तन $\Delta L$ है,

$\therefore$ अनुदैर्ध्य विकृति, $\in_\ell = \frac{\text{लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{मूल लम्बाई}}$ या अनुदैर्ध्य विकृति = $\frac{\Delta L}{L}$

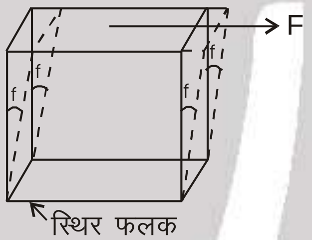
**(ii)** आयतन विकृति **:** इस प्रकार की विकृति तब उत्पन्न होती है जब विरूपक बल चित्र में प्रदर्शित वस्तु के आयतन में परिवर्तन करता है। यह वस्तु के आयतन में परिवर्तन व उसके मूल आयतन के अनुपात के बराबर होता है।

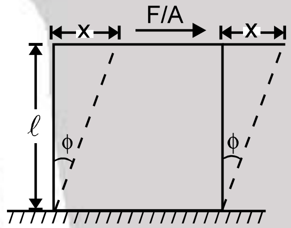



यदि $\Delta V$ = आयतन में परिवर्तन   V = मूल आयतन

$\in_v$ = आयतन विकृति = $\frac{\Delta V}{V}$

**(iii)** अपरूपण विकृति **:** इस प्रकार की विकृति तब उत्पन्न होती है जब विरूपक बल वस्तु की आकृति में परिवर्तन करता है। यह उस कोण ($\phi$) के रूप में परिभाषित है जिससे स्थिर फलक के लम्बवत् फलक चित्रानुसार घूम जाती है।




$\tan\phi$ या $\phi = \frac{x}{\ell}$

## हुक का नियम व प्रत्यास्थता गुणांक

इस नियम के अनुसार, प्रत्यास्थ सीमा के अन्दर प्रतिबल, विकृति के समानुपाती होता है

अर्थात् प्रतिबल $\propto$ विकृति

या प्रतिबल = नियतांक × विकृति या $\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$ = प्रत्यास्थता गुणांक

यह नियतांक प्रत्यास्थता गुणांक कहलाता है।

इस प्रकार प्रत्यास्थता गुणांक प्रतिबल व विकृति के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है।

प्रत्यास्थता गुणांक वस्तु के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है और इसकी विमाओं (अर्थात् लम्बाई, आयतन आदि) पर निर्भर नहीं करता।

मात्रक **:** प्रत्यास्थता गुणांक का SI मात्रक $Nm^{-2}$ या पास्कल (Pa) है।

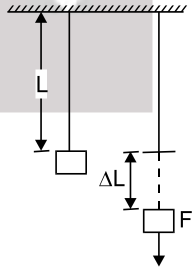
## प्रत्यास्थता गुणांक के प्रकार

विकृति के संगत तीन प्रकार के प्रत्यास्थता गुणांक होते है।

1. यंग का प्रत्यास्थता गुणांक (Y)   2. आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (K)
3. दृढ़ता गुणांक ($\eta$)

**1.** यंग का प्रत्यास्थता गुणांक

यह अभिलम्ब प्रतिबल व अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात होता है।



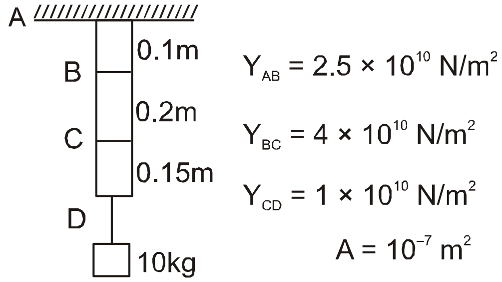

अर्थात्  यंग गुणांक (Y) = $\frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$

अभिलम्ब प्रतिबल = F/A,

अनुदैर्ध्य विकृति = $\Delta L/L$

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{FL}{A\Delta L}$$

**Example 3.** बिन्दु B, C व D में विस्थापन ज्ञात करो।



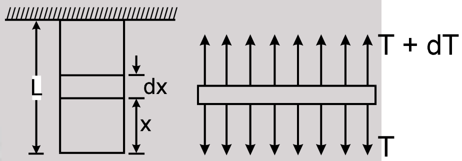

**Solution :** $\Delta L_B = \Delta L_{AB} = \dfrac{FL}{AY} = \dfrac{MgL}{AY} = \dfrac{10 \times 10 \times 0.1}{10^{-7} \times 2.5 \times 10^{10}} = 4 \times 10^{-3}$ m = 4mm

$\Delta L_C = \Delta L_B + \Delta L_{BC} = 4 \times 10^{-3} + \dfrac{100 \times 0.2}{10^{-7} \times 4 \times 10^{10}} = 4 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-3} = 9$mm

$\Delta L_D = \Delta L_C + \Delta L_{CD} = 9 \times 10^{-3} + \dfrac{100 \times 0.15}{10^{-7} \times 1 \times 10^{10}} = 9 \times 10^{-3} + 15 \times 10^{-3} = 24$ mm

## छड़ के भार के कारण इसका विस्तार

माना छड़ का स्वंय का भार ‘W’, अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल ‘A” व लम्बाई ‘L' है। पेंदे से ‘x’ दूरी पर एक अल्पांश पर विचार करते है तो




$$T = \frac{W}{L}x$$

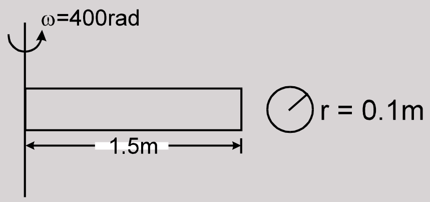
अल्पांश ‘dx’ में विस्तार = $\dfrac{T.dx}{AY}$

कुल विस्तार = $s = \displaystyle\int_0^L \frac{Tdx}{AY} = \int_0^L \frac{Wxdy}{LAY}$

नोट : इसका कुल भार द्रव्यमान केन्द्र पर, व प्रभावी लम्बाई $\ell/2$ मानकर किया जा सकता है।

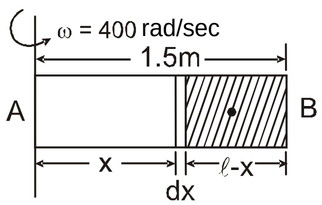
## *Solved Example*

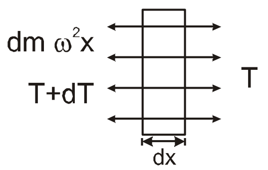
**Example 4.** दिया है $Y = 2 \times 10^{11}$ N/m$^2$ $\rho = 10^4$ kg/m$^3$ छड़ में विस्तार ज्ञात करो।

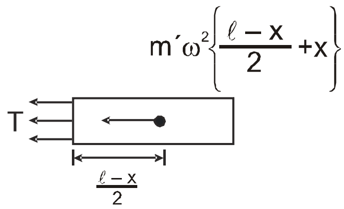



**Solution :** छायांकित भाग का द्रव्यमान $m' = \dfrac{m}{\ell}(\ell - x)$ [जहां m = कुल द्रव्यमान = ρ A l ]

$T = m' \omega^2 \left[\dfrac{\ell - x}{2} + x\right] \Rightarrow T = \dfrac{m}{\ell}(\lambda - x)\,\omega^2\left(\dfrac{\ell + x}{2}\right)$ $T = \dfrac{m\omega^2}{2\ell}(\ell^2 - x^2)$



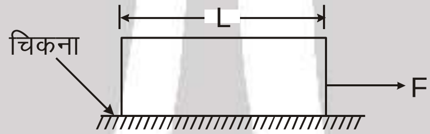
A पर तनाव अधिकतम $\left(\frac{m\omega^2\ell}{2}\right)$ व 'B' पर न्यूनतम (शून्य), होगा। 'dx' चौड़ाई के अल्पांश की लम्बाई में विस्तार $=\left(\frac{m\omega^2\ell}{2}\right)$ है।

कुल विस्तार $\delta = \int \frac{Tdx}{AY} = \int_0^{\ell} \frac{m\omega^2(\ell^2 - x^2)}{2\ell\ \ AY}\ dx$

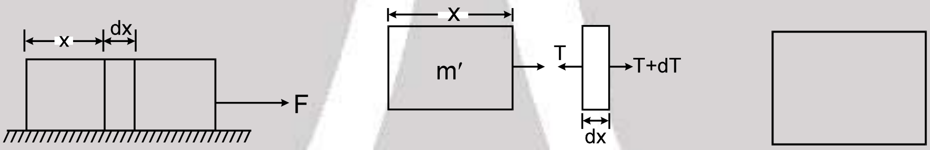
$$\delta = \frac{m\omega^2}{2\ell AY}\left[\ell^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{m\omega^2 \times 2\ell^3}{2\ell AY \times 3} = \frac{m\omega^2\ell^2}{3AY} = \frac{\rho A\ell\omega^2\ell^2}{3AY}$$

$$\delta = \frac{\rho\omega^2\ell^3}{3Y} = \frac{10^4 \times (400) \times (1.5)^3}{3 \times 2 \times 10^{11}} = 9 \times 10^{-3}\text{ m} = 9\text{mm}$$

**Example 5.** गुटके में विस्तार ज्ञात करो यदि गुटके के द्रव्यमान, अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल व यंग गुणांक क्रमशः m, A व y है।




**Solution :**




त्वरण $a = \frac{F}{m}$ तो $T = m'a$ जहाँ $m' = \frac{m}{\ell}x$

$T = \frac{m}{\ell} x \frac{F}{m} = \frac{F\ \ x}{\ell}$

अल्पांश 'dx' में विस्तार $= \frac{Tdx}{AY}$ $\Rightarrow$ कुल विस्तार , $\delta = \int_0^{\ell} \frac{Tdx}{AY}\ d = \int_0^{\ell} \frac{Fxdx}{A\ell Y} = \frac{F\ell}{2AY}$

नोट : इस प्रश्न को करने की कोशिश करें, यदि गुटके व सतह के बीच घर्षण दिया गया है। ($\mu$ = घर्षण गुणांक) व स्थिति : (I) $F < \mu mg$ (II) $F > \mu mg$

**Answer** दोंनो स्थितियों में उत्तर होगा $\frac{F\ell}{2AY}$

---

**2.** आयतन प्रत्यास्थता गुणांक :

यह अभिलम्ब प्रतिबल व आयतन विकृति के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है।

अर्थात् $B = \frac{\text{दाब}}{\text{आयतन विकृति}}$

प्रतिबल, प्रति इकाई क्षेत्रफल पर अभिलम्ब बल है एवं यह आरोपित दाब (p) के बराबर है।

$B = \frac{p}{\frac{-\Delta V}{V}} = -\frac{pV}{\Delta V}$ ऋण चिन्ह दर्शाता है कि दाब (p) में वृद्धि आयतन में कमी ($\Delta V$) का कारण है।

सम्पीड्यता : आयतन प्रत्यास्थता गुणांक का व्युत्क्रम सम्पीड्यता कहलाता है। सम्पीड्यता की इकाई SI में $N^{-1}\ m^2$ या पास्कल$^{-1}$ ($Pa^{-1}$) है।

ठोसों का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक, द्रवों के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक का पचास गुना है एवं गैसों के लिए यह ठोसों की तुलना में $10^{-8}$ गुना है।

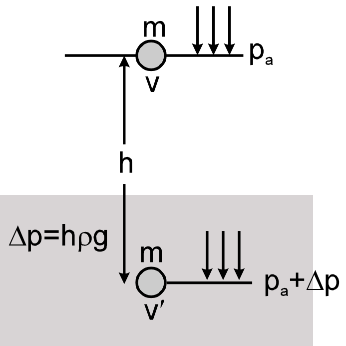
$B_{\text{ठोस}} > B_{\text{द्रव}} > B_{\text{गैस}}$ $\Rightarrow$ गैस का समतापी प्रत्यास्थता गुणांक B = P (गैस का दाब)

गैस का रूद्वोष्म प्रत्यास्थता गुणांक $B = \gamma \times P$ जहां $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ है।

## Solved Example

**Example 6.** झील की वह गहराई ज्ञात करो जिस पर जल का घनत्व सतह से 1% अधिक है। दी गई सम्पीड्यता $k = 50 \times 10^{-6}$ /atm है।

**Solution :** $B = \dfrac{\Delta p}{-\dfrac{\Delta V}{V}}$ $\quad \dfrac{\Delta V}{V} = -\dfrac{\Delta p}{B}$




हम जानते है $p = p_{atm} + h\rho g$ या $m = \rho V$ = नियतांक

$d\rho.\ v + dv.\ \rho = 0$

$d\rho\ V + dV\ .\ \rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\rho}{\rho} = -\dfrac{dV}{V}$

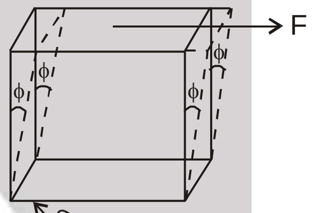
अर्थात् $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} = \dfrac{\Delta p}{B} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta\rho}{\rho} = \dfrac{1}{100}$

$\dfrac{1}{100} = \dfrac{h\rho g}{B}$ [ $\rho$ = नियतांक मानते हुए ]

$h\rho g = \dfrac{B}{100} = \dfrac{1}{100\ \ k} \quad \Rightarrow h\rho g = \dfrac{1 \times 1 \times 10^5}{100\ \ \times 50 \times 10^{-6}}$

$h = \dfrac{10^5}{5000 \times 10^{-6} \times 1000 \times 10} = \dfrac{100 \times 10^3}{50} = 2\text{km}$ **Ans.**

**3.** दृढ़ता गुणांक **:**




यह स्पर्श रेखीय प्रतिबल व अपरूपण विकृति के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। हम एक घन पर विचार करते है जिसका निचला फलक स्थिर है व ऊपरी फलक जिसका क्षेत्रफल A है, पर स्पर्श रेखीय बल F आरोपित है।

$\therefore$ स्पर्श रेखीय प्रतिबल = F/A.

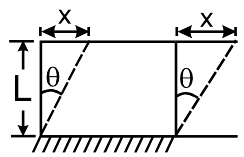
माना कि घन की ऊर्ध्वाधर भुजाएं कोण $\phi$ से विस्थापित होती है जो अपरूपण विकृति कहलाती है।

$\therefore$ दृढ़ता गुणांक $\eta = \dfrac{\text{स्पर्श रेखीय प्रतिबल}}{\text{अपरूपण विकृति}}$ या $\eta = \dfrac{F/A}{\phi} = \dfrac{F}{A\phi}$

## Solved Example

**Example 7.** 5 cm भुजा के रबर के घन की एक भुजा स्थिर है जबकि एक स्पर्श रेखीय बल 1800 N को विपरीत फलक पर आरोपित किया जाता है। अपरूपण विकृति एवं विकृत फलक का पार्श्व विस्थापन ज्ञात कीजिए। रबर के लिए दृढ़ता गुणांक $2.4 \times 10^6$ N/m$^2$ है।

**Solution :** $L = 5 \times 10^{-2}$ m $\Rightarrow \dfrac{F}{A} = \eta\ \dfrac{x}{L}$

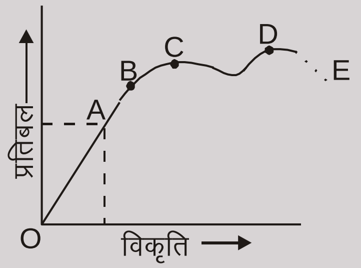



विकृति $\theta = \dfrac{F}{A\eta} = \dfrac{1800}{25 \times 10^{-4} \times 2.4 \times 10^6} = \dfrac{180}{25 \times 24} = \dfrac{3}{10} = 0.3$ radian

$\dfrac{x}{L} = 0.3 \Rightarrow x = 0.3 \times 5 \times 10^{-2} = 1.5 \times 10^{-2}$ m = 1.5 cm **Ans.**

## प्रतिबल के साथ विकृति में परिवर्तन

जब एक तार एक भार द्वारा खींचा जाता है, यह देखा जाता है कि भार के अल्प मान के लिए तार में उत्पन्न विस्तार भार के समानुपाती है। भार हटाने पर तार इसकी मूल लम्बाई तक वापस आ जाता है। तार इसकी मूल विमाओं तक वापस केवल तब लौटता है , जब आरोपित भार एक निश्चित सीमा से कम या बराबर हो। यह सीमा प्रत्यास्थता सीमा कहलाती है। इस प्रकार प्रत्यास्थता सीमा, वह अधिकतम प्रतिबल है, जिसके हटाने पर वस्तुएं उनकी मूल विमाऐं फिर से प्राप्त कर लेती है। प्रदर्शित चित्र में इस प्रकार का व्यवहार ग्राफ के OB भाग से निरूपित किया जाता है। अब जैसे ही हम प्रतिबल को ओर बढ़ाते है। एक बिन्दु A प्राप्त होता है प्रतिबल, विकृति के समानुपाती है। बिन्दु A से B पर पहुँचने पर हम प्रतिबल को हटाते है तो तार इसकी मूल विमाओं में वापस आता है। परन्तु प्रतिबल, विकृति के समानुपाती नहीं है।




OB → प्रत्यास्थता सीमा (Elastic limit)
OA → समानुपाती सीमा (Limit of Proportionality)
C → परासम्भव बिन्दु (Yield Point)
CD → सुघट्य व्यवहार (Plastic behaviour)
D → विभंजक बिन्दु (Ultimate point)
DE → भंजन (खण्डन) (Fracture)

जैसे ही हम बिन्दु B के पार जाते है तो प्रतिबल में बहुत अल्प वृद्धि के लिए भी उत्पन्न विकृति बहुत अधिक होती है। इस प्रकार का व्यवहार बिन्दु C के आस–पास प्रेक्षित होता है एवं इस स्थिति पर तार श्यान द्रव की तरह बहने लगता है। बिन्दु C परासम्भव बिन्दु कहलाता है। यदि प्रतिबल ओर बढ़ाया जाये, तो तार विभंजक बिन्दु D पर टूट जाता है। इस बिन्दु के संगत प्रतिबल भंजन प्रतिबल या पदार्थ की तनन सामर्थ्य कहा जाता है। जिस पदार्थ के लिए सुघट्य परास CD आपेक्षिक रूप से अधिक होती है। तन्य पदार्थ कहलाता है। ये पदार्थ टूटने से पहले स्थायी रूप से विकृत हो जाते है। जिन पदार्थो के लिए सुघट्य सीमा आपेक्षिक रूप से कम होती है भंगुर पदार्थ कहलाते है। ये पदार्थ प्रत्यास्थता सीमा पार होते ही टूट जाते है।

## महत्त्वपूर्ण बिन्दु

**1.** भंजन प्रतिबल = भंजन बल /अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल
**2.** पदार्थ के लिए भंजन प्रतिबल नियत है।
**3.** एक दिये गये पदार्थ का भंजक बल तार के अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल पर निर्भर करता है।
**4.** कार्यकारी प्रतिबल सदैव भंजक प्रतिबल से कम रखा जाता है ताकि सुरक्षा गुणांक = भंजक प्रतिबल /कार्यकारी प्रतिबल का मान अधिक हो सके।
**5.** भंजक विकृति = विस्तार या सम्पीड़न /मूल विमा
**6.** पदार्थ के लिए भंजन विकृति नियत होती है।

## प्रत्यास्थ उत्तर प्रभाव

हम जानते है कि कुछ पदार्थो की वस्तुएं उनका मूल विन्यास प्राप्त करने में कुछ समय लेती है, जब विरूपक बल हटाया जाता है। विरूपक बल हटाने पर वस्तुओं द्वारा मूल विन्यास प्राप्त करने में लगा समय प्रत्यास्थ उत्तर प्रभाव कहलाता है। क्वार्टज फाइबर व फॉस्फर ब्रॉन्ज (कांसा) के लिए प्रत्यास्थ उत्तर प्रभाव नगण्य रूप से अल्प है। इस कारण से क्वार्टज व फॉस्फर ब्रॉन्ज से बने सस्पेन्शन, गेल्वेनोमीटर व इलेक्ट्रोमीटर में उपयोग किये जाते है।

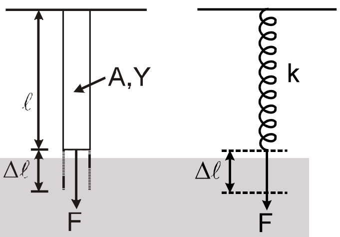
ग्लास फाइबर के लिए प्रत्यास्थ उत्तर प्रभाव बहुत ज्यादा है। फाइबर को इसकी मूल अवस्था में वापस आने में घण्टों लग जाते है।

प्रत्यास्थ श्रांति

पदार्थ पर बार–बार विकृति के कारण पदार्थ की सामर्थ्य में हानि प्रत्यास्थ श्रांति (लचक की थकान) कहलाती है। इसलिए लम्बे समय तक उपयोग में आने के बाद पुल असुरक्षित घोषित कर दिये जाते है।

छड़ का स्प्रिंग के रूप में विश्लेषण

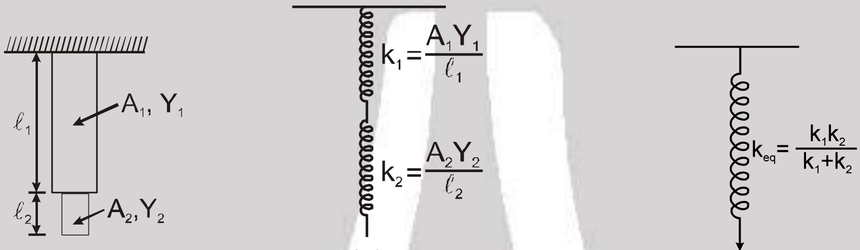
$$Y = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} \Rightarrow Y = \frac{F\ell}{A\Delta\ell} \quad \text{या} \quad F = \frac{AY}{\ell}\Delta\ell$$




$\frac{AY}{\ell}$ = नियत, छड़ के पदार्थ के प्रकार व ज्यामिती पर निर्भर करता है।

$F = k\Delta\ell$

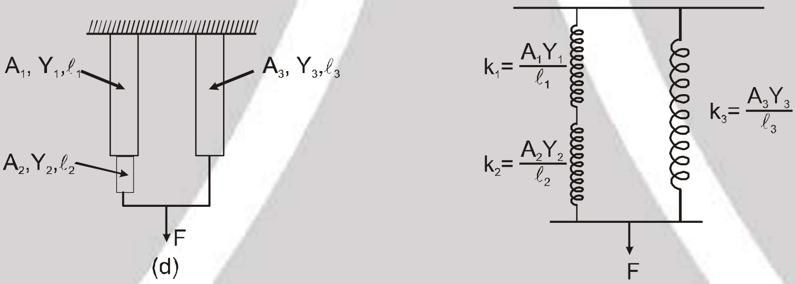
जहां $k = \frac{AY}{\ell}$ = तुल्य स्प्रिंग नियतांक।




(a) (b) (c)

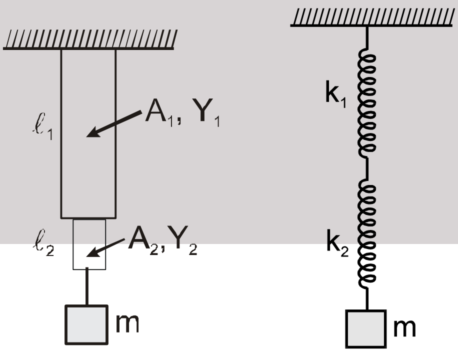
चित्र (a) में प्रदर्शित छड़ो के निकाय के लिए प्रतिस्थापित स्प्रिंग निकाय चित्र (b) में प्रदर्शित है (दो स्प्रिंग श्रेणीक्रम में) चित्र (c) तुल्य स्प्रिंग निकाय को प्रदर्शित करता है।

चित्र (d) छड़ों के दूसरे संयोजन व उनके प्रतिस्थापित स्प्रिंग निकाय को प्रदर्शित करता है।




## Solved Example

**Example 8.** एक 'm' द्रव्यमान चित्रानुसार छड़ों से जुड़ा है। यह द्रव्यमान थोड़ा–सा खींचा जाता है व छोड़ा जाता है, क्या द्रव्यमान की गति स.आ.ग. है। यदि हाँ तो आवर्तकाल ज्ञात करो।

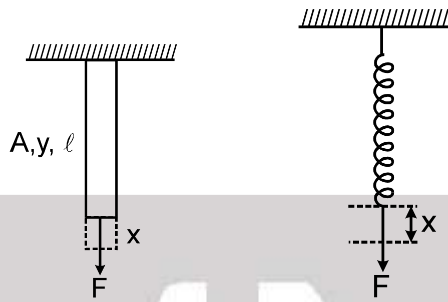



**Solution :** $k_{eq} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$

जहाँ $k_1 = \frac{A_1Y_1}{\ell_1}$ तथा $k_2 = \frac{A_2Y_2}{\ell_2}$

एक तने हुए तार या छड़ में संचित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा

तुल्य स्प्रिंग में संचित विकृति ऊर्जा




$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

जहाँ $x = \frac{F\ell}{AY}$ , $k = \frac{AY}{\ell}$ $\qquad U = \frac{1}{2}\frac{AY}{\ell}\frac{F^2\ell^2}{A^2Y^2} = \frac{1}{2}.\frac{F^2\ell}{AY}$

समीकरण पुनः व्यवस्थित की जा सकती है।

$$U = \frac{1}{2}\frac{F^2}{A^2} \times \frac{\ell A}{Y}$$ [$\ell$A = छड़ का आयतन, F/A = प्रतिबल]

$$U = \frac{1}{2}\frac{(\text{प्रतिबल})^2}{Y} \times \text{आयतन}$$

पुनः $U = \frac{1}{2}\frac{F}{A} \times \frac{F}{AY} \times A\,\ell$ [विकृति $= \frac{F}{AY}$ ]

$$U = \text{प्रतिबल} \times \text{विकृति} \times \text{आयतन}$$

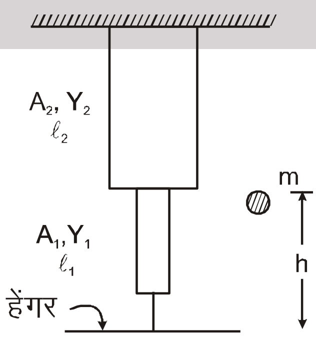
पुनः $U = \frac{1}{2}\frac{F^2}{A^2Y^2}A\ell Y$

$$U = \frac{1}{2}Y(\text{विकृति})^2 \times \text{आयतन}$$

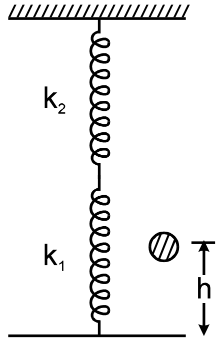
विकृति ऊर्जा घनत्व $= \frac{\text{विकृति ऊर्जा}}{\text{आयतन}} = \frac{1}{2}\frac{(\text{प्रतिबल})^2}{Y} = \frac{1}{2}Y(\text{विकृति})^2 = \frac{1}{2}\,\text{प्रतिबल} \times \text{विकृति}$

## Solved Example

**Example 9.** 'm' द्रव्यमान की एक गेंद 'h' ऊचाँई से गिरती है जो टकराने के बाद द्रव्यमानरहित हेंगर से चिपक जाती है। यह घूमता नहीं है। छड़ में अधिकतम विस्तार ज्ञात करो। यह मानते हुए कि छड़ द्रव्यमानरहित है।



**Solution :** ऊर्जा संरक्षण लगाने पर




$$mg\,(h + x) = \frac{1}{2}\,\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x^2$$

जहाँ $k_1 = \dfrac{A_1Y_1}{\ell_1}$ $k_2 = \dfrac{A_2Y_2}{\ell_2}$

तथा $k_{eq} = \dfrac{A_1A_2Y_1Y_2}{A_1Y_1\ell_2 + A_2Y_2\ell_1}$

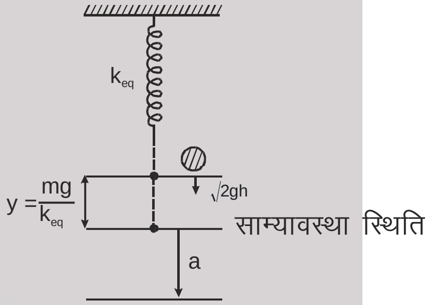
$k_{eq}x^2 - 2mgx - 2mgh = 0$

$$x = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 + 8mghk_{eq}}}{2k_{eq}},\quad x_{max} = \frac{mg}{k_{eq}} + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k_{eq}^2} + \frac{2mgh}{k_{eq}}}$$

सरल आवर्त गति द्वारा (अन्य विधि) :

$\omega = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m}}$ $\quad v = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$

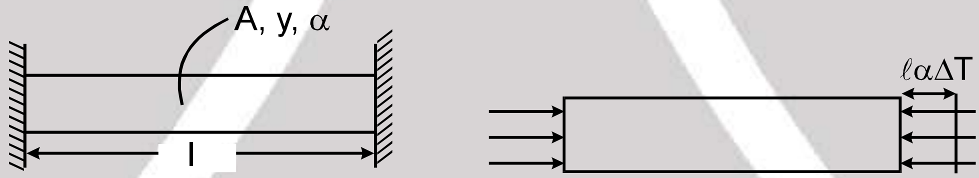
$\sqrt{2gh} = \sqrt{\dfrac{k_{eq}}{m}}\sqrt{a^2 - y^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{\dfrac{2mgh}{k_{eq}} + \dfrac{m^2g^2}{k_{eq}^2}} = a$




अधिकतम विस्तार

$= a + y = \dfrac{mg}{k_{eq}} + \sqrt{\dfrac{m^2g^2}{k_{eq}} + \dfrac{2mgh}{k_{eq}}}$

तापीय प्रतिबल :

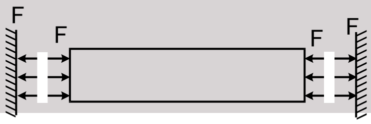



यदि छड़ का ताप $\Delta T$ से बढ़ाया जाये तो लम्बाई में परिवर्तन $\Delta\ell = \ell\,\alpha\,\Delta T$

विकृति $= \dfrac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha\ \Delta T$

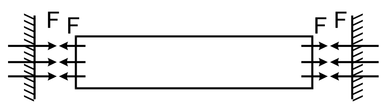
परन्तु दृढ़ आधार के कारण कोई विकृति नहीं है। आधार छड़ की लम्बाई समान रखने के लिए बल प्रदान करते है।

$Y = \dfrac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$




यदि $\Delta T$ = (+) धनात्मक

तापीय प्रतिबल = Y विकृति = $Y\,\alpha\,\Delta T$

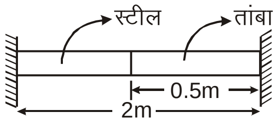



यदि $\Delta T$ = (–) ऋणात्मक

यदि $\Delta T$ = (–) ऋणात्मक

$\dfrac{F}{A} = Y\alpha\ \Delta T$ $\qquad F = AY\,\alpha\,\Delta T$

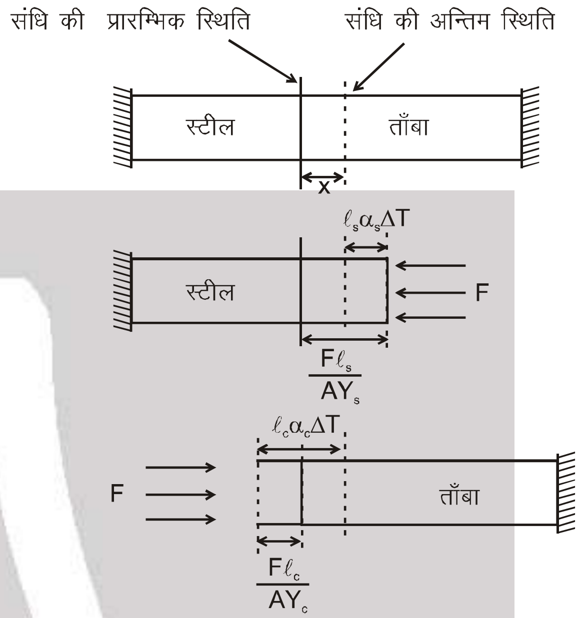
**Example 10.** जब संयुक्त छड़ स्वतंत्र है तो संयुक्त लम्बाई, ताप 20ºC से 120ºC तक बढाने पर 2.002 m तक बढ़ती है। जब संयुक्त छड़ सहारे के बीच में स्थित है तो लम्बाई में कोई परिवर्तन नहीं है। स्टील के लिए Y व $\alpha$ ज्ञात करो यदि $Y_{cu} = 1.5 \times 10^{13}$ N/m$^2$ , $\alpha_{cu} = 1.6 \times 10^{-5}$/ºC




**Solution :** $\Delta\ell = \ell_s\, \alpha_s\, \Delta T + \ell_c\, \alpha_c \Delta T$

$.002 = [1.5\, \alpha_s + 0.5 \times 1.6 \times 10^{-5}] \times 100$

$\alpha_s = \dfrac{1.2 \times 10^{-5}}{1.5} = 8 \times 10^{-6}$/ºC




घटकों की लम्बाई में कोई परिवर्तन नहीं है।

स्टील के लिए

$x = \ell_s\, \alpha_s\, \Delta T - \dfrac{F\ell_s}{AY_s} = 0$

$\dfrac{F}{AY_s} = \alpha_s \quad \Delta T$ ......... (A)

ताँबे के लिए

$x = \dfrac{F\ell_c}{AY_c} - \ell_c\, \alpha_c\, \Delta T = 0$

$\dfrac{F}{AY_c} = \alpha\, \Delta T$ ........ (B)

(B) / (A) $\Rightarrow \dfrac{Y_s}{Y_c} = \dfrac{\alpha_c}{\alpha_s}$

$Y_s = Y_c\, \dfrac{\alpha_c}{\alpha_s} = \dfrac{1.5 \times 10^{13} \times 16 \times 10^{-5}}{8 \times 10^{-6}} \Rightarrow \quad Y_s = 3 \times 10^{13}$ N/m$^2$

---

## प्रत्यास्थता के अनुप्रयोग

पदार्थो की प्रत्यास्थता के कुछ मुख्य उपयोग नीचे दिये गये है :

**1.** पुलों में प्रयुक्त किये गये पदार्थ उनकी प्रत्यास्थ सामर्थ्य समय के साथ कम करते है। अतः लम्बे उपयोग के बाद पुल असुरक्षित घोषित कर दिये जाते है।

**2.** एक पर्वत की अधिकतम ऊचाँई ज्ञात करने में **:**

पर्वत के आधार पर दाब = $h\rho g$ = प्रतिबल। एक साधारण चट्टान की प्रत्यास्थता सीमा = $3 \times 10^8$ N m$^{-2}$

प्रतिबल प्रत्यास्थता सीमा से कम होना चाहिए, अन्यथा चट्टान बिखर जायेगी।

$h < \dfrac{3 \times 10^8}{\rho g} < 10^4$ m ($\because \rho = 3 \times 10^3$ kg m$^{-3}$ ; g = 10 ms$^{-2}$) या h = 10 km

यह ध्यान रहे कि माउण्ट एवरेस्ट की ऊचाँई लगभग 9 km है।

## एक तार का ऐंठन नियतांक

$C = \dfrac{\pi\eta r^4}{2\ell}$ जहां $\eta$ दृढ़ता गुणांक, r व $\ell$ क्रमशः तार की त्रिज्या व लम्बाई है।

(a) कोण $\theta$ से ऐंठन (मोड़ने) के लिए आवश्यक बलाघूर्ण $\tau = C\theta$.

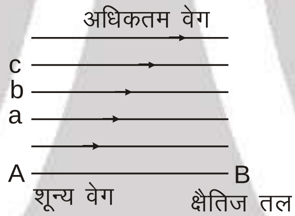
(b) कोण $\theta$ से ऐंठन में किया गया कार्य $W = \dfrac{1}{2} C\theta^2$.

## श्यानता

जब एक ठोस वस्तु, दूसरी ठोस वस्तु पर फिसलती है तो उनके मध्य एक घर्षण बल कार्य करने लगता है। यह बल वस्तुओं के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करता है। इसी प्रकार जब द्रव की एक परत उसी द्रव की दूसरी परत पर फिसलती है तो उनके मध्य एक घर्षण बल कार्य करता है जो परतों के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करता है। यह बल आन्तरिक घर्षण बल कहलाता है।

माना एक द्रव एक स्थिर क्षैतिज सतह AB (चित्र) पर धारा रेखीय गति में बह रहा है। द्रव की वह परत जो सतह के सम्पर्क में है, विराम पर स्थित है जबकि दूसरी परतों का वेग स्थिर सतह से दूरी के साथ बढ़ता है। चित्र में तीरों की लम्बाई परतों के बढ़ते वेग को निरूपित करती है। इस प्रकार द्रव की समीपवर्ती परतों के मध्य आपेक्षिक गति है। तीन समान्तर परतों a, b व c पर विचार करते है। उनके वेग बढ़ते क्रम में है। परत a, परत b, को मन्दित करने की कोशिश करती है परत b, परत c को मन्दित करने की कोशिश करती है। इस प्रकार प्रत्येक परत इसके ऊपर की परत के वेग को कम करने की कोशिश करती है। इसी प्रकार प्रत्येक परत इसके नीचे की परत के वेग को बढ़ाने की कोशिश करती है। इसका अभिप्राय है कि द्रव की कोई भी दो परतो के मध्य स्पर्श रेखीय बल कार्य करते है जो परतों के मध्य सापेक्ष गति को समाप्त करने की कोशिश करते है। ये बल श्यान बल कहलाते है। यदि द्रव का प्रवाह बनाये रखना है तो एक बाह्य बल श्यान बलों को सन्तुलित करने के लिए आरोपित किया जाना चाहिए। बाह्य बल की अनुपस्थिति में श्यान बल द्रव को जल्दी ही विराम पर ला देते है। द्रव का वह गुण जिसके कारण यह इसकी समीपवर्ती परतों के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करता है, श्यानता कहलाता है।

श्यानता का गुण निम्न उदाहरणों में देखा जा सकता है – :




(i) जब एक हिलता हुआ द्रव छोड़ दिया जाता है तो श्यानता के कारण विराम पर आ जाता है। गाढ़े द्रव जैसे शहद, कोलतार, ग्लिसरीन आदि की श्यानता, पतले द्रव जैस पानी से अधिक होती है। यदि हम एक मेज पर कोलतार व जल को डालें तो कोलतार जल्दी ठहर जाएगा जबकि पानी थोड़ी अधिक दूरी तक बहेगा।

(ii) यदि हम जल व शहद को अलग–अलग फनल में डालें तो जल फनल के छिद्र से जल्दी निकल जाता है जबकि शहद इसके लिए पर्याप्त समय लेती है क्योंकि शहद जल की तुलना में बहुत अधिक श्यान है। जब शहद गुरूत्व के प्रभाव में नीचे बहने की कोशिश करती है तो इसकी परतों के मध्य सापेक्ष गति , प्रबलता से अवरोधित होती है।

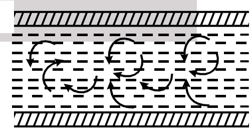
(iii) हम वायु में तेजी से चल सकते है परन्तु जल में नहीं। कारण है श्यानता जो वायु के लिए बहुत कम परन्तु जल के लिए तुलनात्मक रूप से बहुत अधिक है।

(iv) वायु की श्यानता के कारण बादलों के कण बहुत धीरे नीचे गिरते हैं और इस प्रकार आकाश में तैरते हुए प्रतीत होते है। श्यानता केवल तब प्रभाव में आती है जब एक ही पदार्थ की परतों के मध्य सापेक्ष गति हो।

## एक नली में द्रव का प्रवाह : क्रांतिक वेग

जब एक द्रव एक नली में बहता है तो श्यान बल द्रव के प्रवाह का विरोध करते है। इस प्रकार एक दाबान्तर नली के सिरों के मध्य आरोपित किया जाता है जो द्रव के प्रवाह को बनाये रखता है। यदि एक विशेष बिन्दु से गुजर रहे द्रव के सभी कण समान पथ के अनुदिश गति करते है तो द्रव का प्रवाह धारा रेखीय प्रवाह कहलाता है।

यह केवल तब होता है जब द्रव के प्रवाह का वेग एक निश्चित सीमान्त मान से कम हो जो क्रांतिक वेग कहलाता है। जब प्रवाह का वेग क्रांतिक वेग से अधिक होता है। प्रवाह धारा रेखीय नहीं रहता बल्कि विक्षुब्ध हो जाता है। इस प्रकार के प्रवाह में द्रव की गति यदृच्छ हो जाती है तथा इसमें भंवर धाराएं उत्पन्न हो जाती है।



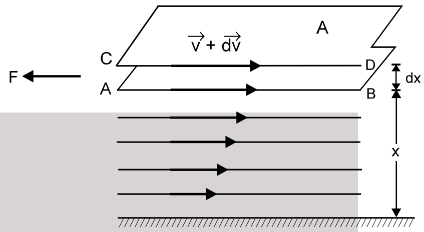
रेनोल्ड ने सिद्ध किया कि एक नली में प्रवाहित द्रव के लिए क्रांतिक वेग $v_c = k\eta/\rho$होता है जहाँ $\rho$ द्रव का घनत्व व $\eta$ श्यानता है, r नली की त्रिज्या व k′ रेनॉल्ड संख्या ′ (जिसका मान पतली नली व जल के लिए 1000 के लगभग है) है। जब द्रव के प्रवाह का वेग क्रांतिक वेग से कम है तो द्रव का प्रवाह श्यानता द्वारा नियंत्रित किया जाता है। घनत्व का इस पर कोई प्रभाव नहीं होता। परन्तु जब प्रवाह का वेग क्रांतिक वेग से अधिक है तो प्रवाह मुख्य रूप से घनत्व द्वारा नियंत्रित किया जाता है, श्यानता का प्रभाव कम महत्त्वपूर्ण हो जाता है। इसके कारण जब ज्वालामुखी फटता है तो लावा बहुत गाढ़ा (अधिक श्यानता का) होने के बावजूद तेजी से बाहर निकलता है।

## वेग प्रवणता व श्यानता गुणांक

द्रव का गुण जिसके कारण एक विरोधी बल (आन्तरिक घर्षण) कार्य करने लगता है (जब द्रव की विभिन्न परतों के मध्य सापेक्ष गति हो), श्यानता कहलाता है। चित्र में प्रदर्शित क्षैतिज ठोस सतह पर द्रव के प्रवाह पर विचार करते है। दो परतें AB तथा CD पर विचार करते है जिनके वेग क्रमशः $\vec{v}$ तथा $\vec{v}$ + $d\vec{v}$ है तथा स्थिर ठोस सतह से क्रमशः x तथा (x + dx) दूरी पर है, न्यूटन के अनुसार इन परतों के मध्य खींचने वाला या पीछे की ओर श्यान बल निम्न पर निर्भर करता है

(i) परत के क्षेत्रफल (A) के सीधे समानुपाती तथा

(ii) परतों के मध्य वेग प्रवणता $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ के सीधे समानुपाती




अर्थात् $F \propto A\frac{dv}{dx}$ या $F = -\eta A\frac{dv}{dx}$ .....(1)

η श्यानता गुणांक कहलाता है। ऋणात्मक चिन्ह प्रदर्शित करता है कि श्यान बल (F) की दिशा द्रव की गति के विपरीत है।

## श्यानता तथा ठोस घर्षण के मध्य समानताऐं तथा विभिन्नताऐं

श्यानता तथा ठोस घर्षण निम्न प्रकार से समान है

**1.** दोनों सापेक्ष गति का विरोध करते है। जहां श्यानता द्रव की दो समीपवर्ती परतों के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करती है, ठोस घर्षण दो ठोस परतों के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करता है।

**2.** जब द्रव की परतों या ठोस सतहों के मध्य सापेक्ष गति होती है तो स्थिति के अनुसार दोनों लगते है।

**3.** दोनों आणविक आकर्षण के कारण होते है।

उनके मध्य अन्तर →

| श्यानता | ठोस घर्षण |
|---|---|
| (i) द्रव की परतों के मध्य श्यानता (श्यान बल) द्रव की परतों के क्षेत्रफल के सीधे समानुपाती है। | (i) दो ठोसों के मध्य घर्षण ठोस की सम्पर्क सतहों के क्षेत्रफल से स्वतंत्र है। |
| (ii) श्यान बल द्रव की दो परतों के मध्य सापेक्ष वेग के समानुपाती है। | (ii) घर्षण दो सतहों के मध्य सापेक्ष वेग से स्वतंत्र है। |
| (iii) श्यान बल द्रव की दो परतों के मध्य अभिलम्ब प्रतिक्रिया से स्वतंत्र है। | (iii) घर्षण दो सम्पर्क सतहों के मध्य अभिलम्ब प्रतिक्रिया के सीधे समानुपाती है। |

## श्यानता के कुछ अनुप्रयोग

विभिन्न द्रवों तथा गैसों की श्यानता की जानकारी दैनिक जीवन में उपयोगी है। इसकी जानकारी के कुछ अनुप्रयोग नीचे दिये गये है →

**1.** क्योंकि द्रवों की श्यानता ताप के साथ परिवर्तित होती है, स्नेहक पदार्थ मौसम के अनुसार चुना जाता है।

**2.** उच्च श्यानता के द्रव रेल्वे स्टेशनों पर शॉक एब्जार्बर व बफर में उपयोग किये जाते है।

**3.** वायु व द्रव की श्यानता का गुण कुछ उपकरणों की गति अवमंदित करने में उपयोग किया जाता है।

**4.** कार्बनिक द्रवों के श्यानता गुणांक की जानकारी कार्बनिक अणुओं के अणुभार व आकृति का पता लगाने में प्रयुक्त की जाती है।

**5.** मानव शरीर की शिराओं व धमनियों में रक्त परिसंचरण में इसका मुख्य उपयोग है।

## श्यानता गुणांक की इकाइयाँ

उपरोक्त सूत्र से हम जानते हैं $\eta = \frac{F}{A(\Delta v_x / \Delta z)}$

$\therefore$ η की विमाएं $= \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2][LT^{-1}/L]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2T^{-1}]} = [ML^{-1}T^{-1}]$

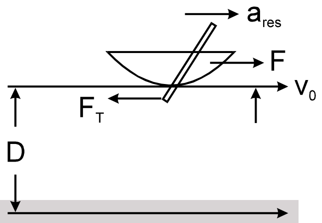
इसकी इकाई है kg/(meter-second)*

C.G.S. पद्धति में श्यानता गुणांक की इकाई dyne s $cm^{-2}$ एवं यह पॉइज कहलाती है। SI में श्यानता गुणांक की इकाई N $sm^{-2}$ है तथा डेकापॉइज कहलाती है।

1 डेकापॉइज = 1 N $sm^{-2}$ = ($10^5$ dyne) × s × ($10^2$ cm)$^{-2}$ = 10 dyne s $cm^{-2}$ = 10 पॉइज

## Solved Example

**Example 11.** एक व्यक्ति एक नदी में एक नाव को '$v_0$' नियत वेग से चला रहा है, नाव का सम्पर्क क्षेत्रफल 'A' है व श्यानता गुणांक $\eta$ है। नदी की गहराई 'D' है। नाव खेने (चलाने) के लिए आवश्यक बल ज्ञात करो।




**Solution :** $F - F_T = m\,a_{res}$

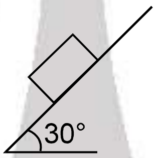
क्योंकि नाव नियत वेग से चलती है $a_{res} = 0$

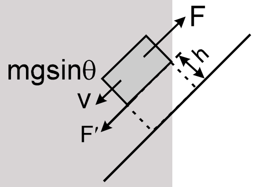
$F = F_T$

परन्तु $F_T = \eta A \dfrac{dv}{dz}$, but $\dfrac{dv}{dz} = \dfrac{v_0 - 0}{D} = \dfrac{v_0}{D}$

तब $F = F_T = \dfrac{\eta A v_0}{D}$

**Example 12.** 20 kg द्रव्यमान का एक घनाकार गुटका (भुजा 2m), $\eta = 10^{-1}$ पॉइज श्यानता के तेल से स्नेहित नततल पर नियत वेग 10 m/sec. से फिसलता है। (g = 10 m/sec$^2$)। द्रव की परत की मोटाई ज्ञात करो।



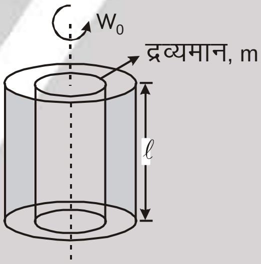

**Solution :** $F = \eta A \dfrac{dv}{dz} = mg \sin\theta \quad \dfrac{dv}{dz} = \dfrac{v}{h}$

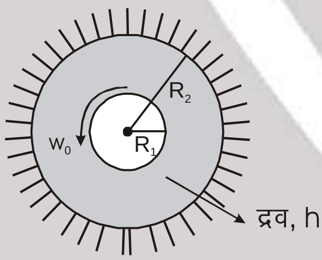
$20 \times 10 \times \sin 30° = \eta \times 4 \times \dfrac{10}{h}$

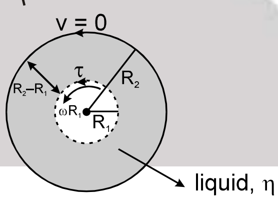
$h = \dfrac{40 \times 10^{-2}}{100}$ [$\eta = 10^{-1}$ poise $= 10^{-2}$ N-sec-m$^{-2}$ ]

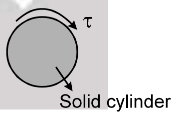
$= 4 \times 10^{-3}$ m = 4 mm

**Example 13.** प्रदर्शित चित्रानुसार केन्द्रीय ठोस बेलन प्रारम्भिक कोणीय वेग $\omega_0$ से चलना प्रारम्भ करता है। वह समय ज्ञात करो जिसके बाद कोणीय वेग आधा हो जाता है।




**Solution :** $F = \eta A \dfrac{dv}{dz}$, जहाँ $\dfrac{dv}{dz} = \dfrac{\omega R_1 - 0}{R_2 - R_1}$

$F = \eta \dfrac{2\pi R_1 \ell \omega R_1}{R_2 - R_1}$ तथा $\tau = FR_1 = \dfrac{2\pi\eta R_1^3 \omega \ell}{R_2 - R_1}$

$I\alpha = \dfrac{2\pi\eta R_1^3 \omega \ell}{R_2 - R_1}$

$\Rightarrow \dfrac{mR_1^2}{2}\left(-\dfrac{d\omega}{dt}\right) = \dfrac{2\pi\eta R_1^3 \omega \ell}{R_2 - R_1}$

या $-\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_0/2} \dfrac{d\omega}{\omega} = \dfrac{4\pi\eta R_1 \ell}{m(R_2 - R_1)} \displaystyle\int_0^t dt$

$\Rightarrow t = \dfrac{m(R_2 - R_1)\ell n2}{4\pi\eta \ell R_1}$

## श्यानता पर ताप का प्रभाव

द्रवों की श्यानता ताप वृद्धि के साथ घटती है और ताप घटने के साथ बढ़ती है अर्थात्, $\eta \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$ दूसरी ओर गैंसो की श्यानता का मान ताप वृद्धि के साथ बढ़ता है और इसका विपरीत भी। अर्थात् , $\eta \propto \sqrt{T}$ .

## स्टोक का नियम

स्टोक ने सिद्ध किया कि $\eta$ श्यानता के द्रव में v वेग से गतिशील , r त्रिज्या की एक गोलाकार वस्तु पर श्यान बल (F) $F = 6\,\pi\,\eta\, r\, v$ से दिया जाता है। यह स्टॉक का नियम कहलाता है।

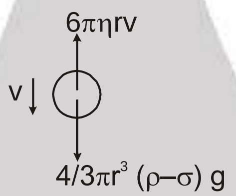
## सीमान्त वेग

जब एक वस्तु एक श्यान द्रव में गिराई जाती है, यह पहले त्वरित होती है एवं फिर इसका त्वरण शून्य हो जाता है और यह नियत वेग प्राप्त कर लेती है जो सीमान्त वेग कहलाता है।

## सीमान्त वेग की गणना

एक छोटी गेंद पर विचार करते है जिसकी त्रिज्या r एवं घनत्व $\rho$ है एक द्रव (या गैस) में मुक्त रूप से गिर रही है, जिसका घनत्व $\sigma$ है एवं श्यानता गुणांक $\eta$ है। जब यह सीमान्त वेग v प्राप्त कर लेती है। इस पर दो बल कार्य करते है।

(i) नीचे की ओर कार्यरत प्रभावी बल = $V(\rho-\sigma)\,g = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\sigma)g$,




(ii) ऊपर की ओर कार्यरत श्यान बल = $6\,\pi\eta\, rv$.

चूंकि गेंद नियत वेग v से गति कर रही है अर्थात् इसमें कोई त्वरण नहीं है, इस पर कार्यरत कुल बल शून्य होना चाहिए। अर्थात् $6\pi\eta rv = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\sigma)\,g$ या $v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$

इस प्रकार, गेंद का सीमान्त वेग इसकी त्रिज्या के वर्ग के सीधे समानुपाती है।

मुख्य बिन्दु

वायु का बुलबुला जल में सदैव ऊपर आता है क्योंकि वायु का घनत्व ($\rho$) जल के घनत्व ($\sigma$) से कम है इसलिए वायु के बुलबुले का सीमान्त वेग ऋणात्मक है अर्थात् वायु का बुलबुला ऊपर जाता है। धनात्मक सीमान्त वेग अर्थात् वस्तु नीचे गिरेगी।

## *Solved Example*

**Example 14.** एक गोलाकार गेंद एक द्रव के अन्दर सीमान्त वेग से गति कर रही है। गेंद की त्रिज्या के साथ ऊष्मा हानि की दर में सम्बन्ध ज्ञात करो।

**Solution :** ऊष्मा हानि की दर = शक्ति = $F \times v = 6\,\pi\eta rv \times v = 6\pi\eta rv^2 = 6p\eta r\left[\frac{2}{9}\frac{gr^2(\rho_0-\rho_\ell)}{\eta}\right]^2$

ऊष्मा हानि की दर $\alpha r^5$

**Example 15.** त्रिज्या 0.0015 mm की जल की बूंद वायु में गिर रही है। यदि वायु का श्यानता गुणांक $1.8 \times 10^{-5}$ kg /(m-s) है तो बूंद का सीमान्त वेग क्या होगा ? (जल का घनत्व = $1.0 \times 10^3$ kg/m$^2$ तथा g = 9.8 N/kg) वायु का घनत्व नगण्य है।

**Solution :** स्टॉक के नियम से, r त्रिज्या की एक जल की बूंद का सीमान्त वेग दिया जाता है

$$v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$$

जहां $\rho$ जल का घनत्व, $\sigma$ वायु का घनत्व एवं $\eta$ वायु का श्यानता गुणांक है। यहां $\sigma$ नगण्य है और r = 0.0015 mm = $1.5 \times 10^{-3}$ mm = $1.5 \times 10^{-6}$ m । मान रखने पर :

$$v = \frac{2}{9} \times \frac{(1.5\times10^{-6})^2\times(1.0\times10^3)\times9.8}{1.8\times10^{-5}} = \mathbf{2.72 \times 10^{-4}\ m/s}$$

**Example 16.** त्रिज्या $1.0 \times 10^{-3}$ m तथा घनत्व $1.0 \times 10^4$ kg/m$^3$ का एक धात्विक गोला पृथ्वी के गुरूत्वीय क्षेत्र में h दूरी तक मुक्त रूप से गिरने के बाद जल की टंकी में प्रवेश करता है। यदि जल में प्रवेश करने के बाद इसका वेग अपरिवर्तित रहता है तो h का मान ज्ञात करो। दिया है : जल का श्यानता गुणांक = $1.0 \times 10^{-3}$ N-s/m$^2$, g = 10 m/s$^2$ तथा जल का घनत्व = $1.0 \times 10^3$ kg/m$^3$.

**Solution :** h ऊचाँई से मुक्त रूप से गिरने में गोले द्वारा प्राप्त वेग है

$$v = \sqrt{2gh} \qquad ....(i)$$

यह जल में गोले का सीमान्त वेग है। इस प्रकार स्टॉक के नियम से $v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$

जहां r गोले की त्रिज्या है, $\rho$ गोले के पदार्थ का घनत्व है।

$\sigma$ (= $1.0 \times 10^3$ kg/m$^3$) जल का घनत्व है और $\eta$ जल का श्यानता गुणांक है।

$$\therefore \quad v = \frac{2\times(1.0\times10^{-3})^2(1.0\times10^4-1.0\times10^3)\times10}{9\times1.0\times10^{-3}} = 20\ m/s$$

समीकरण (i) से

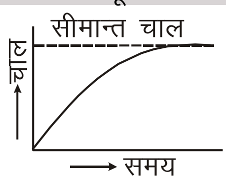
$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{20\times20}{2\times10} = 20\ m$$

## स्टॉक के सूत्र के अनुप्रयोग

**(i)** मिलीकन के प्रयोग द्वारा इलेक्ट्रॉनिक आवेश ज्ञात करने में : स्टॉक का सूत्र मिलीकन विधि द्वारा इलेक्ट्रॉनिक आवेश का पता लगाने में उपयोग किया जाता है। इस विधि में वायु में छोटी–छोटी तेल की बूंदो का सीमान्त वेग का मापन करके उनकी त्रिज्या ज्ञात करने में सूत्र का उपयोग किया जाता है।

**(ii)** वर्षा की बूंदो का वेग : वर्षा बूंदे, धूल के कणों पर जलवाष्प के संघनन के द्वारा बनती है। जब वे गुरूत्व के प्रभाव में गिरती है, उनकी गति वायु में श्यान बल के द्वारा अवरोधित होती है। जैसे ही उनके गिरने का वेग बढ़ता है श्यान बल भी बढ़ता है तथा अन्त में गुरूत्व के प्रभावी बल के बराबर हो जाती है। बूंदे तब नियत सीमान्त वेग प्राप्त कर लेती है जो बूंदों की त्रिज्या के वर्ग के समानुपाती है। प्रारम्भ में वर्षा की बूंदे आकार में बहुत छोटी है और इसलिए वे ऐसे अल्प वेग से गिरती है ताकि वे आकाश में बादल के रूप में तैरती हुई प्रतीत होती है। जब ओर संघनन के द्वारा वे आकार में बढ़ती है तो वे पर्याप्त वेग से पृथ्वी तक पहुँचती है।

**(iii)** पैराशूट : जब कोई सैनिक उड़ते हुए वायुयान से पैराशूट के साथ कूदता है तो वह वायु में बहुत धीरे–धीरे नीचे आता है।




प्रारम्भ में सैनिक गुरूत्वीय त्वरण g से गिरता है, परन्तु जल्द ही त्वरण तेजी से कम होने लगता है। जब पैराशूट पूरी तरह खुल जाता है। इसलिए प्रारम्भ में गिरते हुए सैनिक की चाल तेजी से बढ़ती है फिर धीरे–धीरे बढ़ती है। वायु की श्यानता के कारण सैनिक का त्वरण अन्त में शून्य हो जाता है एवं तब सैनिक नियत सीमान्त चाल से गिरता है। चित्र में गिरते हुए सैनिक की चाल व समय के मध्य ग्राफ प्रदर्शित है।