High Level Problems (HLP)

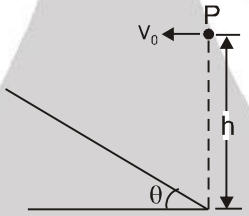
SUBJECTIVE QUESTIONS

1. किसी चिन्ह को लक्ष्य रखते हुये एक कण को प्रक्षेपित किया जाता है। (प्रक्षेपण बिन्दु व चिन्हित लक्ष्य बिन्दु एक ही समान क्षैतिज तल में है) यदि प्रक्षेपण कोण α है तो कण लक्ष्य बिन्दु से a cm पहले गिरेगा और यदि प्रक्षेपण कोण β है तो कण लक्ष्य बिन्दु से b cm बाद गिरेगा। यदि सभी स्थितियों में प्रक्षेपण चाल समान है तो सिद्ध करो की लक्ष्य भेदने के लिए सही प्रक्षेपण कोण $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left[\frac{b\sin 2\alpha + a\sin 2\beta}{a+b}\right]$ होगा।

2. एक कण धरातल पर रखे एक त्रिभुज की आधार भुजा के एक कोने से इस प्रकार प्रक्षेपित किया जाता है कि वह त्रिभुज के ऊपरी कोने को छूता हुआ धरातल पर दूसरे कोने से जाकर टकराता है। यदि α और β त्रिभुज के आधार कोण तथा θ प्रक्षेपण कोण हो तो सिद्ध करिये $\tan\theta = \tan\alpha + \tan\beta$.

3. एक गोला धरातल के संपर्क में आने पर विस्फोटित हो जाता है तथा इसके टुकड़े 80 फीट/से. तक के सभी वेग से सभी दिशाओं में फैलते हैं। दर्शाइये कि 100 फीट दूर खड़ा एक व्यक्ति $\frac{5}{\sqrt{2}}$ सेकण्ड तक खतरे में है। [$g = 32\ ft/s^2$]

4. एक कण को बिन्दु P से क्षैतिज दिशा में इस प्रकार प्रक्षेपित किया जाता है कि यह नत तल से लम्बवत् टकराये। नत तल का क्षैतिज से कोण θ व बिन्दु P की नत तल के निम्नतम बिन्दु से ऊँचाई h है। जैसा चित्र में दिखाया गया है तो प्रक्षेपण की चाल क्या होगी।



5. दो समानान्तर रेखाए जो क्षैतिज से α कोण पर झुकी हुई है। एक कण दोनो रेखाओ के मध्य से इस प्रकार फैका जाता है कि यह एक रेखा को छूते हुये दूसरी रेखा पर लम्बवत् टकराता है। सिद्ध करो कि यदि कोण θ प्रक्षेप्य दिशा और किसी भी रेखा के मध्य कोण है। तो $\tan\theta = \left(\sqrt{2}-1\right)\cot\alpha$ होगा

6. क्रिकेट स्टेडियम में बेंन्चे 1 m ऊँची और 1 m चौडी है। एक बल्लेबाज जमीन से 1 m ऊँचाई से गेंद को मारता है जिससे गेंद 35 m/s चाल और क्षैतिज से 53º कोण पर चलना प्रारम्भ करती है। पहली बेन्च बल्लेबाज से 110 m की दूरी पर है तथा सभी बेन्च गति के तल के लम्बवत् हो तो बताइये कि किस बेन्च पर गेंद जाकर टकरायेगी।

7. समुद्र तल पर एक जहाज 105 m ऊँची पहाड़ी की चोटी कि तरफ गतिशील है जहाज पर लगी हुई बंदूक द्वारा 110 ms^{-1} की चाल द्वारा गोली दागी जाती है। पहाड़ी के निम्नतम तल से अधिकतम दूरी ज्ञात करो, जहां से गोली दागने पर पहाड़ी के शीर्ष पर स्थित वस्तु को भेद सके। [$g = 10\ m/s^2$] **[REE 1994, 6]**

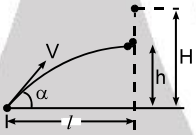
8. एक मीनार के शीर्ष व पेंदें से दो गोले क्षैतिज से क्रमशः α व β कोण पर एकसाथ दागे जाते हैं। दोंनों गोले धरातल पर एक ही बिन्दु पर एक साथ टकराते हैं। यदि s टकराने वाले बिन्दु की मीनार से क्षैतिज दूरी है, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो। ($\beta > \alpha$)

9. 20 m ऊँचाई पर स्थित किसी इमारत की छत पर कुछ विद्यार्थी क्रिकेट खेल रहे हैं। खेलते समय गेंद जमीन पर गिर जाती है। जमीन पर स्थित एक व्यक्ति गेंद को क्षैतिज से 45° कोण पर न्यूनतम सम्भव चाल से वापस फैंकता है। यदि न्यूनतम चाल $20\sqrt{\alpha}$ है यहां α एक पूर्णांक हो तो α का मान ज्ञात करो।

10. एक तोप द्वारा v_0= 250 m/s; वेग से दो गोले क्रमशः क्षैतिज से $\theta_1 = 53°$ तथा $\theta_2 = 37°$ पर इस प्रकार प्रक्षेपित किये जाते हैं कि दोनों का ऊध्वार्धर तल समान है। वायु घर्षण नगण्य है। दोनो के प्रक्षेपणों के मध्य समय अन्तराल सेकण्ड में ज्ञात करो जो दोंनो गोलों की टक्कर के लिए आवश्यक है। ($g = 10\ m/s^2$).

11. एक छोटी तोप 'A' को एक प्लेटफोर्म पर लगाया गया है। प्लेटफार्म घूम सकता है ताकि तोप से किसी भी बिन्दु को लक्ष्य बनाया जा सके तथा तोप को गोले की अधिकतम परास R के लिये समायोजित किया जा सकता है। जमीन पर दिये गये वृत्त (dotted) में स्थित किसी भी बिन्दु पर तोप की सहायता से गोला फेंका जा सकता है। अचानक AB के लम्बवत् क्षैतिज दिशा में एक हवा का तुफान आता है जिसका वेग गोले के वेग का $\sqrt{2}$ गुणा है। बिन्दु B से गोला किस न्यूनतम दूरी पर जा सकता है। (यह मानिये कि गोला, प्रक्षेपण वेग के अलावा हवा के तुफान का वेग भी प्राप्त कर लेता है तथा प्रक्षेपण के समय प्लेटफार्म स्थिर है।)

12. एक कण A मुक्त रूप से H (<< Re) ऊचाँई से गिर रहा है। जब पहला कण गिरना शुरू होता है। उसी समय दूसरे कण B को जमीन से प्रक्षेपित किया जाता है। जोकि पहले कण से h = H/2 ऊचाँई पर टकराता है। B के प्रारम्भिक बिन्दु से टक्कर की क्षैतिज दूरी ℓ है। दूसरे कण का क्षैतिज से बनाया प्रारम्भिक कोण α तथा प्रारम्भिक वेग ज्ञात करो ?



13. 10m ऊँची एक पहाडी के शीर्ष पर दो बन्दूके स्थित हैं जो कुछ समयान्तराल के अन्तर पर समान चाल $5\sqrt{3}$ m/s से गोली दागती हैं। पहली बन्दूक क्षैतिज दिशा में दागती है तथा दूसरी क्षैतिज से 60° के कोण पर ऊपर की ओर दागती है। गोलियाँ हवा में बिन्दु P पर टकराती हैं। ज्ञात कीजिए– **[JEE 1996, 5]**

(a) दो लगातार गोलियॉ दागने के बीच समयान्तराल तथा

(b) बिन्दु P के निर्देशांक। निर्देश तंत्र का मूलबिन्दु पहाडी के पाद (foot) पर नीचे दांयी ओर लीजिए तथा प्रक्षेप्य पथों को x-y तल में लीजिए।

14. एक गेंद सीढ़ीयों के ऊपरी सिरे से 4.5 ms^{-1} के वेग से क्षैतिज दिशा में लुढ़कती है। यदि प्रत्येक सीढ़ी की ऊँचाई व चौड़ाई क्रमशः 0.2 m व 0.3 m है। यदि $g = 10\ m/s^2$ हो तो, गेंद गति करती हुई n वीं सीढ़ी पर टकराती है। तो n का मान होगा (माना गेंद सीढ़ी के किनारे पर टकराती है।)

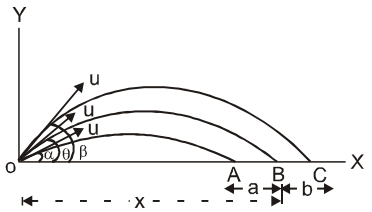
15. एक कण परवलयिक पथ के अनुदिश $x = y^2 + 2y + 2$ के अनुसार इस प्रकार गति करता है कि गति के दौरान वेग सदिश का y-घटक 5m/s अपरिवर्तित रहता हो तो कण के त्वरण का परिमाण (m/s^2 में) क्या होगा–

16. 4.8 m ऊँची व 2b m, चौड़ी इमारत का तल समतल है। क्षैतिज मैदान में इमारत की चौड़ाई के अनुदिश 14.4 m मीटर दूरी पर स्थित एक बिन्दु से एक गेंद को 45° के कोण पर 16 m/s के वेग से इमारत की तरफ प्रक्षेपित किया जाता है। गेंद इमारत की छत पर बीच में गिरती है। चौड़ाई 2b ज्ञात करो तथा यदि गेंद को $10\sqrt{3}$ m/s वेग से प्रक्षेपित किया जाये तो इमारत की छत को ठीक पार करने के लिए प्रक्षेप्य कोण ज्ञात करो ($g = 10 m/s^2$) –

17. एक ऊर्ध्वाधर खम्बे पर कुछ ऊँचाई पर लाल चिन्ह है। जमीन पर स्थित बिन्दु से एक पत्थर को प्रक्षेपित किया जाता है। जब इसको 45° कोण पर प्रक्षेपित करते है तो यह लाल चिन्ह से 1 m ऊपर लम्बवत टकराता है तथा जब $\tan^{-1}(3/4)$ कोण पर भिन्न चाल से प्रक्षेपित किया जाता है, तो यह लाल चिन्ह से 1.5 m मीटर नीचे लम्बवत टकराता है। तो पत्थर की चाल व प्रक्षेपण कोण ज्ञात करो जिससे की यह लाल चिन्ह पर लम्बवत टकराये। [$g = 10\ m/sec^2$] **[REE 1996, 6]**

Answers

1.



$$OA = x - a = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} \quad ...(1)$$

$$OC = x + b = \frac{u^2 \sin 2\beta}{g} \quad ...(2)$$

$$OB = x = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \quad ...(3)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

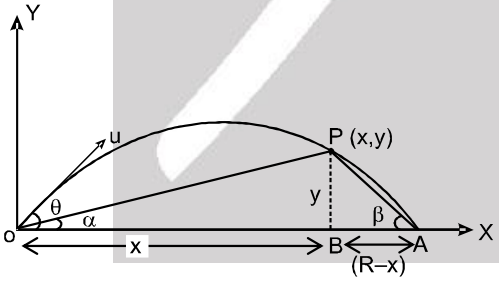
$$x\,(b + a) = \left(\frac{b\sin 2\alpha + a\sin 2\beta}{g}\right)u^2$$

समीकरण (3) से x का मान रखने पर

$$\frac{u^2 \sin 2\theta}{g}\,(b + a) = \left(\frac{b\sin 2\alpha + a\sin 2\beta}{g}\right)u^2$$

इस समीकरण को हल करने पर हमे θ का मान मिल जाऐगा।

2. चित्रानुसार



चित्र से $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{y}{x} + \frac{y}{(R-x)}$

R परास है।

$\therefore \quad \tan\alpha + \tan\beta = \frac{y(R-x)+xy}{x(R-x)}$

या $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{y}{x} \times \frac{R}{(R-x)} \quad ....(1)$

लेकिन $y = x\tan\theta\left(1 - \frac{x}{R}\right)$

या $\tan\theta = \frac{y}{x} \times \frac{R}{(R-x)} \quad ....(2)$

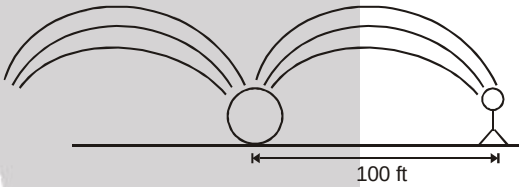
समीकरण (1) व (2) से

$\tan\theta = \tan\alpha + \tan\beta.$

3. दिये गये प्रश्न के अनुसार u = 80 m/s

परास $= \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$$\sin 2\theta = \frac{100 \times 32}{(80)^2} = 1/2$$



$\theta = 15°$ समान परास के लिए $\theta = 15°, 75°$

इस प्रकार दो उड्डयन काल होंगे।

$$T_1 = \frac{2u\sin 15°}{g} = \frac{2 \times 80 \times \sin 15°}{32}$$

(न्यूनतम समय)

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$T_2 = \frac{2u\sin 75°}{g} = \frac{2 \times 8 \times \sin 75°}{32}$$

(अधिकतम समय)

$$\sin 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

खतरे का समय = अधिकतम समय – न्यूनतम समय

$= (T_2 - T_1)$

$$= \frac{2 \times 80}{32}\,[\sin 75° - \sin 15°]$$

$$= \frac{2 \times 80}{32}\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right] = \frac{5}{\sqrt{2}}\ \text{sec.}$$

4. $v_0 = \sqrt{\frac{2gh}{2 + \cot^2\theta}}$

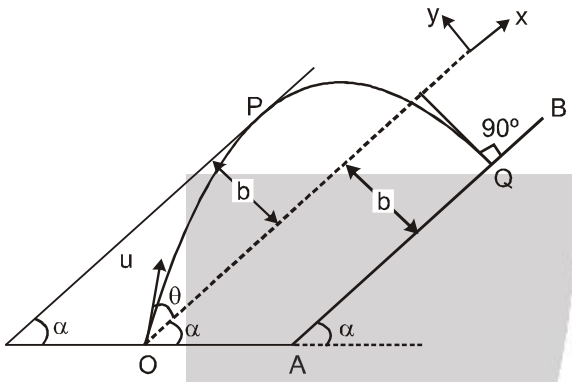
5. O से P तक कण की गति में

P पर v_y शून्य है

$$v_y^2 = u_y^2 + 2a_y s_y$$

$\therefore \quad 0 = (u \sin\theta)^2 - 2(g\cos\alpha)\, b$

या $\quad b = \dfrac{u^2 \sin^2\theta}{2g\cos\alpha}$ ....(i)



O से Q तक कण की गति में

कण, AB पर 90° से बिन्दु Q पर टकराता है।

अर्थात x-अक्ष के अनुदिश वेग शून्य होगा।

Using $\quad v_x = u_x + a_x t$, के प्रयोग से

$$0 = u\cos\theta - (g\sin\alpha)t$$

या $\quad t = \dfrac{u\cos\theta}{g\sin\alpha}$ ...(ii)

y-दिशा में गति के लिए, $s_y = u_y t + \dfrac{1}{2}a_y t^2$

या $\quad -b = u\sin\theta$

$$\left(\frac{u\cos\theta}{g\sin\alpha}\right) + \frac{1}{2}(-g\cos\alpha)\left(\frac{u\cos\theta}{g\sin\alpha}\right)^2 \quad ...(iii)$$

समीकरण (i) व (iii) से

या $\quad -\dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g\cos\alpha} = \dfrac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g\sin\alpha} - \dfrac{gu^2\cos\alpha\cos^2\theta}{2g^2\sin^2\alpha}$

या $\quad -\dfrac{\sin^2\theta}{2\cos\alpha} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha\cos^2\theta}{2\sin^2\alpha}$

हल करने पर $\theta = \left(\sqrt{2}-1\right)\cot\alpha$

6. 6th step

7. 1100 m

8. $h = s(\tan\beta - \tan\alpha)$.

9. 2

10. 10sec

11. माना कि गोले की चाल u तथा हवा की चाल v है।

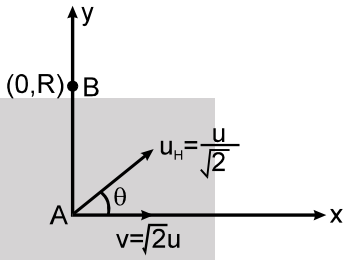
हवा से उड़यन काल T परिवर्तित नहीं होगा।

$$T = \frac{\sqrt{2}\,u}{g} \quad .....(1)$$

हवा की अनुपस्थिति में गोले के वेग का क्षैतिज घटक

$$u_H = \frac{u}{\sqrt{2}} \quad .....(2)$$

अतः गोले के वेग के x तथा y घटक (चित्रानुसार)



$$u_x = \sqrt{2}\,u + \frac{u}{\sqrt{2}}\cos\theta \quad .....(3a)$$

$$u_y = \frac{u}{\sqrt{2}}\sin\theta \quad .....(3b)$$

$\therefore$ जहाँ गोला टकराता है उसके x तथा y निर्देशांक बिन्दु P है।

$$x = u_x T = \left(\sqrt{2}\,u + \frac{u}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\frac{\sqrt{2}u}{g} = 2R + R\cos\theta \quad .....(4a)$$

$$y = u_y T = \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)\frac{\sqrt{2}u}{g} = R\sin\theta \quad ....(4b)$$

$\therefore$ B तथा P के बीच की दूरी S है।

$$S^2 = (x-0)^2 + (y-R)^2 = (2R + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta - R)^2$$

$$= R^2[6 + 4\cos\theta - 2\sin\theta]$$

$$= R^2\left[6 + \sqrt{20}\left(\frac{4\cos\theta}{\sqrt{20}} - \frac{2\sin\theta}{\sqrt{20}}\right)\right]$$

$\therefore \quad S_{minimum} = R\sqrt{6-\sqrt{20}}$

$= R\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ or $R(\sqrt{5}-1)$ **Ans.**

Alternate : चित्र (1) में प्रदर्शित वृत सभी बिन्दुओं का बिन्दुपथ प्रदर्शित करता है, जहां पर तूफान की अनुपस्थिति में जमीन पर गोले गिरते है।

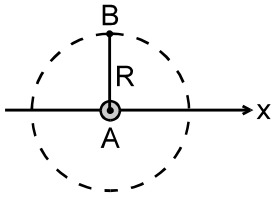


fig.1

माना गोले की चाल 'u' तथा तूफान की चाल $v = \sqrt{2}\,u$ है। माना T उड्डयन काल है। जो कि तूफान की उपस्थिति में भी अपरिवर्तित रहता है। माना R अधिकतम परास है जिसके लिए प्रक्षेपण कोण क्षैतिज से 45º है।

तो $R = \frac{u}{\sqrt{2}}\,T$ ..... (1)

x-अक्ष के अनुदिश हवा के प्रवाह के कारण गोलो में x दिशा के अनुदिश उड्डयन काल के दोरान अतिरिक्त विस्थापन (Δx)

$\Delta x = vT = \sqrt{2}\,uT = 2R.$

अतः चित्र (2) के अनुसार जमीन पर गोले गिरने वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ x-अक्ष पर 2R विस्थापित हो जाता है।

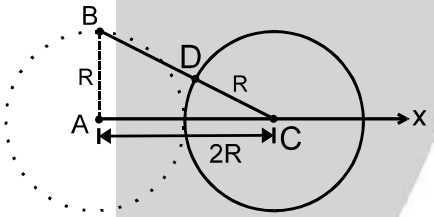


fig.2

चित्र (2) से.

$BC = \sqrt{R^2 + (2R)^2} = \sqrt{5R^2} = \sqrt{5}\,R$

is अतः आवश्यक न्यूनतम दूरी

$BD = BC - DC = \sqrt{5}\,R - R =$ **$(\sqrt{5} - 1)\,R$**

Ans.

12. $v_0 = \sqrt{gH\left(1+\frac{\ell^2}{H^2}\right)}$, $\tan\alpha = \frac{H}{\ell}$

13. (a) 1s (b) $5\sqrt{3}$ m. 5 m

14. 9

15. 50

16. width of the roof is 9.6 m

$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{2}$ or $\theta = 45°$

17. $\frac{\sqrt{3620}}{3}$ m/s , $\tan^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$