

## Exercise-1

- Marked questions are recommended for Revision.  
चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

### PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

#### भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

#### **Section (A) : Equation of circle, parametric equation, position of a point**

**खण्ड (A) :** वृत्त का समीकरण, प्राचलिक समीकरण, बिन्दु की स्थिति

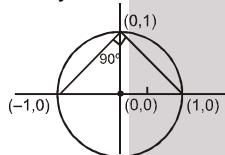
- A-1.** Find the equation of the circle that passes through the points  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  and  $(0, 1)$ .

बिन्दुओं  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  और  $(0, 1)$  से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $x^2 + y^2 = 1$

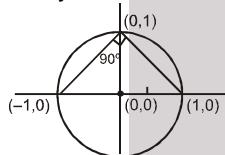
**Sol.** Centre  $(0, 0)$ , radius 1

$$x^2 + y^2 = 1$$



**Hindi.** केन्द्र  $(0, 0)$ , त्रिज्या = 1

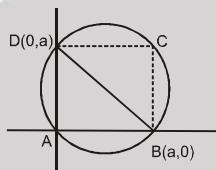
$$x^2 + y^2 = 1$$



- A-2.** ABCD is a square in first quadrant whose side is  $a$ , taking AB and AD as axes, prove that the equation to the circle circumscribing the square is  $x^2 + y^2 = a(x + y)$ .

भुजा  $a$  वाला एक वर्ग ABCD प्रथम चतुर्थांश में है। भुजा AB और AD को अक्ष लेते हुए सिद्ध कीजिए कि वर्ग के परिगतवृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 = a(x + y)$  है।

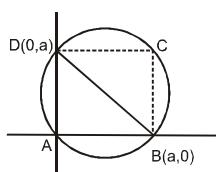
**Sol.** Since BD is diameter of circle



$$\text{Hence } (x - a)(x - 0) + (y - 0)(y - a) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a(x + y)$$

**Hindi.** चूँकि BD वृत्त का व्यास है।



$$\text{अतः } (x - a)(x - 0) + (y - 0)(y - a) = 0$$

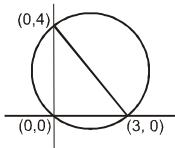
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a(x + y)$$

- A-3.** Find the equation to the circle which passes through the origin and cuts off intercepts equal to 3 and 4 from the positive axes.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूलबिन्दु से गुजरता है तथा धनात्मक अक्षों पर क्रमशः 3 और 4 लम्बाई के अन्तःखण्ड काटता है।

**Ans.**  $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$

**Sol.**



$$(x - 3)(x - 0) + (y - 0)(y - 4) = 0$$

- A-4.** Find equation of circle which touches x & y axis & perpendicular distance of centre of circle from  $3x + 4y + 11 = 0$  is 5. Given that circle lies in I<sup>st</sup> quadrant.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x व y अक्ष को स्पर्श करता है तथा रेखा  $3x + 4y + 11 = 0$  से वृत्त के केन्द्र की लम्बवत् दूरी 5 है। दिया गया है कि वृत्त प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

**Ans.**  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

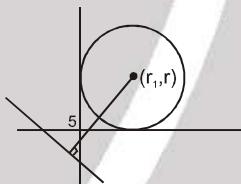
**Sol.**  $\perp \text{distance लम्बवत् दूरी } \left| \frac{3r + 4r + 11}{5} \right| = 5$

$$7r + 11 = \pm 25$$

$$r = 2, -36/7$$

∴ circle is in I<sup>st</sup> quadrant Hence r = 2

∴ वृत्त प्रथम चतुर्थांश में है अतः r = 2



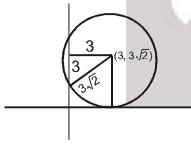
$$\text{Equation समीकरण } (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

- A-5.** Find the equation to the circle which touches the axis of x at a distance 3 from the origin and intercepts a distance 6 on the axis of y.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष को मूलबिन्दु से 3 इकाई दूरी पर स्पर्श करता है और y-अक्ष पर 6 इकाई का अन्तःखण्ड काटता है।

**Ans.**  $x^2 + y^2 \pm 6\sqrt{2}y \pm 6x + 9 = 0$

**Sol.**



$$(x \pm 3)^2 + (y \pm 3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2$$

- A-6.** Find equation of circle whose cartesian equation are  $x = -3 + 2 \sin \theta$ ,  $y = 4 + 2 \cos \theta$

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी कार्तीय समीकरण  $x = -3 + 2 \sin \theta$ ,  $y = 4 + 2 \cos \theta$  है।

**Ans.**  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

**Sol.**  $x = -3 + 2\sin \theta \Rightarrow x + 3 = 2 \sin \theta$

$$y = 4 + 2\cos \theta \Rightarrow y - 4 = 2 \cos \theta$$

$$\text{Squaring and add } (x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

**Hindi.**  $x = -3 + 2\sin \theta \Rightarrow x + 3 = 2 \sin \theta$

$$y = 4 + 2\cos \theta \Rightarrow y - 4 = 2 \cos \theta$$

वर्ग करके जोड़ने पर  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

- A-7.** Find the values of  $p$  for which the power of a point  $(2, 5)$  is negative with respect to a circle  $x^2 + y^2 - 8x - 12y + p = 0$  which neither touches the axes nor cuts them.

वृत्त  $x^2 + y^2 - 8x - 12y + p = 0$  जो न तो अक्षों को काटता हो न ही स्पर्श करता हो तथा बिन्दु  $(2, 5)$  के सापेक्ष विन्दु-शक्ति ऋणात्मक होने के लिये  $p$  के मान ज्ञात कीजिए।

**Ans.** (36, 47)

**Sol.**  $x^2 + y^2 - 8x - 12y + p = 0$

Power of  $(2, 5)$  is  $S_1 = 4 + 25 - 16 - 60 + P = P - 47 < 0 \Rightarrow P < 47$

Circle neither touches nor cuts coordinate axes

$$g^2 - c < 0 \Rightarrow 16 - p < 0 \Rightarrow p > 16$$

$$f^2 - c < 0 \Rightarrow 36 - p < 0 \Rightarrow p > 36$$

taking intersection  $P \in (36, 47)$

**Sol.**  $x^2 + y^2 - 8x - 12y + p = 0$

$(2, 5)$  का बिन्दु शक्ति है  $S_1 = 4 + 25 - 16 - 60 + P = P - 47 < 0 \Rightarrow P < 47$

वृत्त न तो स्पर्श करता है न ही निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करता है।

$$g^2 - c < 0 \Rightarrow 16 - p < 0 \Rightarrow p > 16$$

$$f^2 - c < 0 \Rightarrow 36 - p < 0 \Rightarrow p > 36$$

सर्वनिष्ठ लेने पर  $P \in (36, 47)$

## Section (B) : Line and circle, tangent, pair of tangent

**खण्ड (B) :** रेखा एवं वृत्त, स्पर्श रेखा, स्पर्श रेखा युग्म

- B-1.** If radii of the largest and smallest circle passing through the point  $(1, -1)$  and touching the circle

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y - 2 = 0$$
 are  $r_1$  and  $r_2$  respectively, then find the sum of  $r_1$  and  $r_2$ .

यदि बिन्दु  $(1, -1)$  से गुजरने वाले और वृत्त  $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y - 2 = 0$  को स्पर्श करने वाले सबसे बड़े और सबसे छोटे वृत्त की त्रिज्याएं क्रमशः  $r_1$  और  $r_2$  हैं तब  $r_1$  और  $r_2$  के मध्य अन्तर ज्ञात कीजिए।

**Ans.** 2

**Sol.**  $r_1 + r_2 = r = 2$

- B-2.** Find the points of intersection of the line  $x - y + 2 = 0$  and the circle  $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$ . Also determine the length of the chord intercepted.

वृत्त  $3x^2 + 3y^2 - 29x - 19y + 56 = 0$  तथा सरल रेखा  $x - y + 2 = 0$  के प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए। प्रतिच्छेदन से प्राप्त जीवा की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $(1, 3), (5, 7), 4\sqrt{2}$

**Sol.** On solving, points of intersection are  $(1, 3)$  &  $(5, 7)$ , length  $= 4\sqrt{2}$

**Hindi.** हल करने पर, प्रतिच्छेदी बिन्दु  $(1, 3)$  व  $(5, 7)$  होंगे अतः जीवा की लम्बाई  $= 4\sqrt{2}$

- B-3.** Show that the line  $7y - x = 5$  touches the circle  $x^2 + y^2 - 5x + 5y = 0$  and find the equation of the other parallel tangent.

प्रदर्शित कीजिए कि सरल रेखा  $7y - x = 5$ , वृत्त  $x^2 + y^2 - 5x + 5y = 0$  को स्पर्श करती है तथा इसके समान्तर अन्य स्पर्श रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $x - 7y - 45 = 0$

**Sol.** Other tangent is  $-x + 7y + \lambda = 0$  then  $\left| \frac{-\frac{5}{2} - 7 \times \frac{5}{2} + \lambda}{\sqrt{50}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = 45 \text{ and } -5$

$\therefore$  other tangent is  $x - 7y - 45 = 0$

**Hindi** अन्य स्पर्श रेखा है  $-x + 7y + \lambda = 0$  तो  $\left| \frac{-\frac{5}{2} - 7 \times \frac{5}{2} + \lambda}{\sqrt{50}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = 45$  एवं  $-5$

$\therefore$  अन्य स्पर्श रेखा है  $-x - 7y - 45 = 0$

- B-4.** Find the equation of the tangents to the circle  $x^2 + y^2 = 4$  which make an angle of  $60^\circ$  with the positive x-axis in anticlockwise direction .

वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि वामावर्त दिशा में धनात्मक x अक्ष से  $60^\circ$  का कोण बनाती है।

**Ans.**  $\sqrt{3}x - y \pm 4 = 0$

**Sol.**  $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ;  $y = mx \pm \sqrt{1+m^2}$   $y = x\sqrt{3} \pm 2 \times 2$

- B-5.** Show that two tangents can be drawn from the point (9, 0) to the circle  $x^2 + y^2 = 16$ ; also find the equation of the pair of tangents and the angle between them. [16JM110493]

प्रदर्शित कीजिए कि बिन्दु (9, 0) से वृत्त  $x^2 + y^2 = 16$  पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं। इस स्पर्श रेखा युग्म का समीकरण और उनके मध्य कोण भी ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $16x^2 - 65y^2 - 288x + 1296 = 0$ ,  $\tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{65}}{49}\right)$

**Sol.**  $S_1 \equiv (9)^2 + (0)^2 - 16 = 65 > 0$

Since (9, 0) lies outside the circle. Hence two real tangents can be drawn.

Now  $S \equiv x^2 + y^2 - 16$

$S_1 \equiv 9x - 16$ . Hence pair of tangents  $SS_1 = T^2$

$(x^2 + y^2 - 16)(65) = (9x - 16)^2$

$65x^2 + 65y^2 - 1040 = 81x^2 + 256 - 288x$

$16x^2 - 65y^2 - 288x + 1296 = 0$

Angle between these tangents =  $\left| \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{(a+b)} \right| = \left| \frac{2\sqrt{0+16\times65}}{16-65} \right| = \frac{8\sqrt{65}}{49}$

**Hindi.**  $S_1 \equiv (9)^2 + (0)^2 - 16 = 65 > 0$

चूंकि (9, 0) वृत्त के बाहर स्थित है। अतः दो वास्तविक स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

अब  $S \equiv x^2 + y^2 - 16$

$S_1 \equiv 9x - 16$

अतः स्पर्शीयुग्म का समीकरण  $SS_1 = T^2$

$(x^2 + y^2 - 16)(65) = (9x - 16)^2$

$65x^2 + 65y^2 - 1040 = 81x^2 + 256 - 288x$

$16x^2 - 65y^2 - 288x + 1296 = 0$

स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण =  $\left| \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{(a+b)} \right| = \left| \frac{2\sqrt{0+16\times65}}{16-65} \right| = \frac{8\sqrt{65}}{49}$

- B-6.** If the length of the tangent from (f, g) to the circle  $x^2 + y^2 = 6$  be twice the length of the tangent from (f, g) to the circle  $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$ , then will  $f^2 + g^2 + 4f + 4g + 2 = 0$  ?

यदि बिन्दु (f, g) से वृत्त  $x^2 + y^2 = 6$  पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई, बिन्दु (f, g) से वृत्त  $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$  पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई से दुगनी हो, तो  $f^2 + g^2 + 4f + 4g + 2 = 0$  सत्य है अथवा असत्य ?

**Ans.** Yes सत्य

**Sol.** given  $\sqrt{f^2 + g^2 - 6} = 2\sqrt{f^2 + g^2 + 3f + 3g} \Rightarrow 3g^2 + 3f^2 + 12g + 12f + 6 = 0$   
 $\Rightarrow g^2 + f^2 + 4g + 4f + 2 = 0$

**Hindi.** दिया गया है  $\sqrt{f^2 + g^2 - 6} = 2\sqrt{f^2 + g^2 + 3f + 3g} \Rightarrow 3g^2 + 3f^2 + 12g + 12f + 6 = 0$   
 $\Rightarrow g^2 + f^2 + 4g + 4f + 2 = 0$

### Section (C) : Normal, Director circle, chord of contact, chord with mid point

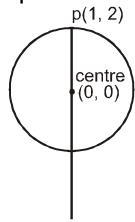
खण्ड (C) : अभिलम्ब, नियामक वृत्त, स्पर्श जीवा, मध्य बिन्दु वाली जीवा

- C-1.** Find the equation of the normal to the circle  $x^2 + y^2 = 5$  at the point (1, 2)

बिन्दु (1,2) पर वृत्त  $x^2 + y^2 = 5$  के अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $2x - y = 0$

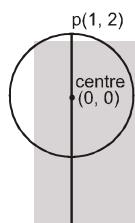
**Sol.** Normal passes through centre  
Hence equation of normal



$$y = \frac{2}{1}x \Rightarrow y = 2x$$

**Hindi.** अभिलम्ब वृत्त के केन्द्र से गुजरता है।

अतः अभिलम्ब का समीकरण



$$y = \frac{2}{1}x \Rightarrow y = 2x$$

**C-2.** Find the equation of the normal to the circle  $x^2 + y^2 = 2x$ , which is parallel to the line  $x + 2y = 3$ .

वृत्त  $x^2 + y^2 = 2x$  के उस अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सरल रेखा  $x + 2y = 3$  के समान्तर हो।

**Ans.**  $x + 2y - 1 = 0$

**Sol.** Equation of line parallel to  $x + 2y - 3 = 0$  is  $x + 2y + k = 0$

This is normal of  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ . Hence centre of circle satisfies it  $1 + 0 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

$$x + 2y - 1 = 0$$

**Hindi.**  $x + 2y - 3 = 0$  के समान्तर रेखा का समीकरण  $x + 2y + k = 0$  है।

यह वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ,  $1 + 0 + k = 0 \Rightarrow k = -1$  का अभिलम्ब है अतः वृत्त का केन्द्र इसे संतुष्ट करता है।

$$x + 2y - 1 = 0$$

**C-3.** Find the equation of director circle of the circle  $(x + 4)^2 + y^2 = 8$

वृत्त  $(x + 4)^2 + y^2 = 8$  के नियामक वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $(x + 4)^2 + y^2 = 16$

**Sol.** given circle  $(x + 4)^2 + y^2 = 8$  centre of director circle  $\equiv (-4, 0)$  radius of director circle  $\equiv 4$

Hence equation of director circle  $(x + 4)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$

**Hindi.** दिया गया वृत्त  $(x + 4)^2 + y^2 = 8$ , नियामक वृत्त का केन्द्र  $\equiv (-4, 0)$  तथा नियामक वृत्त की त्रिज्या  $\equiv 4$

अतः नियामक वृत्त का समीकरण  $(x + 4)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$

**C-4.** Tangents are drawn from the point  $(h, k)$  to the circle  $x^2 + y^2 = a^2$ ; prove that the area of the triangle

formed by them and the straight line joining their points of contact is  $\frac{a(h^2 + k^2 - a^2)^{3/2}}{h^2 + k^2}$  c.

बिन्दु  $(h, k)$  से वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हैं। सिद्ध कीजिए कि स्पर्श रेखाओं तथा स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली सरल रेखा से निर्मित त्रिभुज का क्षेत्रफल  $\frac{a(h^2 + k^2 - a^2)^{3/2}}{h^2 + k^2}$  होता है।

**Sol.** Area of triangle formed by pair of tangents & chord of contact is  $= \frac{RL^3}{R^2 + L^2}$

$$\text{Here } R = a \Rightarrow L = \sqrt{h^2 + k^2 - a^2} . \text{ Hence Area} = \frac{a(h^2 + k^2 - a^2)^{3/2}}{(h^2 + k^2)}$$

**Hindi.** स्पर्शी जीवा और स्पर्शी युग्म से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल =  $\frac{RL^3}{R^2 + L^2}$

$$\text{यहाँ } R = a \Rightarrow L = \sqrt{h^2 + k^2 - a^2} . \text{ अतः क्षेत्रफल} = \frac{a(h^2 + k^2 - a^2)^{3/2}}{(h^2 + k^2)}$$

- C-5.** Find the equation of the chord of the circle  $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$  whose middle point is  $(-2, -3)$ .  
वृत्त  $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$  की उस जीवा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका मध्य बिन्दु  $(-2, -3)$  है।

**Ans.**  $x + y + 5 = 0$

**Sol.**  $T = S_1 \Rightarrow -2x - 3y + 3(x - 2) + 4(y - 3) + 9 = 4 + 9 - 12 - 24 + 9 \Rightarrow x + y + 5 = 0$

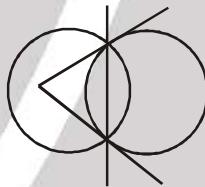
- C-6.** Tangents are drawn to the circle  $x^2 + y^2 = 12$  at the points where it is met by the circle  $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 2 = 0$ ; find the point of intersection of these tangents.  
वृत्त  $x^2 + y^2 = 12$  के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ खीची जाती हैं जहाँ पर यह वृत्त  $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 2 = 0$  से मिलता है, तो इन स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

$$\text{Ans. } \left( 6, -\frac{18}{5} \right)$$

**Sol.** Equation of common chord is  $S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 5x - 3y - 10 = 0$

This chord is also chord of contact.

Let point of intersection is  $p(h, k)$

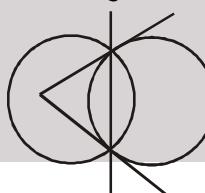


Then  $hx + ky - 12 = 0$  compare both equations

$$\frac{h}{5} = \frac{k}{-3} = \frac{-12}{-10} \Rightarrow (h, k) = \left( 6, -\frac{18}{5} \right)$$

**Hindi** उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण  $S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 5x - 3y - 10 = 0$

यह जीवा स्पर्शी जीवा भी है। माना प्रतिच्छेद बिन्दु  $p(h, k)$  है।



तब  $hx + ky - 12 = 0$

दोनों समीकरणों की तुलना करने पर  $\Rightarrow (h, k)$

$$\text{दोनों समीकरणों की तुलना करने पर } \frac{h}{5} = \frac{k}{-3} = \frac{-12}{-10} \Rightarrow (h, k) = \left( 6, -\frac{18}{5} \right)$$

## Section (D) : Position of two circle, Orthogonality, Radical axis and radical centre

**खण्ड (D) :** दो वृत्तों की स्थिति, लम्बकोणीयता, मूलाक्ष एवं मूलाक्ष केन्द्र

D-1. Find the equations to the common tangents of the circles  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$  and

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$

वृत्तों  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$  एवं  $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$  की उभयनिष्ट स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $x = 0, 3x + 4y = 10, y = 4$  and  $3y = 4x$ .

$x = 0, 3x + 4y = 10, y = 4$  एवं  $3y = 4x$ .

**Sol.**  $S_1 : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0 \quad C_1(1, 3), r_1 = 1$

$S_2 : x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0 \quad C_2(-3, 1), r_2 = 3$

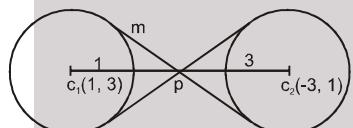
$$C_1C_2 = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \Rightarrow n + r_2 = 4$$

Hence  $C_1C_2 > r_1 + r_2$  Both circles are non-intersecting.

Hence there are four common tangents.

### Transverse common tangents :

$$\text{coordinate of } P \left( \frac{3-3}{1+3}, \frac{1+9}{1+3} \right) \equiv \left( 0, \frac{5}{2} \right)$$



Let slope of these tangents is  $m$

$$y - \frac{5}{2} = m(x - 0) \Rightarrow mx - y + \frac{5}{2} = 0$$

$$\text{Now } \left| \frac{m - 3 + \frac{5}{2}}{\sqrt{1+m^2}} \right| = 1 \Rightarrow \left| m - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{1+m^2}$$

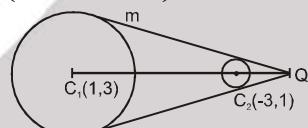
$$\Rightarrow m^2 + \frac{1}{4} - m = 1 + m^2 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}, \text{ other tangents is vertical}$$

Equation of tangents  $x = 0$

$$-\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow -3x - 4y + 10 = 0 \Rightarrow 3x + 4y = 10$$

### Direct common tangents

$$\text{coordinate of } Q \left( \frac{-3-3}{1-3}, \frac{1-9}{1-3} \right) \equiv Q(3, 4)$$



Hence equations  $y - 4 = m(x - 3) \Rightarrow mx - y + (4 - 3m) = 0$

$$\Rightarrow \left| \frac{m - 3 + 4 - 3m}{\sqrt{1+m^2}} \right| = 1 \Rightarrow |1 - 2m| = \sqrt{1+m^2} \Rightarrow 1 + 4m^2 - 4m = 1 + m^2 \Rightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0, \frac{4}{3}$$

$$\text{Hence equation } y - 4 = 0(x - 3) \Rightarrow y = 4 \Rightarrow y - 4 = \frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 4x - 3y = 0$$

**Hindi.**  $S_1 : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0 \quad C_1(1, 3), r_1 = 1$

$S_2 : x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0 \quad C_2(-3, 1), r_2 = 3$

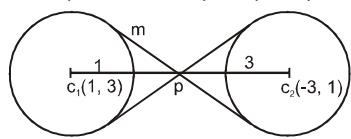
$$C_1C_2 = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \Rightarrow n + r_2 = 4$$

अतः  $C_1C_2 > r_1 + r_2$  दोनों वृत्त प्रतिच्छेदी नहीं हैं।

अतः चार उभयनिष्ट स्पर्श रेखा हैं।

तिर्यक उभयनिष्ट स्पर्श रेखाएँ :

$$P \text{ के निर्देशांक } \left( \frac{3-3}{1+3}, \frac{1+9}{1+3} \right) \equiv \left( 0, \frac{5}{2} \right)$$



माना स्पर्श रेखाओं की प्रवणता  $m$  है।

$$y - \frac{5}{2} = m(x - 0) \Rightarrow mx - y + \frac{5}{2} = 0$$

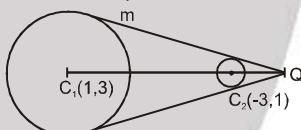
$$\text{Now } \left| \frac{m-3+\frac{5}{2}}{\sqrt{1+m^2}} \right| = 1 \Rightarrow \left| m - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow m^2 + \frac{1}{4} - m = 1 + m^2 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}, \text{ अतः स्पर्श रेखाएँ उच्चाधिर हैं। स्पर्श रेखाओं के समीकरण } x = 0$$

$$-\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow -3x - 4y + 10 = 0 \Rightarrow 3x + 3y = 10$$

अनुक्रम उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ

$$Q \text{ के निर्देशांक } \left( \frac{-3-3}{1-3}, \frac{1-9}{1-3} \right) \equiv Q(3, 4)$$



अतः समीकरण  $y - 4 = m(x - 3) \Rightarrow mx - y + (4 - 3m) = 0$

$$\Rightarrow \left| \frac{m-3+4-3m}{\sqrt{1+m^2}} \right| = 1 \Rightarrow |1 - 2m| = \sqrt{1+m^2} \Rightarrow 1 + 4m^2 - 4m = 1 + m^2 \Rightarrow 3m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0, \frac{4}{3}$$

$$\text{अतः समीकरण } y - 4 = 0(x - 3) \Rightarrow y = 4 \Rightarrow y - 4 = \frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 4x - 3y = 0$$

- D-2.** Show that the circles  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 12 = 0$  and  $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 6 = 0$  cut each other orthogonally.  
सिद्ध कीजिए कि वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 12 = 0$  और  $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 6 = 0$  एक दूसरे को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करते हैं।

**Sol.**  $C_1 \equiv (1, 3) C_2 (-3, -2) \Rightarrow r_1 = \sqrt{22} \Rightarrow r_2 = \sqrt{19} \Rightarrow (C_1 C_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$

- D-3.** Find the equation of the circle passing through the origin and cutting the circles  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$  and  $x^2 + y^2 + 12y + 6 = 0$  at right angles.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से गुजरता है तथा वृत्तों

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$  और  $x^2 + y^2 + 12y + 6 = 0$  को समकोण पर काटता है।

**Ans.**  $2(x^2 + y^2) - 7x + 2y = 0$

**Sol.** Equation of circle passing through origin is  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

This circle cuts the circle  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$  orthogonally

$$2g(-2) + 2f(3) = 0 + 10 \Rightarrow -2g + 3f - 5 = 0 \quad \dots(1)$$

&  $x^2 + y^2 + 12y + 6 = 0$  also

$$2g(0) + 2f(6) = 6 + 0 \Rightarrow f = \frac{1}{2} \Rightarrow -2g + \frac{3}{2} - 5 = 0 \Rightarrow 2g = -\frac{7}{2} \Rightarrow g = -\frac{7}{4}$$

$$\text{Hence circle } x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{7}{4}\right)x + 2\left(\frac{1}{2}\right)y = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 7x + 2y = 0$$

**Hindi.** मूल बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

यह वृत्त, वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$  को समकोणीय प्रतिच्छेद करता है।



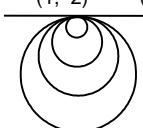
- E-2.** Find the equation of a circle which touches the line  $2x - y = 4$  at the point  $(1, -2)$  and वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $2x - y = 4$  को बिन्दु  $(1, -2)$  पर स्पर्श करती है।

- (i) Passes through  $(3, 4)$  (i)  $(3, 4)$  से गुजरती है।  
(ii) Radius = 5 (ii) त्रिज्या = 5

**Ans.** (i)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 20(2x - y - 4) = 0$

(ii)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \pm \sqrt{20}(2x - y - 4) = 0$

**Sol.** (i) Equation of circle is  $\frac{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + \lambda(2x - y - 4) = 0}{(1, -2) \quad (3, 4)}$

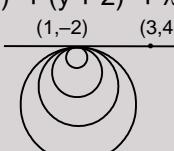


which passes through  $(3, 4) \Rightarrow \lambda = 20$

(ii) equation of circle is  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + \lambda(2x - y - 4) = 0$

whose radius is 5  $\Rightarrow (\lambda - 1)^2 + \left(\frac{-\lambda + 4}{2}\right)^2 - (1 + 4 - 4\lambda) = 25 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{20}$

**Hindi** (i) वृत्त का समीकरण  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + \lambda(2x - y - 4) = 0$  है –



जो  $(3, 4)$  से गुजरती है  $\Rightarrow \lambda = 20$

(ii) वृत्त का समीकरण  $(x - 1)^2 + \sqrt{20}(y + 2)^2 + \lambda(2x - y - 4) = 0$  है

जिसकी त्रिज्या 5 है  $\Rightarrow (\lambda - 1)^2 + \left(\frac{-\lambda + 4}{2}\right)^2 - (1 + 4 - 4\lambda) = 25 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{20}$

- E-3.** Show that the equation  $x^2 + y^2 - 2x - 2\lambda y - 8 = 0$  represents for different values of  $\lambda$  a system of circles passing through two fixed points A and B on the x-axis, and also find the equation of that circle of the system the tangent to which at A and B meet on the line  $x + 2y + 5 = 0$ .

दर्शाइये कि समीकरण  $x^2 + y^2 - 2x - 2\lambda y - 8 = 0$  के लिए  $\lambda$  के भिन्न-भिन्न मानों के लिए वृत्तों का निकाय दो स्थिर बिन्दुओं A तथा B से गुजरता है जो x-अक्ष पर मिलता है। तथा वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि स्पर्श रेखा निकाय, रेखा  $x + 2y + 5 = 0$  को A तथा B पर मिलता है।

**Sol.**  $(x^2 + y^2 - 2x - 8) - 2\lambda y = 0$

$S + \lambda L = 0$

solving (हल करने पर)  $S = 0$  &  $L = 0$

put  $y = 0$  रखने पर  $\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

$x = -2$  or  $4$

$A \equiv (4, 0)$

$B \equiv (-2, 0)$

Equation of AB (AB का समीकरण) :

C.O.C.  $xx_1 + yy_1 - 1(x+x_1) - \lambda(y+y_1) - 8 = 0$   
 $\Rightarrow x(x_1 - 1) + y(y_1 - 1) - (x_1 + \lambda y_1 + 8) = 0 \quad \dots(1)$

Also equation of AB is x-axis i.e

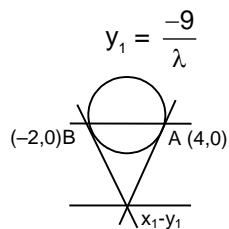
तथा AB का समीकरण x-अंक्ष है

$0.x + 1.y + 0.c = 0 \quad \dots(2)$

comparing (1) & (2) से

$$\frac{0}{x_1 - 1} = \frac{1}{y_1 - \lambda} = \frac{0}{x_1 + \lambda y_1 + 8}$$

$x_1 = 1$  &  $\lambda y_1 + 9 = 0$



$$\text{Also इसलिए } x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{18}{\lambda} + 5 = 0 \Rightarrow 6 = \frac{18}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 3$$

equation of circle is वृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 8 = 0$

- E-4.** Consider a family of circles passing through two fixed points A (3, 7) and B (6, 5). Show that the chords in which the circles  $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$  cuts the members of the family are concurrent at a point. Also find the co-ordinates of this point.

माना कि वृत्तों का निकाय दो स्थिर बिन्दुओं A (3, 7) और B (6, 5) से गुजरता है। दर्शाइयें कि जीवाएँ जो वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$  को निकाय के सदस्य को एक बिन्दु पर संगामी होती हैं। तथा इस बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $\left(\frac{52}{3}, -\frac{23}{9}\right)$

**Sol.** Family of circles passes through two fixed point is दो स्थिर बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों का निकाय है –

$$S + \lambda L = 0$$

$$\text{where जहाँ } S = (x - 3)(x - 6) + (y - 7)(y - 5) = 0$$

$$L = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

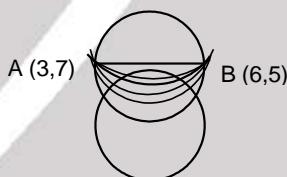
Equation of variable common chord is चर उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण है –

$$S + \lambda L - S' = 0$$

$$\Rightarrow (S - S') + \lambda L = 0$$

or या  $L' + \lambda L = 0$  which represents family of lines concurrent at  $L' = 0$  and  $L = 0$

$L' + \lambda L = 0$  संगामी रेखा निकाय को व्यक्त रखता है  $L' = 0$  तथा  $L = 0$



$$S = (x - 3)(x - 6) + (y - 7)(y - 5) = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - 12y + 53 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$$

$$-5x - 12y + 56 = 0$$

$$4(2x + 3y - 27 = 0) \Rightarrow x = \frac{52}{3}, y = -\frac{23}{9}$$

- E-5.** Find the equation of the circle circumscribing the triangle formed by the lines  $x + y = 6$ ,  $2x + y = 4$  and  $x + 2y = 5$ .

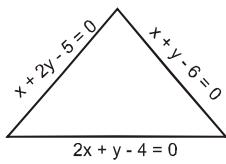
सरल रेखाओं  $x + y = 6$ ,  $2x + y = 4$  और  $x + 2y = 5$  से निर्मित त्रिभुज के परिवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $x^2 + y^2 - 17x - 19y + 50 = 0$

**Sol.** Equation of circumcircle of this triangle

$$L_1 L_2 + \lambda L_2 L_3 + \mu L_3 L_1 = 0$$

$$(x + 2y - 5)(x + y - 6) + \lambda(x + y - 6)(2x + y - 4) + \mu(x + 2y - 5)(2x + y - 4) = 0$$



$$\text{coef. of } xy = 0 \Rightarrow 3 + 3\lambda + 5\mu = 0 \Rightarrow 3\lambda + 5\mu + 3 = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{coef. } x^2 = \text{coef. } y^2 \Rightarrow 1 + 2\lambda + 2\mu = 2 + \lambda + 2\mu$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \quad \mu = -\frac{6}{5}$$

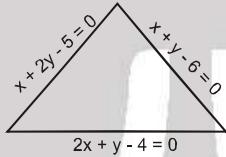
$$\text{Hence } (x+2y-5)(x+y-6) + (x+y-6)(2x+y-4) - \frac{6}{5} (x+2y-5)(2x+y-4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 17x - 19y + 50 = 0$$

**Hindi.** इस त्रिभुज के परिगत वृत्त का समीकरण

$$L_1 L_2 + \lambda L_2 L_3 + \mu L_3 L_1 = 0$$

$$(x+2y-5)(x+y-6) + \lambda(x+y-6)(2x+y-4) + \mu(x+2y-5)(2x+y-4) = 0$$



$$xy \text{ का गुणांक} = 0 \Rightarrow 3 + 3\lambda + 5\mu = 0 \Rightarrow 3\lambda + 5\mu + 3 = 0 \quad \dots(1)$$

$$x^2 \text{ का गुणांक} = y^2 \text{ का गुणांक} \Rightarrow 1 + 2\lambda + 2\mu = 2 + \lambda + 2\mu$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \quad \mu = -\frac{6}{5}$$

$$\text{अतः } (x+2y-5)(x+y-6) + (x+y-6)(2x+y-4) - \frac{6}{5} (x+2y-5)(2x+y-4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 17x - 19y + 50 = 0$$

**E-6.** Prove that the circle  $x^2 + y^2 + 2ax + c^2 = 0$  and  $x^2 + y^2 + 2by + c^2 = 0$  touches each other

$$\text{if } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$$

सिद्ध कीजिए कि वृत्त  $x^2 + y^2 + 2ax + c^2 = 0$  और  $x^2 + y^2 + 2by + c^2 = 0$  एक दूसरे को स्पर्श करते हैं

$$\text{यदि } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$$

**Sol.** Subtract to get common tangent and drop perpendicular from centre on any one circle and equate it to its radius.

घटाने पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा प्राप्त होती है। केन्द्र से डाला गया लम्ब त्रिज्या के बराबर होता है।

Radical axes is  $ax - by = 0$  which touches both the circle

मूलाक्ष  $ax - by = 0$  जो दोनों वृत्तों को स्पर्श करती है

$$\text{Now अब } x^2 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 + 2ax + c^2 = 0$$

$$\Rightarrow (b^2 + a^2)x^2 + 2ab^2x + b^2c^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4a^2b^2 - 4(b^2 + a^2)b^2c^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2b^2 = c^2(b^2 + a^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

## PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

**भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)**

### Section (A) : Equation of circle, parametric equation, position of a point

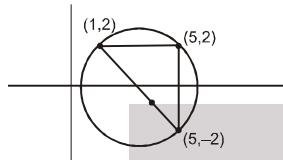
**खण्ड (A) :** वृत्त का समीकरण, प्राचलिक समीकरण, बिन्दु की स्थिति

**A-1.** The radius of the circle passing through the points  $(1, 2)$ ,  $(5, 2)$  &  $(5, -2)$  is:

बिन्दुओं  $(1, 2)$ ,  $(5, 2)$  एवं  $(5, -2)$  से गुजरने वाले वृत्त की त्रिज्या है –

- (A)  $5\sqrt{2}$       (B)  $2\sqrt{5}$       (C)  $3\sqrt{2}$       (D\*)  $2\sqrt{2}$

**Sol.**



$$\text{diameter} = 4\sqrt{2} \quad \text{व्यास} = 4\sqrt{2} \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$$

**A-2.** The centres of the circles  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 7 = 0$  and  $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 3 = 0$  are the ends of the diameter of the circle

वृत्तों  $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 7 = 0$  और  $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 3 = 0$  के केंद्र निम्न में से किस वृत्त के व्यास के अन्तिम बिन्दु हैं।

- (A\*)  $x^2 + y^2 - 5x - 9y + 26 = 0$       (B)  $x^2 + y^2 + 5x - 9y + 14 = 0$   
 (C)  $x^2 + y^2 + 5x - y - 14 = 0$       (D)  $x^2 + y^2 + 5x + y + 14 = 0$

**Sol.**  $(3, 4)$  &  $(2, 5)$  are ends of diameter of circle

So, Equation  $(x - 3)(x - 2) + (y - 4)(y - 5) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - 9y + 26 = 0$

**Hindi** वृत्त के व्यास के अन्तिम सिरे  $(3, 4)$  व  $(2, 5)$  है।

अतः समीकरण  $(x - 3)(x - 2) + (y - 4)(y - 5) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - 9y + 26 = 0$

**A-3.** The circle described on the line joining the points  $(0, 1)$ ,  $(a, b)$  as diameter cuts the x-axis in points whose abscissa are roots of the equation:

बिन्दुओं  $(0, 1)$  और  $(a, b)$  को मिलाने वाली सरल रेखा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, x-अक्ष को जिन बिन्दुओं पर काटता है, उनके भुज जिस समीकरण के मूल है, वह है –

- (A)  $x^2 + ax + b = 0$       (B\*)  $x^2 - ax + b = 0$       (C)  $x^2 + ax - b = 0$       (D)  $x^2 - ax - b = 0$

**Sol.** Equation of circle  $(x - 0)(x - a) + (y - 1)(y - b) = 0$

it cuts x-axis put  $y = 0 \Rightarrow x^2 - ax + b = 0$

वृत्त का समीकरण  $(x - 0)(x - a) + (y - 1)(y - b) = 0$

यह x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है तब  $y = 0$  रखने पर  $\Rightarrow x^2 - ax + b = 0$

**A-4.** The intercepts made by the circle  $x^2 + y^2 - 5x - 13y - 14 = 0$  on the x-axis and y-axis are respectively

- (A) 9, 13      (B) 5, 13      (C\*) 9, 15      (D) none

वृत्त  $x^2 + y^2 - 5x - 13y - 14 = 0$  द्वारा x-अक्ष और y-अक्ष पर अन्तर्खण्ड क्रमशः हैं –

- (A) 9, 13      (B) 5, 13      (C) 9, 15      (D) इनमें से कोई नहीं

**Sol.** Length of intercept on x-axis =  $2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{\frac{25}{4} + 14} = 2\sqrt{\frac{81}{4}} = 9$

on y-axis =  $2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + 14} = 2\sqrt{\frac{169 + 56}{4}} = 2\sqrt{\frac{225}{4}} = 15$

x-अक्ष पर अन्तर्खण्ड की लम्बाई =  $2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{\frac{25}{4} + 14} = 2\sqrt{\frac{81}{4}} = 9$

$$y\text{-अक्ष पर अन्तःखण्ड} = 2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + 14} = 2\sqrt{\frac{169+56}{4}} = 2\sqrt{\frac{225}{4}} = 15$$

- A-5.** Equation of line passing through mid point of intercepts made by circle  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$  on co-ordinate axes is

वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$  द्वारा निर्देशी अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्ड के मध्य बिन्दु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण होगा—

(A)  $3x + 2y - 12 = 0$       (B)  $3x + y - 6 = 0$       (C)  $3x + 4y - 12 = 0$       (D\*)  $3x + 2y - 6 = 0$

**Sol.** given circle  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$       it cuts x-axis put  $y = 0, x = 0, 4$   
it cuts y-axis put  $x = 0, y = 0, 6$ .      Hence mid points on x-axis  $(2, 0)$  on y-axis  $(0, 3)$

$$\text{Equations of line } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

**Hindi.** दिया गया वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$

यह x-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है  $y = 0, x = 0, 4$  रखने पर

यह y-अक्ष को प्रतिच्छेद करता है  $x = 0, y = 0, 6$ .      अतः x-अक्ष पर  $(2, 0)$ , y-अक्ष पर  $(0, 3)$  मध्य बिन्दु है

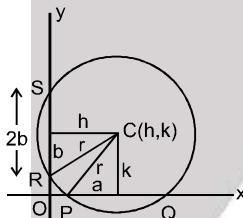
$$\text{रेखा का समीकरण है } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$$

- A-6.** Two thin rods AB & CD of lengths 2a & 2b move along OX & OY respectively, when 'O' is the origin. The equation of the locus of the centre of the circle passing through the extremities of the two rods is:

दो पतली छड़ें AB और CD जिनकी लम्बाइयाँ 2a और 2b हैं क्रमशः OX और OY अक्षों के अनुदिश गतिशील हैं, जबकि O मूलबिन्दु है। दोनों छड़ों के सिरों से गुजरने वाले वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ होगा —

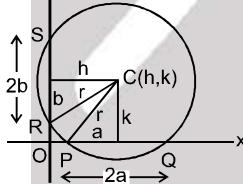
(A)  $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$       (B\*)  $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$       (C)  $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$       (D)  $x^2 - y^2 = a^2 + b^2$

**Sol.**  $h^2 + b^2 = r^2 \Rightarrow k^2 + a^2 = r^2 \Rightarrow h^2 - k^2 = a^2 - b^2$



**Hindi**

$$h^2 + b^2 = r^2 \Rightarrow k^2 + a^2 = r^2 \Rightarrow h^2 - k^2 = a^2 - b^2$$



$$\therefore \text{बिन्दुपथ है } x^2 - y^2 = a^2 - b^2$$

- A-7.** Let A and B be two fixed points then the locus of a point C which moves so that  $(\tan \angle BAC)(\tan \angle ABC) = 1$ ,

$$0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2}, 0 < \angle ABC < \frac{\pi}{2} \text{ is}$$

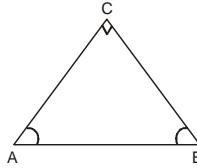
(A\*) Circle      (B) pair of straight line      (C) A point      (D) Straight line

माना A एवं B दो स्थिर बिन्दु हैं तब बिन्दु C का बिन्दुपथ जबकि बिन्दु C इस प्रकार है कि  $(\tan \angle BAC)(\tan \angle ABC) = 1$ ,  $0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2}, 0 < \angle ABC < \frac{\pi}{2}$  होगा—

$$(A) \text{ वृत्त} \quad (B) \text{ सरल रेखा युग्म} \quad (C) \text{ एक बिन्दु} \quad (D) \text{ सरल रेखा}$$

**Sol.**  $\tan \alpha \tan \beta = 1 \Rightarrow \tan \alpha = \cot \beta \Rightarrow \tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle ACB = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{locus of C is a}$$



circle as angle in a semicircle is  $\frac{\pi}{2}$

अतः C का बिन्दुपथ एक वृत्त होगा जैसा कि अर्धवृत्त में बना कोण  $\frac{\pi}{2}$  होता है।

**A-8. STATEMENT-1 :** The length of intercept made by the circle  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$  on the x-axis is 2.

**STATEMENT-2 :**  $x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0$  is a circle which passes through origin with centre  $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$  and

$$\text{radius } \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}$$

- (A) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is correct explanation for STATEMENT-1
- (B) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is not correct explanation for STATEMENT-1
- (C\*) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is false
- (D) STATEMENT-1 is false, STATEMENT-2 is true

**कथन-1 :** वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$  द्वारा x-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्ड की लम्बाई 2 है।

**कथन-2 :**  $x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0$  मूलबिन्दु से गुजरने वाला एक वृत्त है जिसका केन्द्र  $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$  और त्रिज्या  $\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}}$  है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
- (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
- (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
- (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

**Sol.** Statement-1 is true and statement-2 is false as radius =  $\frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

**Hindi** कथन-1 सत्य है और कथन-2 असत्य है क्योंकि त्रिज्या =  $\frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

### Section (B) : Line and circle, tangent, pair of tangent

**खण्ड (B) :** रेखा एवं वृत्त, स्पर्श रेखा, स्पर्श रेखा युग्म

**B-1.** Find the co-ordinates of a point P on line  $x + y = -13$ , nearest to the circle  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0$  रेखा  $x + y = -13$  पर स्थित बिन्दु P के निर्देशांक जो कि वृत्त

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0$  के निकटतम हो, होगा—

- (A\*)  $(-6, -7)$
- (B)  $(-15, 2)$
- (C)  $(-5, -6)$
- (D)  $(-7, -6)$

**Sol.** Point on the line  $x + y + 13 = 0$  nearest to the circle  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0$  is foot of  $\perp$  from centre

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} = -\left(\frac{-2-3+13}{1^2+1^2}\right) = -4 \Rightarrow x = -6 \quad y = -7$$

**Hindi.** रेखा  $x + y + 13 = 0$  पर स्थित बिन्दु के वृत्त  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0$  के नजदीक होने के लिए केन्द्र से लम्ब डालते हैं।

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} = -\left(\frac{-2-3+13}{1^2+1^2}\right) = -4 \Rightarrow x = -6 \quad y = -7$$

**Sol.** Point (8,6) lies on circle ;  $S_1 = 0 \Rightarrow$  one tangent.

**Hindi.** बिन्दु (8,6) वृत्त पर स्थित है।  $S_1 = 0 \Rightarrow$  अतः एक स्पर्श रेखा होगी।

- B-3.** Two lines through (2, 3) from which the circle  $x^2 + y^2 = 25$  intercepts chords of length 8 units have equations

(A)  $2x + 3y = 13, x + 5y = 17$       (B\*)  $y = 3, 12x + 5y = 39$   
 (C)  $x = 2, 9x - 11y = 51$       (D)  $y = 0, 12x + 5y = 39$

बिन्दु (2, 3) से गुजरने वाली उन दो सरल रेखाओं के समीकरण जो वृत्त  $x^2 + y^2 = 25$  पर 8 इकाई लम्बाई के अन्तःखण्ड की जीवा हो, हैं—

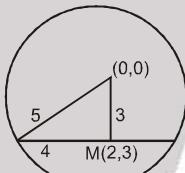
(A)  $2x + 3y = 13, x + 5y = 17$       (B)  $y = 3, 12x + 5y = 39$   
 (C)  $x = 2, 9x - 11y = 51$       (D)  $y = 0, 12x + 5y = 39$

**Sol.** Let slope of required line is  $m$

$$y - 3 = m(x - 2) \Rightarrow mx - y + (3 - 2m) = 0$$

length of  $\perp$  from origin = 3

$$\Rightarrow 9 + 4m^2 - 12m = 9 + 9m^2 \Rightarrow 5m^2 + 12m = 0 \Rightarrow m = 0, -\frac{12}{5}$$



Hence lines are  $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

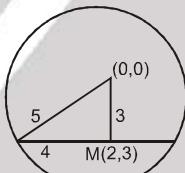
$$y - 3 = -\frac{12}{5}(x - 2) \Rightarrow 5y - 15 = -12x + 24 \Rightarrow 12x + 5y = 39.$$

**Hindi:** माना अभीष्ट रेखा की प्रवणता = m

$$y - 3 = m(x - 2) \Rightarrow mx - y + (3 - 2m) = 0$$

मूलबिन्दु से लम्ब की लम्बाई = 3

$$\Rightarrow 9 + 4m^2 - 12m = 9 + 9m^2 \Rightarrow 5m^2 + 12m = 0 \Rightarrow m = 0, -\frac{12}{5}$$



$$\text{अतः रेखाएँ } v - 3 = 0 \Rightarrow v = 3$$

$$y - 3 = -\frac{12}{5}(x - 2) \Rightarrow 5y - 15 = -12x + 24 \Rightarrow 12x + 5y = 39.$$

- B-4.** The line  $3x + 5y + 9 = 0$  w.r.t. the circle  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$  is  
 (A) chord dividing circumference in 1 : 3 ratio      (B\*) diameter  
 (C) tangent      (D) outside line  
 रेखा  $3x + 5y + 9 = 0$  वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$  के सापेक्ष हैं –  
 (A) जीवा जो परिधि को 1 : 3 में विभाजित करता है।      (B) व्यास  
 (C) स्पर्श रेखा      (D) वृत्त के बाहर से जाने वाली रेखा

**Sol.** From centre  $(2, -3)$ , length of perpendicular on line  $3x + 5y + 9 = 0$  is

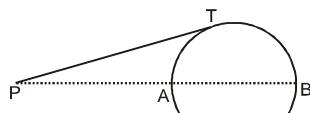
$$p = \frac{6 - 15 + 9}{\sqrt{25 + 9}} = 0 ; \text{line is diameter.}$$

**Hindi** केन्द्र  $(2, -3)$  से रेखा  $3x + 5y + 9 = 0$  पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$p = \frac{6 - 15 + 9}{\sqrt{25 + 9}} = 0 \Rightarrow \text{रेखा व्यास है।}$$

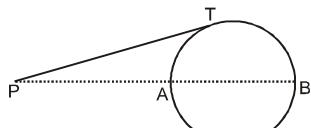






$$\text{Length of tangent} = \sqrt{16 \times 9} = 12$$

**Hindi.** हम जानते हैं कि



$$PA \cdot PB = PT^2 = (\text{स्पर्श रेखा की लम्बाई})^2$$

$$\text{स्पर्श रेखा की लम्बाई} = \sqrt{16 \times 9} = 12$$

- B-12.** The length of the tangent drawn from any point on the circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + p = 0$  to the circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + q = 0$  is:

(A\*)  $\sqrt{q - p}$       (B)  $\sqrt{p - q}$       (C)  $\sqrt{q + p}$       (D)  $\sqrt{2q + p}$

वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + p = 0$  के किसी बिन्दु से वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + q = 0$  पर खींची गई स्पर्श रेखा की लम्बाई है —

(A)  $\sqrt{q - p}$       (B)  $\sqrt{p - q}$       (C)  $\sqrt{q + p}$       (D)  $\sqrt{2q + p}$

**Sol.** Let any point on the circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + p = 0$  ( $\alpha, \beta$ )

This point satisfies  $\alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + p = 0$

Length of tangent from this point to circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + q = 0$

$$\text{length} = \sqrt{S_1} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + q} = \sqrt{q - p}$$

**Hindi** माना वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + p = 0$  ( $\alpha, \beta$ )

यह  $\alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + p = 0$  संतुष्ट होता है।

इस बिन्दु से वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + q = 0$  पर लम्ब की लम्बाई

$$\text{लम्बाई} = \sqrt{S_1} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + q} = \sqrt{q - p}$$

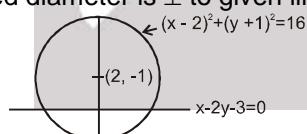
- B-13.** The equation of the diameter of the circle  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$  which bisects the chord cut off by the circle on the line  $x - 2y - 3 = 0$  is

(A)  $x + 2y = 0$       (B\*)  $2x + y - 3 = 0$       (C)  $3x + 2y - 4 = 0$       (D)  $3x - 2y - 4 = 0$

वृत्त  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$  के व्यास का वह समीकरण जो वृत्त द्वारा सरल रेखा  $x - 2y - 3 = 0$  पर काटी गई जीवा को समद्विभाजित करता है —

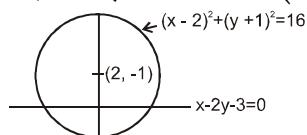
(A)  $x + 2y = 0$       (B)  $2x + y - 3 = 0$       (C)  $3x + 2y - 4 = 0$       (D)  $3x - 2y - 4 = 0$

**Sol.** Required diameter is  $\perp$  to given line.



Hence  $y + 1 = -2(x - 2) \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$ .

**Hindi.** अभीष्ट व्यास, दी गई रेखा के लम्बवत् है।



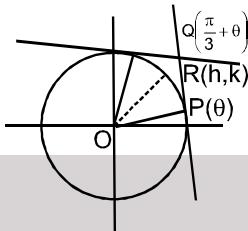
अतः  $y + 1 = -2(x - 2) \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$

- B-14.** The locus of the point of intersection of the tangents to the circle  $x^2 + y^2 = a^2$  at points whose parametric angles differ by  $\frac{\pi}{3}$  is

वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  के उन बिन्दुओं जिनके प्राचलिक कोणों का अन्तर  $\pi/3$  है, की स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है।

$$(A^*) x^2 + y^2 = \frac{4a^2}{3} \quad (B) x^2 + y^2 = \frac{2a^2}{3} \quad (C) x^2 + y^2 = \frac{a^2}{3} \quad (D) x^2 + y^2 = \frac{a^2}{9}$$

**Sol.**  $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$  and और  $\angle POR = \frac{\pi}{6}$



$$OP = OR \cos 30^\circ$$

$$a = \sqrt{h^2 + k^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{4a^2}{3}$$

### Section (C) : Normal, Director circle, chord of contact, chord with mid point

**खण्ड (C) :** अभिलम्ब, नियामक वृत्त, स्पर्श जीवा, मध्य बिन्दु वाली जीवा

- C-1.** The equation of normal to the circle  $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$  which passes through (1, 1) is  
 (A\*)  $3x + y - 4 = 0$       (B)  $x - y = 0$       (C)  $x + y = 0$       (D)  $3x - y - 4 = 0$   
 वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$  के अभिलम्ब का समीकरण जो बिन्दु (1, 1) से गुजरता है –

$$(A) 3x + y - 4 = 0 \quad (B) x - y = 0 \quad (C) x + y = 0 \quad (D) 3x - y - 4 = 0$$

**Sol.** Normal to the circle  $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$  also passes through centre.

Hence its equation is line joining (2, -2) and (1, 1)

$$(y-1) = \frac{1+2}{1-2} (x-1) \Rightarrow y-1 = -3x+3 \Rightarrow 3x+y-4=0$$

**Hindi.** वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 17 = 0$  का अभिलम्ब सदैव वृत्त के केन्द्र से गुजरता है।

अतः इसकी समीकरण बिन्दुओं (2, -2) और (1, 1) से मिलाने वाली रेखा है।

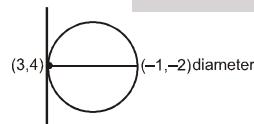
$$(y-1) = \frac{1+2}{1-2} (x-1) \Rightarrow y-1 = -3x+3 \Rightarrow 3x+y-4=0$$

- C-2.** The normal at the point (3, 4) on a circle cuts the circle at the point (-1, -2). Then the equation of the circle is

वृत्त के बिन्दु (3, 4) पर अभिलम्ब वृत्त को बिन्दु (-1, -2) पर काटता हो, तो वृत्त का समीकरण है –

$$(A) x^2 + y^2 + 2x - 2y - 13 = 0 \quad (B^*) x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0 \\ (C) x^2 + y^2 - 2x + 2y + 12 = 0 \quad (D) x^2 + y^2 - 2x - 2y + 14 = 0$$

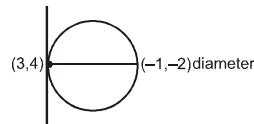
**Sol.**



$$(x-3)(x+1) + (y-4)(y+2) = 0$$

$$\text{Equation } x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$$

**Hindi**



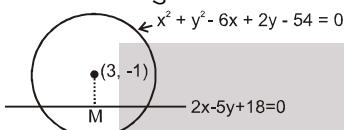
$$(x-3)(x+1) + (y-4)(y+2) = 0$$

$$\text{अतः अभीष्ट समीकरण } x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$$

**Sol.** Required point is foot of  $\perp$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-5} = -\left(\frac{6+5+18}{4+25}\right) = -1 \Rightarrow x = 1, y = 4$$

**Hindi.** लम्बपाद के बिन्दु हैं



$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-5} = -\left(\frac{6+5+18}{4+25}\right) = -1 \Rightarrow x = 1, y = 4$$

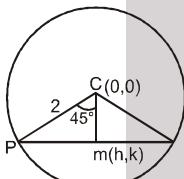
- C-4.** The locus of the mid point of a chord of the circle  $x^2 + y^2 = 4$  which subtends a right angle at the origin is:

वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  की उस जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ जो मूल बिन्दु पर समकोण बनाती हो, होगा—

(A)  $x + y = 2$   
(C\*)  $x^2 + y^2 = 2$

(B)  $x^2 + y^2 = 1$   
(D)  $x + y = 1$

$$\text{Sol. } \cos 45^\circ = \frac{cm}{cp} = \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{2}$$



Hence locus अतः बिन्दुपथ  $x^2 + y^2 = 2$

- C-5.** The chords of contact of the pair of tangents drawn from each point on the line  $2x + y = 4$  to the circle  $x^2 + y^2 = 1$  pass through the point

$$(B^*) \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

सरल रेखा  $2x + y = 4$  के प्रत्येक बिन्दु से  $x^2 + y^2 = 1$  पर खींचे गये स्पर्शी रेखा युग्म की स्पर्श जीवाएँ जिस बिन्दु से गुजरती हैं, वह है –

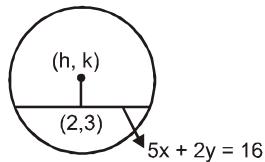
**Sol.** Let point on line be  $(h, 4 - 2h)$  (chord of contact)

$$hx + y(4 - 2h) = 1 \Rightarrow h(x - 2y) + 4y - 1 = 0 \Rightarrow \text{Point} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

**Hindi.** मानाकि रेखा पर बिन्दु ( $h$ ,  $4 - 2h$ ) (स्पर्शी जीवाएँ)

$$hx + y(4 - 2h) = 1 \Rightarrow h(x - 2y) + 4y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{अतः बिन्दु} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$$

- C-6.** The locus of the centers of the circles such that the point (2, 3) is the mid point of the chord  $5x + 2y = 16$  is:
- (A\*)  $2x - 5y + 11 = 0$     (B)  $2x + 5y - 11 = 0$     (C)  $2x + 5y + 11 = 0$     (D)  $2x - 5y - 11 = 0$   
 वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दुपथ जबकि बिन्दु (2, 3) जीवा  $5x + 2y = 16$  का मध्य बिन्दु है—  
 (A)  $2x - 5y + 11 = 0$     (B)  $2x + 5y - 11 = 0$     (C)  $2x + 5y + 11 = 0$     (D)  $2x - 5y - 11 = 0$

**Sol.**

$$\left(\frac{k-3}{h-2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) = -1 \Rightarrow 2x - 5y + 11 = 0$$

- C-7.** Find the locus of the mid point of the chord of a circle  $x^2 + y^2 = 4$  such that the segment intercepted by the chord on the curve  $x^2 - 2x - 2y = 0$  subtends a right angle at the origin.

वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  की जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जबकि जीवा द्वारा वक्र  $x^2 - 2x - 2y = 0$  पर काटा गया अन्तःखण्ड मूलबिन्दु पर समकोण बनाता है।

- (A\*)  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$     (B)  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$   
 (C)  $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$     (D)  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$

**Sol.** Let mid-point be  $(h, k) \Rightarrow hx + ky = h^2 + k^2$

$$\text{subtend right angle} \Rightarrow x^2 - 2(x + y) \left( \frac{hx + ky}{h^2 + k^2} \right) = 0 \Rightarrow (h^2 + k^2)x^2 - 2(x + y)(hx + ky) = 0$$

As angle  $90^\circ$ , Coefficient of  $x^2$  + Coefficient of  $y^2 = 0 \Rightarrow h^2 + k^2 - 2h - 2k = 0 \Rightarrow$   
 Locus  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

**Hindi.** मानाकि मध्य बिन्दु  $(h, k)$  है  $\Rightarrow hx + ky = h^2 + k^2$

$$\text{जो कि समकोण बनाता है} \Rightarrow x^2 - 2(x + y) \left( \frac{hx + ky}{h^2 + k^2} \right) = 0 \Rightarrow (h^2 + k^2)x^2 - 2(x + y)(hx + ky) = 0$$

कोण  $90^\circ$  होने के अनुसार  $x^2$  का गुणांक +  $y^2$  का गुणांक = 0  
 $h^2 + k^2 - 2h - 2k = 0 \Rightarrow$  बिन्दुपथ  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

## Section (D) : Position of two circle, Orthogonality, Radical axis and radical centre

**खण्ड (D) :** दो वृत्तों की स्थिति, लम्बकोणीयता, मूलाक्ष एवं मूलाक्ष केन्द्र

- D-1.** Number of common tangents of the circles  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 49$  and  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$  is:
- वृत्त  $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 49$  और  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$  की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है—

- (A) 0    (B\*) 1    (C) 2    (D) 3

**Sol.**  $C_1C_2 = 5$ ,  $r_1 = 7$ ,  $r_2 = 2$



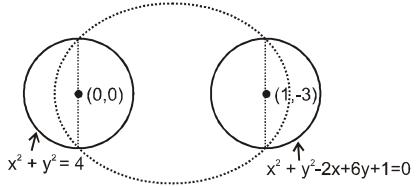
$$C_1C_2 = |r_1 - r_2| \text{ one common tangent}$$

**Hindi**  $C_1C_2 = 5$ ,  $r_1 = 7$ ,  $r_2 = 2$



$$C_1C_2 = |r_1 - r_2| \text{ एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा}$$





Hence common chord with  $x^2 + y^2 - 4 = 0$   
is  $2gx + 2fy + c + y = 0$

This is diameter of circle  $x^2 + y^2 = 4$  hence  $c = -4$ .

Now again common chord with other circle

$$2x(g+1) + 2y(f-3) + (c-1) = 0$$

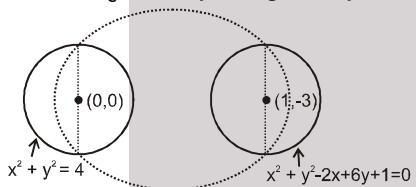
This is diameter of  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$

$$2(g+1) - 6(f-3) + 5 = 0$$

$$2g - 6f + 15 = 0$$

locus  $2x - 3y - 15 = 0$  which is st. line.

**Hindi.** माना की वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$



अतः  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  के साथ उभयनिष्ट जीवा  $2gx + 2fy + c + y = 0$  है।

यह वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  का व्यास है अतः  $c = -4$

अब उभयनिष्ट जीवा दूसरे वृत्त के साथ

$$2x(g+1) + 2y(f-3) + (c-1) = 0$$

यह वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$  का व्यास है

$$2(g+1) - 6(f-3) + 5 = 0$$

$$2g - 6f + 15 = 0$$

बिन्दुपथ  $2x - 3y - 15 = 0$  जो कि सरल रेखा है।

**E-2.** Equation of a circle drawn on the chord  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  of the circle  $x^2 + y^2 = a^2$  as its diameter, is

वृत्त का समीकरण होगा जबकि वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  की जीवा  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  इसका व्यास है।

$$(A) (x^2 + y^2 - a^2) - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$$

$$(B^*) (x^2 + y^2 - a^2) - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$$

$$(C) (x^2 + y^2 - a^2) + 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$$

$$(D) (x^2 + y^2 - a^2) - p(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$$

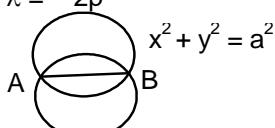
**Sol.** Equation of family of circles is  $(x^2 + y^2 - a^2) + \lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$   
Now centre lies on the line  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$

वृत्तों के निकाय का समीकरण  $(x^2 + y^2 - a^2) + \lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$

अब केन्द्र रेखा पर स्थित है  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$

$$\text{i.e. अर्थात् } -\frac{\lambda}{2} \cos^2 \alpha - \frac{\lambda}{2} \sin^2 \alpha = p$$

$$\Rightarrow \lambda = -2p$$



$$(x^2 + y^2 - a^2) - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$$

- E-3.** Find the equation of the circle which passes through the point (1, 1) & which touches the circle  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$  at the point (2, 3) on it.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1,1) से गुजरता है तथा वृत्त  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$  पर स्पर्श करता है।

(A\*)  $x^2 + y^2 + x - 6y + 3 = 0$

(B)  $x^2 + y^2 + x - 6y - 3 = 0$

(C)  $x^2 + y^2 + x + 6y + 3 = 0$

(D)  $x^2 + y^2 + x - 3y + 3 = 0$

**Sol.** Equation of tangent to circle

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \text{ at } (2,3) \Rightarrow 2x + 3y + 2(x+2) - 3(y+3) - 3 = 0$$

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$$

$$\text{family of circle} \Rightarrow S + \lambda L = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 + \lambda(x-2) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Passes through (1, 1)

$$-3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

Putting in (1)

$$x^2 + y^2 + x - 6y + 3 = 0$$

**Hindi** वृत्त की स्पर्श रेखा का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \text{ at } (2,3) \Rightarrow 2x + 3y + 2(x+2) - 3(y+3) - 3 = 0$$

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$$

$$\text{वृत्त निकाय} \Rightarrow S + \lambda L = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 + \lambda(x-2) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

जो कि (1, 1) से गुजरता है

$$-3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

$$(1) \text{ में रखने पर } x^2 + y^2 + x - 6y + 3 = 0$$

- E-4.** Find the equation of circle touching the line  $2x + 3y + 1 = 0$  at (1, -1) and cutting orthogonally the circle having line segment joining (0, 3) and (-2, -1) as diameter.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि रेखा  $2x + 3y + 1 = 0$  को बिन्दु (1, -1) पर स्पर्श करता हो तथा बिन्दुओं (0, 3) एवं (-2, -1) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को व्यास मानकर बनाये गये वृत्त को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करता हो।

(A\*)  $2x^2 + 2y^2 - 10x - 5y + 1 = 0$

(B)  $2x^2 + 2y^2 - 10x + 5y + 1 = 0$

(C)  $2x^2 + 2y^2 - 10x - 5y - 1 = 0$

(D)  $2x^2 + 2y^2 + 10x - 5y + 1 = 0$

**Sol.** The equation of circle having tangent  $2x + 3y + 1 = 0$  at (1, -1)

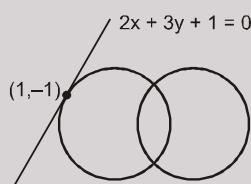
$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + \lambda(2x+3y+1) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x(\lambda-1) + y(3\lambda+2) + (\lambda+2) = 0 \dots \dots \dots (i)$$

equation of circle having end points of diameter (0, -1) and (-2, 3) is

$$x(x+2) + (y+1)(y-3) = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \dots \dots \dots (ii)$$

since (i) & (ii) cut orthogonally



$$\therefore \frac{2(2\lambda-2)}{2} \cdot 1 + \frac{2(3\lambda+2)}{2} (-1) = \lambda + 2 - 3$$

$$\Rightarrow 2\lambda - 2 - 3\lambda - 2 = \lambda - 1 \Rightarrow 2\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -3/2$$

∴ from equation (i), equation of required circle is

$$2x^2 + 2y^2 - 10x - 5y + 1 = 0$$

**Hindi** वृत्त जिसके बिन्दु (1, -1) पर स्पर्श रेखा  $2x + 3y + 1 = 0$  हो, का समीकरण

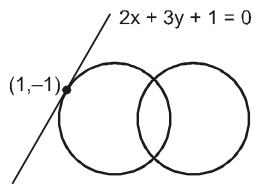
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + \lambda(2x+3y+1) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x(\lambda-1) + y(3\lambda+2) + (\lambda+2) = 0 \dots \dots \dots (i)$$

वृत्त का समीकरण जिसके व्यास के सिरे (0, -1) तथा (-2, 3) हों

$$x(x+2) + (y+1)(y-3) = 0 \quad \text{या} \quad x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$$

$$\dots \dots \dots (ii)$$

चूँकि (i) तथा (ii) लम्बकोणीय काटते हैं।



$$\begin{aligned} \therefore \frac{2(2\lambda - 2)}{2} \cdot 1 + \frac{2(3\lambda + 2)}{2} (-1) &= \lambda + 2 - 3 \\ \Rightarrow 2\lambda - 2 - 3\lambda - 2 &= \lambda - 1 \Rightarrow 2\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -3/2 \\ \therefore \text{समीकरण (i) से अभीष्ट वृत्त का समीकरण } 2x^2 + 2y^2 - 10x - 5y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

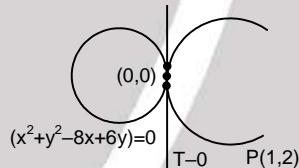
- E-5.** Equation of the circle which passes through the point  $(-1, 2)$  & touches the circle  $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$  at origin, is -

वृत्त का समीकरण जो बिन्दु  $(-1, 2)$  से गुजरता है तथा वृत्त  $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$  को मूल बिन्दु पर स्पर्श करता है

- (A)  $x^2 + y^2 - 2x - \frac{3}{2}y = 0$       (B)  $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$   
 (C)  $x^2 + y^2 + 2x + \frac{3}{2}y = 0$       (D\*)  $x^2 + y^2 + 2x - \frac{3}{2}y = 0$

**Sol.** Equations of tangent is :  $4x - 3y = 0$   
 equation of the family of the circle is  
 $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + \lambda (4x - 3y) = 0$

$$\text{which passes through P } (-1, 2) \Rightarrow 1 + 4\lambda(-4 - 6) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$



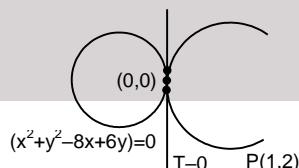
$$\Rightarrow \text{equation of circle is } x^2 + y^2 + 2x - \frac{3}{2}y = 0$$

**Hindi** स्पर्श रेखा का समीकरण :  $4x - 3y = 0$

वृत्तों के निकाय का समीकरण

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + \lambda (4x - 3y) = 0$$

$$\text{वृत्त का समीकरण P } (-1, 2) \Rightarrow 1 + 4\lambda(-4 - 6) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ है।}$$



$$\Rightarrow \text{वृत्त का समीकरण } x^2 + y^2 + 2x - \frac{3}{2}y = 0 \text{ है।}$$

- E-6.** Two circles are drawn through the point  $(a, 5a)$  and  $(4a, a)$  to touch the axis of 'y'. They intersect at an angle of  $\theta$  then  $\tan\theta$  is -

$(a, 5a)$  और  $(4a, a)$  बिन्दुओं से गुजरने वाले दो वृत्त, 'y' अक्ष को स्पर्श करते हैं तथा वे  $\theta$  कोण पर प्रतिच्छेद करते हैं तब

$$\tan\theta \text{ बराबर है } -$$

- (A\*)  $\frac{40}{9}$       (B)  $\frac{9}{40}$       (C)  $\frac{1}{9}$       (D)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**Sol.** Family of circle's passes through two fixed points is given by:  
 दो स्थिर बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों का निकाय है -

$$(x - a)(x - 4a) + (y - 5a)(y - a) + \lambda L = 0$$

$$\therefore 4x + 3y = 19a$$

$$x^2 + y^2 - 5ax - 6ay + 4a^2 + 5a^2 + \lambda(4x + 13y - 19a) = 0$$

touches y-axis  $f^2 = 0$  & now proceed

y-अक्ष को स्पर्श करता है  $f^2 = 0$  तथा अब

### PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN )

#### 1. Column - I

- (A) Number of values of  $a$  for which the common chord of the circles  $x^2 + y^2 = 8$  and  $(x - a)^2 + y^2 = 8$  subtends a right angle at the origin is
- (B) The number of circles touching all the three lines  $3x + 7y = 2$ ,  $21x + 49y = 5$  and  $9x + 21y = 0$  are
- (C) The length of common chord of circles  $x^2 + y^2 - x - 11y + 18 = 0$  and  $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 14 = 0$  is
- (D) Number of common tangents of the circles  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  and  $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$  is

**Ans.** (A)  $\rightarrow$  (q), (B)  $\rightarrow$  (p), (C)  $\rightarrow$  (r), (D)  $\rightarrow$  (s)

#### स्तम्भ - I

- (A)  $a$  के उन मानों की संख्या जिनके लिए वृत्तों  $x^2 + y^2 = 8$  तथा  $(x - a)^2 + y^2 = 8$  की उभयनिष्ठ जीवा मूल बिन्दु पर समकोण अन्तरित करती है –
- (B) सभी तीन रेखाओं  $3x + 7y = 2$ ,  $21x + 49y = 5$  तथा  $9x + 21y = 0$  को स्पर्श करने वाले वृत्तों की संख्या है –
- (C) वृत्तों  $x^2 + y^2 - x - 11y + 18 = 0$  और  $x^2 + y^2 - 9x - 5y + 14 = 0$  की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई
- (D) वृत्तों  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  तथा  $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$  की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या है

**Ans.** (A)  $\rightarrow$  (q), (B)  $\rightarrow$  (p), (C)  $\rightarrow$  (r), (D)  $\rightarrow$  (s)

**Sol.** (A)  $S_1 - S_2 = 0$  is the required common chord i.e.  $2x = a$

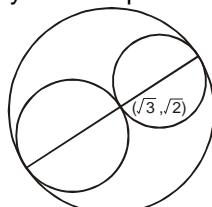
$$\text{Make homogeneous, we get } x^2 + y^2 - 8.4 \frac{x^2}{a^2} = 0$$

As pair of lines subtending angle of  $90^\circ$  at origin

$\therefore$  coefficient of  $x^2$  + coefficient of  $y^2 = 0$

$$\therefore a = \pm 4$$

- (B) Three lines are parallel so not any circle is possible



(C) Equation of common chord is  $4x - 3y + 2 = 0$ .

End points of common chord are (1,2) & (4,6)

Length of common chord is 5

(D)  $C_1(1, 0), r_1 = 1$  and  $C_2(-3, 3), r_2 = 4$   
distance between centres  $C_1$  and  $C_2 = d = 5$   
 $d = r_1 + r_2 = 5 \Rightarrow 3$  common tangents

Hindi (A) अभीष्ट उभयनिष्ठ जीवा  $S_1 - S_2 = 0$  है अर्थात्  $2x = a$

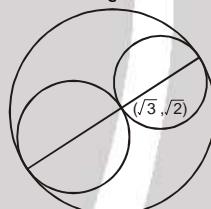
$$\text{समघात बनाने पर } x^2 + y^2 - 8.4 \frac{x^2}{a^2} = 0$$

चूंकि रेखा युग्म मूल बिन्दु पर समकोण अन्तरित करता है।

$$\therefore x^2 \text{ का गुणांक} + y^2 \text{ का गुणांक} = 0$$

$$\therefore a = \pm 4$$

(B) तीनों रेखाएँ समान्तर हैं अतः कोई भी वृत्त विद्यमान नहीं होगा



(C) उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण  $4x - 3y + 2 = 0$ .

उभयनिष्ठ जीवा के सिरे (1,2) & (4,6)

उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई Length of common chord is 5

(D)  $C_1(1, 0), r_1 = 1$  तथा  $C_2(-3, 3), r_2 = 4$

केन्द्रों  $C_1$  तथा  $C_2$  के मध्य दूरी  $= d = 5$

$$d = r_1 + r_2 = 5 \Rightarrow 3$$
 उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ

## 2. Column – I

(A) If director circle of two given circles  $C_1$  and  $C_2$  of equal radii touches each other, then ratio of length of internal common tangent of  $C_1$  and  $C_2$  to their radii equals to

(B) Let two circles having radii  $r_1$  and  $r_2$  are orthogonal to each

## Column – II

(p) 13

other. If length of their common chord is  $k$  times the square root of harmonic mean between squares of their radii, then  $k^4$  equals to

(q) 7

(C) The axes are translated so that the new equation of the circle  $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$  has no first degree terms and the new equation  $x^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4}$ , then the value of  $\lambda$  is

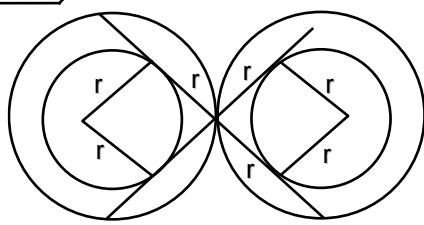
(r) 4

(D) The number of integral points which lie on or inside the circle  $x^2 + y^2 = 4$  is

(s) 2

Ans. (A)  $\rightarrow$  (s), (B)  $\rightarrow$  (r), (C)  $\rightarrow$  (q), (D)  $\rightarrow$  (p)

Sol. (A) Length of internal common tangent equals to 2r



(B)  $\frac{1}{2} r_1 r_2 = \frac{1}{2} \times \left( \frac{\ell}{2} \right) \times \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$  {where  $\ell$  is length of common chord}

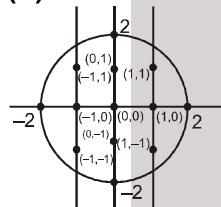
$$\Rightarrow \ell = \sqrt{2} \sqrt{\frac{2r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}} \Rightarrow k = \sqrt{2} \Rightarrow k^2 = 2$$

(C)  $x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow \left( x - \frac{5}{2} \right)^2 + (y+1)^2 - 5 - \frac{25}{4} - 1 = 0$

$$\Rightarrow \left( x - \frac{5}{2} \right)^2 + (y+1)^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow \text{So the axes are shifted to } \left( \frac{5}{2}, -1 \right)$$

New equation of circle must be  $x^2 + y^2 = \frac{49}{4}$

(D)



Hindi स्तम्भ - I

स्तम्भ - II

(A) यदि दो दिए गए बराबर त्रिज्या के वृत्तों के नियामक वृत्त एक दुसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं। तब  $C_1$  और  $C_2$  की आन्तरिक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लम्बाई का उनकी त्रिज्याओं से अनुपात बराबर है।

(p) 13

(B) माना दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ  $r_1$  और  $r_2$  एक दुसरे के लाभ्यिक हैं।

यदि उनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई उनकी त्रिज्याओं के वर्गों के मध्य हरात्मक माध्य के वर्गमूल का  $k$  गुना है तब  $k^4$  बराबर है।

(q) 7

(C) अक्षों को इस प्रकार परिवर्तित किया जाता है कि वृत्त

(r) 4

$x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0$  की नई समीकरण में एक घात का

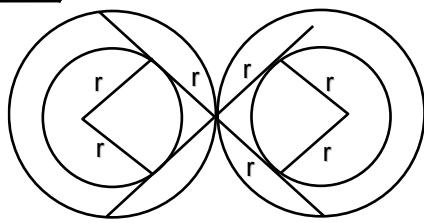
कोई पद नहीं होता है तब नया समीकरण  $x^2 + y^2 = \frac{\lambda}{4}$  से दी जाती है, तो  $\lambda$  का मान ज्ञात कीजिए।

(D) ऐसे पूर्णांक बिन्दुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  के ऊपर या अन्दर स्थित हैं।

(s) 2

Ans. (A)  $\rightarrow$  (s), (B)  $\rightarrow$  (r), (C)  $\rightarrow$  (q), (D)  $\rightarrow$  (p)

Sol. (A) Length of internal common tangent equals to 2r



$$(B) \frac{1}{2} r_1 r_2 = \frac{1}{2} \times \left( \frac{\ell}{2} \right) \times \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad \text{(where } \ell \text{ is length of common chord)}$$

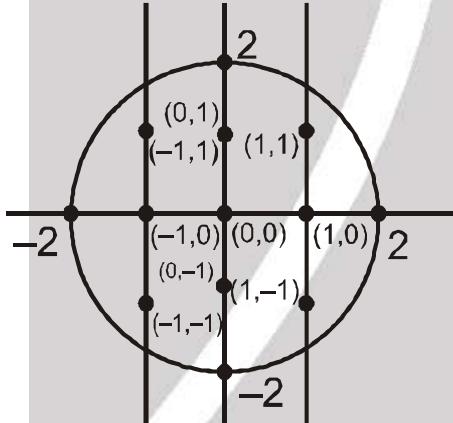
$$\Rightarrow \ell = \sqrt{2} \sqrt{\frac{2r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2}} \Rightarrow k = \sqrt{2} \Rightarrow k^2 = 2$$

$$(C) x^2 + y^2 - 5x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow \left( x - \frac{5}{2} \right)^2 + (y+1)^2 - 5 - \frac{25}{4} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left( x - \frac{5}{2} \right)^2 + (y+1)^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow \text{अक्षों को } \left( \frac{5}{2}, -1 \right) \text{ पर प्रतिस्थापित करने पर}$$

वृत्त की नयी समीकरण  $x^2 + y^2 = \frac{49}{4}$  है।

(D)



## Exercise-2

### PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

**भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)**

#### Single choice type

एकल विकल्पी प्रकार

1. If  $\left( a, \frac{1}{a} \right), \left( b, \frac{1}{b} \right), \left( c, \frac{1}{c} \right) \& \left( d, \frac{1}{d} \right)$  are four distinct points on a circle of radius 4 units, then abcd is

equal to:

(A) 4

(B) 16

(C\*) 1

(D) 2

यदि 4 इकाई त्रिज्या के वृत्त पर 4 भिन्न बिन्दु  $\left( a, \frac{1}{a} \right), \left( b, \frac{1}{b} \right), \left( c, \frac{1}{c} \right)$  और  $\left( d, \frac{1}{d} \right)$  और हो, तो abcd बराबर है :

(A) 4

(B) 16

(C) 1

(D) 2

**Sol.** Point  $\left(t, \frac{1}{t}\right)$  lies on  $x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = 16 \Rightarrow t^4 - 16t^2 + 1 = 0 \dots\dots\dots\text{(i)}$

If roots are  $t_1, t_2, t_3, t_4$  then

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1 \dots\dots\dots\text{(ii)}$$

**Hindi.** बिन्दु  $\left(t, \frac{1}{t}\right)$  वृत्त  $x^2 + y^2 = 16$  पर स्थित होगा  $\Rightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} = 16 \Rightarrow t^4 - 16t^2 + 1 = 0 \dots\dots\dots\text{(i)}$

यदि  $t_1, t_2, t_3, t_4$  मूल हो, तो

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1 \dots\dots\dots\text{(ii)}$$

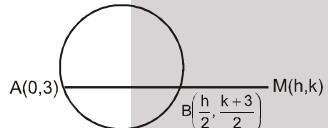
2. From the point A (0, 3) on the circle  $x^2 + 4x + (y - 3)^2 = 0$  a chord AB is drawn & extended to a point M such that  $AM = 2AB$ . The equation of the locus of M is :

वृत्त  $x^2 + 4x + (y - 3)^2 = 0$  पर बिन्दु A (0,3) से एक जीवा AB खींची जाती है तथा इसे बिन्दु M तक इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि  $AM = 2AB$  हो, तो M के बिन्दुपथ का समीकरण है :

- (A)  $x^2 + 8x + y^2 = 0$   
(C)  $(x - 3)^2 + 8x + y^2 = 0$

- (B\*)  $x^2 + 8x + (y - 3)^2 = 0$   
(D)  $x^2 + 8x + 8y^2 = 0$

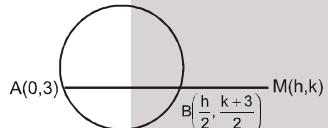
**Sol.**



$$\text{B lies on circle } \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{k+3}{2} - 3\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{h^2}{4} + 2h + \frac{(k-3)^2}{4} = 0$$

$$\text{Hence locus of } (h, k) \quad x^2 + 8x + (y - 3)^2 = 0.$$

**Sol.**



$$\text{B वृत्त पर स्थित है } \left(\frac{h}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{k+3}{2} - 3\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{h^2}{4} + 2h + \frac{(k-3)^2}{4} = 0$$

$$\text{अतः } (h, k) \text{ का बिन्दुपथ } x^2 + 8x + (y - 3)^2 = 0$$

3. If tangent at (1, 2) to the circle  $c_1: x^2 + y^2 = 5$  intersects the circle  $c_2: x^2 + y^2 = 9$  at A & B and tangents at A & B to the second circle meet at point C, then the co-ordinates of C is

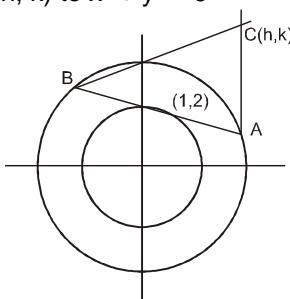
यदि बिन्दु (1,2) पर वृत्त  $c_1: x^2 + y^2 = 5$  की स्पर्श रेखा, वृत्त  $c_2: x^2 + y^2 = 9$  को बिन्दु A और B पर काटती है तथा द्वितीय वृत्त के बिन्दु A और B पर स्पर्श रेखाएँ बिन्दु C पर मिलती हो, तो C के निर्देशांक हैं –

- (A) (4, 5)      (B)  $\left(\frac{9}{15}, \frac{18}{5}\right)$       (C) (4, -5)      (D\*)  $\left(\frac{9}{5}, \frac{18}{5}\right)$

**Sol.** Tangent at (1, 2) to the circle  $x^2 + y^2 = 5$

$$x + 2y - 5 = 0$$

chord of contact from C(h, k) to  $x^2 + y^2 = 9$



$$hx + ky - 9 = 0$$

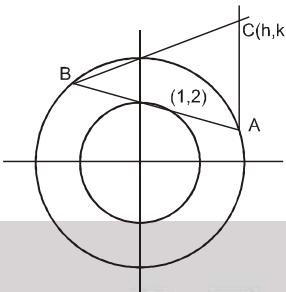
compare both equations  $\frac{h}{1} = \frac{k}{2} = \frac{9}{5}$

$$(h, k) = \left( \frac{9}{5}, \frac{18}{5} \right)$$

**Hindi.** वृत्त  $x^2 + y^2 = 5$  के बिन्दु  $(1, 2)$  पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$x + 2y - 5 = 0$$

वृत्त  $x^2 + y^2 = 9$  के लिए  $C(h, k)$  से स्पर्श जीवा



$$hx + ky - 9 = 0$$

दोनों की तुलना करने पर  $\frac{h}{1} = \frac{k}{2} = \frac{9}{5}$

$$(h, k) = \left( \frac{9}{5}, \frac{18}{5} \right)$$

4. A circle passes through point  $\left( 3, \sqrt{\frac{7}{2}} \right)$  touches the line pair  $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$ . Centre of circle lies inside the circle  $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 15 = 0$ . Co-ordinate of centre of circle is

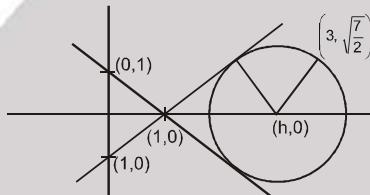
एक वृत्त बिन्दु  $\left( 3, \sqrt{\frac{7}{2}} \right)$  से गुजरता है तथा रेखा युग्म  $x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$  को स्पर्श करता है। वृत्त का केन्द्र

$x^2 + y^2 - 8x + 10y + 15 = 0$  के अन्दर स्थित हो, तो वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक हैं –

- (A\*)  $(4, 0)$  (B)  $(5, 0)$  (C)  $(6, 0)$  (D)  $(0, 4)$

**Sol.**  $(x^2 - 2x + 1) - y^2 = 0 \Rightarrow (x + y - 1) = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

$$\left| \frac{h-0-1}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{(h-3)^2 + \frac{7}{2}}$$



$$h^2 + 1 - 2h = 2 \left( h^2 + 9 - 6h + \frac{7}{2} \right) \Rightarrow h^2 - 10h + 24 = 0 \Rightarrow h = 6, 4$$

But centre lies inside the circle  $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 15 = 0$

Hence required point  $(4, 0)$ .

5. The length of the tangents from any point on the circle  $15x^2 + 15y^2 - 48x + 64y = 0$  to the two circles  $5x^2 + 5y^2 - 24x + 32y + 75 = 0$  and  $5x^2 + 5y^2 - 48x + 64y + 300 = 0$  are in the ratio

- (A\*)  $1 : 2$  (B)  $2 : 3$  (C)  $3 : 4$  (D)  $2 : 1$

वृत्त  $15x^2 + 15y^2 - 48x + 64y = 0$  के किसी बिन्दु से दो वृत्त  $5x^2 + 5y^2 - 24x + 32y + 75 = 0$  और  $5x^2 + 5y^2 - 48x + 64y + 300 = 0$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयों का अनुपात हैं

- (A)  $1 : 2$  (B)  $2 : 3$  (C)  $3 : 4$  (D)  $2 : 1$

**Sol.** Let any point  $P(x_1, y_1)$  to the circle  $x^2 + y^2 - \frac{16x}{5} + \frac{64y}{15} = 0 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - \frac{16x}{5}x_1 + \frac{64y}{15}y_1 = 0$

Length of tangent from  $P(x_1, y_1)$  to the circle are in ration

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} &= \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - \frac{24}{5}x_1 + \frac{32}{5}y_1 + 15}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - \frac{48}{5}x_1 + \frac{64}{5}y_1 + 60}} = \sqrt{\frac{\frac{16}{5}x_1 - \frac{64}{15}y_1 - \frac{24}{5}x_1 + \frac{32}{5}y_1 + 15}{\frac{16}{5}x_1 - \frac{64}{15}y_1 - \frac{48}{5}x_1 + \frac{64}{5}y_1 + 60}} \\ &= \sqrt{\frac{-24x_1 + 32y_1 + 225}{-96x_1 + 128y_1 + 900}} = \sqrt{\frac{-24x_1 + 32y_1 + 225}{4(-24x_1 + 32y_1 + 225)}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Hindi.** Hindi. अतः किसी बिन्दु  $P(x_1, y_1)$  पर  $x^2 + y^2 - \frac{16x}{5} + \frac{64y}{15} = 0$  पर स्थित है

$P(x_1, y_1)$  से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाईयों का अनुपात

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}} &= \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - \frac{24}{5}x_1 + \frac{32}{5}y_1 + 15}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - \frac{48}{5}x_1 + \frac{64}{5}y_1 + 60}} = \sqrt{\frac{\frac{16}{5}x_1 - \frac{64}{15}y_1 - \frac{24}{5}x_1 + \frac{32}{5}y_1 + 15}{\frac{16}{5}x_1 - \frac{64}{15}y_1 - \frac{48}{5}x_1 + \frac{64}{5}y_1 + 60}} \\ &= \sqrt{\frac{-24x_1 + 32y_1 + 225}{-96x_1 + 128y_1 + 900}} = \sqrt{\frac{-24x_1 + 32y_1 + 225}{4(-24x_1 + 32y_1 + 225)}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

6. The distance between the chords of contact of tangents to the circle;  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  from the origin & the point  $(g, f)$  is:

मूलबिन्दु और बिन्दु  $(g, f)$  से वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  पर खींचे गए स्पर्शी युग्म की स्पर्शी जीवाओं के बीच की दूरी है –

- (A)  $\sqrt{g^2 + f^2}$       (B)  $\frac{\sqrt{g^2 + f^2 - c}}{2}$       (C\*)  $\frac{g^2 + f^2 - c}{2\sqrt{g^2 + f^2}}$       (D)  $\frac{\sqrt{g^2 + f^2 + c}}{2\sqrt{g^2 + f^2}}$

**Sol.** Equation of chords of contact from  $(0, 0)$  &  $(g, f)$

$$gx + fy + c = 0 \Rightarrow gx + fy + g(x + g) + f(y + f) + c = 0 \Rightarrow gx + fy + \frac{(g^2 + f^2 + c)}{2} = 0$$

$$\text{Distance between these parallel lines} = \left| \frac{g^2 + f^2 - c}{2\sqrt{g^2 + f^2}} \right|$$

**Hindi.**  $(0, 0)$  तथा  $(g, f)$  से स्पर्शी जीवा का समीकरण

$$gx + fy + c = 0 \Rightarrow gx + fy + g(x + g) + f(y + f) + c = 0 \Rightarrow gx + fy + \frac{(g^2 + f^2 + c)}{2} = 0$$

$$\text{समान्तर रेखाओं के मध्य की दूरी} = \left| \frac{g^2 + f^2 - c}{2\sqrt{g^2 + f^2}} \right|$$

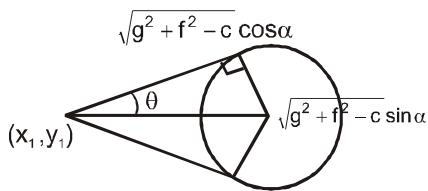
7. If from any point  $P$  on the circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ , tangents are drawn to the circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c \sin^2\alpha + (g^2 + f^2) \cos^2\alpha = 0$  then the angle between the tangents is:

- (A)  $\alpha$       (B\*)  $2\alpha$       (C)  $\frac{\alpha}{2}$       (D)  $\frac{\alpha}{3}$

यदि वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  पर स्थित किसी बिन्दु  $P$  से वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c \sin^2\alpha + (g^2 + f^2) \cos^2\alpha = 0$  पर स्पर्श रेखाएँ खींची जाती हो, तो स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण है –

- (A)  $\alpha$       (B)  $2\alpha$       (C)  $\frac{\alpha}{2}$       (D)  $\frac{\alpha}{3}$

**Sol.**  $\tan\theta = \tan 2\alpha \Rightarrow \theta = 2\alpha$



angle कोण =  $2\alpha$

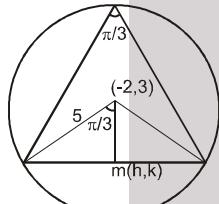
8. The locus of the mid points of the chords of the circle  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$  which subtend an angle of  $\frac{\pi}{3}$  radians at its circumference is:

वृत्त  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$  की जीवाओं जो इसकी परिधि पर  $\frac{\pi}{3}$  रेडियन का कोण बनाती हो, के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ है—

(A)  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 6.25$   
 (C)  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 18.75$

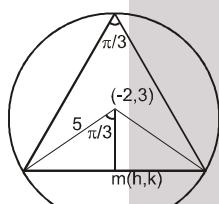
(B\*)  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 6.25$   
 (D)  $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 18.75$

Sol.  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{(h+2)^2 + (k-3)^2}}{5}$



Locus  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 6.25$

Hindi.  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{(h+2)^2 + (k-3)^2}}{5}$



बिन्दुपथ  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 6.25$

9. If the two circles,  $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y = 0$  &  $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y = 0$  touch each other then :

(A)  $f_1 g_1 = f_2 g_2$       (B\*)  $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$       (C)  $f_1 f_2 = g_1 g_2$       (D)  $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$

यदि दो वृत्त  $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y = 0$  एवं  $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y = 0$  एक दूसरे को स्पर्श करते हैं, तो :

(A)  $f_1 g_1 = f_2 g_2$       (B)  $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$       (C)  $f_1 f_2 = g_1 g_2$       (D)  $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$

- Sol. If two circles touch each other, then यदि दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं तब

$C_1 C_2 = r_1 + r_2$

$\sqrt{(-g_1 + g_2)^2 + (-f_1 + f_2)^2} = \sqrt{g_1^2 + f_1^2} + \sqrt{g_2^2 + f_2^2}$  squaring both sides दोनों तरफ वर्ग करने पर

$-2g_1g_2 - 2f_1f_2 = 2\sqrt{(g_1^2 + f_1^2)(g_2^2 + f_2^2)} \Rightarrow (g_1 f_2)^2 + (g_2 f_1)^2 - 2g_1g_2f_1f_2 = 0 \Rightarrow \frac{g_1}{g_2} = \frac{f_1}{f_2}$

10. A circle touches a straight line  $\ell x + my + n = 0$  & cuts the circle  $x^2 + y^2 = 9$  orthogonally. The locus of centres of such circles is:

(A\*)  $(\ell x + my + n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 - 9)$       (B)  $(\ell x + my - n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 - 9)$   
 (C)  $(\ell x + my + n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 + 9)$       (D)  $(\ell x + my - n)^2 = (\ell^2 + m^2)(x^2 + y^2 - 9)$

एक वृत्त सरल रेखा  $\ell x + my + n = 0$  को स्पर्श करता है तथा वृत्त  $x^2 + y^2 = 9$  को लम्बकोणीय काटता हो, तो इस प्रकार के वृत्तों के केन्द्र का बिन्दुपथ है –

- (A\*)  $(\ell x + my + n)^2 = (\ell^2 + m^2) (x^2 + y^2 - 9)$       (B)  $(\ell x + my - n)^2 = (\ell^2 + m^2) (x^2 + y^2 - 9)$   
 (C)  $(\ell x + my + n)^2 = (\ell^2 + m^2) (x^2 + y^2 + 9)$       (D)  $(\ell x + my - n)^2 = (\ell^2 + m^2) (x^2 + y^2 - 9)$

**Sol.** Let required equation of circle is  $x^2 + y^2 + 2gx + 2gy + c = 0$   
 it cuts the circle  $x^2 + y^2 - 9 = 0$  orthogonally

$$\therefore 2g(0) + 2f(0) = c - 9 \Rightarrow c = 9$$

It also touches straight line  $\ell x + my + n = 0$

$$\therefore \left| \frac{\ell(-g) + m(-f) + n}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \right| = \sqrt{g^2 + f^2 - 9}$$

Locus of centre  $(-g, -f)$  is  $(\ell x + my + n)^2 = (x^2 + y^2 - 9)(\ell^2 + m^2)$

**Hindi.** माना वृत्त का अभीष्ट समीकरण  $x^2 + y^2 + 2gx + 2gy + c = 0$  है।

यह वृत्त  $x^2 + y^2 - 9 = 0$  को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करता है।

$$\therefore 2g(0) + 2f(0) = c - 9 \Rightarrow c = 9$$

यह सरल रेखा  $\ell x + my + n = 0$  को भी स्पर्श करता है।

$$\therefore \left| \frac{\ell(-g) + m(-f) + n}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \right| = \sqrt{g^2 + f^2 - 9}$$

केन्द्र  $(-g, -f)$  का बिन्दुपथ  $(\ell x + my + n)^2 = (x^2 + y^2 - 9)(\ell^2 + m^2)$  है।

**11.** The locus of the point at which two given unequal circles subtend equal angles is:

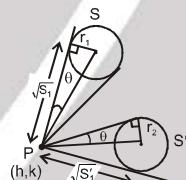
- (A) a straight line      (B\*) a circle      (C) a parabola      (D) an ellipse

उस बिन्दु का बिन्दुपथ जिस पर दो दिये गए असमान वृत्त, समान कोण अन्तरित करते हैं, है—

- (A) एक सरल रेखा      (B\*) एक वृत्त      (C) एक परवलय      (D) दीर्घवृत्त

**Sol.** Let two circles are  $S = 0$  and  $S' = 0$   
 having radius  $r_1$  and  $r_2$  respectively.

$$\Rightarrow \frac{r_1}{\sqrt{S_1}} = \frac{r_2}{\sqrt{S'_1}} \Rightarrow S'_1 r_1^2 = r_2^2 S_1$$



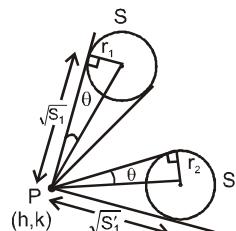
$$\Rightarrow S_1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 S'_1 = 0 \therefore \text{Locus of } P(h, k)$$

$$S - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 S' = 0 \text{ which represents the equation of a circle.}$$

**Hindi.** माना दो वृत्त  $S = 0$  तथा  $S' = 0$

जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः  $r_1$  तथा  $r_2$  हैं।

$$\Rightarrow \frac{r_1}{\sqrt{S_1}} = \frac{r_2}{\sqrt{S'_1}} \Rightarrow S'_1 r_1^2 = r_2^2 S_1$$



$$\Rightarrow S_1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \quad S'_1 = 0 \quad \therefore \text{बिन्दु } P(h,k) \text{ का बिन्दुपथ}$$

$$S - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \quad S'_1 = 0 \quad \therefore \text{बिन्दु } P(h,k) \text{ का बिन्दुपथ}$$

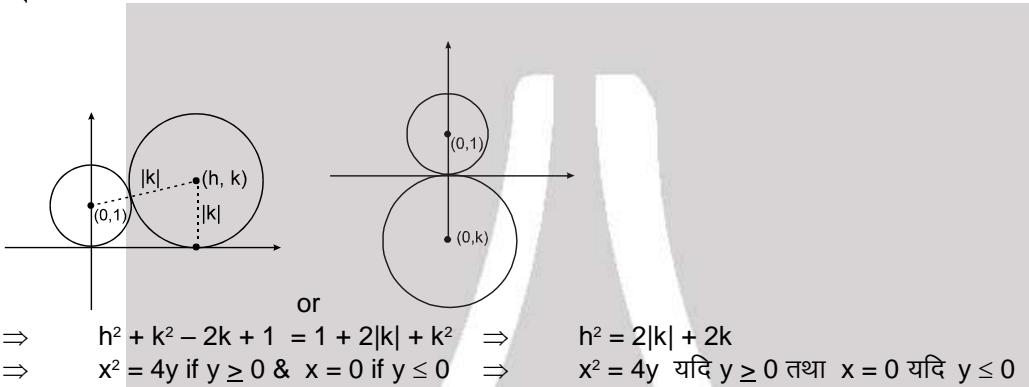
- 12.** A circle is given by  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ . Another circle C touches it externally and also the x-axis, then the locus of its centre is

एक वृत्त का समीकरण  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$  है। एक अन्य वृत्त C इसको बाह्य स्पर्श करता हो तथा x-अक्ष को भी स्पर्श करता हो, तो इसके केन्द्र का बिन्दुपथ हैं –

$$(A) \{(x, y) : x^2 = 4y\} \cup \{(x, y) : y \leq 0\} \quad (B) \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 = 4\} \cup \{(x, y) : y \leq 0\}$$

$$(C) \{(x, y) : x^2 = y\} \cup \{(0, y) : y \leq 0\} \quad (D^*) \{(x, y) : x^2 = 4y\} \cup \{(0, y) : y \leq 0\}$$

**Sol.**  $\sqrt{(h-0)^2 + (k-1)^2} = 1 + |k|$



- 13.** The locus of the centre of a circle touching the circle  $x^2 + y^2 - 4y - 2x = 4$  internally and tangent on which from (1, 2) is making a  $60^\circ$  angle with each other.

वृत्त  $x^2 + y^2 - 4y - 2x = 4$  को आन्तरिक स्पर्श करने वाले वृत्त तथा बिन्दु (1, 2) से वृत्त पर खीरीं गई स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण  $60^\circ$  है, तो वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ है

$$(A) (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

$$(B^*) (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$(C) (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$(D) (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

**Sol.** Let centre A(h, k) and r and R be radius of required and given circle

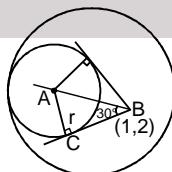
माना केन्द्र A(h, k) तथा अभीष्ट और दिए गए वृत्त की त्रिज्याएँ r तथा R हैं।

**Sol.** Let centre A(h, k) and r and R be radius of required and given circle

माना केन्द्र A(h, k) तथा अभीष्ट और दिए गए वृत्त की त्रिज्याएँ r तथा R हैं।

$$\sqrt{(h-1)^2 + (k-2)^2} = R - r \quad \dots\dots\dots(i)$$

Now अब  $\tan 30^\circ = \frac{r}{AB}$



$$r = (R - r) \frac{1}{2} \quad \therefore r = \frac{R}{3} \quad \dots\dots\dots(ii)$$

by (i) & (ii) से

$$\sqrt{(h-1)^2 + (k-2)^2} = R - \frac{R}{3} = \frac{2R}{3} \quad \& \quad R = 3 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

14. **STATEMENT-1 :** If three circles which are such that their centres are non-collinear, then exactly one circle exists which cuts the three circles orthogonally.

**STATEMENT-2 :** Radical axis for two intersecting circles is the common chord.

(A) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is correct explanation for STATEMENT-1

(B) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is true and STATEMENT-2 is not correct explanation for STATEMENT-1

(C) STATEMENT-1 is true, STATEMENT-2 is false

(D\*) STATEMENT-1 is false, STATEMENT-2 is true

**कथन-1 :** यदि तीन वृत्त, इस प्रकार है कि उनके केन्द्र असंरेखीय हो, तो तीनों वृत्तों को लम्बकोणीय प्रतिच्छेद करने वाला ठीक एक वृत्त सम्भव है।

**कथन-2 :** दो प्रतिच्छेदित वृत्तों की मूलाक्ष उनकी उभयनिष्ठ जीवा होती है।

(A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।

(D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

**Sol.** Statement-1 : There is exactly one circle whose centre is the radical centre and the radius equal to the length of tangent drawn from the radical centre to any of the given circles.

Statement-2 is True But does not explain Statement-1.

**Hindi** कथन -1 : ठीक एक वृत्त जिसका केन्द्र मूलाक्ष केन्द्र और त्रिज्या मूलाक्ष केन्द्र से किसी भी वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखा की लम्बाई के बराबर होती है, ही होता है।

कथन-2 : सत्य है लेकिन कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

15. **The centre of family of circles cutting the family of**

circles  $x^2 + y^2 + 4x \left( \lambda - \frac{3}{2} \right) + 3y \left( \lambda - \frac{4}{3} \right) - 6(\lambda + 2) = 0$  orthogonally, lies on

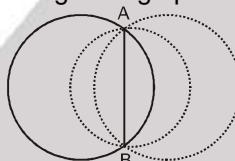
वृत्त निकाय का केन्द्र जो कि वृत्त निकाय  $x^2 + y^2 + 4x \left( \lambda - \frac{3}{2} \right) + 3y \left( \lambda - \frac{4}{3} \right) - 6(\lambda + 2) = 0$  को लम्बकोणीय

काटता है, पर स्थित होगा—

(A)  $x - y - 1 = 0$  (B\*)  $4x + 3y - 6 = 0$  (C)  $4x + 3y + 7 = 0$  (D)  $3x - 4y - 1 = 0$

**Sol.**  $(x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12) + \lambda(4x + 3y - 6) = 0$

This is family of circle passing through points of intersection of circle



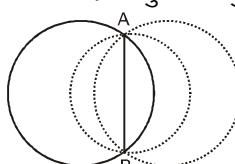
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \text{ and line } 4x + 3y - 6 = 0$$

other family will cut this family at A & B.

Hence locus of centre of circle of other family is this common chord  $4x + 3y - 6 = 0$

**Hindi.**  $(x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12) + \lambda(4x + 3y - 6) = 0$

यह वृत्त निकाय वृत्त के दोनों प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरता है।



$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \text{ और } 4x + 3y - 6 = 0$$

अन्य निकाय इसको A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अतः वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ

यह उभयनिष्ठ जीवा  $4x + 3y - 6 = 0$  है।

16. The circle  $x^2 + y^2 = 4$  cuts the circle  $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$  in A & B. Then the equation of the circle on AB as a diameter is:

(A\*)  $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y - 50 = 0$

(B)  $9(x^2 + y^2) + 8x - 4y + 25 = 0$

(C)  $x^2 + y^2 - 5x + 2y + 72 = 0$

(D)  $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y + 50 = 0$

यदि वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  दूसरे वृत्त  $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$  को बिन्दु A एवं B पर काटता हो, तो AB व्यास वाले वृत्त का समीकरण है—

(A)  $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y - 50 = 0$

(B)  $9(x^2 + y^2) + 8x - 4y + 25 = 0$

(C)  $x^2 + y^2 - 5x + 2y + 72 = 0$

(D)  $13(x^2 + y^2) - 4x - 6y + 50 = 0$

**Sol.** Common chord of given circle

$$2x + 3y - 1 = 0$$

family of circle passing through point of intersection of given circle

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5) + \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)x^2 + (\lambda + 1)y^2 + 2x + 3y - (4\lambda + 5) = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2x}{\lambda + 1} + \frac{3}{\lambda + 1}y - \frac{(4\lambda + 5)}{\lambda + 1} = 0$$

$$\text{centre} \left( -\frac{1}{\lambda + 1}, \frac{-3}{2(\lambda + 1)} \right)$$

This centre lies on AB

$$2\left(-\frac{1}{\lambda + 1}\right) + 3\left(\frac{-3}{2(\lambda + 1)}\right) - 1 = 0 \Rightarrow -4 - 9 - 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda = -15 \Rightarrow \lambda = -15/2$$

$$\left(-\frac{15}{2} + 1\right)x^2 + \left(-\frac{15}{2} + 1\right)y^2 + 2x + 3y - \left(-4 \times \frac{15}{2} + 5\right) = 0 \Rightarrow -\frac{13x^2}{2} - \frac{13y^2}{2} + 2x + 3y + 25 = 0$$

$$\Rightarrow 13(x^2 + y^2) - 4x - 6y - 50 = 0.$$

**Hindi.** दिए गए वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा

$$2x + 3y - 1 = 0$$

दिए गए वृत्तों के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों का निकाय है।

$$(x^2 + y^2 + 2x + 3y - 5) + \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)x^2 + (\lambda + 1)y^2 + 2x + 3y - (4\lambda + 5) = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{2x}{\lambda + 1} + \frac{3}{\lambda + 1}y - \frac{(4\lambda + 5)}{\lambda + 1} = 0$$

$$\text{केन्द्र} \left( -\frac{1}{\lambda + 1}, \frac{-3}{2(\lambda + 1)} \right)$$

यह केन्द्र AB पर स्थित है।

$$2\left(-\frac{1}{\lambda + 1}\right) + 3\left(\frac{-3}{2(\lambda + 1)}\right) - 1 = 0 \Rightarrow -4 - 9 - 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda = -15 \Rightarrow \lambda = -15/2$$

$$\left(-\frac{15}{2} + 1\right)x^2 + \left(-\frac{15}{2} + 1\right)y^2 + 2x + 3y - \left(-4 \times \frac{15}{2} + 5\right) = 0 \Rightarrow -\frac{13x^2}{2} - \frac{13y^2}{2} + 2x + 3y + 25 = 0$$

$$\Rightarrow 13(x^2 + y^2) - 4x - 6y - 50 = 0.$$

## PART-II: NUMERICAL VALUE QUESTIONS

### भाग-II : संख्यात्मक प्रश्न (NUMERICAL VALUE QUESTIONS)

#### INSTRUCTION :

- ❖ The answer to each question is **NUMERICAL VALUE** with two digit integer and decimal upto two digit.
- ❖ If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.

#### निर्देश :

- ❖ इस खण्ड में प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान के रूप में है जिसमें दो पूर्णांक अंक तथा दो अंक दशमलव के बाद में है।

- ❖ यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के दो स्थानों तक ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off) करें।

1. Find maximum number of points having integer coordinates (both x, y integer) which can lie on a circle with centre at  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  is (are)

पूर्णांक निर्देशांक वाले बिन्दुओं की अधिकतम संख्या होगी (दोनों x, y पूर्णांक हैं) जो  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  केन्द्र के वृत्तों पर स्थित हैं:

**Ans. 01.00**

**Sol.** Let equation of circle is  $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = r^2$ ,  $(x_1, y_1)$  &  $(x_2, y_2)$  are integer points on circle

माना वृत्त का समीकरण  $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{3})^2 = r^2$ ,  $(x_1, y_1)$  &  $(x_2, y_2)$  के पूर्णांक बिन्दु वृत्त पर स्थित हैं।

$$(x_1 - \sqrt{2})^2 + (y_1 - \sqrt{3})^2 = (x_2 - \sqrt{2})^2 + (y_2 - \sqrt{3})^2 = r^2$$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2\sqrt{2}) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1 - 2\sqrt{3}) = 0$$

$$(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 2\sqrt{3}(y_2 - y_1) + 2\sqrt{2}(x_2 - x_1)$$

$$A = \sqrt{3}B + \sqrt{2}C$$

इसलिए Therefore  $A = B = C = 0$

$$x_1 = x_2 \text{ & } y_1 = y_2$$

So, no distinct points are possible.

इसलिए कोई विभिन्न बिन्दु संभव नहीं हैं।

2. If equation of smallest circle touching the circles  $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$  and  $x^2 + y^2 - 8x - 18y + 93 = 0$  is  $x^2 + y^2 - 4x - fy + c = 0$  then value of f + c is

यदि वृत्तों  $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$  तथा  $x^2 + y^2 - 8x - 18y + 93 = 0$  को स्पर्श करने वाले सबसे छोटे वृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 - 4x - fy + c = 0$  हो तो f + c का मान होगा –

**Ans. 32.88 or 32.89**

**Sol.** Let r be the radius of new circle  $C_1C_2 = 4\sqrt{5}$ .

$$\text{So } r = 2(\sqrt{5} - 1)$$

Slope of line joining  $C_1$  and  $C_2$  i.e.  $\tan \theta = 2$

$\therefore$  Equation of line joining  $C_1$  and  $C_2$  is

$$\frac{x-0}{\cos \theta} = \frac{y-1}{\sin \theta} = 2 + 2(\sqrt{5} - 1) = 2\sqrt{5}$$

$x = 2$  and  $y = 5$   $\therefore$  Centre (2, 5)

hence equation of circle is  $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = (2(\sqrt{5} - 1))^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 10y + (5 + 8\sqrt{5}) = 0$$

**Hindi.** माना r नये वृत्त की त्रिज्या है  $C_1C_2 = 4\sqrt{5}$ .

$$\text{अतः } r = 2(\sqrt{5} - 1)$$

$C_1$  तथा  $C_2$  को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता अर्थात  $\tan \theta = 2$

$\therefore C_1$  तथा  $C_2$  को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x-0}{\cos \theta} = \frac{y-1}{\sin \theta} = 2 + 2(\sqrt{5} - 1) = 2\sqrt{5}$$

$x = 2$  तथा  $y = 5$   $\therefore$  केन्द्र (2, 5)

अतः वृत्त का समीकरण  $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = (2(\sqrt{5} - 1))^2$  है

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 10y + (5 + 8\sqrt{5}) = 0$$

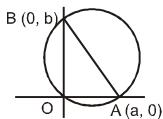


3. A line meets the co-ordinate axes in A and B. A circle is circumscribed about the triangle OAB. If  $d_1$  and  $d_2$  are the distances of the tangent to the circle at the origin O from the points A and B respectively and diameter of the circle is  $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ , then find the value of  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

एक रेखा अक्षों को A तथा B पर मिलती है। त्रिभुज OAB पर परिवृत्त बनाया जाता है। यदि मूल बिन्दु O पर खींची गई स्पर्श रेखा की बिन्दुओं A और B से दूरी क्रमशः  $d_1$  और  $d_2$  हैं तथा वृत्त का व्यास  $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ , हैं तब  $\lambda_1 + \lambda_2$  का मान है।

**Ans. 02.00**

**Sol.**

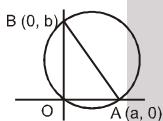


Equation of circum circle of triangle OAB  $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ .

Equation of tangent at origin  $ax + by = 0$ .

$$d_1 = \frac{|a^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ and } d_2 = \frac{|b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d_1 + d_2 = \sqrt{a^2+b^2} = \text{diameter}$$

**Hindi.**



त्रिभुज OAB के परिवृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ .

मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण  $ax + by = 0$ .

$$d_1 = \frac{|a^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ तथा } d_2 = \frac{|b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d_1 + d_2 = \sqrt{a^2+b^2} = \text{व्यास}$$

4. A circle is inscribed (i.e. touches all four sides) into a rhombous ABCD with one angle  $60^\circ$ . The distance from the centre of the circle to the nearest vertex is equal to 1. If P is any point of the circle, then  $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$  is equal to :

एक वृत्त एक समचतुर्भुज ABCD जिसका एक कोण  $60^\circ$  है, में अन्तर्विष्ट है। वृत्त के केन्द्र की समीपवर्ती शीर्ष से दूरी 1 है। यदि वृत्त पर कोई बिन्दु P हो, तो  $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2$  का मान होगा—

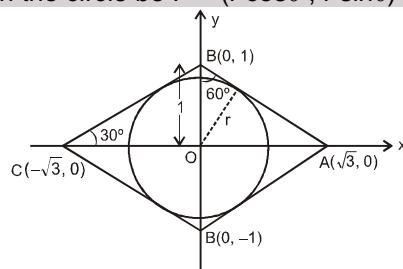
**Ans. 11.00**

**Sol.**  $\because \tan 60^\circ = \frac{OA}{1} = \sqrt{3}$

$$\therefore A(\sqrt{3}, 0) \text{ and } C(-\sqrt{3}, 0)$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{r}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Let coordinates of any point P on the circle be  $P \equiv (r \cos \theta, r \sin \theta)$



$$\therefore PA^2 = (\sqrt{3} - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2$$

$$PB^2 = (r \cos \theta)^2 + (1 - r \sin \theta)^2$$

$$PC^2 = (r \cos \theta + \sqrt{3})^2 + (r \sin \theta)^2$$

$$\text{and } PD^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta + 1)^2$$

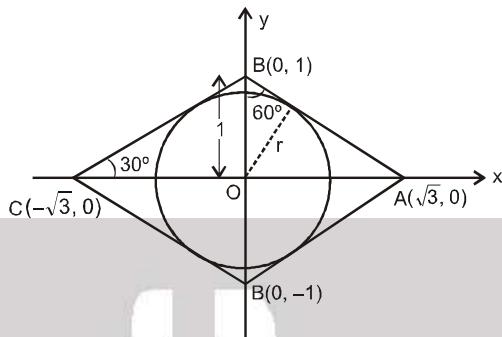
$$\therefore PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4r^2 + 8 = 11 \quad \therefore r = \sqrt{3}/2$$

Hindi.  $\because \tan 60^\circ = \frac{OA}{1} = \sqrt{3}$

$\therefore A(\sqrt{3}, 0)$  and  $C(-\sqrt{3}, 0)$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{r}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

माना कि वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु P के निर्देशांक  $(r \cos \theta, r \sin \theta)$  हैं।



$$\therefore PA^2 = (\sqrt{3} - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2$$

$$PB^2 = (r \cos \theta)^2 + (1 - r \sin \theta)^2$$

$$PC^2 = (r \cos \theta + \sqrt{3})^2 + (r \sin \theta)^2$$

$$\text{तथा } PD^2 = (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta + 1)^2$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4r^2 + 8 = 11 \quad \therefore r = \sqrt{3}/2$$

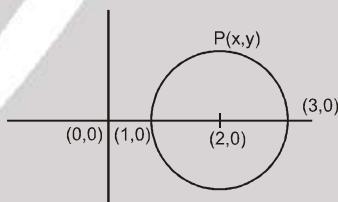
5. Let x & y be the real numbers satisfying the equation  $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ . If the maximum and minimum values of  $x^2 + y^2$  are M & m respectively, then find the numerical value of (M + m).

माना x और y वास्तविक संख्याएँ समीकरण  $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$  को सन्तुष्ट करती हैं। यदि  $x^2 + y^2$  का अधिकतम और न्यूनतम मान क्रमशः M और m हो, तो M + m का संख्यात्मक मान ज्ञात कीजिए।

Ans. 10.00

Sol.  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$

$\sqrt{x^2 + y^2}$  represents distance of p from origin



Hence M =  $3^2 + 0^2$

M =  $1^2 + 0^2$

M - m = 10.

6. Find absolute value of 'c' for which the set,

$\{(x, y) | x^2 + y^2 + 2x \leq 1\} \cap \{(x, y) | 5x - 12y + c \geq 0\}$  contains only one point in common.

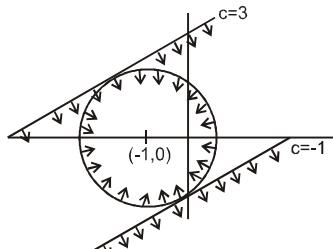
'c' का निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समुच्चय

$\{(x, y) | x^2 + y^2 + 2x \leq 1\} \cap \{(x, y) | 5x - 12y + c \geq 0\}$  में केवल एक उभयनिष्ठ बिन्दु रखता है

Ans. 13.38

**Sol.**  $\left| \frac{-5-0+c}{13} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow c-5 = \pm 13\sqrt{2} \Rightarrow c = 5 \pm 13\sqrt{2}$

but  $c \leq 0$  hence  $c = 5 - 13\sqrt{2}$



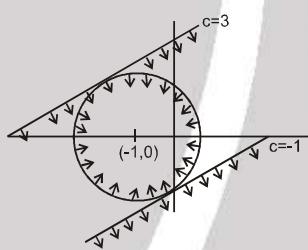
But  $c = 5 - 13\sqrt{2}$  common point is one

$c = 5 + 13\sqrt{2}$  common point is infinite

Hence  $c = 5 - 13\sqrt{2}$  is Answer.

**Hindi.**  $\left| \frac{-5-0+c}{13} \right| = \sqrt{2} \Rightarrow c-5 = \pm 13\sqrt{2} \Rightarrow c = 5 \pm 13\sqrt{2}$

लेकिन  $c \leq 0$  अतः  $c = 5 - 13\sqrt{2}$



परन्तु  $c = 5 - 13\sqrt{2}$  एक उभयनिष्ठ बिन्दु है।

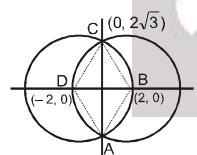
$c = 5 + 13\sqrt{2}$  उभयनिष्ठ बिन्दु अनन्त है।

अतः  $c = 5 - 13\sqrt{2}$  उत्तर

7. A rhombus is inscribed in the region common to the two circles  $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$  and  $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$  with two of its vertices on the line joining the centres of the circles then area of the rhombus is  
दो वृत्तों  $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$  और  $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$  के उभयनिष्ठ क्षेत्र में एक समचतुर्भुज जिसके दो शीर्ष वृत्त के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा पर स्थित है, बनाया जाता है तब समचतुर्भुज का क्षेत्रफल होगा –

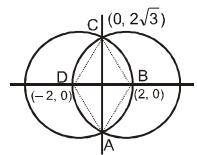
**Ans.** 13.85 or 13.86

**Sol.**



$$\text{Area of } ABCD = 4 \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \right).$$

**Hindi.**



$$\text{ABCD का क्षेत्रफल} = 4 \times \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} \right) = 8\sqrt{3}$$

8. If  $(\alpha, \beta)$  is a point on the circle whose centre is on the x-axis and which touches the line  $x + y = 0$  at  $(2, -2)$ , then find the greatest value of ' $\alpha$ ' is

यदि वृत्त जिसका केन्द्र x-अक्ष पर स्थित हो, पर स्थित एक बिन्दु  $(\alpha, \beta)$  है तथा जो रेखा  $x + y = 0$  को  $(2, -2)$  बिन्दु पर स्पर्श करता हो, तो  $\alpha$  का अधिकतम मान होगा—

**Ans. 06.82 or 06.83**

**Sol.**  $\therefore$  Equation of circle  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + \lambda(x + y) = 0$  .....(i)

$\therefore$  Centre lies on the x-axis

$\therefore \lambda = -4$  put in (i)

$\therefore$  equation of circle is  $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$

$(\alpha, \beta)$  lies on it  $\Rightarrow \beta^2 = -\alpha^2 + 8\alpha - 8 \geq 0$

$\therefore$  greatest value of ' $\alpha$ ' is  $4 + 2\sqrt{2}$

**Hindi.**  $\therefore$  वृत्त का समीकरण  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + \lambda(x + y) = 0$  .....(i)

$\therefore$  केन्द्र x अक्ष पर स्थित है।

$\therefore$  (i) में  $\lambda = -4$  रखने पर

$\therefore$  वृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$  है।

$(\alpha, \beta)$  इस पर स्थित है।  $\Rightarrow \beta^2 = -\alpha^2 + 8\alpha - 8 \geq 0$

$\therefore$   $\alpha$  का अधिकतम मान  $4 + 2\sqrt{2}$  है।

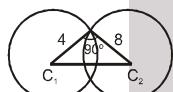
9. Two circles whose radii are equal to 4 and 8 intersect at right angles, then length of their common chord is

दो वृत्त जिनकी त्रिज्याएँ 4 और 8 हो, समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं, तब उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई होगी —

**Ans. 07.15**

**Sol.**  $C_1C_2 = \sqrt{80}$

$$\text{Area क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = \frac{1}{2} \times \sqrt{80} \times \frac{\ell}{2}$$



$$\ell = \frac{64}{\sqrt{80}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

10. A variable circle passes through the point A (a, b) & touches the x-axis and the locus of the other end of the diameter through A is  $(x - a)^2 = \lambda by$ , then find the value of  $\lambda$   
एक चर वृत्त बिन्दु A (a, b) से गुजरता है तथा x-अक्ष को स्पर्श करता है। A से गुजरने वाले व्यास के दूसरे सिरे का बिन्दुपथ  $(x - a)^2 = \lambda by$  हो, तो  $\lambda$  का मान ज्ञात कीजिये।

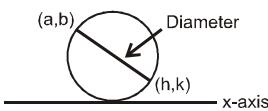
**Ans. 04.00**

**Sol.** Equation of circle whose diameter's end points are (a, b) and (h, k)

$$(x - a)(x - h) + (y - b)(y - k) = 0$$

$$x^2 + y^2 - x(a + h) - y(b + k) + ah + bk = 0$$

it touches x-axis.



$$\text{Hence } g^2 = c \Rightarrow \left(\frac{a+h}{2}\right)^2 = ah + bk \Rightarrow (h-a)^2 = 4bk$$

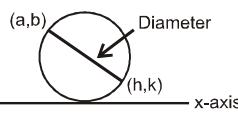
$\therefore$  Locus of (h, k) is  $(x - a)^2 = 4by$ .

**Hindi** उस वृत्त का समीकरण जिसके व्यास के अन्त सिरे (a, b) और (h, k) है।

$$(x - a)(x - h) + (y - b)(y - k) = 0$$

$$x^2 + y^2 - x(a + h) - y(b + k) + ah + bk = 0$$

यह x-अक्ष को स्पर्श करता है।



$$\text{अतः } g^2 = c \Rightarrow \left(\frac{a+h}{2}\right)^2 = ah + bk \Rightarrow (h-a)^2 = 4bk$$

$\therefore (h, k)$  का बिन्दुपथ  $(x - a)^2 = 4by$  है।

11. Let A be the centre of the circle  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ . Suppose that the tangents at the points B (1, 7) & D (4, -2) on the circle meet at the point C. Find the area of the quadrilateral ABCD.

माना वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$  का केंद्र A है। माना वृत्त के बिन्दुओं B (1, 7) तथा D (4, -2) पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ बिन्दु C पर मिलती हों, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

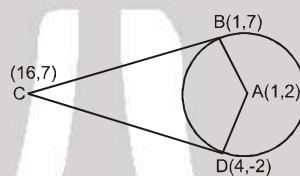
**Ans. 75.00**

**Sol.** Given circle  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

Tangents at B(1, 7) is

$$x + 7y - (x + 1) - 2(y + 7) - 20 = 0$$

$$5y - 35 = 0 \Rightarrow y = 7$$



at D (4, -2)

$$4x - 2y - (x + 4) - 2(y - 2) - 20 = 0$$

$$3x - 4y = 20$$

Hence c(16, 7)

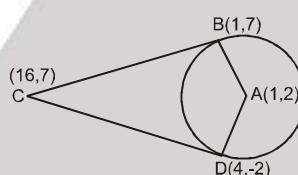
Area of quadrilateral ABCD = AB × BC = 5 × 15 = 75 square units.

**Hindi** दिया गया वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$  है।

बिन्दु B(1, 7) पर स्पर्श रेखा की समीकरण

$$x + 7y - (x + 1) - 2(y + 7) - 20 = 0$$

$$5y - 35 = 0 \Rightarrow y = 7$$



D (4, -2) पर

$$4x - 2y - (x + 4) - 2(y - 2) - 20 = 0$$

$$3x - 4y = 20$$

अतः c(16, 7)

ABCD चतुर्भुज का क्षेत्रफल = AB × BC = 5 × 15 = 75 वर्ग इकाई

12. If the complete set of values of a for which the point (2a, a + 1) is an interior point of the larger segment of the circle  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$  made by the chord whose equation is  $3x - 4y + 5 = 0$  is (p,q) then value of p + q is

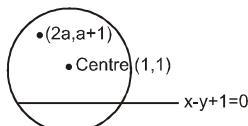
यदि 'a' के सभी मानों का समुच्चय जिसके लिए रेखा  $3x - 4y + 5 = 0$  द्वारा वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$  को विभाजित करने पर बनने वाले बड़े वृत्त खण्ड (Larger segment) में बिन्दु (2a, a + 1) विद्यमान हो, (p,q) है तब p + q का मान होगा –

**Ans. 01.30**

**Sol.** Point (2a, a + 1) lies inside circle  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$

$$4a^2 + (a + 1)^2 - 2(2a) - 2(a + 1) - 8 < 0 \Rightarrow 5a^2 - 4a - 9 < 0$$

$$5a^2 - 9a + 5a - 9 < 0 \Rightarrow a(5a - 9) + 1(5a - 9) < 0$$



$$(5a - 9)(a + 1) < 0 \Rightarrow a \in (-1, 9/5)$$

centre &  $(2a, a + 1)$  lies on same side w.r.t. line  $3x - 4y + 5 = 0$

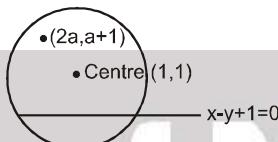
$$6a - 4(a + 1) + 5 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{2}$$

$$\text{Hence } a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{5}\right)$$

**Hindi** बिन्दु  $(2a, a + 1)$  वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$  के अन्दर है

$$4a^2 + (a + 1)^2 - 2(2a) - 2(a + 1) - 8 < 0$$

$$5a^2 - 4a - 9 < 0 \Rightarrow 5a^2 - 9a + 5a - 9 < 0$$



$$a(5a - 9) + 1(5a - 9) < 0 \Rightarrow (5a - 9)(a + 1) < 0 \Rightarrow a \in (-1, 9/5)$$

केन्द्र तथा  $(2a, a + 1)$  रेखा  $3x - 4y + 5 = 0$  के एक ही ओर स्थित होंगे

$$6a - 4(a + 1) + 5 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{2}$$

$$\text{अतः } a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{5}\right)$$

- 13.** The circles  $x^2 + y^2 + 2ax + cy + a = 0$  and  $x^2 + y^2 - 3ax + dy - 1 = 0$  intersect in two distinct points P and Q, then find the number of values of 'a' for which the line  $5x + by - a = 0$  passes through P and Q.

यदि वृत्त  $x^2 + y^2 + 2ax + cy + a = 0$  तथा  $x^2 + y^2 - 3ax + dy - 1 = 0$  दो भिन्न-भिन्न बिन्दुओं P तथा Q पर काटते हों, तो a के मानों की संख्या ज्ञात कीजिए जिसके लिए रेखा  $5x + by - a = 0$  बिन्दु P तथा Q से गुजरती है

**Ans.** **00.00**

**Sol.** Let  $S_1 : x^2 + y^2 + 2ax + cy + a = 0$

$$S_1 : x^2 + y^2 - 3ax + dy - 1 = 0$$

$$\text{common chord } S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 5ax + y(c - d) + (a + 1) = 0$$

given line is  $5x + by - a = 0$

$$\text{compare both } \frac{5a}{5} = \frac{c - d}{b} = \frac{a + 1}{-a} \Rightarrow a = \frac{c - d}{b} = -1 - \frac{1}{a}$$

$$(i) \quad (ii) \quad (iii)$$

From (i) & (iii)  $a^2 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = \omega, \omega^2$  no real a.

**Hindi** माना  $S_1 : x^2 + y^2 + 2ax + cy + a = 0 \Rightarrow S_1 : x^2 + y^2 - 3ax + dy - 1 = 0$

$$\text{उभयनिष्ठ जीवा } S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow 5ax + y(c - d) + (a + 1) = 0$$

$$\text{दी गई रेखा } 5x + by - a = 0$$

$$\text{तुलना करने पर } \frac{5a}{5} = \frac{c - d}{b} = \frac{a + 1}{-a} \Rightarrow a = \frac{c - d}{b} = -1 - \frac{1}{a}$$

$$(i) \quad (ii) \quad (iii)$$

(i) एवं (iii) से  $a^2 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = \omega, \omega^2$  किसी भी मान के लिए a वास्तविक नहीं है।

14. The circumference of the circle  $x^2 + y^2 - 2x + 8y - q = 0$  is bisected by the circle

$$x^2 + y^2 + 4x + 12y + p = 0, \text{ then find } p + q$$

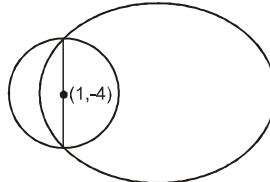
वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x + 8y - q = 0$  की परिधि को वृत्त  $x^2 + y^2 + 4x + 12y + p = 0$  समद्विभाजित करता हो, तो  $p + q$  का मान ज्ञात कीजिए।

**Ans. 10.00**

**Sol.** Common chord of given circle

$$6x + 4y + (p + q) = 0$$

This is diameter of  $x^2 + y^2 - 2x + 8y - q = 0$



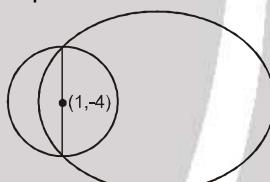
centre  $(1, -4)$

$$6 - 16 + (p + q) = 0 \Rightarrow p + q = 10$$

**Hindi** दिए हुए वृत्त की उभयनिष्ट जीवा

$$6x + 4y + (p + q) = 0$$

यह वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x + 8y - q = 0$  का व्यास है



केन्द्र  $(1, -4)$

$$6 - 16 + (p + q) = 0 \Rightarrow p + q = 10$$

15. A circle touches the line  $y = x$  at a point P such that  $OP = 4\sqrt{2}$  where O is the origin. The circle contains the point  $(-10, 2)$  in its interior and the length of its chord on the line  $x + y = 0$  is  $6\sqrt{2}$ . If the equation of the circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + 3c = 0$ , then value of  $g + f + c$  is

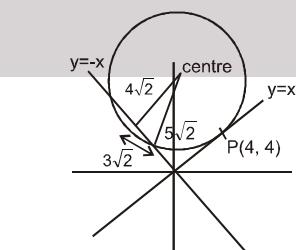
**Ans. 18.66 or 18.67**

एक वृत्त सरल रेखा  $y = x$  को बिन्दु P पर इस प्रकार स्पर्श करता है कि  $OP = 4\sqrt{2}$  जहाँ O मूलबिन्दु है।  $(-10, 2)$  वृत्त के अन्दर कोई बिन्दु है तथा सरल रेखा  $x + y = 0$  पर वृत्त की जीवा की लम्बाई  $6\sqrt{2}$  है। यदि वृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + 3c = 0$  है, तब  $g + f + c$  का मान होगा –

**Sol.** By family of circle equation of circle touching  $y = x$  at p(4, 4)

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + \lambda(x - y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x(\lambda - 8) - y(\lambda + 8) + 32 = 0$$

$$\text{radius} = \sqrt{\left(\frac{\lambda - 8}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda + 8}{2}\right)^2 - 32} = 5\sqrt{2}$$



$$2\lambda^2 + 128 - 128 = 200 \Rightarrow \lambda = \pm 10$$

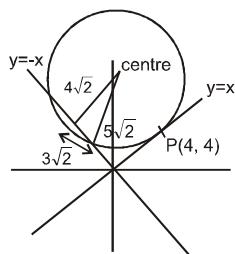
$$\lambda = 10 \quad x^2 + y^2 + 2x - 18y + 32 = 0$$

$$\lambda = -10 \quad x^2 + y^2 - 18x + 2y + 32 = 0$$

By family of circle equation of circle touching  $y = x$  at p(-4, -4)

$$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + \lambda(x - y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x(\lambda + 8) + y(8 - \lambda) + 32 = 0$$

$$\text{radius} = \sqrt{\left(\frac{\lambda + 8}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda - 8}{2}\right)^2 - 32} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \lambda^2 = 100 \Rightarrow \lambda = \pm 10$$

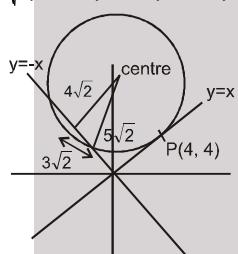


Hence  $x^2 + y^2 + 18x - 2y + 32 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 18y + 32 = 0$   
as  $(-10, 2)$  lies inside  $x^2 + y^2 + 18x - 2y + 32 = 0$

$$g = 9, f = -1, c = \frac{32}{3} \Rightarrow g + f + c = \frac{56}{3}$$

**Hindi** वृत्तों के निकाय द्वारा  $y = x$  को  $P(4, 4)$  पर स्पर्श करने वाले वृत्त की समीकरण  
 $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + \lambda(x - y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x(\lambda - 8) - y(\lambda + 8) + 32 = 0$

$$\text{त्रिज्या} = \sqrt{\left(\frac{\lambda - 8}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda + 8}{2}\right)^2 - 32} = 5\sqrt{2}$$



$$2\lambda^2 + 128 - 128 = 200 \Rightarrow \lambda = \pm 10$$

$$\lambda = 10 \quad x^2 + y^2 + 2x - 18y + 32 = 0$$

$$\lambda = -10 \quad x^2 + y^2 - 18x + 2y + 32 = 0$$

वृत्तों के निकाय द्वारा  $y = x$  को  $P(-4, -4)$  पर स्पर्श करने वाले वृत्त की समीकरण

$$(x + 4)^2 + (y + 4)^2 + \lambda(x - y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x(\lambda + 8) + y(8 - \lambda) + 32 = 0$$

$$\text{त्रिज्या} = \sqrt{\left(\frac{\lambda + 8}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda - 8}{2}\right)^2 - 32} = 5\sqrt{2}$$

$$\lambda^2 = 100 \Rightarrow \lambda = \pm 10$$

$$\text{अतः } x^2 + y^2 + 18x - 2y + 32 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 18y + 32 = 0$$

जैसाकि  $(-10, 2)$  वृत्त  $x^2 + y^2 + 18x - 2y + 32 = 0$  के अन्दर है।

$$g = 9, f = -1, c = \frac{32}{3} \Rightarrow g + f + c = \frac{56}{3}$$

### PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

#### भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1. The equation of circles passing through  $(3, -6)$  touching both the axes is

बिन्दु  $(3, -6)$  से गुजरने वाले तथा दोनों अक्षों को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण हैं –

$$(A^*) x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$$

$$(B) x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$$

$$(C) x^2 + y^2 + 30x - 30y + 225 = 0$$

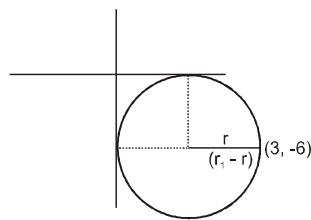
$$(D^*) x^2 + y^2 - 30x + 30y + 225 = 0$$

**Sol.** Now अब

$$(r - 3)^2 + (-r + 6)^2 = r^2$$

$$r^2 - 18r + 45 = 0 \Rightarrow r = 3, 15$$

Hence circle अतः वृत्त



$$(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$$

$$(x - 15)^2 + (y + 15)^2 = (15)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 30x + 30y + 225 = 0$$

2. Equations of circles which pass through the points (1, -2) and (3, -4) and touch the x-axis is

$$(A) x^2 + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$$

$$(B^*) x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0$$

$$(C^*) x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

$$(D) x^2 + y^2 + 10x + 20y - 25 = 0$$

बिन्दुओं (1, -2) एवं (3, -4) से गुजरने वाले एवं x-अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण है—

$$(A) x^2 + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$$

$$(B) x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0$$

$$(C) x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

$$(D) x^2 + y^2 + 10x + 20y - 25 = 0$$

**Sol.** Let equation of required circle is

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

it passes through (1, -2) & (3, -4)

$$2g - 4f + c = -5$$

$$6g - 8f + c = -25$$

$$4g - 8f + 2c = -10$$

$$6g - 8f + c = -25$$

$$-2g + c = 15$$

circle touches x-axis  $g^2 = c \Rightarrow$

$$g^2 - 2g - 15 = 0$$

$$g = 5, -3$$

$$g = 5, c = 25, f = 10 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0$$

$$g = -3, c = 9, f = 2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

**Hindi** वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

यह (1, -2) तथा (3, -4) से गुजरता है।

$$2g - 4f + c = -5$$

$$6g - 8f + c = -25$$

$$4g - 8f + 2c = -10$$

$$6g - 8f + c = -25$$

$$-2g + c = 15$$

x-अक्ष को स्पर्श करता है  $g^2 = c \Rightarrow g^2 - 2g - 15 = 0$

$$g = 5, -3$$

$$g = 5, c = 25, f = 10 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0$$

$$g = -3, c = 9, f = 2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$$

3. The centre of a circle passing through the points (0, 0), (1, 0) & touching the circle  $x^2 + y^2 = 9$  is :

वृत्त जो कि बिन्दुओं (0, 0), (1, 0) से गुजरता हो तथा वृत्त  $x^2 + y^2 = 9$  को स्पर्श करता हो, का केन्द्र है—

$$(A) \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(B^*) \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$(C) \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(D^*) \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

**Sol.** Equation of circle passing through (0, 0) and (1, 0) is

$$x^2 + y^2 - x + 2fy = 0 \quad \dots\dots(i)$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 9 \quad \dots\dots(ii)$$

(i) & (ii) touch each other.

so equation of Radical axis is  $x = 2fy + 9 \quad \dots\dots(iii)$

line (iii) is also tangent to the circle (ii)

$\therefore$  on solving (ii) & (iii), we get

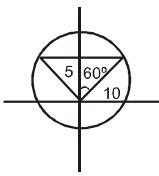
$$(1 + 4f^2)y^2 + 36fy + 72 = 0 \quad \dots\dots(iv)$$

$$\therefore D = 0 \Rightarrow f = \pm \sqrt{2}.$$

**Hindi.** (0, 0) तथा (1, 0) से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 - x + 2fy = 0 \quad \dots\dots(i)$$





$$24m^2 - 14m - 24 = 0 \Rightarrow (4m + 3)(6m - 8) = 0$$

$$m = -\frac{3}{4}, m = \frac{4}{3}$$

(1) में रखने पर

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 7), \quad y - 1 = \frac{4}{3}(x - 7)$$

6. Tangents are drawn to the circle  $x^2 + y^2 = 50$  from a point 'P' lying on the x-axis. These tangents meet the y-axis at points 'P<sub>1</sub>' and 'P<sub>2</sub>'. Possible coordinates of 'P' so that area of triangle PP<sub>1</sub>P<sub>2</sub> is minimum, is/are

x-अक्ष पर स्थित बिन्दु 'P' से वृत्त  $x^2 + y^2 = 50$  की स्पर्श रेखाएँ खीरीं जाती हैं। ये स्पर्श रेखाएँ y-अक्ष को 'P<sub>1</sub>' तथा 'P<sub>2</sub>' पर मिलती हैं। संभावित 'P' के निर्देशांक होंगे जबकि त्रिभुज PP<sub>1</sub>P<sub>2</sub> का क्षेत्रफल न्यूनतम है।

- (A\*) (10, 0)      (B) (10  $\sqrt{2}$ , 0)      (C\*) (-10, 0)      (D) (-10  $\sqrt{2}$ , 0)

**Sol.** OP = 5  $\sqrt{2}$  secθ, OP<sub>1</sub> = 5  $\sqrt{2}$  cosecθ

$$\text{area } (\Delta PP_1P_2) \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{100}{\sin 2\theta}, \text{ area } (\Delta PP_1P_2)_{\min} \text{ का क्षेत्रफल} = 100$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/4 \Rightarrow OP = 10 \Rightarrow P = (10, 0), (-10, 0)$$

Hence अतः (a), (c) are correct सही हैं।

7. If (a, 0) is a point on a diameter segment of the circle  $x^2 + y^2 = 4$ , then  $x^2 - 4x - a^2 = 0$  has

(A\*) exactly one real root in (-1, 0)      (B\*) Exactly one real root in [2, 5]

(C\*) distinct roots greater than -1      (D\*) Distinct roots less than 5

यदि (a, 0) वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  के व्यास पर एक बिन्दु है तब  $x^2 - 4x - a^2 = 0$  रखता है।

(A\*) (-1, 0] मेंठीक एक वास्तविक मूल रखता है।      (B\*) [2, 5] में ठीक एक वास्तविक मूल रखता है।

(C\*) असमान मूल -1 से बड़े हैं।      (D\*) भिन्न-भिन्न मूल 5 से कम हैं।

**Sol.**



Since (a, 0) is a point on the diameter of the circle  $x^2 + y^2 = 4$ ,  
So maximum value of a<sup>2</sup> is 4

Let f(x) = x<sup>2</sup> - 4x - a<sup>2</sup>

clearly f(-1) = 5 - a<sup>2</sup> is 4

f(2) = -(a<sup>2</sup> + 4) < 0

f(0) = -a<sup>2</sup> < 0 and f(5) = 5 - a<sup>2</sup> > 0

so graph of f(x) will be as shown

Hence (a), (b), (c), (d) are the correct answer.

**Hindi.**



चूंकि (a, 0) वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  के व्यास पर स्थित है।

इसलिए a<sup>2</sup> का अधिकतम मान 4 है।

माना f(x) = x<sup>2</sup> - 4x - a<sup>2</sup>

स्पष्टतया f(-1) = 5 - a<sup>2</sup> is 4

f(2) = -(a<sup>2</sup> + 4) < 0

f(0) = -a<sup>2</sup> < 0 और f(5) = 5 - a<sup>2</sup> > 0

इसलिए f(x) का आरेख दर्शाया होगा

अतः (a), (b), (c), (d) सही उत्तर हैं।

8. The tangents drawn from the origin to the circle  $x^2 + y^2 - 2rx - 2hy + h^2 = 0$  are perpendicular if

वृत्त  $x^2 + y^2 - 2rx - 2hy + h^2 = 0$  की मूल बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ लम्बवत् हैं यदि

(A\*)  $h = r$       (B\*)  $h = -r$       (C)  $r^2 + h^2 = 1$       (D\*)  $r^2 = h^2$

- Sol. Director circle is  $(x - r)^2 + (y - R)^2 = (\sqrt{2}r)^2$ . नियामक वृत्त  $(x - r)^2 + (y - R)^2 = (\sqrt{2}r)^2$  है  
satisfies by  $(0, 0) \Rightarrow r^2 + h^2 - 2r^2 \Rightarrow r^2 = h^2$ .  $(0, 0)$  सन्तुष्ट होता है  $\Rightarrow r^2 + h^2 - 2r^2 \Rightarrow r^2 = h^2$ .

9. The equation (s) of the tangent at the point  $(0, 0)$  to the circle where circle makes intercepts of length  $2a$  and  $2b$  units on the coordinate axes, is (are) -

वृत्त के  $(0, 0)$  पर स्पर्शरेखा का समीकरण होगा जहाँ वृत्त निर्देशांक अक्षों पर  $2a$  तथा  $2b$  लम्बाई का अन्तर्खण्ड काटता है-

(A\*)  $ax + by = 0$       (B\*)  $ax - by = 0$       (C)  $x = y$       (D)  $bx + ay = ab$

- Sol. Equation of circle passing through origin and cutting off intercepts  $2a$  and  $2b$  units on the coordinate axes is  $x^2 + y^2 \pm 2ax \pm 2by = 0$ . Hence (a), (b) are correct answers.

मूल बिन्दु से गुजरने वाले और निर्देशांक अक्षों पर  $2a$  तथा  $2b$  लम्बाई के अन्तर्खण्ड काटने वाले समीकरण  $x^2 + y^2 \pm 2ax \pm 2by = 0$  है अतः (A), (B) सही हैं।

10. Consider two circles  $C_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$  and  $C_2 : x^2 + y^2 - 2 = 0$ . Let  $A(1,0)$  be a fixed point on the circle  $C_1$  and  $B$  be any variable point on the circle  $C_2$ . The line  $BA$  meets the curve  $C_2$  again at  $C$ . Which of the following alternative(s) is/are correct ?

(A\*)  $OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [7, 11]$ , where  $O$  is the origin.

(B)  $OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [4, 7]$ , where  $O$  is the origin.

(C\*) Locus of midpoint of  $AB$  is a circle of radius  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

(D\*) Locus of midpoint of  $AB$  is a circle of area  $\frac{\pi}{2}$ .

माना कि वृत्त  $C_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$  और  $C_2 : x^2 + y^2 - 2 = 0$  है। माना  $A(1,0)$  वृत्त  $C_1$  पर एक स्थिर बिन्दु है तथा वृत्त  $C_2$  पर एक चर बिन्दु  $B$  है तथा रेखा  $BA$ , वक्र  $C_2$  को पुनः  $C$  पर मिलता है। निम्न में से कौनसा विकल्प सही है ?

(A\*)  $OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [7, 11]$ , जहाँ  $O$  मूल बिन्दु है।

(B)  $OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [4, 7]$ , जहाँ  $O$  मूल बिन्दु है।

(C\*)  $AB$  के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ, त्रिज्या  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  का एक वृत्त है।

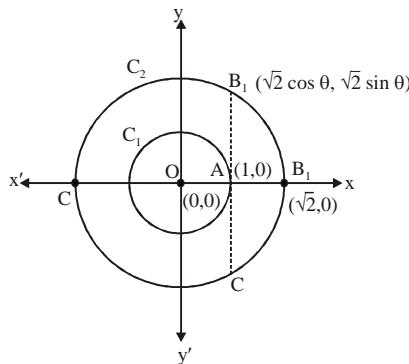
(D\*)  $AB$  के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ,  $\frac{\pi}{2}$  क्षेत्रफल का एक वृत्त है।

- Sol. We have maximum  $BC = 2\sqrt{2}$  and minimum  $BC = 2$

$\therefore OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [7, 11]$

Let  $M$  be the midpoint of  $AB$ .

$$\Rightarrow M \equiv \left( \frac{1 + \sqrt{2} \cos \theta}{2}, \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{2} \right) = (h, k)$$



$$\therefore \sin \theta = \frac{2k}{\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{2h-1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$  Now on squaring & adding, we get

$$\Rightarrow 4k^2 + (2h-1)^2 = 2$$

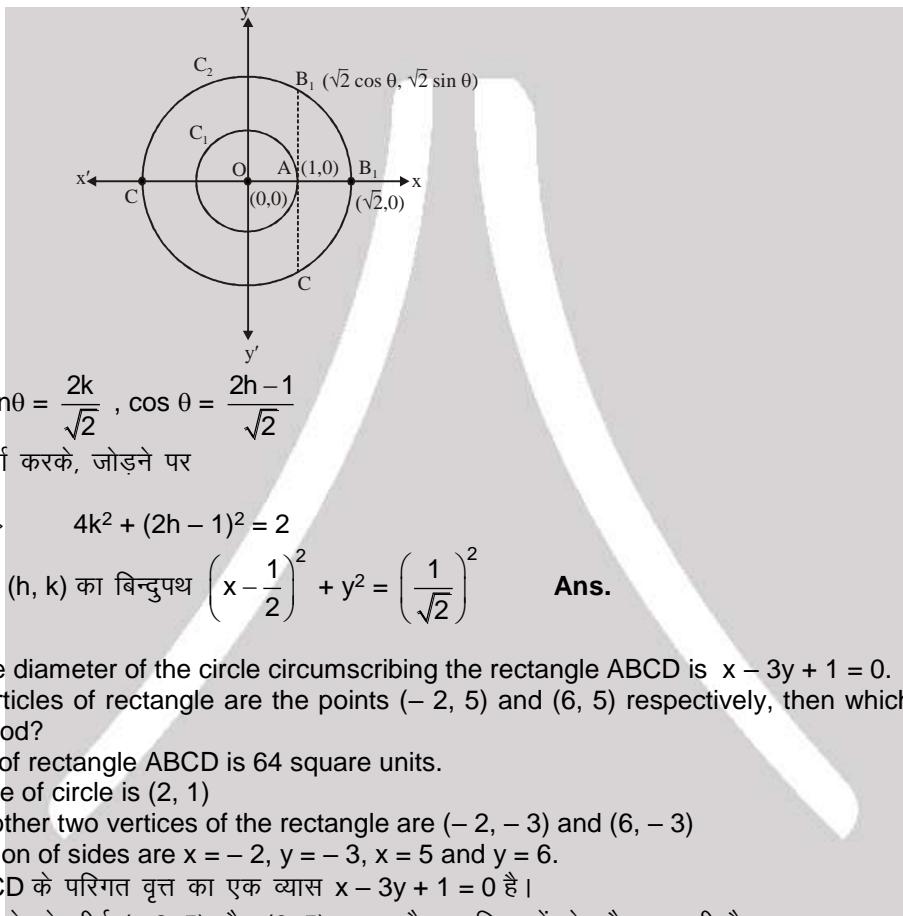
$$\therefore \text{Locus of } M(h, k) \text{ is } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{Ans.}$$

**Hindi.** अधिकतम BC =  $2\sqrt{2}$  और न्यूनतम BC = 2

$$\therefore OA^2 + OB^2 + BC^2 \in [7, 11]$$

माना M, AB का मध्य बिन्दु है।

$$\Rightarrow M \equiv \left( \frac{1 + \sqrt{2} \cos \theta}{2}, \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{2} \right) = (h, k)$$



$$\therefore \sin \theta = \frac{2k}{\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{2h-1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$  वर्ग करके, जोड़ने पर

$$\Rightarrow 4k^2 + (2h-1)^2 = 2$$

$$\therefore M(h, k) \text{ का बिन्दुपथ } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{Ans.}$$

**11.** One of the diameter of the circle circumscribing the rectangle ABCD is  $x - 3y + 1 = 0$ .

If two vertices of rectangle are the points  $(-2, 5)$  and  $(6, 5)$  respectively, then which of the following hold(s) good?

(A\*) Area of rectangle ABCD is 64 square units.

(B\*) Centre of circle is  $(2, 1)$ .

(C\*) The other two vertices of the rectangle are  $(-2, -3)$  and  $(6, -3)$

(D) Equation of sides are  $x = -2$ ,  $y = -3$ ,  $x = 5$  and  $y = 6$ .

आयत ABCD के परिगत वृत्त का एक व्यास  $x - 3y + 1 = 0$  है।

यदि आयत के दो शीर्ष  $(-2, 5)$  और  $(6, 5)$  क्रमशः हैं तब निम्न में से कौनसा सही है।

(A\*) आयत ABCD का क्षेत्रफल 64 वर्ग इकाई है।

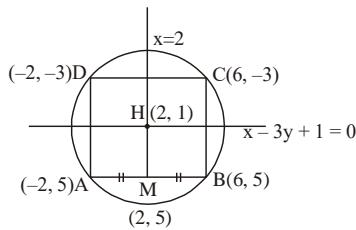
(B\*) वृत्त का केन्द्र  $(2, 1)$  है।

(C\*) आयत के अन्य दो शीर्ष  $(-2, -3)$  और  $(6, -3)$  हैं।

(D) भुजाओं के समीकरण  $x = -2$ ,  $y = -3$ ,  $x = 5$  और  $y = 6$  हैं।

**Sol.** Area of rectangle =  $(8)(8) = 64$  sq. units.

आयत का क्षेत्रफल =  $(8)(8) = 64$  वर्ग इकाई



Let माना  $D((x, y)$

$$\therefore \frac{x+6}{2} = 2 \text{ and तथा } \frac{x+5}{2} = 1 \quad \therefore D(-2, -3) \text{ इसीप्रकार } C(6, -3).$$

12. Three concentric circles of which the biggest is  $x^2 + y^2 = 1$ , have their radii in A.P. If the line  $y = x + 1$  cuts all the circles in real and distinct points. The permissible values of common difference of A.P. is/are

तीन संकेन्द्रीय वृत्त जिसमें सबसे बड़ा  $x^2 + y^2 = 1$  है, इनकी त्रिज्यायें समान्तर श्रेढ़ी में हैं। यदि रेखा  $y = x + 1$  वृत्तों को वास्तविक एवं भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हो, तो समान्तर श्रेढ़ी के सार्वअन्तर के संभावित मान हैं—

- (A) 0.4      (B) 0.6      (C\*) 0.01      (D\*) 0.1

**Sol.** Let 'd' be the common difference

$\therefore$  the radii of the three circles be  $1 - 2d, 1 - d, 1$

$\therefore$  equation of smallest circle is  $x^2 + y^2 = (1 - 2d)^2$  .....(i)

$\therefore y = x + 1$  intersect (i) at real and distinct points

$\therefore x^2 + x + 2d - 2d^2 = 0$  .....(ii)

$$\therefore D > 0 \Rightarrow 8d^2 - 8d + 1 > 0 \Rightarrow d > \frac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ or } d < \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

but d can not be greater than  $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore d \in \left(0, \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$$

**Hindi.** मानाकि d सार्वअन्तर है।

$\therefore$  तीनों वृत्तों को त्रिज्यायें  $1 - 2d, 1 - d, 1$  होगी।

$\therefore$  सबसे छोटे वृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 = (1 - 2d)^2$  .....(i)

$\therefore y = x + 1$  रेखा (i) को वास्तविक एवं भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

$\therefore x^2 + x + 2d - 2d^2 = 0$  ....(ii)

$$\therefore D > 0 \Rightarrow 8d^2 - 8d + 1 > 0 \Rightarrow d > \frac{2+\sqrt{2}}{4} \text{ or } d < \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

परन्तु d का मान  $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$  परन्तु d का मान

$$\therefore d \in \left(0, \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$$

13. If  $4\ell^2 - 5m^2 + 6\ell + 1 = 0$ . Prove that  $\ell x + my + 1 = 0$  touches a definite circle, then which of the following is/are true.

- (A) Centre (0, 3)      (B\*) centre (3, 0)      (C\*) Radius  $\sqrt{5}$       (D) Radius 5

यदि  $4\ell^2 - 5m^2 + 6\ell + 1 = 0$  तो सिद्ध कीजिए कि  $\ell x + my + 1 = 0$  एक निश्चित वृत्त को स्पर्श करती है। इस वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

- (A) केन्द्र (0, 3)      (B\*) केन्द्र (3, 0)      (C\*) त्रिज्या  $\sqrt{5}$       (D) त्रिज्या 5

**Sol.**  $4\ell^2 - 5m^2 + 6\ell + 1 = 0 \Rightarrow (3\ell + 1)^2 = 5(\ell^2 + m^2) \Rightarrow \left| \frac{3\ell + 0.m + 1}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \right| = \sqrt{5}$

Hence centre (3, 0), radius =  $\sqrt{5}$

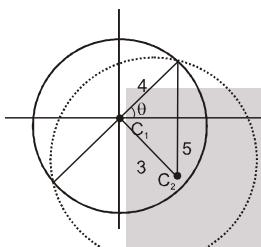
**Hindi**  $4\ell^2 - 5m^2 + 6\ell + 1 = 0 \Rightarrow (3\ell + 1)^2 = 5(\ell^2 + m^2) \Rightarrow \left| \frac{3\ell + 0.m + 1}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} \right| = \sqrt{5}$

अतः केन्द्र  $(3, 0)$ , त्रिज्या  $= \sqrt{5}$ .

- 14.** If the circle  $C_1: x^2 + y^2 = 16$  intersects another circle  $C_2$  of radius 5 in such a manner that the common chord is of maximum length and has a slope equal to  $3/4$ , then the co-ordinates of the centre of  $C_2$  are:

यदि वृत्त  $C_1: x^2 + y^2 = 16$ , 5 इकाई त्रिज्या के दूसरे वृत्त  $C_2$  को इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि इनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई अधिकतम तथा प्रवणता  $3/4$  हो, तो  $C_2$  के केन्द्र के निर्देशांक हैं—

- (A)  $\left( \frac{9}{5}, \frac{12}{5} \right)$  (B\*)  $\left( \frac{9}{5}, -\frac{12}{5} \right)$  (C)  $\left( -\frac{9}{5}, -\frac{12}{5} \right)$  (D\*)  $\left( -\frac{9}{5}, \frac{12}{5} \right)$

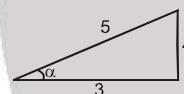


**Sol.**

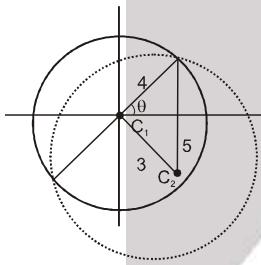
$$\text{slope of } C_1 C_2 \text{ is } \tan \alpha = -\frac{4}{3}$$

By using parametric coordinates

$$\begin{aligned} C_2 & (\pm 3 \cos \alpha, \pm 3 \sin \alpha) \\ C_2 & (\pm 3(-3/5), \pm 3(4/5)) \\ C_2 & (\pm 9/5, 12/5) \end{aligned}$$



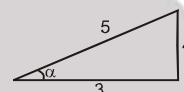
**Hindi.**



$$C_1 C_2 \text{ की प्रवणता } \tan \alpha = -\frac{4}{3}$$

प्राचलिक निर्देशांक की सहायता से

$$\begin{aligned} C_2 & (\pm 3 \cos \alpha, \pm 3 \sin \alpha) \\ C_2 & (\pm 3(-3/5), \pm 3(4/5)) \\ C_2 & (\pm 9/5, 12/5) \end{aligned}$$



- 15.** For the circles  $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 89 - r^2 = 0$  and  $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 42 = 0$  which of the following is/are true.

(A\*) Number of integral values of  $r$  are 14 for which circles are intersecting.

(B) Number of integral values of  $r$  are 9 for which circles are intersecting.

(C\*) For  $r$  equal to 13 number of common tangents are 3.

(D) For  $r$  equal to 21 number of common tangents are 2.

वृत्तों  $x^2 + y^2 - 10x + 16y + 89 - r^2 = 0$  और  $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 42 = 0$  के लिए, निम्न में से कौनसा/कौनसे सही है?

(A\*)  $r$  के पूर्णांक मानों की संख्या 14 है जो वृत्तों को प्रतिच्छेद करती है।

(B)  $r$  के पूर्णांक मानों की संख्या 9 है जो वृत्तों को प्रतिच्छेद करती है।

(C\*)  $r = 13$  के लिए उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या 3 है।

(D)  $r = 21$  के लिए उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या 2 है।

[Sol.] We have  $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 25 + 64 + r^2 - 89$   
 and  $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 49 + 9 - 42 = 16$   
 $\Rightarrow (x - 5)^2 + (y + 8)^2 = r^2$   
 and  $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = (4)^2$   
 $\frac{(5,-8)}{(-3,7)} \Rightarrow \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17 = \text{distance between their centres}$   
 Now,  $|r - 4| < 17 < r + 4 \Rightarrow r + 4 > 17 \Rightarrow r > 13$   
 and  $-17 < r - 4 < 17 \Rightarrow -13 < r < 21$   
 Hence  $13 < r < 21$   
 $\therefore$  Possible values of 'r' can be 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20  
 Hence required sum = 119

**Hindi.** यहाँ  $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 25 + 64 + r^2 - 89$   
 और  $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 49 + 9 - 42 = 16$   
 $\Rightarrow (x - 5)^2 + (y + 8)^2 = r^2$   
 और  $(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = (4)^2$   
 $\frac{(5,-8)}{(-3,7)} \Rightarrow \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17 = \text{केन्द्रों के मध्य दूरी}$   
 अब,  $|r - 4| < 17 < r + 4 \Rightarrow r + 4 > 17 \Rightarrow r > 13$   
 तथा  $-17 < r - 4 < 17 \Rightarrow -13 < r < 21$  अतः  $13 < r < 21$   
 $\therefore$  'r' के संभावित मान हो सकते हैं 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20  
 अतः अभीष्ट योगफल = 119

16. Which of the following statement(s) is/are correct with respect to the circles  $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$  and  $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ ?  
 (A\*)  $S_1$  and  $S_2$  intersect at an angle of  $90^\circ$ .

(B) The point of intersection of the two circle are  $(2, 0)$  and  $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ .

(C\*) Length of the common of chord of  $S_1$  and  $S_2$  is  $\frac{4}{\sqrt{5}}$ .

(D\*) The point  $(2, 3)$  lies outside the circles  $S_1$  and  $S_2$ .

वृत्त  $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$  और  $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$  के सापेक्ष निम्न में से कौनसे कथन सही हैं?

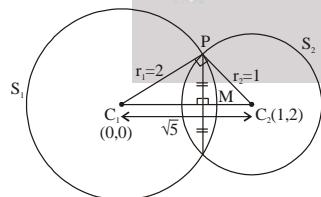
(A\*)  $S_1$  और  $S_2$ ,  $90^\circ$  कोण पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(B) दो वृत्त का प्रतिच्छेदन बिन्दु  $(2, 0)$  और  $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$  है।

(C\*)  $S_1$  तथा  $S_2$  की उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई  $\frac{4}{\sqrt{5}}$  है।

(D\*) बिन्दु  $(2, 3)$  की वृत्त  $S_1$  तथा  $S_2$  के बाहर स्थित है।

[Sol.



Clearly  $PC_1^2 + PC_2^2 = (C_1C_2)^2$

$\Rightarrow$  Two circles intersect orthogonally.

Equation of common chord is  $S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow -x + 2y + 4 = 0$

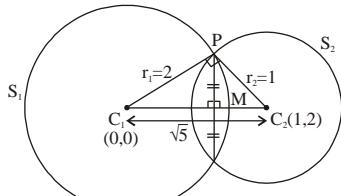
Now  $C_1M = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$\therefore$  Length of common chord =  $2\sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

Clearly  $S_1(2, 3) > 0$  and  $S_2(2, 3) > 0$

So, the point (2, 3) lies outside the circles  $S_1$  &  $S_2$ . ]

Hindi.



$$\text{स्पष्टतया } PC_1^2 + PC_2^2 = (C_1C_2)^2$$

$\Rightarrow$  दोनों वृत्त समकोणीय प्रतिच्छेद करते हैं।

उभयनिष्ठ जीवा का समीकरण  $S_1 - S_2 = 0$

$$\Rightarrow -x + 2y + 4 = 0$$

$$\text{अब } C_1M = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \text{ उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई } 2\sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

स्पष्टतया  $S_1(2, 3) > 0$  तथा  $S_2(2, 3) > 0$

इसलिए बिन्दु (2, 3) वृत्त  $S_1$  और  $S_2$  के बाहर है। ]

17. Two circles, each of radius 5 units, touch each other at (1, 2). If the equation of their common tangent is  $4x + 3y = 10$ . The equations of the circles are

5 इकाई त्रिज्या के दो वृत्त एक दूसरे को (1, 2) पर स्पर्श करते हैं। यदि उनकी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा  $4x + 3y = 10$  है। वृत्तों के समीकरण हैं –

$$(A^*) x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$$

$$(C) x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$

$$(B^*) x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$$

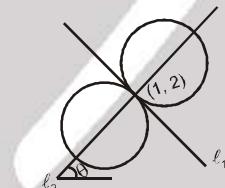
$$(D) x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$$

Sol.  $\ell_1 \equiv 4x + 3y = 10$  ;  $\ell_2 \equiv 3x - 4y = -5$

Let  $\theta$  be the inclination of  $\ell_2$

$$\therefore \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{ equation of } \ell_2 \text{ in parametric form } \frac{x-1}{4/5} = \frac{y-2}{3/5} = \pm 5$$



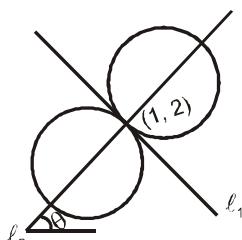
co-ordinates of centres are (5, 5), (-3, -1)

Hindi.  $\ell_1 \equiv 4x + 3y = 10$  ;  $\ell_2 \equiv 3x - 4y = -5$

माना सरल रेखा  $\ell_2$  का झुकाव  $\theta$  है।

$$\therefore \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{ प्राचलिक रूप में सरल रेखा } \ell_2 \text{ का समीकरण } \frac{x-1}{4/5} = \frac{y-2}{3/5} = \pm 5$$



$\therefore$  केन्द्रों के निर्देशांक (5, 5), (-3, -1) हैं।

18.  $x^2 + y^2 = a^2$  and  $(x - 2a)^2 + y^2 = a^2$  are two equal circles touching each other. Find the equation of circle (or circles) of the same radius touching both the circles.

$x^2 + y^2 = a^2$  और  $(x - 2a)^2 + y^2 = a^2$  दो बराबर वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं। समान त्रिज्या का वृत्त (या वृत्तों) के समीकरण ज्ञात कीजिए, जो दोनों वृत्त को स्पर्श करता है।

(A)  $x^2 + y^2 + 2ax + 2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 0$

(B\*)  $x^2 + y^2 - 2ax + 2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 0$

(C)  $x^2 + y^2 + 2ax - 2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 0$

(D\*)  $x^2 + y^2 - 2ax - 2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 0$

**Sol.** Given circles are

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

and  $(x - 2a)^2 + y^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots(2)$

Let A and B be the centres and  $r_1$  and  $r_2$  the radii of the circles (1) and (2) respectively. Then

$$A \equiv (0, 0), B \equiv (2a, 0), r_1 = a, r_2 = a$$

$$\text{Now } AB = \sqrt{(0 - 2a)^2 + 0^2} = 2a = r_1 + r_2$$

Hence the two circles touch each other externally.

Let the equation of the circle having same radius 'a' and touching the circles (1) and (2) be

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

Its centre C is  $(\alpha, \beta)$  and radius  $r_3 = a$

Since circle (3) touches the circle (1),

$$AC = r_1 + r_3 = 2a. [\text{Here } AC \neq |r_1 - r_3| \text{ as } r_1 - r_3 = a - a = 0]$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4a^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4a^2 \quad \dots\dots\dots(4)$$

Again since circle (3) touches the circle (2)

$$BC = r_2 + r_3 \Rightarrow BC^2 = (r_2)$$

$$\Rightarrow (2a - \alpha)^2 + \beta^2 = (a + a)^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 4a\alpha = 0 \Rightarrow 4a^2 - 4a\alpha = 0 [\text{from (4)}]$$

$$\Rightarrow \alpha = a \text{ and from (4), we have } \beta = \pm \sqrt{3}a.$$

Hence, the required circles are

$$(x - a)^2 + (y \mp a\sqrt{3})^2 = a^2$$

or  $x^2 + y^2 - 2ax \mp 2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 0.$

**Hindi.** दिये गए वृत्त

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots(1) \quad \text{और } (x - 2a)^2 + y^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

माना A तथा B वृत्त हैं तथा  $r_1$  तथा  $r_2$  वृत्तों (1) और (2) की क्रमशः त्रिज्याएँ हैं तब

$$A \equiv (0, 0), B \equiv (2a, 0), r_1 = a, r_2 = a \quad \text{अब} \quad AB = \sqrt{(0 - 2a)^2 + 0^2} = 2a = r_1 + r_2$$

अतः दो वृत्त एक दूसरे बाह्य स्पर्श करते हैं।

माना समान त्रिज्या 'a' के वृत्त का समीकरण जो (1) और (2) को स्पर्श करता है।

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = a^2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

इसका केन्द्र C ( $\alpha, \beta$ ) है तथा त्रिज्या  $r_3 = a$

चूंकि वृत्त (3) वृत्त (1) को स्पर्श करता है।

$$AC = r_1 + r_3 = 2a. [\text{यहाँ } AC \neq |r_1 - r_3| \text{ as } r_1 - r_3 = a - a = 0]$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4a^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4a^2 \quad \dots\dots\dots(4)$$

पुनः वृत्त (3) वृत्त (2) को स्पर्श करता है।

$$BC = r_2 + r_3 \Rightarrow BC^2 = (r_2)$$

$$\Rightarrow (2a - \alpha)^2 + \beta^2 = (a + a)^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 4a\alpha = 0 \Rightarrow 4a^2 - 4a\alpha = 0 [(4) से]$$

$$\Rightarrow \alpha = a \text{ और (4) से यहाँ } \beta = \pm \sqrt{3}a.$$

अतः अभीष्ट वृत्त

$$(x - a)^2 + (y \pm a\sqrt{3})^2 = a^2 \quad \text{या} \quad x^2 + y^2 - 2ax \pm 2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 0.$$

19. The circle  $x^2 + y^2 - 2x - 3ky - 2 = 0$  passes through two fixed points, (k is the parameter)

वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 3ky - 2 = 0$  जिन दो स्थिर बिन्दुओं से गुजरता है, वह है (k एक प्राचल है) –

(A\*)  $(1 + \sqrt{3}, 0)$

(B)  $(-1 + \sqrt{3}, 0)$

(C)  $(-\sqrt{3} - 1, 0)$

(D\*)  $(1 - \sqrt{3}, 0)$

**Sol.** Two fixed pts. are point of intersection of

$$x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0 \quad \& \quad y = 0$$

$$\text{Point } x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - 3 = 0 \Rightarrow x-1 = \sqrt{3}, x-1 = -\sqrt{3} \Rightarrow (1+\sqrt{3}, 0) (1-\sqrt{3}, 0)$$

**Hindi.** दो स्थिर बिन्दु  $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$  व  $y = 0$  के प्रतिच्छेदी बिन्दु होंगे

$$\text{बिन्दु } x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} x - 1 = , \quad x - 1 = -\sqrt{3} \Rightarrow (1+\sqrt{3}, 0) (1-\sqrt{3}, 0)$$

20. Curves  $ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c = 0$  and  $a'x^2 - 2hxy + (a' + a - b)y^2 - 2g'x - 2f'y + c = 0$

intersect at four concyclic point A, B, C and D. If P is the point  $\left(\frac{g'+g}{a'+a}, \frac{f'+f}{a'+a}\right)$ , then which of the

following is/are true

(A) P is also concyclic with points A,B,C,D      (B\*) PA, PB, PC in G.P.

(C\*)  $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PD^2$       (D\*) PA, PB, PC in A.P.

वक्र  $ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c = 0$  और  $a'x^2 - 2hxy + (a' + a - b)y^2 - 2g'x - 2f'y + c = 0$  चार

समवृत्तीय बिन्दुओं A, B, C और D पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि P एक बिन्दु  $\left(\frac{g'+g}{a'+a}, \frac{f'+f}{a'+a}\right)$  तब निम्न में से कौनसा सही है?

(A) P बिन्दु A,B,C,D के साथ समवृत्तीय है।      (B\*) PA, PB, PC गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

(C\*)  $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PD^2$       (D\*) PA, PB, PC समान्तर श्रेणी में हैं।

**Sol.** Equation of a curve passing through the intersection points of the given curves

$$ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{and } a'x^2 - 2hxy + (a' + a - b)y^2 - 2g'x - 2f'y + c = 0 \quad \dots\dots(2)$$

can be written as  $\{a'x^2 - 2hxy + (a' + a - b)y^2 - 2g'x - 2f'y + c\}$

$$+ \lambda\{ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c\} = 0$$

i.e.  $(a' + \lambda a)x^2 + 2h(\lambda - 1)xy + (a' + a - b + \lambda b)y^2$   
 $- 2(g' + \lambda g)x - 2(f' + \lambda f)y + (1 + \lambda)c = 0 \quad \dots\dots(3)$

According to the given condition equation (3) must represent a circle, therefore, we have  
coeff. of  $x^2$  = coeff. of  $y^2$

i.e.  $a' + \lambda a = a' + a - b + \lambda b \quad \text{i.e. } \lambda(a - b) = a - b$

gives  $\lambda = 1$  and coeff. of  $xy = 0$  i.e.  $\lambda - 1 = 0$  gives  $\lambda = 1$ .

The identical values prove that the curve is a circle.

Putting the above value of  $\lambda$  in equation (3) gives the equation of the circle passing through the intersection points of the curves represented by equations (1) and (2) as  $(a' + a)(x^2 + y^2) - 2(g' + g)x - 2(f' + f)y + 2c = 0$

which has its centre at the point  $\left(\frac{g'+g}{a'+a}, \frac{f'+f}{a'+a}\right)$

We can see that the coordinates of the given point P is the same as the centre of the circle passing through the points A, B, C and D. Therefore, we have  $PA^2 = PB^2 = PC^2 = PD^2 = \text{radius of the circle}$  which gives the desired result  $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PD^2$ .

- Hindi.** वक्र का समीकरण  $ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c = 0 \quad \dots\dots(1)$

जो दिए गए वक्रों से गुजरता है।



3. Radical centre of circles  $S_1$ ,  $S_2$ , &  $S_4$  is

$S_1$ ,  $S_2$  एवं  $S_4$  वृत्तों का मूलाक्ष है—

(A\*)  $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

(B)  $(3, 2)$

(C)  $(1, 0)$

(D)  $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{2}\right)$

Sol.  $S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

$S_1 - S_4 = 0 \Rightarrow 9x + 6y + 15 = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow 3x - 3y - 3 = 0$

$5y + 8 = 0 \Rightarrow y = -8/5 \quad x = -3/5$

### Comprehension # 2 (Q. No. 4 to 6)

#### अनुच्छेद # 2

Two circles are  $S_1 \equiv (x + 3)^2 + y^2 = 9$

$S_2 \equiv (x - 5)^2 + y^2 = 16$

with centres  $C_1$  &  $C_2$

दो वृत्त

$S_1 \equiv (x + 3)^2 + y^2 = 9$

$S_2 \equiv (x - 5)^2 + y^2 = 16$

जिनके केन्द्र  $C_1$  व  $C_2$  हैं।

4. A direct common tangent is drawn from a point P (on x-axis) which touches  $S_1$  &  $S_2$  at Q & R, respectively. Find the ratio of area of  $\Delta PQC_1$  &  $\Delta PRC_2$ .

[16JM110533]

बिन्दु P जो x-अक्ष पर है, से अनुक्रम स्पर्श रेखा जो कि वृत्त  $S_1$  व  $S_2$  को क्रमशः Q व R पर स्पर्श करती है।  $\Delta PQC_1$  व  $\Delta PRC_2$  के क्षेत्रफलों का अनुपात होगा—

(A)  $3 : 4$

(B\*)  $9 : 16$

(C)  $16 : 9$

(D)  $4 : 3$

5. From point 'A' on  $S_2$  which is nearest to  $C_1$ , a variable chord is drawn to  $S_1$ . The locus of mid point of the chord.

(A) circle  
diameter

(B) Diameter of  $s_1$

(C\*) Arc of a circle

(D) chord of  $s_1$  but not

वृत्त  $S_2$  पर  $C_1$  के निकटतम बिन्दु A से एक चर जीवा  $S_1$  पर बनायी जाती है। जीवा के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ होगा—

(A) वृत्त

(B)  $S_1$  का व्यास

(C\*) वृत्त का चाप

(D)  $S_1$  की जीवा परन्तु व्यास नहीं

6. Locus obtained in question 5 cuts the circle  $S_1$  at B & C, then line segment BC subtends an angle on the major arc of circle  $S_1$  is

प्रश्न संख्या 7 का बिन्दुपथ, वृत्त  $S_1$  को B एवं C पर काटता हो, तो BC रेखाखंड वृत्त  $S_1$  के दीर्घ चाप पर कोण अंतरित करता है—

(A\*)  $\cos^{-1} \frac{3}{4}$

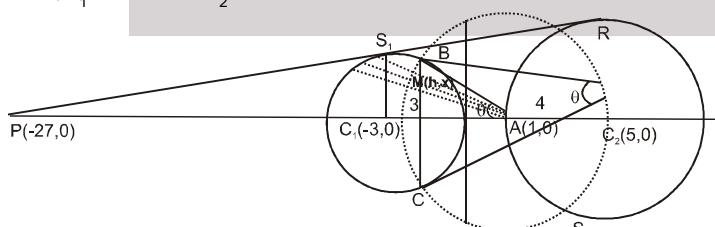
(B)  $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{4}{3}$

(C)  $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{3}{4}$

(D)  $\frac{\pi}{2} \cot^{-1} \left( \frac{4}{3} \right)$

#### Sol. 4 to 6

4.  $\Delta PQC_1$  and  $\Delta PRC_2$  are similar



$$\frac{\text{Area of } \Delta PQC_1}{\text{Area of } \Delta PRC_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{9}{25}$$

5. Let mid point m(h, k). Now equation of chord

$T = S_1$

$hx + ky + 3(x + h) = h^2 + k^2 + 6h$

it passes through (1, 0)

$$h + 3(1+h) = h^2 + k^2 + 6h$$

$$\text{locus } x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

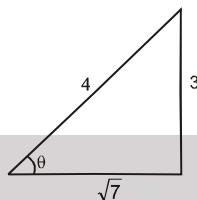
But clear from Geometry it will be arc of BC

6. Common chord of  $S_1$  & answer of 5

$$4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3/4$$

$$\text{at } x = -3/4 \quad \left(-\frac{3}{4} + 3\right)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - \frac{81}{16}$$

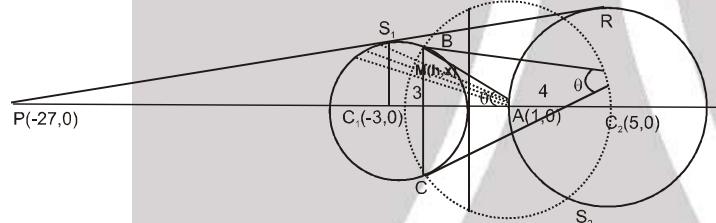
$$y^2 = \frac{63}{16} \Rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{7}}{4}$$



$$\text{Hence } \tan \theta = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{4}}{(1+3/4)} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

**Sol. 4 to 6**

4.  $\Delta PQC_1$  तथा  $\Delta PRC_2$  समरूप त्रिभुज हैं।



$$\frac{\text{Area of } \Delta PQC_1}{\text{Area of } \Delta PRC_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{9}{25}$$

5. माना  $m(h, k)$  मध्य बिन्दु है। जीवा का समीकरण

$$T = S_1$$

$$hx + ky + 3(x + h) = h^2 + k^2 + 6h$$

यह  $(1, 0)$  से गुजरता है।

$$h + 3(1+h) = h^2 + k^2 + 6h$$

$$\text{बिन्दुपथ } x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$$

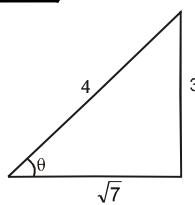
परन्तु ज्यामिति से यह BC का चाप है

6.  $S_1$  की उभयनिष्ठ जीवा और 7 का उत्तर

$$4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3/4$$

$$\text{अतः } x = -3/4 \quad \left(-\frac{3}{4} + 3\right)^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - \frac{81}{16}$$

$$y^2 = \frac{63}{16} \Rightarrow y = \pm \frac{3\sqrt{7}}{4}$$



$$\text{अतः } \tan \theta = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{4}}{(1+3/4)} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

## Exercise-3

☒ Marked questions are recommended for Revision.

☒ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

\* Marked Questions may have more than one correct option.

\* चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -

### PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

#### भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षों) के प्रश्न

1. Two parallel chords of a circle of radius 2 are at a distance  $\sqrt{3} + 1$  apart. If the chords subtend at the center, angles of  $\frac{\pi}{k}$  and  $\frac{2\pi}{k}$ , where  $k > 0$ , then the value of [k] is

[Note : [k] denotes the largest integer less than or equal to k]

एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 2 है, की दो समानान्तर जीवाओं के बीच की दूरी  $\sqrt{3} + 1$  है। यदि जीवाएँ केन्द्र पर

$\frac{\pi}{k}$  तथा  $\frac{2\pi}{k}$ ,  $k > 0$  के कोण अन्तरित (subtend) करती हैं, तो [k] का मान है।

[IIT-JEE - 2010, Paper-2, (3, 0), 79]

[नोट : [k] अधिकतम पूर्णांक जो k से कम या समान है।]

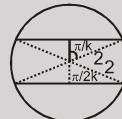
Ans. 3

- Sol. Since distance between parallel chords is greater than radius, therefore both chords lie on opposite side of centre.

चूंकि समान्तर जीवाओं के मध्य दूरी त्रिज्या से बड़ी है इसलिए दोनों जीवाएँ केन्द्र के वितरीत और होगी।

$$2 \cos \frac{\pi}{2k} + 2 \cos \frac{\pi}{k} = \sqrt{3} + 1$$

$$\text{Let } \frac{\pi}{2k} = \theta$$



$$\therefore 2 \cos \theta + 2 \cos 2\theta = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow 2 \cos \theta + 2(2 \cos^2 \theta - 1) = \sqrt{3} + 1$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - (3 + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16(3 + \sqrt{3})}}{2(4)} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + 12 + 4\sqrt{3}}}{2(4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{(\sqrt{12} + 1)^2}}{4} = \frac{-1 \pm (2\sqrt{3} + 1)}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-(\sqrt{3} + 1)}{2} \text{ Rejected अस्वीकार्य}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow k = 3 \Rightarrow [k] = 3$$

2. The circle passing through the point  $(-1, 0)$  and touching the  $y$ -axis at  $(0, 2)$  also passes through the point  
 बिन्दु  $(-1, 0)$  से होकर जाने वाला और  $y$ -अक्ष को  $(0, 2)$  पर स्पर्श करने वाला वृत्त निम्न बिन्दु से भी होकर जाता है  
 (A)  $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$       (B)  $\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$       (C)  $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$       (D)  $(-4, 0)$

[IIT-JEE 2011, Paper-2, (3, -1), 80]

**Ans.** (D)**Sol.** Let equation of circle is

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

as it passes through  $(-1, 0)$  &  $(0, 2)$   
 $1 - 2g + c = 0$  and  $4 + 4f + c = 0$   
 also  $f^2 = c \Rightarrow f = -2, c = 4 ; g = \frac{5}{2}$

equation of circle is  $x^2 + y^2 + 5x - 4y + 4 = 0$   
 which passes through  $(-4, 0)$

**Hindi** वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$(-1, 0)$  &  $(0, 2)$  से गुजरता है।  
 $1 - 2g + c = 0$  और  $4 + 4f + c = 0$   
 तथा  $f^2 = c \Rightarrow f = -2, c = 4 ; g = \frac{5}{2}$

वृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 + 5x - 4y + 4 = 0$   
 जो  $(-4, 0)$  से गुजरता है।

3. The straight line  $2x - 3y = 1$  divides the circular region  $x^2 + y^2 \leq 6$  into two parts.

If  $S = \left\{ \left(2, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \right\}$ ,

[IIT-JEE 2011, Paper-2, (4, 0), 80]

then the number of point(s) in  $S$  lying inside the smaller part isरेखा  $2x - 3y = 1$ , वृत्तीय क्षेत्र  $x^2 + y^2 \leq 6$  को दो भागों में विभाजित करती है। यदि

$$S = \left\{ \left(2, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \right\}$$

तो  $S$  में स्थित उन बिन्दुओं की संख्या जो लघुतर भाग में अन्दर है, निम्न है—**Ans.** 2**Sol.**  $2x - 3y = 1, x^2 + y^2 \leq 6$ 

$$S \equiv \left\{ \left(2, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \right\}$$

(I)      (II)      (III)      (IV)

Plot the two curves

I, III, IV will lie inside the circle and point (I, III, IV) will lie on the P region  
 if  $(0, 0)$  and the given point will lie opposite to the line  $2x - 3y - 1 = 0$ 

$$P(0, 0) = \text{negative}, P\left(2, \frac{3}{4}\right) = \text{positive}, P\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \text{positive} P\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) = \text{negative}$$

$$P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right) = \text{positive}, \text{ but it will not lie in the given circle}$$

so point  $\left(2, \frac{3}{4}\right)$  and  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$  will lie on the opp side of the lineso two point  $\left(2, \frac{3}{4}\right)$  and  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Further  $\left(2, \frac{3}{4}\right)$  and satisfy  $S_1\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) < 0$

**Hindi.**  $2x - 3y = 1$ ,  $x^2 + y^2 \leq 6$

$$S = \left\{ \left(2, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) \right\}$$

(I) (II) (III) (IV)

दो वक्रों के आरेख से

I, III, IV वृत्त के अन्दर स्थित हैं और (I, III, IV) क्षेत्र P पर स्थित हैं।

यदि  $(0, 0)$  और दिया गया बिन्दु रेखा  $2x - 3y - 1 = 0$  के विपरीत ओर स्थित होगा।

$$P(0, 0) = \text{ऋणात्मक}, P\left(2, \frac{3}{4}\right) = \text{धनात्मक}, P\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \text{धनात्मक} P\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) = \text{ऋणात्मक}$$

$$P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right) = \text{धनात्मक}, \text{परन्तु ये दिए गए वृत्त में स्थित नहीं हैं।}$$

इसलिए बिन्दु  $\left(2, \frac{3}{4}\right)$  और  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$  रेखा के विपरीत ओर स्थित होंगे।

इसलिए दो बिन्दु  $\left(2, \frac{3}{4}\right)$  और  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$  हैं।

पुनः  $\left(2, \frac{3}{4}\right)$  और  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$   $S_1 < 0$  को सन्तुष्ट करते हैं

- 4.** The locus of the mid-point of the chord of contact of tangents drawn from points lying on the straight line  $4x - 5y = 20$  to the circle  $x^2 + y^2 = 9$  is [IIT-JEE 2012, Paper-1, (3, -1), 70]

सरल रेखा  $4x - 5y = 20$  के बिन्दुओं से वृत्त  $x^2 + y^2 = 9$  पर डाली गयी स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा (chord of contact) के मध्य बिन्दु का बिन्दु पथ (locus) निम्न है

(A\*)  $20(x^2 + y^2) - 36x + 45y = 0$   
 (C)  $36(x^2 + y^2) - 20x + 45y = 0$

(B)  $20(x^2 + y^2) + 36x - 45y = 0$   
 (D)  $36(x^2 + y^2) + 20x - 45y = 0$

**Sol.** **Ans (A)**

Circle  $x^2 + y^2 = 9$ ; line  $4x - 5y = 20$

$$P\left(t, \frac{4t-20}{5}\right)$$

equation of chord AB whose mid point is M (h, k)

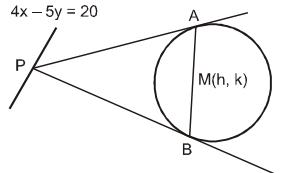
$$T = S_1 \Rightarrow hx + ky = h^2 + k^2 \quad \dots\dots(1)$$

equation of chord of contact AB with respect to P.

$$T = 0 \Rightarrow tx + \left(\frac{4t-20}{5}\right)y = 9 \quad \dots\dots(2)$$

comparing equation (1) and (2)

$$\frac{h}{t} = \frac{5k}{4t-20} = \frac{h^2 + k^2}{9}$$



on solving

$$45k = 36h - 20h^2 - 20k^2 \Rightarrow \text{Locus is } 20(x^2 + y^2) - 36x + 45y = 0$$

**Hindi.** वृत्त है:  $x^2 + y^2 = 9$ ; सरल रेखा है:  $4x - 5y = 20$

$$P\left(t, \frac{4t-20}{5}\right)$$

जीवा AB जिसका मध्य बिन्दु M (h, k) है का समीकरण है :

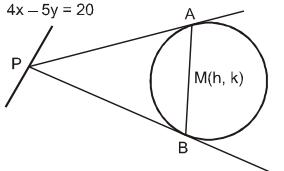
$$T = S_1 \Rightarrow hx + ky = h^2 + k^2 \quad \dots\dots(1)$$

बिन्दु P के सापेक्ष स्पर्श जीव AB का समीकरण

$$T = 0 \Rightarrow tx + \left(\frac{4t-20}{5}\right)y = 9 \quad \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) व (2) की तुलना करने पर

$$\frac{h}{t} = \frac{5k}{4t-20} = \frac{h^2+k^2}{9}$$



हल करने पर

$$45k = 36h - 20h^2 - 20k^2 \Rightarrow \text{बिन्दुपथ है : } 20(x^2 + y^2) - 36x + 45y = 0$$

**Ans. (A)**

### Paragraph for Question Nos. 5 to 6

प्रश्न 5 से 6 के लिए अनुच्छेद

A tangent PT is drawn to the circle  $x^2 + y^2 = 4$  at the point  $P(\sqrt{3}, 1)$ . A straight line L, perpendicular to PT is a tangent to the circle  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ . [IIT-JEE 2012, Paper-2, (3, -1), 66]

स्पर्श-रेखा PT वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  को बिन्दु  $P(\sqrt{3}, 1)$  पर स्पर्श करती है। सरल रेखा L, PT के लम्बवत् है और वृत्त  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$  की स्पर्श-रेखा है।

5. A common tangent of the two circles is

दोनों वृत्तों की एक उभयनिष्ठ स्पर्श-रेखा (common tangent) निम्न है

$$(A) x = 4 \quad (B) y = 2 \quad (C) x + \sqrt{3}y = 4 \quad (D^*) x + 2\sqrt{3}y = 6$$

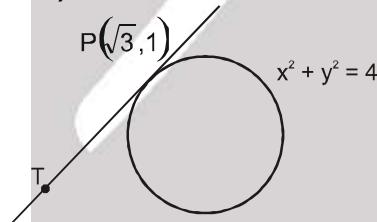
**Ans. (D)**

6. A possible equation of L is

L का एक सम्भावित समीकरण निम्न है –

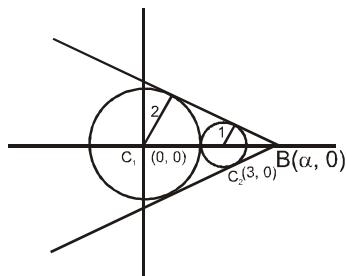
$$(A^*) x - \sqrt{3}y = 1 \quad (B) x + \sqrt{3}y = 1 \quad (C) x - \sqrt{3}y = -1 \quad (D) x + \sqrt{3}y = 5$$

**Sol.** (Q. No.5 & 6)



$$\text{Equation of tangent at } (\sqrt{3}, 1) \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 4$$

- 5.



B divides  $C_1 C_2$  in 2 : 1 externally

$$\therefore B(6, 0)$$

Hence let equation of common tangent is

$$y - 0 = m(x - 6) \Rightarrow mx - y - 6m = 0$$

length of  $\perp'$  dropped from center  $(0, 0)$  = radius

$$\left| \frac{6m}{\sqrt{1+m^2}} \right| = 2 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\therefore$  equation is  $x + 2\sqrt{2}y = 6$  or  $x - 2\sqrt{2}y = 6$

6. Equation of L is

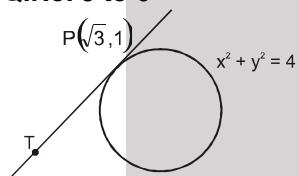
$$x - y\sqrt{3} + c = 0$$

length of perpendicular dropped from centre = radius of circle

$$\therefore \left| \frac{3+C}{2} \right| = 1 \Rightarrow C = -1, -5$$

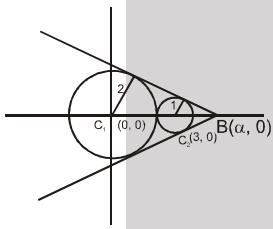
$$\therefore x - \sqrt{3}y = 1 \quad \text{or } x - \sqrt{3}y = 5$$

**Hindi. Q.No. 5 to 6**



स्पर्शरेखा का समीकरण  $(\sqrt{3}, 1)$  पर  $\Rightarrow \sqrt{3}x + y = 4$

- 5.



$B, C_1, C_2$  को  $2 : 1$  में बाह्य विभाजित करता है

$$\therefore B(6, 0)$$

अतः उभयनिष्ट स्पर्शरेखा का समीकरण है

$$y - 0 = m(x - 6) \Rightarrow mx - y - 6m = 0$$

(0, 0) से स्पर्शरेखा पर लम्ब की लम्बाई = त्रिज्या

$$\left| \frac{6m}{\sqrt{1+m^2}} \right| = 2 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

इसलिए समीकरण है  $x + 2\sqrt{2}y = 6$  या  $x - 2\sqrt{2}y = 6$

6. L का समीकरण है  $x - y\sqrt{3} + c = 0$

वृत्त के केन्द्र से डाले गए लम्ब की लम्बाई = वृत्त की त्रिज्या

$$\therefore \left| \frac{3+C}{2} \right| = 1 \Rightarrow C = -1, -5$$

$$\therefore x - \sqrt{3}y = 1 \quad \text{या} \quad x - \sqrt{3}y = 5$$

- 7.\* Circle(s) touching x-axis at a distance 3 from the origin and having an intercept of length  $2\sqrt{7}$  on y-axis is (are)

x-अक्ष को मूलबिन्दु से 3 दूरी पर स्पर्श करने वाला (वाले) तथा y-अक्ष  $2\sqrt{7}$  पर अन्तःखण्ड बनाने वाला (वाले) वृत्त है (हैं)

[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, -1)/60]

[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, -1)/60]

$$(A^*) x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$$

$$(B) x^2 + y^2 - 6x + 7y + 9 = 0$$

$$(C^*) x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$$

$$(D) x^2 + y^2 - 6x - 7y + 9 = 0$$

**Sol. (AC)**

$$\text{Let माना } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \Rightarrow g^2 - c = 0 \Rightarrow g^2 = c \quad \dots(i)$$

$$2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{7} \Rightarrow f^2 - c = 7 \quad \dots(ii)$$

$$9 + 0 + 6g + 0 + c = 0 \Rightarrow 9 + 6g + g^2 = 0 \Rightarrow (g + 3)^2 = 0$$

$$g = -3 \quad \therefore c = 9$$

$$f^2 = 16 \Rightarrow f = \pm 4$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 6x \pm 8y + 9 = 0$$

- 8.\*** A circle S passes through the point (0, 1) and is orthogonal to the circles  $(x - 1)^2 + y^2 = 16$  and  $x^2 + y^2 = 1$ . Then

[JEE (Advanced) 2014, Paper-1, (3, 0)/60]

(A) radius of S is 8

(B\*) radius of S is 7

(C\*) centre of S is  $(-7, 1)$ (D) centre of S is  $(-8, 1)$ 

एक वृत्त S बिन्दु  $(0, 1)$  से गुजरता है तथा वृत्तों  $(x - 1)^2 + y^2 = 16$  एवं  $x^2 + y^2 = 1$  के लम्बकोणीय (orthogonal) हैं, तब

(A) S की त्रिज्या (radius) 8 है।

(B\*) S की त्रिज्या 7 है।

(C\*) S का केंद्र  $(-7, 1)$  है।(D) S का केंद्र  $(-8, 1)$  है।**Ans. (BC)****Sol.** Let the circle be

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots(1)$$

given circles

$$x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0 \quad \dots(2)$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \dots(3)$$

(1) &amp; (2) are orthogonal

$$\Rightarrow -g + 0 = \frac{c - 15}{2}$$

$$0 + 0 = \frac{c - 1}{2}$$

$$\Rightarrow c = 1 \text{ & } g = 7$$

so the circle is

$$x^2 + y^2 + 14x + 2fy + 1 = 0 \quad \text{it passes through}$$

$$(0, 1) \Rightarrow 0 + 1 + 0 + 2f + 1 = 0$$

$$f = -1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 14x - 2y + 1 = 0$$

Centre  $(-7, 1)$ 

radius = 7

**Hindi.** माना कि वृत्त  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$   $\dots(1)$ दिये गये वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$   $\dots(2)$ 

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \dots(3)$$

(1) और (2) लाम्बिक हैं।

$$\Rightarrow -g + 0 = \frac{c - 15}{2}$$

$$0 + 0 = \frac{c - 1}{2}$$

$$\Rightarrow c = 1 \text{ & } g = 7$$

इसलिए वृत्त है।

$$x^2 + y^2 + 14x + 2fy + 1 = 0 \quad \text{यह गुजरता है।}$$

$$(0, 1) \Rightarrow 0 + 1 + 0 + 2f + 1 = 0$$

$$\Rightarrow f = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 14x - 2y + 1 = 0$$

केंद्र  $(-7, 1)$  त्रिज्या = 7

- 9.** The circle  $C_1 : x^2 + y^2 = 3$ , with centre at O, intersects the parabola  $x^2 = 2y$  at the point P in the first quadrant. Let the tangent to the circle  $C_1$  at P touches other two circles  $C_2$  and  $C_3$  at  $R_2$  and  $R_3$ ,

respectively. Suppose  $C_2$  and  $C_3$  have equal radii  $2\sqrt{3}$  and centres  $Q_2$  and  $Q_3$ , respectively. If  $Q_2$  and  $Q_3$  lie on the y-axis, then

[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (4, -2)/62]

(A)  $Q_2 Q_3 = 12$

(B)  $R_2 R_3 = 4\sqrt{6}$

(C) area of the triangle  $OR_2 R_3$  is  $6\sqrt{2}$

(D) area of the triangle  $PQ_2 Q_3$  is  $4\sqrt{2}$

वर्त  $C_1 : x^2 + y^2 = 3$ , जिसका केन्द्रबिन्दु O है, परवलय (parabola)  $x^2 = 2y$  को प्रथम चतुर्थां (first quadrant) में बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित (intersect) करता है। माना कि वर्त  $C_1$  के बिन्दु P पर खींची गई स्परिखा (tangent) अन्य दो वर्तों  $C_2$  और  $C_3$  को क्रमाः बिन्दुओं  $R_2$  तथा  $R_3$  पर स्पर्श करती हैं। मान लीजिये कि  $C_2$  तथा  $C_3$  दोनों की त्रिज्याएँ 2 के बराबर हैं और उनके केन्द्र बिन्दु क्रमाः  $Q_2$  तथा  $Q_3$  हैं। यदि  $Q_2$  तथा  $Q_3$  y-अक्ष पर स्थित हैं, तब

(A)  $Q_2 Q_3 = 12$

(B)  $R_2 R_3 = 4\sqrt{6}$

(C) त्रिभुज  $OR_2 R_3$  का क्षेत्रफल  $6\sqrt{2}$  है

(D) त्रिभुज  $PQ_2 Q_3$  का क्षेत्रफल  $4\sqrt{2}$  है

**Ans.** (A,B,C)

**Sol.**  $y^2 + 2y - 3 = 0$

$y = 1, y = -3$

$p(\sqrt{2}, -1)$

tangent is  $x\sqrt{2} + y = 3$

$C_2(0, \alpha) \perp \text{distance} = 2\sqrt{3}$

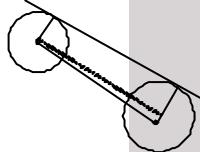
$$\frac{|\alpha - 3|}{3} = 2\sqrt{3}$$

$\alpha - 3 = \pm 6$

$\alpha = 3, \pm 6$

$\alpha = 9, -3$

$(0, 9), (0, -3)$



$$L_{DCT} = \sqrt{(C_2 C_1)^2 - (R + r)^2} = \sqrt{144 - 16 \times 3} = 4\sqrt{6}$$

$$(C) A = \frac{1}{2} R_3 R_2 \times \perp \text{from } (0,0) = 2\sqrt{6} \times \frac{3}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{2}$$

$$(D) \text{Area} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Area of } \Delta PQ_2 Q_3 \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \left| \frac{1}{2} \sqrt{2}(9+3) \right| = 6\sqrt{2}$$

- 10\*. Let RS be the diameter of the circle  $x^2 + y^2 = 1$ , where S is the point  $(1, 0)$ . Let P be a variable point (other than R and S) on the circle and tangents to the circle at S and P meet at the point Q. The normal to the circle at P intersects a line drawn through Q parallel to RS at point E. Then the locus of E passes through the point(s)

[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (4, -2)/62]

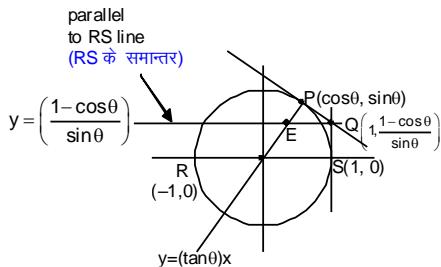
माना कि RS वर्त  $x^2 + y^2 = 1$  का व्यास (diameter) है, जहाँ कि S बिन्दु  $(1, 0)$  है। माना कि P (R और S से भिन्न) वर्त पर एक चर (variable) बिन्दु है और वर्त पर बिन्दुओं S और P पर खींची गई स्परिखाएँ (tangents) बिन्दु Q पर मिलती हैं। वर्त के बिन्दु P पर अभिलम्ब (normal) उस रेखा को, जो Q से गुजरती है तथा RS के समानान्तर (parallel) है, बिन्दु E पर प्रतिच्छेदित करता है। तब E का बिन्दुपथ (locus) निम्न बिन्दु(ओं) से गुजरता है—

(A)  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(B)  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(C)  $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(D)  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

**Ans.** (A,C)**Sol.**

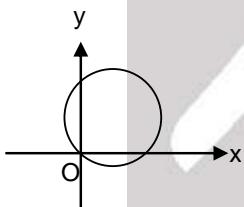
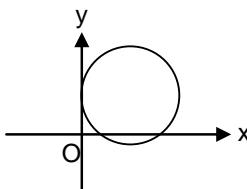
$$E\left(\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta\tan\theta}, \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right) \Rightarrow E\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\theta}, \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{2}\right)$$

$$\text{Let माना } h = \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\tan\theta} \text{ and और } k = \frac{\tan\frac{\theta}{2}}{2} \quad \therefore h = \frac{k}{\tan\theta} \quad \therefore \tan\frac{\theta}{2} = \frac{k}{h}$$

$$\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{k}{h} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2k}{1-k^2}\right) = \frac{k}{h} \quad \therefore \quad 2xy = y(1-y^2)$$

11. For how many values of p, the circle  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$  and the coordinate axes have exactly three common points? [JEE(Advanced) 2017, Paper-1,(3, 0)/61]

p के कितने मानों के लिये वृत्त (circle)  $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$  एवम् निर्देशांक अक्षों (coordinate axes) में केवल तीन बिन्दु उभयनिष्ठ (common) हैं?

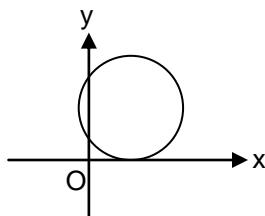
**Ans.** (2)**Sol.** **Case-I** Passing through origin  $\Rightarrow p = 0$ **Case-II** Touches y-axis and cuts x-axis

$$f^2 - c = 0 \quad \& \quad g^2 - c > 0$$

$$4 + p = 0 \quad 1 + p > 0$$

$$p = -4$$

**Not possible**

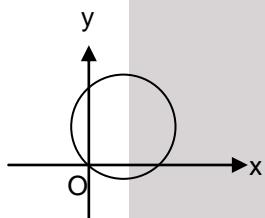
**Case-III** Touches x-axis and cuts y-axis

$$f^2 - c > 0 \text{ & } g^2 - c = 0$$

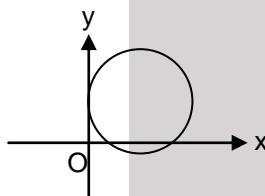
$$4 + p > 0 \quad 1 + p = 0$$

So two value of  $p$  are possible

**Hindi Case-I** मूल बिन्दु से गुजरता है  $\Rightarrow P = 0$



**Case-II** y-अक्ष को स्पष्ट करता है, तथा x-अक्ष को काटता है।



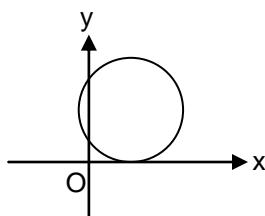
$$f^2 - c = 0 \text{ & } g^2 - c > 0$$

$$4 + p = 0 \quad 1 + p > 0$$

$$p = -4$$

संभव नहीं

**Case-III** x-अक्ष को स्पष्ट करता है, तथा y-अक्ष को काटता है।



$$f^2 - c > 0 \text{ & } g^2 - c = 0$$

$$4 + p > 0 \quad 1 + p = 0$$

अतः  $p$  के दो मान सम्भव हैं।

**PARAGRAPH "X" अनुच्छेद "X"**

[JEE(Advanced) 2018, Paper-1, (3, -1)/60]

Let S be the circle in the xy-plane defined by the equation  $x^2 + y^2 = 4$ .

(*There are two questions based on PARAGRAPH "X", the question given below is one of them*)

मानकि S एक वृत्त (circle) है जो xy-समतल (plane) में समीकरण (equation)  $x^2 + y^2 = 4$  के द्वारा परिभ्रषित है।

(अनुच्छेद "X" पर दो प्रश्न आधारित हैं, नीचे दिया गया प्रश्न उनमें से एक है)

12. Let  $E_1E_2$  and  $F_1F_2$  be the chords of S passing through the point  $P_0(1, 1)$  and parallel to the x-axis and the y-axis, respectively. Let  $G_1G_2$  be the chord of S passing through  $P_0$  and having slope  $-1$ . Let the tangents to S at  $E_1$  and  $E_2$  meet at  $E_3$ , the tangents to S at  $F_1$  and  $F_2$  meet at  $F_3$ , and the tangents to S at  $G_1$  and  $G_2$  meet at  $G_3$ . Then, then, the points  $E_3$ ,  $F_3$ , and  $G_3$  lie on the curve

माना कि  $E_1E_2$  और  $F_1F_2$  वृत्त S की ऐसी जीवाएं (chords) हैं जो बिन्दु  $P_0(1, 1)$  से गुजरती हैं और क्रमशः x-अक्ष (axis) व y-अक्ष के समान्तर (parallel) हैं। मानकि  $G_1G_2$ , S की वह जीवा है जो  $P_0$  से गुजरती है और जिसकी प्रवणता (slope)  $-1$  है। मानकि  $E_1$  और  $E_2$  पर S की स्पर्शियां (tangents)  $E_3$  पर मिलती हैं,  $F_1$  और  $F_2$  पर S की स्पर्शियां  $F_3$  पर मिलती हैं, तथा  $G_1$  और  $G_2$  पर S की स्पर्शियां  $G_3$  पर मिलती हैं। तब वह वक्र (curve) जिस पर बिन्दु  $E_3$ ,  $F_3$  और  $G_3$  स्थित हैं, है

- (A)  $x + y = 4$       (B)  $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$       (C)  $(x - 4)(y - 4) = 4$       (D)  $xy = 4$

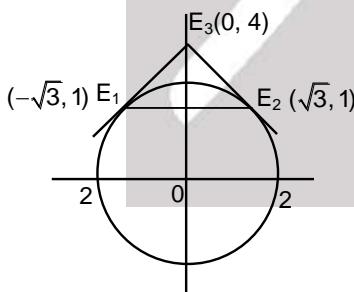
**Ans.** (A)

**Sol.** Tangent at  $E_1$  and  $E_2$  are  $-\sqrt{3}x + y = 4$  and  $\sqrt{3}x + y = 4$

$E_1$  और  $E_2$  पर स्पर्श रेखाएं  $-\sqrt{3}x + y = 4$  और  $\sqrt{3}x + y = 4$

They intersect at  $E_3(0, 4)$

वे  $E_3(0, 4)$  पर मिलती हैं।



$F_1(1, \sqrt{3})$ ,  $F_2(1, -\sqrt{3})$ ,  $F_3(4, 0)$

$G_1(0, 2)$ ,  $G_2(2, 0)$ ,  $G_3(2, 2)$

$E_3$ ,  $F_3$ ,  $G_3$  lie on line  $x + y = 4$

$E_3$ ,  $F_3$ ,  $G_3$  रेखा  $x + y = 4$  पर स्थित हैं।

13. Let P be a point on the circle S with both coordinates being positive. Let the tangent to S at P intersect the coordinate axes at the points M and N. Then, the mid-point of the line segment MN must lie on the curve

माना कि P वृत्त S पर स्थित एक ऐसा बिन्दु है जिसके दोनों निर्देशांक (coordinates) धनात्मक (positive) हैं। माना कि वृत्त S के बिन्दु P पर स्पर्शी (tangent) निर्देशांक अक्षों (coordinate axes) को बिन्दुओं M और N पर प्रतिच्छेद (intersects) करती है। तब वह वक्र (curve) जिस पर रेखाखण्ड (line segment) MN का मध्य बिन्दु (mid-point) अनिवार्य रूप से स्थित है, हैं

- (A)  $(x + y)^2 = 3xy$       (B)  $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{4/3}$   
 (C)  $x^2 + y^2 = 2xy$       (D)  $x^2 + y^2 = x^2y^2$

Ans. (D)

Sol. Let माना  $P(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$

Tangent is  $x \cos \theta + y \sin \theta = 2$

$$M\left(\frac{2}{\cos \theta}, 0\right), N\left(0, \frac{2}{\sin \theta}\right)$$

$$x = \frac{1}{\cos \theta} \text{ and और } y = \frac{1}{\sin \theta} \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2y^2$$

- 14\*. Let T be the line passing through the points P(-2, 7) and Q(2, -5). Let  $F_1$  be the set of all pairs of circles ( $S_1, S_2$ ) such that T is tangent to  $S_1$  at P and tangent to  $S_2$  at Q, and also such that  $S_1$  and  $S_2$  touch each other at a point, say, M. Let  $E_1$  be the set representing the locus of M as the pair ( $S_1, S_2$ ) varies in  $F_1$ . Let the set of all straight line segments joining a pair of distinct points of  $E_1$  and passing through the point R(1, 1) be  $F_2$ . Let  $E_2$  be the set of the mid-points of the line segments in the set  $F_2$ . Then, which of the following statement(s) is (are) TRUE [JEE(Advanced) 2018, Paper-2, (4, -2)/60]

- (A) The point (-2, 7) lies in  $E_1$   
 (B) The point  $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$  does NOT lie in  $E_2$   
 (C) The point  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  lies in  $E_2$   
 (D) The point  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$  does NOT lie in  $E_1$

माना कि T, बिन्दुओं P(-2, 7) और Q(2, -5) से गुजरने वाली रेखा (line) है। माना कि  $F_1$  उन सभी वृत्त युग्मो (pairs of circles) ( $S_1, S_2$ ) का समुच्चय (set) है कि रेखा T,  $S_1$  के बिन्दु P पर और  $S_2$  के बिन्दु Q पर स्पर्शी (tangent) है तथा वृत्त  $S_1$  व  $S_2$  एक दूसरे को बिन्दु, माना कि M, पर स्पर्श करते हैं। जब युग्म ( $S_1, S_2$ ),  $F_1$  में विचरित (varies) करता है तो माना कि समुच्चय (set)  $E_1$ , बिन्दु M के बिन्दुपथ (locus) को दर्शाता है। माना कि  $F_2$  उन सरल रेखा-खण्डों (straight line segments) का समुच्चय है, जो बिन्दु R(1, 1) से गुजरती है तथा  $E_1$  के दो भिन्न बिन्दुओं के युग्म (pair of distinct points) को जोड़ती हैं माना कि  $E_2$ , समुच्चय  $F_2$  के रेखाखण्डों के मध्य बिन्दुओं का समुच्चय है। तब निम्नलिखित में से कौन सा (से) कथन सत्य है (है) ?

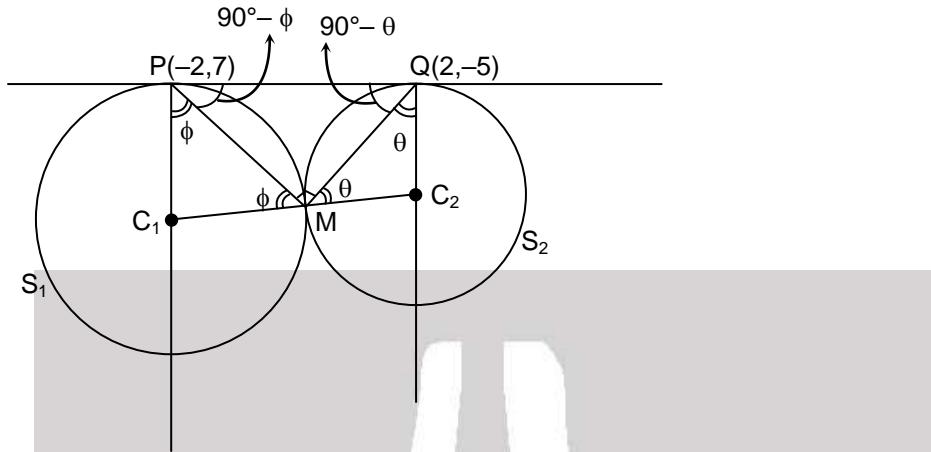
- (A) बिन्दु (-2, 7) समुच्चय  $E_1$  में स्थित है।      (B) बिन्दु  $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$  समुच्चय  $E_2$  में स्थित नहीं है।

(C) बिन्दु  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  समुच्चय  $E_2$  में स्थित है।

(D) बिन्दु  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$  समुच्चय  $E_1$  में स्थित नहीं है।

**Ans. (BD)**

**Sol.**



Let  $C_1$  and  $C_2$  be the centre of circle  $S_1$  and  $S_2$  respectively

माना  $C_1$  और  $C_2$  क्रमशः वृत्त  $S_1$  और  $S_2$  के केन्द्र हैं।

Let माना  $\angle C_2QM = \angle C_2MQ = \theta \Rightarrow \angle QC_2M = \pi - 2\theta$

Let माना  $\angle C_1PM = \angle C_1MP = \phi \Rightarrow \angle PC_1M = \pi - 2\phi$

Now अब  $\angle QC_2M + \angle PC_1M = \pi \Rightarrow \pi - 2\theta + \pi - 2\phi = \pi \Rightarrow \theta + \phi = \pi/2$

Now अब  $\angle QMP = \pi - \angle QMC_2 - \angle PMC_1 = \pi - (\theta + \phi) = \pi - \pi/2 = \pi/2$

hence locus equation of variable point M is  $(x+2)(x-2) + (y-7)(y+5) = 0$

अतः चर बिन्दु M का बिन्दुपथ समीकरण  $(x+2)(x-2) + (y-7)(y+5) = 0$

but locus of M does not contain point P and Q because P is included when radius of  $S_1$  is zero and circle  $S_2$  becomes straight line which is impossible. Q is included when radius of  $S_2$  is zero and circle  $S_1$  becomes straight line which is also impossible.

परन्तु M का बिन्दुपथ P और Q को नहीं रखता है क्योंकि P शामिल होगा जब  $S_1$  की त्रिज्या शून्य है और वृत्त  $S_2$  एक सरल रेखा हो जाता है जो असंभव है। Q शामिल होगा जब  $S_2$  की त्रिज्या शून्य है और वृत्त  $S_1$  एक सरल रेखा हो जाता है जो असंभव है।

so set  $E_1$  does not contain point  $P(-2, 7)$  and  $Q(2, -5)$

इसलिए समुच्चय  $E_1$  बिन्दु  $P(-2, 7)$  और  $Q(2, -5)$  को नहीं रखता है।

Locus of mid-points of chords passing through  $(1, 1)$  is  $h + K - (1 + k) = h^2 + k^2 - 2K$

$(1, 1)$  से गुजरने वाली जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ  $h + K - (1 + k) = h^2 + k^2 - 2K$

$$\Rightarrow h^2 + K^2 - 2K - h + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$$

Now equation of line passing through  $P(-2, 7)$  and  $R(1, 1)$  is  $\frac{y-1}{x-1} = \frac{6}{-3} \Rightarrow y + 2x - 3 = 0$

अब रेखा का समीकरण जो बिन्दु  $P(-2, 7)$  और  $R(1, 1)$  से गुजरती है  $\frac{y-1}{x-1} = \frac{6}{-3} \Rightarrow y + 2x - 3 = 0$

Let centre of  $x^2 + y^2 - 2y - 39 = 0$  is  $C_3(0, 1)$   $\Rightarrow$  centre of locus of M is  $C_3(0, 1)$

माना वृत्त  $x^2 + y^2 - 2y - 39 = 0$  का केन्द्र  $C_3(0, 1)$  है।  $\Rightarrow$  बिन्दु M के बिन्दुपथ का केन्द्र  $C_3(0, 1)$  है।

Now foot of  $C_3(0, 1)$  on line  $y + 2x - 3 = 0$  is  $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$ . which is mid-point of chord PR of circle  $x^2 + y^2 - 2y - 39 = 0$

अब  $C_3(0, 1)$  का लम्बपाद  $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$  रेखा  $y + 2x - 3 = 0$  पर स्थित है जो वृत्त  $x^2 + y^2 - 2y - 39 = 0$  की जीवा PR का मध्य बिन्दु है।

But if P is not the part of locus of M then PQ is not the chord of locus of M.

परन्तु यदि P, M के बिन्दुपथ का भाग नहीं है, तब PQ, बिन्दु M के बिन्दुपथ की जीवा नहीं है।

So point  $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$  does not lies in set  $E_2$

इसलिए बिन्दु  $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$  समुच्चय  $E_2$  में स्थित नहीं है।

## PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

### भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षों) के प्रश्न

- The circle  $x^2 + y^2 = 4x + 8y + 5$  intersects the line  $3x - 4y = m$  at two distinct points if  
**[AIEEE 2010, (4, -1), 144]**  
 वृत्त  $x^2 + y^2 = 4x + 8y + 5$  रेखा  $3x - 4y = m$  को दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करेगा यदि  
 (1\*)  $-35 < m < 15$       (2)  $15 < m < 65$       (3)  $35 < m < 85$       (4)  $-85 < m < -35$   
**Ans.** (1)  
**Sol.**  $r = \sqrt{4+16+5} = 5 \Rightarrow \left| \frac{6-16-m}{5} \right| < 5 \Rightarrow -25 < m + 10 < 25 \Rightarrow -35 < m < 15$   
 Hence correct option is (1) अतः सही विकल्प (1) है।
- The two circles  $x^2 + y^2 = ax$  and  $x^2 + y^2 = c^2 (c > 0)$  touch each other if :  
**[AIEEE-2011, I, (4, -1), 120]**  
 दो वृत्त  $x^2 + y^2 = ax$  तथा  $x^2 + y^2 = c^2 (c > 0)$  स्पर्श करते हैं यदि  
 (1)  $2|a| = c$       (2\*)  $|a| = c$       (3)  $a = 2c$       (4)  $|a| = 2c$   
**Sol.** (2)  
 $x^2 + y^2 = ax \dots\dots\dots(1)$

$\Rightarrow$  centre  $c_1 \left( -\frac{a}{2}, 0 \right)$  and radius  $r_1 = \left| \frac{a}{2} \right|$

$$x^2 + y^2 = c^2 \dots\dots\dots(2)$$

$\Rightarrow$  centre  $c_2 (0, 0)$  and radius  $r_2 = c$ , both touch each other iff

$$|c_1 c_2| = r_1 \pm r_2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \left( \pm \frac{a}{2} \pm c \right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \pm |a| c + c^2 \Rightarrow |a| = c$$

**Hindi**  $x^2 + y^2 = ax \dots\dots\dots(1)$

$\Rightarrow$  केन्द्र  $c_1 \left( -\frac{a}{2}, 0 \right)$  तथा त्रिज्या  $r_1 = \left| \frac{a}{2} \right|$

$$x^2 + y^2 = c^2 \dots\dots\dots(2)$$

$\Rightarrow$  केन्द्र  $c_2 (0, 0)$  तथा त्रिज्या  $r_2 = c$

दोनों एक दूसरे को स्पर्श करेंगे यदि और केवल यदि

$$|c_1 c_2| = r_1 \pm r_2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \left( \pm \frac{a}{2} \pm c \right)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \pm |a| c + c^2 \Rightarrow |a| = c$$

- 3.** The equation of the circle passing through the point  $(1, 0)$  and  $(0, 1)$  and having the smallest radius is -  
उस वृत्त का समीकरण जो बिन्दुओं  $(1, 0)$  तथा  $(0, 1)$  से होकर जाता है तथा जिसकी त्रिज्या चूनतम् है, है :

$$(1) x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \quad (2^*) x^2 + y^2 - x - y = 0 \quad [\text{AIEEE-2011, II, (4, -1), 120}]$$

$$(3) x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0 \quad (4) x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$$

**Sol.** (2)

Circle whose diametric end points are  $(1, 0)$  and  $(0, 1)$  will be of smallest radius.

वह वृत्त जिसके व्यास के सिरे  $(1, 0)$  तथा  $(0, 1)$  हैं, चूनतम् त्रिज्या वाला वृत्त होगा।

$$(x - 1)(x - 0) + (y - 0)(y - 1) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$$

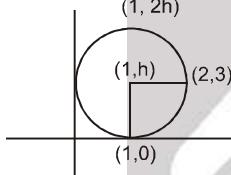
- 4.** The length of the diameter of the circle which touches the  $x$ -axis at the point  $(1, 0)$  and passes through the point  $(2, 3)$  is : [AIEEE- 2012, (4, -1), 120]

एक वृत्त जो  $x$ -अक्ष को बिंदु  $(1, 0)$  पर स्पर्श करता है तथा बिंदु  $(2, 3)$  से होकर जाता है, के व्यास की लंबाई है :

$$(1^*) \frac{10}{3} \quad (2) \frac{3}{5} \quad (3) \frac{6}{5} \quad (4) \frac{5}{3}$$

**Sol.** Ans. (1)

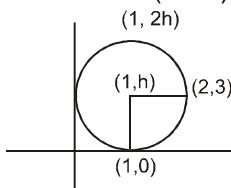
$$\text{Now } h^2 = (1 - 2)^2 + (h - 3)^2 \Rightarrow 0 = 1 - 6h + 9$$



$$6h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{3}$$

$$\text{Now diameter is } 2h = \frac{10}{3}$$

**Hindi.** अब  $h^2 = (1 - 2)^2 + (h - 3)^2 \Rightarrow 0 = 1 - 6h + 9$



$$6h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{3}$$

अब व्यास  $2h = \frac{10}{3}$  है।

5. The circle passing through  $(1, -2)$  and touching the axis of  $x$  at  $(3, 0)$  also passes through the point  
**[AIEEE - 2013, (4, -1), 120]**

एक वृत्त जो  $(1, -2)$  से होकर जाता है, तथा  $x$ -अक्ष को  $(3, 0)$  पर स्पर्श करता है, जिस अन्य बिन्दु से होकर जाता है, वह है—

(1)  $(-5, 2)$

(2)  $(2, -5)$

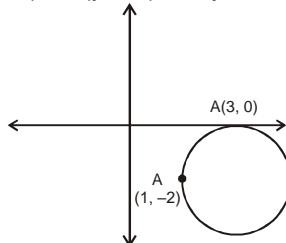
(3\*)  $(5, -2)$

(4)  $(-2, 5)$

**Sol.**

(3)

Let the equation of circle be  $(x - 3)^2 + (y - 0)^2 + \lambda y = 0$



As it passes through  $(1, -2)$

$$\therefore (1 - 3)^2 + (-2)^2 + \lambda(-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

$\therefore$  equation of circle is

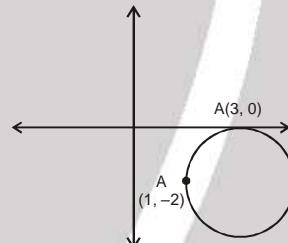
$$(x - 3)^2 + y^2 - 8 = 0$$

so  $(5, -2)$  satisfies equation of circle

**Hindi.**

(3)

माना वृत्त का समीकरण  $(x - 3)^2 + (y - 0)^2 + \lambda y = 0$



दिया है कि यह  $(1, -2)$  से गुजरता है

$$\therefore (1 - 3)^2 + (-2)^2 + \lambda(-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

$\therefore$  वृत्त का समीकरण है

$$(x - 3)^2 + y^2 - 8 = 0$$

$(5, -2)$  वृत्त के समीकरण को संतुष्ट करता है।

6. Let  $C$  be the circle with centre at  $(1, 1)$  and radius = 1. If  $T$  is the circle centred at  $(0, y)$ , passing through origin and touching the circle  $C$  externally, then the radius of  $T$  is equal to :

माना  $C$  एक वृत्त है जिसका केंद्र  $(1, 1)$  पर है तथा त्रिज्या = 1 है। यदि  $T$  केंद्र  $(0, y)$  वाला वृत्त है जो मूल बिन्दु से हो कर जाता है तथा वृत्त  $C$  को बाह्य रूप से स्पर्श करता है तो  $T$  की त्रिज्या बराबर है :

**[JEE(Main) 2014, (4, -1), 120]**

(1)  $\frac{1}{2}$

(2\*)  $\frac{1}{4}$

(3)  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

(4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Sol.**

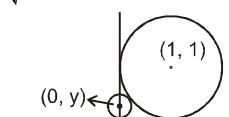
**Ans. (2)**

$c_1 (1, 1) \quad r_1 = 1$

$c_2 (0, y) \quad r_2 = |y|$

$c_1 c_2 = r_1 + r_2$

$$\sqrt{(1-0)^2 + (1-y)^2} = 1 + |y|$$



$$2 - 2y + y^2 = y^2 + 2|y| + 1$$



9. The centres of those circles which touch the circle,  $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$ , externally and also touch the  $x$ -axis, lie on : [JEE(Main) 2016, (4, - 1), 120]

- (1) an ellipse which is not a circle (2) a hyperbola  
(3) a parabola (4) a circle

उन वृत्तों के केन्द्र, जो वृत्त  $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$ , को बाह्य रूप से स्पर्श करते हैं तथा  $x$ -अक्ष को भी स्पर्श करते हैं, स्थित हैं :

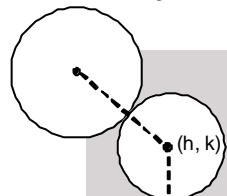
- (1) एक दीर्घवत्त पर जो वृत्त नहीं है। (2) एक अतिपरवलय पर।  
(3) एक परवलय पर। (4) एक वृत्त पर।

**Ans.** (3)

**Sol.** Parabola (परवलय)

Property : distance from a fixed point & fixed line is equal

गुणधर्म : स्थिर बिन्दु तथा स्थिर रेखा से दूरी समान है

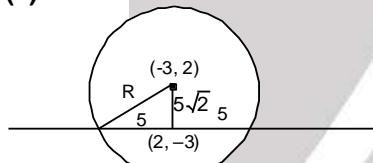


10. If one of the diameters of the circle, given by the equation,  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ , is a chord of a circle S, whose centre is at  $(-3, 2)$ , then the radius of S is : [JEE(Main) 2016, (4, - 1), 120]

यदि समीकरण,  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$  द्वारा प्रदत्त एक वृत्त का एक व्यास एक अन्य वृत्त S, जिसका केन्द्र  $(-3, 2)$  है, की जीवा है, तो वृत्त S की त्रिज्या है :

- (1)  $5\sqrt{3}$  (2) 5 (3) 10 (4)  $5\sqrt{2}$

**Ans.** (1)



**Sol.**

$$r_1 = \sqrt{4+9+12} = 5 \Rightarrow R = \sqrt{25+50} = 5\sqrt{2}$$

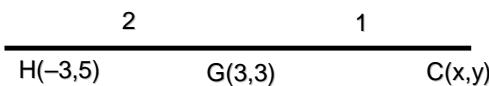
11. Let the orthocenter and centroid of a triangle be A  $(-3, 5)$  and B  $(3, 3)$  respectively. If C is the circumcentre of this triangle, then the radius of the circle having line segment AC as diameter, is :

[JEE(Main) 2018, (4, - 1), 120]

माना एक त्रिभुज का लम्ब केन्द्र तथा केन्द्रक क्रमशः A  $(-3, 5)$  तथा B  $(3, 3)$  है। यदि इस त्रिभुज का परिकेन्द्र C है, तो रेखाखण्ड AC को व्यास मान कर बनाए जाने वाले वृत्त की त्रिज्या है :

- (1\*)  $3\sqrt{\frac{5}{2}}$  (2)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$  (3)  $\sqrt{10}$  (4)  $2\sqrt{10}$

**Sol.** (1)



$$3 = \frac{2x - 3}{3} \Rightarrow x = 6$$

$$3 = \frac{2y+5}{3} \Rightarrow y = 2$$

$$\frac{AC}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{81+9} = \frac{1}{2} \sqrt{90} = \frac{3}{2} \sqrt{10}$$

$$r = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$$

12. Three circles of radii,  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) touch each other externally, If they have x-axis as a common tangent, then : [JEE(Main) 2019, Online (09-01-19), P-1 (4, -1), 120]

(1)  $a, b, c$  are in A.P.

$$(2) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$$

(3)  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  are in A.P.

$$(4) \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$$

$a, b, c$  ( $a < b < c$ ) त्रिज्याओं वाले तीन वृत्त परस्पर बाह्य स्पर्श करते हैं। यदि x-अक्ष उनकी एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है, तो :

(1)  $a, b, c$  एक समांतर श्रेढ़ी में हैं।

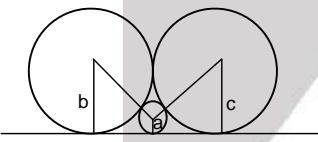
$$(2) \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$$

(3)  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  एक समांतर श्रेढ़ी में हैं।

$$(4) \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$$

Ans. (2)

Sol.



$$\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} + \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2} = \sqrt{(b+c)^2 - (b-c)^2}$$

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} = \sqrt{bc}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$



13. If a circle C passing through the point (4,0) touches the circle  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$  externally at the point (1, -1), then the radius of C is: [JEE(Main) 2019, Online (10-01-19), P-1 (4, -1), 120]

एक वृत्त C, बिंदु (4,0) से होकर जाता है तथा वृत्त  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$  को बिंदु (1, -1) पर बाह्य स्पर्श करता है, तो C की त्रिज्या है:

- (1)  $2\sqrt{5}$       (2)  $\sqrt{57}$       (3) 4      (4) 5

**Ans.** (4)

**Sol.** Tangent at (1, -1) is  $x(1) + y(-1) + 2(x+1) - 3(y-1) - 12 = 0$

$$\Rightarrow 3x - 4y = 7$$

Required circle is

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + \lambda(3x-4y-7) = 0$$

It pass through (4,0)

$$\Rightarrow 9 + 1 + \lambda(12 - 7) = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \text{required circle is } x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Radius} = \sqrt{16 + 25 - 16} = 5$$

**Hindi.** बिंदु (1, -1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण  $x(1) + y(-1) + 2(x+1) - 3(y-1) - 12 = 0$

$$\Rightarrow 3x - 4y = 7$$

आवश्यक वृत्त,  $(x-1)^2 + (y+1)^2 + \lambda(3x-4y-7) = 0$  है जो बिंदु (4,0) से गुजरता है।

$$\Rightarrow 9 + 1 + \lambda(12 - 7) = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \text{आवश्यक वृत्त } x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$$

$$\Rightarrow \text{त्रिज्या} = \sqrt{16 + 25 - 16} = 5$$

14. If a variable line,  $3x + 4y - \lambda = 0$  is such that the two circles  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  and  $x^2 + y^2 - 18x - 2y + 78 = 0$  are on its opposite sides, then the set of all values of  $\lambda$  is the interval:

यदि एक चर रेखा  $3x + 4y - \lambda = 0$  इस प्रकार है कि दो वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  तथा  $x^2 + y^2 - 18x - 2y + 78 = 0$  इसके दोनों ओर (opposite sides) हैं, तो  $\lambda$  के सभी मानों का समुच्चय निम्न में से कौनसा अन्तराल है –

[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19), P-1 (4, -1), 120]

- (1) (2, 17)      (2) [12, 21]      (3) [13, 23]      (4) (23, 31)

**Ans.** (2)

**Sol.**  $3x + 4y - \lambda = 0$

$$(7 - \lambda)(31 - \lambda) < 0 \quad \{\text{since centres lie opposite side}\}$$

$$(7 - \lambda)(31 - \lambda) < 0 \quad \{\text{चूंकि केन्द्र विपरीत भुजा पर स्थित है।}\}$$

$$\lambda \in (7, 31) \quad \dots\dots(1)$$

$$\left| \frac{7-\lambda}{5} \right| \geq 1 \quad \& \quad \left| \frac{31-\lambda}{5} \right| \geq 2$$

$$|7-\lambda| \geq 5 \text{ & और } |31-\lambda| \geq 10$$

$$\lambda \leq 2 \text{ or या } \lambda \geq 12 \quad \dots(2) \quad \& \text{ और } \lambda \leq 21 \text{ or या } \lambda \geq 41 \quad \dots(3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3)$$

$$\lambda \in [12, 21]$$

15. If a circle of radius R passes through the origin O and intersects the coordinate axes at A and B, then the locus of the foot of perpendicular from O on AB is -

यदि R त्रिज्या का एक वृत्त मूल बिन्दु O से होकर जाता है तथा निर्देशांक अक्षों को A और B पर काटता है, तो O से रेखा AB पर डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है—[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19), P-2 (4, - 1), 120]

$$(1) (x^2 + y^2)(x + y) = R^2xy$$

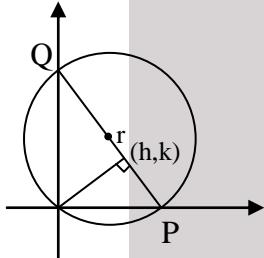
$$(2) (x^2 + y^2)^3 = 4R^2x^2y^2$$

$$(3) (x^2 + y^2)^2 = 4Rx^2y^2$$

$$(4) (x^2 + y^2)^2 = 4R^2x^2y^2$$

**Ans. (2)**

**Sol.**



Equation of line PQ

रेखा PQ का समीकरण

$$y - k = \frac{-h}{k}(x - h)$$

$$ky - k^2 = -hx + h^2$$

$$hx + ky = h^2 + k^2$$

$$A\left(\frac{h^2 + k^2}{k}, 0\right), B\left(0, \frac{h^2 + k^2}{k}\right)$$

$$O(0, 0)$$

$$AB = 2R$$

$$\frac{(h^2 + k^2)^2}{k^2} + \frac{(h^2 + k^2)^2}{h^2} = 4R^2 \Rightarrow (h^2 + k^2) \left( \frac{h^2 + k^2}{h^2 k^2} \right) = 4R^2; (x^2 + y^2)^3 = 4R^2 x^2 y^2$$

16. The sum of the squares of the lengths of the chords intercepted on the circle,  $x^2 + y^2 = 16$ , by the lines,  $x + y = n$ ,  $n \in N$ , where  $N$  is the set of all natural numbers, is :

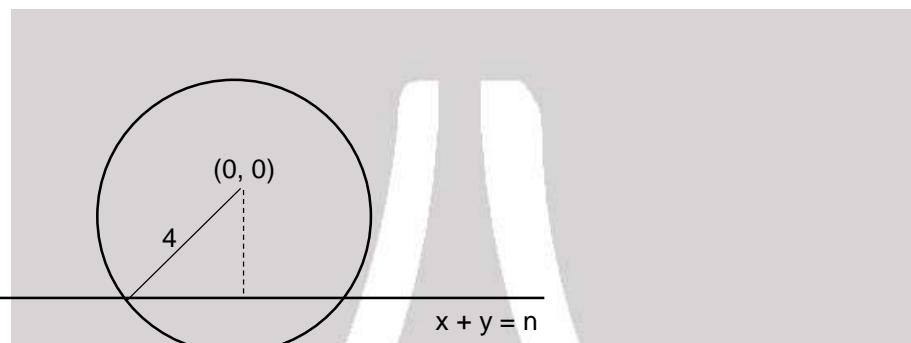
[JEE(Main) 2019, Online (08-04-19), P-1 (4, -1), 120]

वृत्त,  $x^2 + y^2 = 16$ , पर रेखाओं  $x + y = n$ ,  $n \in N$ , जहां  $N$  सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, द्वारा काटी गई जीवाओं की लम्बाईयों के वर्गों का योग है :

- (1) 105      (2) 210      (3) 320      (4) 160

**Ans.** (2)

**Sol.**  $p = \frac{n}{\sqrt{2}}$



to make the intercept (अन्तर्खण्ड बनाने के लिए)  $\frac{n}{\sqrt{2}} < 4 \Rightarrow n < 4\sqrt{2}$

Length of intercept अन्तर्खण्ड की लम्बाई  $= 2\sqrt{r^2 - p^2} = 2\sqrt{16 - n^2/2}$

Square of intercept अन्तर्खण्ड की लम्बाई का वर्ग  $= 4 \times (16 - \frac{n^2}{2})$ ,  $n \in N$

Sum of squares of intercept अन्तर्खण्ड की लम्बाई के वर्गों का योग

$$= 4 \times \left( \left( 16 - \frac{1}{2} \right) + \left( 16 - \frac{4}{2} \right) + \left( 16 - \frac{9}{2} \right) + \left( 16 - \frac{16}{2} \right) + \left( 16 - \frac{25}{2} \right) \right) = 2 \left( 80 - \frac{1}{2} \times 55 \right) = 210$$

17. If a tangent to the circle  $x^2 + y^2 = 1$  intersects the coordinate axes at distinct points P and Q, then the locus of the mid-point of PQ is : [JEE(Main) 2019, Online (09-04-19), P-1 (4, -1), 120] [Circle]

यदि वृत्त  $x^2 + y^2 = 1$  की एक सर्परेखा निर्देशांक अक्षों को भिन्न बिन्दुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करती है, तो PQ के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ (locus) है—

- (1)  $x^2 + y^2 - 4x^2y^2 = 0$     (2)  $x^2 + y^2 - 16x^2y^2 = 0$     (3)  $x^2 + y^2 - 2x^2y^2 = 0$     (4)  $x^2 + y^2 - 2xy = 0$

**Ans** (1)

**Sol.** Let equation of tangent to the given circle be  $x \cos\theta + y \sin\theta = 1$

The line meets x – axis at  $(\sec\theta, 0)$  & y - axis at  $(0, \operatorname{cosec}\theta)$ . If P (h, k) is the mid-point of this segment.

$$\Rightarrow 2h = \sec\theta \text{ & } 2k = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x^2y^2 = 0$$

18. The locus of the centres of the circles, which touch the circle,  $x^2 + y^2 = 1$  externally, also touch the y-axis and lie in the first quadrant, is :

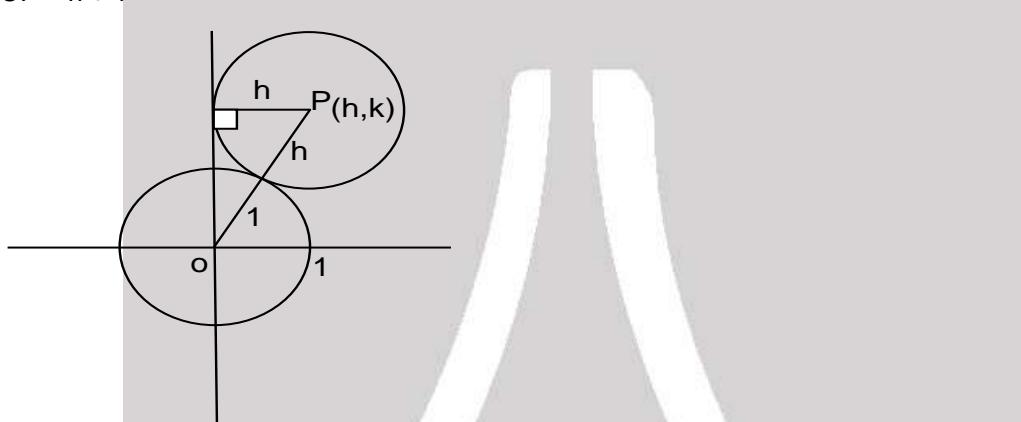
ऐसे वृत्तों, तो वृत्त  $x^2 + y^2 = 1$  को बाह्य स्पर्श करते हैं, y-अक्ष को भी स्पर्श करते हैं तथा प्रथम चतुर्थांश में स्थित हैं, के केन्द्रों का बिंदुपथ है—

(1)  $x = \sqrt{1+4y}, y \geq 0$     (2)  $y = \sqrt{1+4x}, x \geq 0$     (3)  $x = \sqrt{1+2y}, y \geq 0$     (4)  $y = \sqrt{1+2x}, x \geq 0$

**Ans.** (4) [JEE(Main) 2019, Online (10-04-19), P-2 (4, -1), 120]

**Sol.** Let centre is  $(h, k)$  & radius is  $h$  ( $h, k > 0$ )

$$OP = h + 1$$



$$\sqrt{h^2 + k^2} = h + 1 \Rightarrow h^2 + k^2 = h^2 + 2h + 1 \Rightarrow k^2 = 2h + 1$$

Locus is  $y^2 = 2x + 1$

19. If a line,  $y = mx + c$  is a tangent to the circle,  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$  and it is perpendicular to a line  $L_1$ , where  $L_1$  is the tangent to the circle,  $x^2 + y^2 = 1$  at the point  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ; then :

यदि एक रेखा  $y = mx + c$ , वृत्त  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$  की एक स्पर्श रेखा है तथा यह एक रेखा  $L_1$  पर लम्ब है, जहाँ  $L_1$  वृत्त  $x^2 + y^2 = 1$  के बिन्दु  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  पर स्पर्श रेखा है, तो :

(1)  $c^2 + 7c + 6 = 0$     (2)  $c^2 + 6c + 7 = 0$     (3)  $c^2 - 6c + 7 = 0$     (4)  $c^2 - 7c + 6 = 0$

**Ans.** (2)

[JEE(Main) 2020, Online (08-01-20), P-2 (4, -1), 120]

**Sol.** Slope of tangent to  $x^2 + y^2 = 1$  at  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$x^2 + y^2 = 1$  की  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x + 2yy' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y} = -1$$

$y = mx + c$  is tangent of  $x^2 + y^2 = 1$

$y = mx + c$  वृत्त  $x^2 + y^2 = 1$  की स्पर्श रेखा है

so इसलिये  $m = 1$

$$y = x + c$$

now distance of  $(3, 0)$  from  $y = x + c$  is

अब  $(3, 0)$  की रेखा  $y = x + c$  से दूरी है

$$\left| \frac{c+3}{\sqrt{2}} \right| = 1$$

$$c^2 + 6c + 9 = 2$$

$$c^2 + 6c + 7 = 0$$

20. If the curves,  $x^2 - 6x + y^2 + 8 = 0$  and  $x^2 - 8y + y^2 + 16 - k = 0$ , ( $k > 0$ ) touch each other at a point, then the largest value of  $k$  is \_\_\_\_\_

एक वक्र  $x^2 - 6x + y^2 + 8 = 0$  तथा  $x^2 - 8y + y^2 + 16 - k = 0$ , ( $k > 0$ ) एक दूसरे को एक बिन्दु पर स्पर्श करते हैं, तो  $k$  का अधिकतम मान है \_\_\_\_\_ | [JEE(Main) 2020, Online (09-01-20), P-2 (4, 0), 120]

**Ans.** 36

**Sol.** Two circles touches each other if  $|C_1 C_2| = |r_1 \pm r_2|$

$$\text{Distance between } C_2(3, 0) \text{ and } C_1(0, 4) \text{ is either } \sqrt{k} + 1 \text{ or } |\sqrt{k} - 1| \quad (C_1 C_2 = 5)$$

$$\Rightarrow \sqrt{k} + 1 = 5 \text{ or } |\sqrt{k} - 1| = 5 \quad \Rightarrow k = 16 \text{ or } k = 36 \Rightarrow \text{maximum value of } k \text{ is } 36$$

**Sol\_H.** दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करते हैं यदि  $|C_1 C_2| = |r_1 \pm r_2|$

$$C_2(3, 0) \text{ तथा } C_1(0, 4) \text{ के मध्य दूरी } \sqrt{k} + 1 \text{ या } |\sqrt{k} - 1| \text{ है} \quad (C_1 C_2 = 5)$$

$$\Rightarrow \sqrt{k} + 1 = 5 \text{ or } |\sqrt{k} - 1| = 5 \quad \Rightarrow k = 16 \text{ or } k = 36 \quad \Rightarrow k \text{ का अधिकतम मान } 36 \text{ है}$$

# High Level Problems (HLP)

Marked Questions may have for Revision Questions.

विनित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

## SUBJECTIVE QUESTIONS

### विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. Find the equation of the circle passing through the points A(4, 3), B(2, 5) and touching the axis of y. Also find the point P on the y-axis such that the angle APB has largest magnitude.

बिन्दुओं A (4, 3) तथा B (2, 5) से गुजरने वाले तथा y-अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए। y-अक्ष पर बिन्दु P ज्ञात कीजिए ताकि कोण APB महत्तम परिमाण का हो।

**Ans.**  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$  OR  $x^2 + y^2 - 20x - 22y + 121 = 0$ , P(0, 3),  $\theta = 45^\circ$

**Sol.** Equation of circle touching y - axis is  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + f^2 = 0$

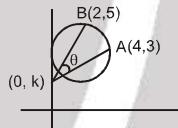
$\therefore$  it passes through (4, 3) & (2, 5)

$$\text{so } 25 + 8g + 6f + f^2 = 0 \Rightarrow 29 + 4g + 10f + f^2 = 0$$

solving above two equations, we get  $(g, f) \equiv (-2, -3)$  &  $(-10, -11)$ .

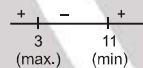
So equations of circles are  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$  and  $x^2 + y^2 - 20x - 22y + 121 = 0$

for circle  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ .



$$\tan \theta = \frac{\frac{5-k}{2} - \frac{3-k}{4}}{1 + \frac{5-k}{2} \left( \frac{3-k}{4} \right)} = \frac{14-2k}{23+k^2-8k}$$

$$\frac{d(\tan \theta)}{dk} = \frac{2(k-11)(k-3)}{(k^2-8k+23)^2}$$



So  $\tan \theta$  is max at  $k = 3$  at  $k = 3$ ,  $\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$

**Hindi.** y - अक्ष को स्पर्श करने वाले वृत्त का समीकरण  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + f^2 = 0$  है।

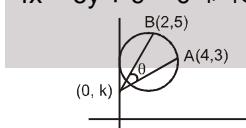
$\therefore$  यह (4, 3) & (2, 5) से गुजरता है।

$$\text{अतः } 25 + 8g + 6f + f^2 = 0 \Rightarrow 2g + 4g + 10f + f^2 = 0$$

दोनों समीकरणों को हल करने पर  $(g, f) \equiv (-2, -3)$  &  $(-10, -11)$ .

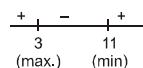
अतः वृत्त के समीकरण  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$  तथा  $x^2 + y^2 - 20x - 22y + 121 = 0$  है।

वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$  के लिये



$$\tan \theta = \frac{\frac{5-k}{2} - \frac{3-k}{4}}{1 + \frac{5-k}{2} \left( \frac{3-k}{4} \right)} = \frac{14-2k}{23+k^2-8k}$$

$$\frac{d(\tan \theta)}{dk} = \frac{2(k-11)(k-3)}{(k^2-8k+23)^2}$$



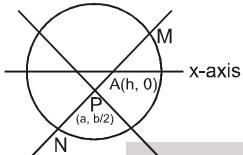
अतः  $k = 3$  पर  $\tan \theta$  महत्तम है।  $k = 3$  पर  $\tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$

2. Let a circle be given by  $2x(x-a) + y(2y-b) = 0$ , ( $a \neq 0, b \neq 0$ ). Find the condition on  $a$  &  $b$  if two chords, each bisected by the  $x$ -axis, can be drawn to the circle from  $\left(a, \frac{b}{2}\right)$

मानाकि वृत्त का समीकरण  $2x(x-a) + y(2y-b) = 0$ , ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) है यदि बिन्दु  $\left(a, \frac{b}{2}\right)$  से वृत्त पर दो जीवाएँ खींची जाएं जो  $x$ -अक्ष द्वारा समद्विभाजित होती हों, तो  $a$  एवं  $b$  पर प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $(a^2 > 2b^2)$

**Sol.**



Straight line MN bisected by x-axis so A (h, 0) is midpoint of MN  
So equation of chord of contact MN.

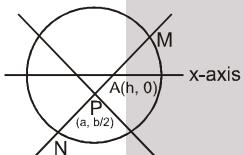
$$T = S_1 \Rightarrow 2xh - a(x+h) - \frac{b(y+0)}{2} = 2h^2 - 2ah$$

this line passes through  $(a, b/2)$

$$2ah - a(a+h) - \frac{b^2}{4} = 2h^2 - 2ah \Rightarrow 8h^2 - 12ah + 4a^2 + b^2 = 0$$

$$\therefore D > 0 \Rightarrow a^2 > 2b^2$$

**Sol.**



सरल रेखा MN x-अक्ष द्वारा बिन्दु A (h, 0) पर समद्विभाजित होती है अतः बिन्दु A(h, 0), MN का मध्य बिन्दु है।  
इस प्रकार स्पर्श जीवा MN का समीकरण

$$T = S_1 \Rightarrow 2xh - a(x+h) - \frac{b(y+0)}{2} = 2h^2 - 2ah$$

यह समीकरण बिन्दु  $(a, b/2)$  से गुजरता है तो

$$2ah - a(a+h) - \frac{b^2}{4} = 2h^2 - 2ah \Rightarrow 8h^2 - 12ah + 4a^2 + b^2 = 0$$

$$\therefore D > 0 \Rightarrow a^2 > 2b^2$$

3. A circle is described to pass through the origin and to touch the lines  $x = 1$ ,  $x + y = 2$ . Prove that the radius of the circle is a root of the equation  $(3 - 2\sqrt{2}) t^2 - 2\sqrt{2} t + 2 = 0$ .

एक वृत्त जो कि मूल बिन्दु से गुजरता है तथा रेखाओं  $x = 1$  एवं  $x + y = 2$  को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि समीकरण  $(3 - 2\sqrt{2}) t^2 - 2\sqrt{2} t + 2 = 0$  का एक मूल वृत्त की त्रिज्या है।

**Sol.** Let the centre of the circle be  $(h, k)$  and radius equal to 'r'

$$\therefore h^2 + k^2 = r^2 \quad \dots\dots(i)$$

$$\text{and } \left| \frac{h+k-2}{\sqrt{2}} \right| = r \Rightarrow 2 - h - k = r\sqrt{2} \quad \dots\dots(ii)$$

$$\text{and } h = 1 - r \quad \dots\dots(iii)$$

$$\text{put } h = 1 - r \text{ in (ii), we get } k = r(1 - \sqrt{2}) + 1$$

Now put the values of  $h$  and  $k$  in (i), we get

$$(r(1 - \sqrt{2}) + 1)^2 + (1 - r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2(3 - 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2} r + 2 = 0$$

$$\text{hence radius i.e. } r \text{ is the root of the equation } (3 - 2\sqrt{2}) t^2 - 2\sqrt{2} t + 2 = 0$$

**Hindi** मानाकि वृत्त का केन्द्र  $(h, k)$  है तथा त्रिज्या  $r$  है।

$$\therefore h^2 + k^2 = r^2 \quad \dots\dots(i)$$

$$\text{एवं} \quad \left| \frac{h+k-2}{\sqrt{2}} \right| = r \quad \Rightarrow \quad 2 - h - k = r \quad \dots\dots(ii)$$

$$\text{तथा} \quad h = 1 - r \quad \dots\dots(iii)$$

समीकरण (ii) में  $h = 1 - r$  रखने पर  $k = r(1 - \sqrt{2}) + 1$

$h$  एवं  $k$  का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$(r(1 - \sqrt{2}) + 1)^2 + (1 - r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2(3 - 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}r + 2 = 0$$

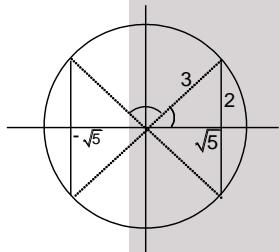
अतः त्रिज्या  $r$  समीकरण  $(3 - 2\sqrt{2})t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0$  का मूल है।

4. If  $(a, \alpha)$  lies inside the circle  $x^2 + y^2 = 9 : x^2 - 4x - a^2 = 0$  has exactly one root in  $(-1, 0)$ , then find the area of the region in which  $(a, \alpha)$  lies.

यदि  $(a, \alpha)$  वृत्त के अन्दर स्थित है।  $x^2 + y^2 = 9 : x^2 - 4x - a^2 = 0$  का ठीक एक मूल  $(-1, 0)$  में स्थित है तब क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें  $(a, \alpha)$  स्थित है।

Ans.  $4\left\{\sqrt{5} + \frac{9}{2}\cot^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

Sol.



$$f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow a^2 < 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$$

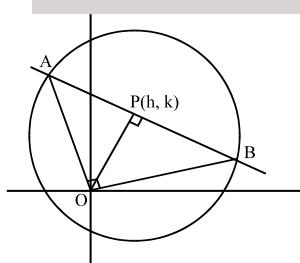
$$\text{Required area} = 4.9 \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}} \right) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2 = 4\left\{\sqrt{5} + \frac{9}{2}\cot^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

5. Let  $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  be a given circle. Find the locus of the foot of the perpendicular drawn from the origin upon any chord of  $S$  which subtends right angle at the origin.

माना  $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  दिया गया वृत्त है।  $S$  की किसी जीवा जो मूल बिन्दु पर समकोण बनाती है, पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब के लम्बपाद का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Ans.  $x^2 + y^2 + gx + fy + \frac{c}{2} = 0$

Sol.



$$AB \text{ is a variable chord such that } \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

Let  $P(h, k)$  be the foot of the perpendicular drawn from origin upon AB. Equation of the chord AB is

$$y - k = \frac{-h}{k} (x - h)$$

$$\text{i.e. } hx + ky = h^2 + k^2 \dots\dots(1)$$

Equation of the pair of straight lines passing through the origin and the intersection point of the given circle

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots\dots(2)$$

and the variable chord AB is

$$x^2 + y^2 + 2(gx + fy) \left( \frac{hx + ky}{h^2 + k^2} \right) + c \left( \frac{hx + ky}{h^2 + k^2} \right)^2 = 0 \dots\dots(3)$$

If equation (3) must represent a pair of perpendicular lines, then we have

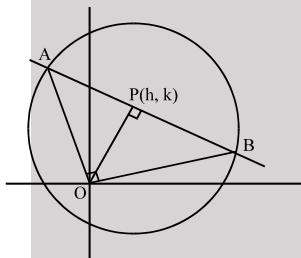
coeff. of  $x^2$  + coeff. of  $y^2$  = 0

$$\text{i.e. } \left( 1 + \frac{2gh}{h^2 + k^2} + \frac{ch^2}{(h^2 + k^2)^2} \right) + \left( 1 + \frac{2fk}{h^2 + k^2} + \frac{ck^2}{(h^2 + k^2)^2} \right) = 0.$$

Putting (x, y) in place of (h, k) gives the equation of the required locus as

$$x^2 + y^2 + gx + fy + \frac{c}{2} = 0.$$

**Hindi.**



$$AB \text{ एक चर जीवा इसप्रकार है कि } \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

माना  $P(h, k)$ , AB पर मूल बिन्दु से खींचे गये लम्ब का लम्बपाद है। जीवा AB का समीकरण है।  $y - k = \frac{-h}{k}(x - h)$

$$\text{अर्थात् } hx + ky = h^2 + k^2 \dots\dots(1)$$

मूल बिन्दु से जाने वाली सरल रेखा युग्म का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए वृत्त

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots\dots(2)$$

का प्रतिच्छेद बिन्दु है तथा चर जीवा AB है

$$x^2 + y^2 + 2(gx + fy) \left( \frac{hx + ky}{h^2 + k^2} \right) + c \left( \frac{hx + ky}{h^2 + k^2} \right)^2 = 0 \dots\dots(3)$$

यदि समीकरण (3), लम्बवत् रेखाओं के युग्म को व्यक्त करता है तब  $x^2 +$  का गुणांक  $y^2$  का गुणांक = 0

$$\text{अर्थात् } \left( 1 + \frac{2gh}{h^2 + k^2} + \frac{ch^2}{(h^2 + k^2)^2} \right) + \left( 1 + \frac{2fk}{h^2 + k^2} + \frac{ck^2}{(h^2 + k^2)^2} \right) = 0.$$

(x, y) को (h, k) से हटाने पर अभीष्ट बिन्दुपथ

$$x^2 + y^2 + gx + fy + \frac{c}{2} = 0.$$

6. A ball moving around the circle  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$  in anti-clockwise direction leaves it tangentially at the point  $P(-2, -2)$ . After getting reflected from a straight line it passes through the centre of the circle. Find the equation of this straight line if its perpendicular distance from  $P$  is  $\frac{5}{2}$ . You can assume that the angle of incidence is equal to the angle of reflection.

वृत्त  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$  के अनुदिश एक गेंद वामावर्त प्रवाह में गमन करती है तथा इसकी स्पर्श रेखा जो बिन्दु  $P(-2, -2)$  पर है, एक सरल रेखा पर परावर्तित होने के बाद वृत्त के केन्द्र से गुजरती है। सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इसकी  $P$  से लम्बवत् दूरी  $\frac{5}{2}$  हो। आप मान सकते हैं कि रेखा का झुकाव परावर्तन कोण के बराबर है।

$$\text{Ans. } (4\sqrt{3} - 3)x - (4 + 3\sqrt{3})y - (39 - 2\sqrt{3}) = 0$$

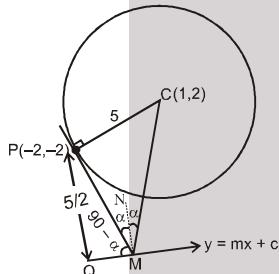
**Sol.** Let the equation of required straight line be  $y = mx + c$ .

$$\Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{|-2 + 2m - c|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \dots\dots(i)$$

$$\text{For } \triangle PCM \quad \frac{PC}{PM} = \tan 2\alpha.$$

$$\Rightarrow PM = 5 \cot 2\alpha \quad \dots\dots(ii)$$

$$\text{For } \triangle PQM \quad \frac{5}{2} = PM \sin (90^\circ - \alpha) \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{5 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cos \alpha.$$



on solving, we get  $\alpha = 30^\circ$ . Equation of tangent at  $P(-2, -2)$  is  $3x + 4y + 14 = 0$ .

$$\tan 60^\circ = \left| \frac{m+3/4}{1-3m/4} \right| \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m+3/4}{1-3m/4} \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{3}-3}{4+3\sqrt{3}}$$

Now on substituting value of 'm' in equation (i), we get

$$c = \frac{11+2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \text{ or } \frac{-39+2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}$$

but  $c$  should be (-ve)

$$\text{So equation of line } y = \frac{(4\sqrt{3}-3)}{4+3\sqrt{3}} x + \left( \frac{-39+2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \right)$$

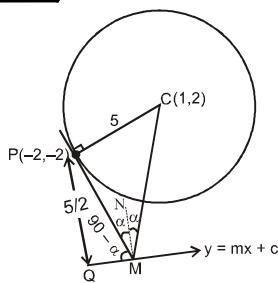
Hindi. माना अभीष्ट सरल रेखा का समीकरण  $y = mx + c$ .

$$\frac{5}{2} = \frac{|-2 + 2m - c|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \dots\dots(i)$$

$$\triangle PCM \text{ के लिए } \frac{PC}{PM} = \tan 2\alpha.$$

$$\Rightarrow PM = 5 \cot 2\alpha \quad \dots\dots(ii)$$

$$\triangle PQM \text{ के लिए } \frac{5}{2} = PM \sin (90^\circ - \alpha) \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{5 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cos \alpha.$$



हल करने पर  $\alpha = 30^\circ$  प्राप्त होता है।  $(-2, -2)$  पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$3x + 4y + 14 = 0 \Rightarrow \tan 60^\circ = \left| \frac{m+3/4}{1-3m/4} \right|$$

$$\tan 60^\circ = \left| \frac{m+3/4}{1-3m/4} \right| \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{m+3/4}{1-3m/4} \Rightarrow m = \frac{4\sqrt{3}-3}{4+3\sqrt{3}}$$

अब  $m$  का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$c = \frac{11+2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \text{ या } \frac{-39+2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}}$$

परन्तु  $c$  ऋणात्मक होना चाहिए। रेखा का समीकरण

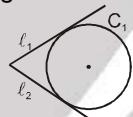
$$y = \frac{(4\sqrt{3}-3)}{4+3\sqrt{3}} x + \left( \frac{-39+2\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \right)$$

7. The lines  $5x + 12y - 10 = 0$  and  $5x - 12y - 40 = 0$  touch a circle  $C_1$  of diameter 6 unit. If the centre of  $C_1$  lies in the first quadrant, find the equation of the circle  $C_2$  which is concentric with  $C_1$  and cuts off intercepts of length 8 on these lines.

रेखाएँ  $5x + 12y - 10 = 0$  तथा  $5x - 12y - 40 = 0$  एक 6 इकाई व्यास वाले वृत्त  $C_1$  को स्पर्श करती है। यदि  $C_1$  का केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में स्थित है तब वृत्त  $C_2$  का समीकरण ज्ञात करो जो  $C_1$  का संकेन्द्रीय है तथा जो इन रेखाओं पर 8 लम्बाई का अन्तःखण्ड काटता है।

**Ans.**  $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$

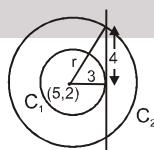
- Sol.** Centre of  $C_1$  lies over angle bisector of  $\ell_1$  &  $\ell_2$   
Equations of angle bisectors are



$$\frac{5x + 12y - 10}{13} = \pm \frac{5x - 12y - 40}{13} \Rightarrow x = 5 \text{ or } y = -\frac{5}{4}$$

Since centre lies in first quadrant so it should be on  $x = 5$ .

$$\text{So let centre be } (5, \alpha) \Rightarrow 3 = \frac{|25 + 12\alpha - 10|}{13} \Rightarrow \alpha = 2, -\frac{9}{2}$$



From the figure  $r = \sqrt{16+9} = 5$ . But  $\alpha \neq -\frac{9}{2}$  so  $\alpha = 2$ .

So equation of circle  $C_2$  is

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0.$$

Hindi. वृत्त  $C_1$  का केन्द्र  $\ell_1$  तथा  $\ell_2$  के कोण अर्धक पर स्थित है।

$$\text{कोण अर्द्धकों का समीकरण } \frac{5x + 12y - 10}{13} = \pm \frac{5x - 12y - 40}{13} \Rightarrow x = 5 \text{ or } y = -\frac{5}{4}$$

चूंकि केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में स्थित है।

अतः यह  $x = 5$  पर होना चाहिए।

$$\text{अतः माना केन्द्र } (5, \alpha) \text{ है। } \Rightarrow 3 = \frac{|25 + 12\alpha - 10|}{13} \Rightarrow \alpha = 2, -\frac{9}{2}$$

चित्रानुसार  $r = \sqrt{16+9} = 5$ . किन्तु  $\alpha \neq -\frac{9}{2}$  अतः  $\alpha = 2$ .

$\therefore$  वृत्त  $C_2$  का समीकरण

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0.$$

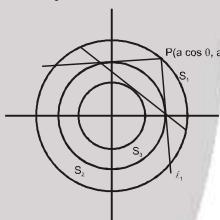
8. The chord of contact of tangents drawn from a point on the circle  $x^2 + y^2 = a^2$  to the circle  $x^2 + y^2 = b^2$  touches the circle  $x^2 + y^2 = c^2$ . Show that a, b, c are in G.P.  
वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  के एक बिन्दु से वृत्त  $x^2 + y^2 = b^2$  पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की स्पर्शी जीवा, वृत्त  $x^2 + y^2 = c^2$  को स्पर्श करती है। प्रदर्शित कीजिए कि a, b, c गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

Sol.  $S_1 \equiv x^2 + y^2 = a^2$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 = b^2$

$S_3 \equiv x^2 + y^2 = c^2$

equation of  $\ell_1$  is  $ax \cos \theta + ay \sin \theta = b^2$



$\ell_1$  is tangent to circle  $S_3$

$$c = \frac{|-b^2|}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \Rightarrow ca = b^2 \text{ Hence a,b,c are in G.P.}$$

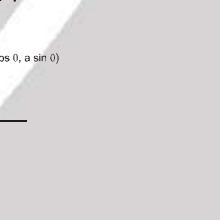
Hindi.  $S_1 \equiv x^2 + y^2 = a^2$

$S_2 \equiv x^2 + y^2 = b^2$

$S_3 \equiv x^2 + y^2 = c^2$

$\ell_1$  का समीकरण  $ax \cos \theta + ay \sin \theta = b^2$

$\ell_1$ , वृत्त  $S_3$  की स्पर्श रेखा है।



$$\Rightarrow c = \frac{|-b^2|}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \Rightarrow ca = b^2 \text{ अतः a,b,c गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।}$$

9. Find the locus of the middle points of chords of a given circle  $x^2 + y^2 = a^2$  which subtend a right angle at the fixed point (p, q).

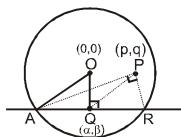
वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  की उन जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो कि एक नियत बिन्दु (p, q) पर समकोण अन्तरित करता है।

Ans.  $2x^2 + 2y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - a^2 = 0$

Sol.  $OA = a$  and  $AQ = QP = QR$

$$\therefore OQ = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\therefore AQ = \sqrt{(p-\alpha)^2 + (q-\beta)^2} = PQ$$



$$\therefore (OA)^2 = (OQ)^2 + (AQ)^2$$

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (p - \alpha)^2 + (q - \beta)^2$$

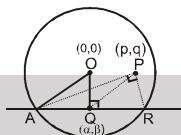
$$2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2p\alpha - 2q\beta + p^2 + q^2 - a^2 = 0.$$

$$\text{Locus of the middle point } Q(\alpha, \beta) \text{ is } 2x^2 + 2y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - a^2 = 0$$

Hindi.  $OA = a$  तथा  $AQ = QP = QR$

$$\therefore OQ = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\therefore AQ = \sqrt{(p - \alpha)^2 + (q - \beta)^2} = PQ$$



$$\therefore (OA)^2 = (OQ)^2 + (AQ)^2$$

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (p - \alpha)^2 + (q - \beta)^2$$

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2p\alpha - 2q\beta + p^2 + q^2 - a^2 = 0.$$

$$\text{जीवाओं के मध्य बिन्दु } Q(\alpha, \beta) \text{ का बिन्दुपथ } 2x^2 + 2y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - a^2 = 0.$$

10. Let  $a\ell^2 - bm^2 + 2d\ell + 1 = 0$ , where  $a, b, d$  are fixed real numbers such that  $a + b = d^2$ . If the line  $\ell x + my + 1 = 0$  touches a fixed circle then find the equation of circle

माना  $a\ell^2 - bm^2 + 2d\ell + 1 = 0$  जबकि  $a, b, d$  निश्चित वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार है कि  $a + b = d^2$ , यदि रेखा  $\ell x + my + 1 = 0$  एक निश्चित वृत्त को स्पर्श करती है तो वृत्त का समीकरण होगा –

**Ans.**  $x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - b = 0$

**Sol.**  $\therefore a\ell^2 - bm^2 + 2d\ell + 1 = 0 \dots\dots(1)$

and  $a + b = d^2 \dots\dots(2)$

Put  $a = d^2 - b$  in equation (1), we get  $(d\ell + 1)^2 = b(\ell^2 + m^2)$

$$\Rightarrow \frac{|d\ell + 1|}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} = \sqrt{b} \quad \dots\dots(3)$$

From (3) we can say that the line  $\ell x + my + 1 = 0$  touches a fixed circle having centre at  $(d, 0)$  and radius  $\sqrt{b}$

**Hindi**  $\therefore a\ell^2 - bm^2 + 2d\ell + 1 = 0 \dots\dots(1)$

तथा  $a + b = d^2 \dots\dots(2)$

समीकरण (1) में  $a = d^2 - b$  रखने पर  $(d\ell + 1)^2 = b(\ell^2 + m^2)$

$$\Rightarrow \frac{|d\ell + 1|}{\sqrt{\ell^2 + m^2}} = \sqrt{b} \quad \dots\dots(3)$$

समीकरण (3) से हम कह सकते हैं कि रेखा  $\ell x + my + 1 = 0$  एक निश्चित वृत्त को स्पर्श करती है जिसका केन्द्र  $(d, 0)$  एवं त्रिज्या  $\sqrt{b}$  है।

11. The centre of the circle  $S = 0$  lies on the line  $2x - 2y + 9 = 0$  and  $S = 0$  cuts orthogonally the circle  $x^2 + y^2 = 4$ . Show that circle  $S = 0$  passes through two fixed points and also find their co-ordinates.

वृत्त  $S = 0$  का केन्द्र  $2x - 2y + 9 = 0$  पर स्थित है तथा वृत्त  $S = 0$  वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  को लम्बकोणीय काटता है। दर्शाइये कि वृत्त  $S = 0$  दो नियत बिन्दुओं से गुजरता है तथा उनके निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

**Ans.**  $(-4, 4); \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

**Sol.**  $\because$  centre lies over the line  $2x - 2y + 9 = 0$

So let coordinate of centre be  $\left(h, \frac{2h+9}{2}\right)$



(ii) तथा (iii) को हल करने पर  $f = 0$ ,  $d = -a^2$  प्राप्त होता है।

$f$  एवं  $d$  के मानों को (i) में रखने पर

$$x^2 + y^2 + 2gx - a^2 = 0 \quad \dots\dots(iv)$$

$$\therefore y = mx + c \text{ वृत्तों को स्पर्श करती है।} \Rightarrow \left| \frac{-mg + c}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = \sqrt{g^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow g^2 + (2cm)g + a^2(1 + m^2) - c^2 = 0 \quad \dots\dots(v)$$

समीकरण (v),  $g$  में द्विघात है।

$\therefore$  माना इसके दो मूल  $g_1$  तथा  $g_2$  हैं।

$$\therefore g_1 g_2 = a^2(1 + m^2) - c^2$$

$\therefore$  समीकरण (iv) द्वारा प्रदर्शित दोनों वृत्त लम्बकोणीय हैं

$$\therefore 2g_1 g_2 + 0 = -a^2 - a^2 \Rightarrow g_1 g_2 = -a^2 \Rightarrow a^2(1 + m^2) - c^2 = -a^2 \\ c^2 = a^2(2 + m^2)$$

13. Consider points  $A(\sqrt{13}, 0)$  and  $B(2\sqrt{13}, 0)$  lying on  $x$ -axis. These points are rotated in an anticlockwise direction about the origin through an angle of  $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ . Let the new position of  $A$  and  $B$

be  $A'$  and  $B'$  respectively. With  $A'$  as centre and radius  $\frac{2\sqrt{13}}{3}$  a circle  $C_1$  is drawn and with  $B'$  as a centre and radius  $\frac{\sqrt{13}}{3}$  circle  $C_2$  is drawn. Find radical axis of  $C_1$  and  $C_2$ .

माना  $x$ -अक्ष पर स्थित बिन्दु  $A(\sqrt{13}, 0)$  एवं बिन्दु  $B(2\sqrt{13}, 0)$  हैं। इन बिन्दुओं को मूल बिन्दु के सापेक्ष दक्षिणावृत्त दिशा में  $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$  कोण से घुमाया जाता है। माना कि  $A$  व  $B$  बिन्दुओं की नयी स्थिति  $A'$  व  $B'$  होगी।  $A'$  को केन्द्र तथा

$\frac{2\sqrt{13}}{3}$  त्रिज्या लेकर एक वृत्त  $C_1$  बनाया जाता है तथा  $B'$  को केन्द्र लेकर  $\frac{\sqrt{13}}{3}$  एवं त्रिज्या लेकर वृत्त  $C_2$  बनाया जाता है।  $C_1$  व  $C_2$  का मूलाक्ष होगा—

**Ans.**  $9x + 6y = 65$

**Sol.**  $\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \tan \theta = \frac{2}{3} \quad \therefore \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$  and  $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

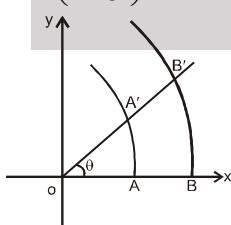
$$\therefore A' \equiv (OA \cos \theta, OA \sin \theta) \Rightarrow A' \equiv (3, 2)$$

$$\text{Similarly } B' \equiv (OB \cos \theta, OB \sin \theta) \equiv (6, 4)$$

Now it can be checked that circles  $C_1$  and  $C_2$  touch each other.

Let the point of contact be  $C$ .

$$\therefore C \equiv \left( 5, \frac{10}{3} \right)$$



$\therefore$  required radical axis is a line perpendicular to  $A'B'$  and passing through point  $C$

$$y - \frac{10}{3} = -\frac{3}{2}(x - 5)$$

**Hindi**  $\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \tan \theta = \frac{2}{3} \quad \therefore \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$  and  $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

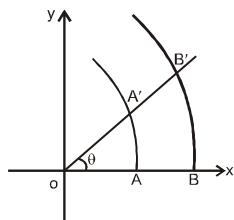
$$\therefore A' \equiv (OA \cos \theta, OA \sin \theta) \Rightarrow A' \equiv (3, 2)$$

इसी प्रकार  $B' \equiv (OB \cos \theta, OB \sin \theta) \equiv (6, 4)$

अब यह जाँच की जा सकती है कि वृत्त  $C_1$  व  $C_2$  परस्पर स्पर्श करते हैं।

मानाकि स्पर्श बिन्दु  $C$  है।

$$\therefore C \equiv \left( 5, \frac{10}{3} \right)$$



$\therefore$  अभीष्ट मूलाख्त एक रेखा होगी जो कि  $A'B'$  के लम्बवत् तथा  $C$  से गुजरती है।

$$y - \frac{10}{3} = -\frac{3}{2}(x - 5)$$

14.  $P(a, b)$  is a point in the first quadrant. If the two circles which pass through  $P$  and touch both the co-ordinate axes cut at right angles, then find condition in  $a$  and  $b$ .

प्रथम चतुर्थांश में एक बिन्दु  $P(a, b)$  है। यदि दो वृत्त जो  $P$  से गुजरते हैं तथा दोनों अक्षों को स्पर्श करते हों तथा एक दूसरे को समकोणीय काटते हों, तो—

**Ans.**  $a^2 - 4ab + b^2 = 0$

**Sol.** Equations of two circles touching both the axes are

$$x^2 + y^2 - 2c_1 x - 2c_1 y + c_1^2 = 0 \quad \dots(i)$$

$$x^2 + y^2 - 2c_2 x - 2c_2 y + c_2^2 = 0 \quad \dots(ii)$$

$\therefore$  (i) & (ii) are orthogonal also

$$\therefore 2c_1 c_2 + 2c_1 c_2 = c_1^2 + c_2^2$$

$$\text{or } 6c_1 c_2 = (c_1 + c_2)^2 \quad \dots(iii)$$

Now point  $P(a, b)$  lies over the circle

$$x^2 + y^2 - 2cx - 2cy + c^2 = 0.$$

$$\text{so } c^2 - 2c(a+b) + a^2 + b^2 = 0$$

$\therefore c_1$  &  $c_2$  are roots of this equation

$$\text{so } c_1 + c_2 = 2(a+b) \quad \dots(iv)$$

$$\text{and } c_1 c_2 = a^2 + b^2 \quad \dots(v)$$

from (iii), (iv) & (v), we get

$$6(a^2 + b^2) = 4(a+b)^2.$$

**Hindi.** दोनों अक्षों को स्पर्श करने वाले दो वृत्तों के समीकरण

$$x^2 + y^2 - 2c_1 x - 2c_1 y + c_1^2 = 0 \quad \dots(i)$$

$$x^2 + y^2 - 2c_2 x - 2c_2 y + c_2^2 = 0 \quad \dots(ii)$$

$\therefore$  (i) एवं (ii) लम्बकोणीय भी हैं

$$\text{अतः } 2c_1 c_2 + 2c_1 c_2 = c_1^2 + c_2^2$$

$$\text{या } 6c_1 c_2 = (c_1 + c_2)^2 \quad \dots(iii)$$

अब बिन्दु  $P(a, b)$  वृत्त  $x^2 + y^2 - 2cx - 2cy + c^2 = 0$  पर स्थित है।

$$\text{अतः } c^2 - 2c(a+b) + a^2 + b^2 = 0$$

$c_1$  एवं  $c_2$  इस समीकरण के मूल हैं।

$$\text{अतः } c_1 + c_2 = 2(a+b) \quad \dots(iv)$$

$$\text{तथा } c_1 c_2 = a^2 + b^2 \quad \dots(v)$$

(iii), (iv) तथा (v) से

$$6(a^2 + b^2) = 4(a+b)^2.$$

15. Prove that the square of the tangent that can be drawn from any point on one circle to another circle is equal to twice the product of perpendicular distance of the point from the radical axis of two circles and distance between their centres.

सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त के किसी बिन्दु से दूसरे वृत्त पर खीर्चों जाने वाली स्पर्श रेखा का वर्ग, दोनों वृत्तों की मूलाक्ष से बिन्दु की लम्बवत् दूरी और उनके केन्द्रों के मध्य दूरी के गुणनफल के दुगुने के बराबर हैं।

**Sol.** Let us choose the circles, as  $S_1 \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$  .....(1)

and  $S_2 \equiv (x - b)^2 + y^2 - c^2 = 0$  .....(2)

Let  $P(a \cos\theta, a \sin\theta)$  be any point on circle  $S_1$ . The length of the tangent from  $P$  to circle  $S_2$ , is given by  $PT^2 = S_2(a \cos\theta, a \sin\theta) = (a \cos\theta - b)^2 + (a \sin\theta)^2 - c^2 = a^2 + b^2 - c^2 - 2ab \cos\theta$

The distance between the centres of  $S_1$  and  $S_2$ , is  $C_1 C_2 = b$

The radical axis of  $S_1$  and  $S_2$ , is  $2bx - a^2 - b^2 + c^2 = 0$  [equation (1) – equation (2)]

The perpendicular distance of  $P$  from the radical axis, is

$$PM = \frac{|2b(a \cos\theta) - a^2 - b^2 + c^2|}{2b}$$

Now, we have

$$2. PM \cdot C_1 C_2 = 2b \cdot \frac{|2b a \cos\theta - a^2 - b^2 + c^2|}{2b} = |a^2 + b^2 - c^2 - 2ab \cos\theta| = PT^2 \text{ which proves the desired result.}$$

**Hindi.** माना कि वृत्त  $S_1 \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$  .....(1)

तथा  $S_2 \equiv (x - b)^2 + y^2 - c^2 = 0$  .....(2)

माना  $P(a \cos\theta, a \sin\theta)$  वृत्त  $S_1$  पर कोई बिन्दु है।  $P$  से  $S_2 = 0$  पर स्पर्श रेखा की लम्बाई  $PT^2 = S_2(a \cos\theta, a \sin\theta) = (a \cos\theta - b)^2 + (a \sin\theta)^2 - c^2 = a^2 + b^2 - c^2 - 2ab \cos\theta$

$S_1$  तथा  $S_2$  के केन्द्रों के मध्य दूरी  $C_1 C_2 = b$  है।

$S_1$  तथा  $S_2$  का मूलाक्ष  $2bx - a^2 - b^2 + c^2 = 0$  है।

मूलाक्ष की  $P$  से लम्बवत् दूरी है।

[समीकरण (1) – समीकरण (2)]

$$PM = \frac{|2b(a \cos\theta) - a^2 - b^2 + c^2|}{2b}$$

यहाँ

$$2. PM \cdot C_1 C_2 = 2b \cdot \frac{|2b a \cos\theta - a^2 - b^2 + c^2|}{2b} = |a^2 + b^2 - c^2 - 2ab \cos\theta| = PT^2 \text{ जो कि अभीष्ट परिणाम है।}$$

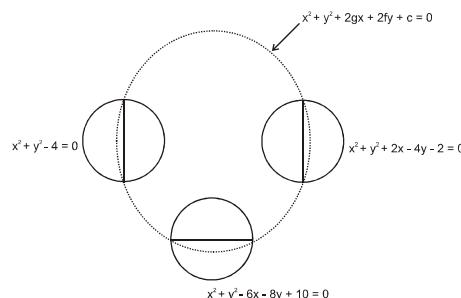
**16.** Find the equation of the circle which cuts each of the circles,  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 = 0$

&  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$  at the extremities of a diameter. **(Revision Planner)**

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वृत्तों  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 = 0$  और  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$  को उनके व्यासों के अन्तिम सिरों पर काटता हो।

**Ans.**  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0$

**Sol.**



Let required equation of circle is  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

Now common chord of given circle with required circle are

Common chord  $2gx + 2fy + (c + 4) = 0$  it is also diameter of circle  $x^2 + y^2 = 4$ . Hence  $c = -4$

similarly with  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 = 0 \Rightarrow 2x(g + 3) + 2y(f + 4) - 14 = 0$

$$\Rightarrow 6(g + 3) + 8(f + 4) - 14 = 0 \Rightarrow 6g + 8f + 36 = 0$$

$$\Rightarrow 3g + 4f + 18 = 0$$

With circle  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$

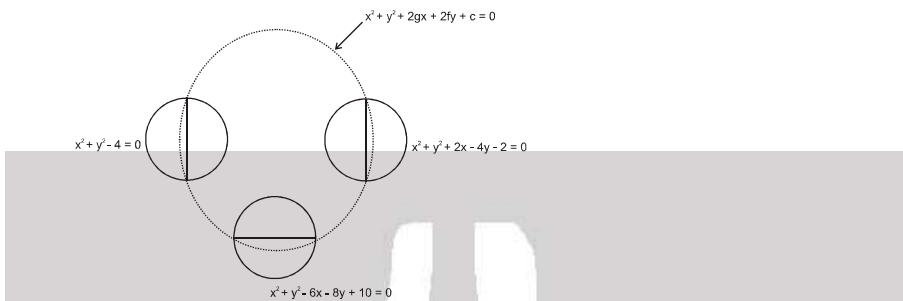
$$\Rightarrow 2x(g - 1) + 2y(f + 2) - 2 = 0 \Rightarrow -2(g - 1) + 4(f + 2) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -2g + 4f + 8 = 0 \Rightarrow 2g - 4f - 8 = 0$$

after simplification  $g = -2, f = -3, c = -4$

Hence circle  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0$

**Hindi.**



माना वृत्त की समीकरण  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  है।

अब दिए गए वृत्त माने गए वृत्त उभयनिष्ट जीवा  $2gx + 2fy + (c + 4) = 0$  है।

यह वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  का व्यास भी है। अतः  $c = -4$

इसी प्रकार  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 10 = 0 \Rightarrow 2x(g + 3) + 2y(f + 4) - 14 = 0 \Rightarrow 6(g + 3) + 8(f + 4) - 14 = 0$

$$\Rightarrow 6g + 8f + 36 = 0 \Rightarrow 3g + 4f + 18 = 0$$

वृत्त  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$  के साथ

$$\Rightarrow 2x(g - 1) + 2y(f + 2) - 2 = 0 \Rightarrow -2(g - 1) + 4(f + 2) - 2 = 0$$

$$\Rightarrow -2g + 4f + 8 = 0 \Rightarrow 2g - 4f - 8 = 0$$

हल करने के बाद  $g = -2, f = -3, c = -4$

अतः वृत्त  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 4 = 0$ .

17. Show that if one of the circle  $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$  and  $x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0$  lies within the other, then  $gg_1$  and  $c$  are both positive.

प्रदर्शित कीजिए कि वृत्तों  $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$  तथा  $x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0$  में एक वृत्त दूसरे के अन्दर स्थित हो, तो  $gg_1$  एवं  $c$  दोनों धनात्मक हैं।

**Sol.** ∵ One circle lies within the other circle  $\Rightarrow C_1C_2 < |r_1 - r_2| \Rightarrow \sqrt{(g-g_1)^2} < |\sqrt{g^2-c} - \sqrt{g_1^2-c}|$

squaring both sides, we get

$$-2gg_1 < -2\sqrt{g^2-c}\sqrt{g_1^2-c} - 2c \Rightarrow gg_1 > c + \sqrt{g^2-c}\sqrt{g_1^2-c}.$$

$$\Rightarrow gg_1 - c > \sqrt{g^2-c}\sqrt{g_1^2-c}. \quad \dots\dots(i)$$

$$\Rightarrow gg_1 - c > 0 \Rightarrow gg_1 > c$$

again squaring both sides of (i), we get

$$-2cg_1 > -c(g^2 + g_1^2) \Rightarrow c(g - g_1)^2 > 0 \Rightarrow c > 0 \text{ and from (i), we can say that}$$

∴  $gg_1$  will also be  $> 0$

**Hindi** ∵ एक वृत्त दूसरे वृत्त में स्थित है।

$$\Rightarrow C_1C_2 < |r_1 - r_2| \quad \sqrt{(g-g_1)^2} < |\sqrt{g^2-c} - \sqrt{g_1^2-c}|$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$-2gg_1 < -2\sqrt{g^2-c}\sqrt{g_1^2-c} - 2c \Rightarrow gg_1 > c + \sqrt{g^2-c}\sqrt{g_1^2-c}.$$

$$\Rightarrow gg_1 - c > \sqrt{g^2-c}\sqrt{g_1^2-c}. \quad \dots\dots(i)$$

$$\Rightarrow gg_1 - c > 0 \Rightarrow gg_1 > c$$

पुनः (i) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$-2cg g_1 > -c(g^2 + g_1^2) \Rightarrow c(g - g_1)^2 > 0$$

$\Rightarrow c > 0$  तथा (i) से हम कह सकते हैं कि

∴  $gg_1$  भी धनात्मक होगा।

18. Let ABCD is a rectangle. Incircle of  $\triangle ABD$  touches BD at E. Incircle of  $\triangle CBD$  touches BD at F.

If  $AB = 8$  units, and  $BC = 6$  units, then find length of  $EF$ .

माना ABCD एक आयत है।  $\triangle ABD$  का अन्तवृत्त: BD को E पर स्पर्श करता है।  $\triangle CBD$  का अन्तवृत्त BD को F पर स्पर्श करता है। यदि  $AB = 8$  तथा  $BC = 6$  तब EF की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

**Ans. 2**

- Sol.** Let A is (0,0) , B is (8,0) , C is (8,6) and D is (0,6) Then incircle of  $\triangle ABD$  is (2,2) and similarly incircle of  $\triangle CBD$  is (6,4)

Length of transverse common tangent is  $\sqrt{(C_1 C_2)^2 - (r_1 + r_2)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-2)^2 - (2+2)^2} = 2 = EF$ .

**Hindi** माना A (0,0) , B (8,0) , C (8,6) और D (0,6) है तब  $\Delta ABD$  का अन्तवृत्त का केन्द्र (2,2) और  $\Delta CBD$  का अन्तकेन्द्र (6,4) है।

तिर्यक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा की लम्बाई है  $\sqrt{(C_1C_2)^2 - (r_1 + r_2)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-2)^2 - (2+2)^2} = 2 = EF$ .

19. Let circles  $S_1$  and  $S_2$  of radii  $r_1$  and  $r_2$  respectively ( $r_1 > r_2$ ) touches each other externally. Circle  $S$  of radius  $r$  touches  $S_1$  and  $S_2$  externally and also their direct common tangent. Prove that the triangle formed by joining centre of  $S_1$ ,  $S_2$  and  $S$  is obtuse angled triangle.

माना  $S_1$  और  $S_2$  क्रमशः  $r_1$  और  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ) त्रिज्या के वृत्त हैं प्रत्येक एक दूसरे को बाह्य स्पर्श करते हैं  $S_1$  तथा  $S_2$  बाह्य तथा उनकी अनुस्पर्श उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा को स्पर्श करने वाला  $r$  त्रिज्या का वृत्त  $S$  है। तब सिद्ध कीजिए की  $S_1, S_2$  तथा  $S$  के केन्द्रों को मिलाने से बना त्रिभुज अधिककोण त्रिभुज है।

$$\text{Sol. } AP + PB = AB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(r_1+r)^2 - (r_1-r)^2} + \sqrt{(r_2+r)^2 - (r_2-r)^2} = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - (r_1-r_2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow \sqrt{r_1}, 2\sqrt{r}, \sqrt{r_2} \text{ are in H.P.}$$

$$\Rightarrow (2\sqrt{r})^2 < \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} \Rightarrow 4r < \sqrt{r_1 r_2} \Rightarrow 2\sqrt{r_1 r_2} > 8r$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{r_1 r_2} - r > 7r > 0 \quad \dots\dots(2)$$

Now अब  $(C_1 C_2)^2 - (C_1 C)^2 = (C_2 C)^2$

$$\equiv r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 - r^2 - r_1^2 - 2rr_1 - r^2 - r_2^2 - 2rr_2$$

$$= -2rr_1 - 2rr_2 + 2r_1r_2 - 2r^2 = 4r \sqrt{r_1r_2} - 2r^2$$

$-2r(2\sqrt{rr} - r)$  - positive धनात्मक  $\Rightarrow \triangle C_1CC_2$  is obtuse angle triangle अधिक कोण विभज्ज है।

20. Circles are drawn passing through the origin O to intersect the coordinate axes at point P and Q such that  $m \cdot OP + n \cdot OQ$  is a constant. Show that the circles pass through a fixed point.

मूल बिन्दु से गुजरने वाले वृत्त खींचे जाते हैं जो निर्देशांक अक्ष को P और Q को इसप्रकार प्रतिच्छेदन करते हैं कि  $m \cdot OP + n \cdot OQ$  अचर है। दर्शाइये कि वृत्त एक स्थिर बिन्दु से गुजरते हैं।

- Sol.** Equation of a circle passing through the origin and having X and Y intercepts equal to a and b respectively is

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0 \quad \dots\dots(1)$$

According to the given condition, we have

$$ma + nb = k \text{ (constant)}$$

$$\text{i.e. } b = \frac{k - ma}{n} \quad \dots\dots(2)$$

Putting the above value of b in equation (1), we have,  $x^2 + y^2 - ax - \left(\frac{k - ma}{n}\right)y = 0$

$$\text{i.e. } \{n(x^2 + y^2) - ky\} - a(nx - my) = 0$$

which represents the equation of a family of circles passing through the intersection points of the circle

$$n(x^2 + y^2) - ky = 0 \quad \dots\dots(3)$$

and the line

$$nx - my = 0 \quad \dots\dots(4)$$

Solving equation (3) and (4), gives the coordinates of the fixed point as  $\left(\frac{mk}{m^2+n^2}, \frac{nk}{m^2+n^2}\right)$ .

- Sol.** वृत्त का समीकरण जो मूल बिन्दु से गुजरता है तथा X और Y अन्तर्खण्ड क्रमशः a और b है

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0 \quad \dots\dots(1)$$

दिए गए प्रतिबन्ध के अनुसर यहाँ

$$ma + nb = k \text{ (अचर)}$$

$$\text{अर्थात् } b = \frac{k - ma}{n} \quad \dots\dots(2)$$

समीकरण (1) में b का मान रखने पर  $x^2 + y^2 - ax - \left(\frac{k - ma}{n}\right)y = 0$

$$\text{अर्थात् } \{n(x^2 + y^2) - ky\} - a(nx - my) = 0$$

वृत्तों के निकाय के समीकरण को व्यक्त करता है जो वृत्तों के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरता है।

$$n(x^2 + y^2) - ky = 0 \quad \dots\dots(3)$$

तथा रेखा

$$nx - my = 0 \quad \dots\dots(4)$$

समीकरण (3) तथा (4) से स्थिर बिन्दुओं के निर्देशांक  $\left(\frac{mk}{m^2+n^2}, \frac{nk}{m^2+n^2}\right)$  हैं।

21. A triangle has two of its sides along the axes, its third side touches the circle

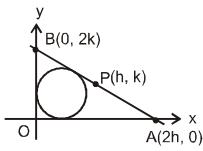
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0. \text{ Find the equation of the locus of the circumcentre of the triangle.}$$

एक त्रिभुज की दो भुजाये अक्षों के अनुदिश हैं तथा तीसरी भुजा वृत्त  $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$  को स्पर्श करती है। त्रिभुज के परिकेन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

$$\text{Ans. } 2(x + y) - a = \frac{2xy}{a}$$

- Sol.** Let the circumcentre be P(h, k) by using property circumcentre of rightangle triangle is lie on hypotenous

$$\therefore \text{Equation of AB is } \frac{x}{2h} + \frac{y}{2k} = 1 \Rightarrow a = \frac{\left|\frac{a}{2h} + \frac{a}{2k} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{4h^2} + \frac{1}{4k^2}}}$$

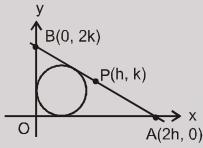


$$\text{on solving } \frac{a(h+k)}{hk} = \frac{2hk+a^2}{2hk} \Rightarrow 2(h+k) = \frac{2hk}{a} + a$$

$$\therefore \text{locus of circumcentre } P(h,k) \text{ is } 2(x+y)-a = \frac{2xy}{a}$$

**Hindi.** माना कि परिकेन्द्र  $P(h, k)$  है। हम जानते हैं कि समकोण त्रिभुज का परिकेन्द्र उसके कर्ण का मध्य बिन्दु होता है।

$$\therefore \text{AB का समीकरण है } \frac{x}{2h} + \frac{y}{2k} = 1 \Rightarrow a = \frac{\left| \frac{a}{2h} + \frac{a}{2k} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{4h^2} + \frac{1}{4k^2}}}$$



$$\text{हल करने पर } \frac{a(h+k)}{hk} = \frac{2hk+a^2}{2hk} \Rightarrow 2(h+k) = \frac{2hk}{a} + a$$

$$\therefore \text{परिकेन्द्र } P(h,k) \text{ का बिन्दुपथ } 2(x+y)-a = \frac{2xy}{a}.$$

22. Let  $S_1$  be a circle passing through  $A(0, 1)$ ,  $B(-2, 2)$  and  $S_2$  is a circle of radius  $\sqrt{10}$  units such that AB is common chord of  $S_1$  and  $S_2$ . Find the equation of  $S_2$ .

माना  $S_1$  वृत्त है जो  $A(0, 1)$ ,  $B(-2, 2)$  बिन्दुओं से गुजरता है तथा  $S_2$ ,  $\sqrt{10}$  त्रिज्या का एक वृत्त इस प्रकार है कि AB,  $S_1$  और  $S_2$  की उभयनिष्ठ जीवा है, तो  $S_2$  का समीकरण ज्ञात कीजिए।

$$\text{Ans. } x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 \pm \sqrt{7} (x + 2y - 2) = 0$$

**Sol.** Equation of line AB is रेखा AB का समीकरण है

$$y - 2 = \frac{2-1}{-2-0} (x+2) = -\frac{1}{2} (x+2) \Rightarrow x + 2y - 2 = 0 \quad \dots\dots(i)$$

Equation of circle whose diagonally opposite points are A and B:

$$(x-0)(x+2) + (y-1)(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0 \quad \dots\dots(ii)$$

Family of circles passing through the points of intersection of Eqs. (i) and (ii)

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 + \lambda(x + 2y - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (2 + \lambda)x + (2\lambda - 3)y + 2 - 2\lambda = 0 \quad \dots\dots(iii)$$

Equation (iii), represents a circle of radius  $\sqrt{10}$  units

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{-2+\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2\lambda-3}{2}\right)^2} - 2 + 2\lambda = \sqrt{10} \Rightarrow (4 + 4\lambda + \lambda^2) + (4\lambda^2 + 9 - 12\lambda) + 8\lambda - 8 = 40$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{7}$$

Hence, required circles are

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 \pm \sqrt{7} (x + 2y - 2) = 0$$

There are two such circles possible.

**Hindi:** रेखा AB का समीकरण है

$$y - 2 = \frac{2-1}{-2-0} (x+2) = -\frac{1}{2} (x+2) \Rightarrow x + 2y - 2 = 0 \quad \dots\dots(i)$$

वृत्त का समीकरण जिसके व्यास के सिरे A तथा B है :

$$(x-0)(x+2) + (y-1)(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0 \quad \dots\dots(ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले वृत्तों का निकाय है

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 + \lambda(x + 2y - 2) = 0 \\ \Rightarrow & x^2 + y^2 + (2 + \lambda)x + (2\lambda - 3)y + 2 - 2\lambda = 0 \quad \dots\dots(iii) \end{aligned}$$

समीकरण (iii),  $\sqrt{10}$  इकाई त्रिज्या के वृत्त को व्यक्त करता है

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{-2+\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2\lambda-3}{2}\right)^2} - 2 + 2\lambda = \sqrt{10} \Rightarrow (4 + 4\lambda + \lambda^2) + (4\lambda^2 + 9 - 12\lambda) + 8\lambda - 8 = 40$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{7}$$

अतः अभीष्ट वृत्त है

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 \pm \sqrt{7}(x + 2y - 2) = 0$$

इस प्रकार के दो संभावित वृत्त हैं।

23. The curves whose equations are

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S' = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

intersect in four concyclic points then find relation in  $a, b, h, a', b', h'$ .

समीकरणों

$$S = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$S' = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$$

से प्रदर्शित वक्र परस्पर चार समचक्रीय बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो  $a, b, h, a', b', h'$  में संबन्ध ज्ञात कीजिए।

$$\text{Ans. } \frac{a-b}{h} = \frac{a'-b'}{h'}$$

- Sol.** Equation of any curve passing through the four points of intersection of  $S = 0$  and  $S' = 0$  is  $S + \lambda S' = 0$ .

For this to be a circle, we must have coefficient of  $x^2$  = coefficient of  $y^2$  & coefficient of  $xy = 0$ .

$S = 0$  एवं  $S' = 0$  के चार प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरने वाले किसी भी वक्र का समीकरण  $S + \lambda S' = 0$  इस वक्र के वृत्त होने के लिये  $x^2$  का गुणांक =  $y^2$  का गुणांक

तथा  $xy$  का गुणांक = 0

$$\Rightarrow a + \lambda a' = b + \lambda b' \quad \dots\dots(1)$$

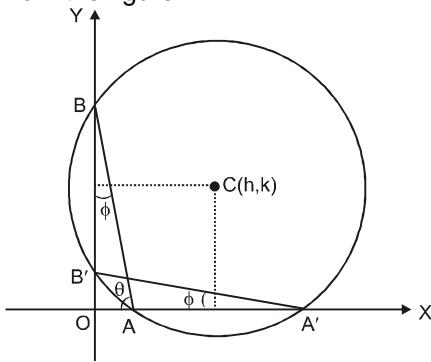
$$a - b = -\lambda(a' - b') \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{and और } 2h + \lambda 2h' = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{h}{h'} \quad \dots\dots(2)$$

$$\Rightarrow \text{from (1) and एवं (2) से } a - b = -\frac{h}{h'}(a' - b') \text{ or } \frac{a-b}{h} = \frac{a'-b'}{h'}$$



∴ from the figure



$$A' (b \cos \phi, 0) \text{ and } A(a \cos \theta, 0)$$

$$\text{similarly } B(0, a \sin \theta) \text{ and } B'(0, b \sin \phi)$$

$$\text{Let } c(h, k) \text{ be the centre of circle} \quad \therefore \quad 2h = a \cos \theta + b \cos \phi$$

$$\because \phi = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \therefore \quad 2h = a \cos \theta + b \sin \theta \quad \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{and } 2k = a \sin \theta + b \sin \phi \quad \therefore \quad \phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore 2k = a \sin \theta + b \cos \theta \quad \dots\dots\dots(ii)$$

$$\text{on solving (i) and (ii), we get } \cos \theta = \frac{2ah - 2bk}{a^2 - b^2} \text{ and } \sin \theta = \frac{2ak - 2bh}{a^2 - b^2}$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

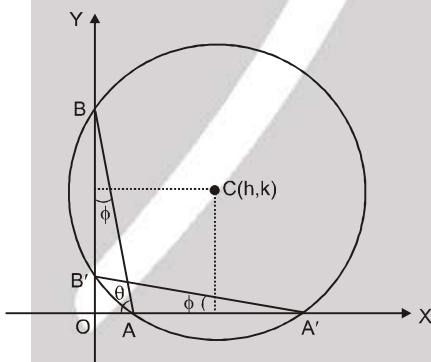
$$\therefore \text{locus of } C(h, k) \text{ is } (2ax - 2by)^2 + (2bx - 2ay)^2 = (a^2 - b^2)^2$$

**Hindi** माना कि  $\angle OA'B' = \phi$  तथा  $\angle OAB = \theta$

$$\Rightarrow \theta + \phi = \frac{\pi}{2} \text{ तथा } \angle OBA = \phi$$

∴ AB की लम्बाई a है तथा A'B' की लम्बाई b है

∴ चित्र से



$$A' (b \cos \phi, 0) \text{ तथा } A(a \cos \theta, 0)$$

$$\text{इसी प्रकार } B(0, a \sin \theta) \text{ तथा } B'(0, b \sin \phi)$$

माना कि वृत्त का केन्द्र c(h, k) है।

$$\therefore 2h = a \cos \theta + b \cos \phi$$

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore 2h = a \cos \theta + b \sin \phi \quad \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{तथा } 2k = a \sin \theta + b \sin \phi \quad \therefore \quad \phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore 2k = a \sin \theta + b \cos \phi \quad \dots\dots\dots(ii)$$

$$(i) \text{ व (ii) को हल करने पर } \frac{2ah - 2bk}{a^2 - b^2} \text{ and } \sin \theta = \frac{2ak - 2bh}{a^2 - b^2}$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore C(h, k) \text{ का बिन्दुपथ } (2ax - 2by)^2 + (2bx - 2ay)^2 = (a^2 - b^2)^2$$

