Exercise-1

Marked Questions can be used as Revision Questions.

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

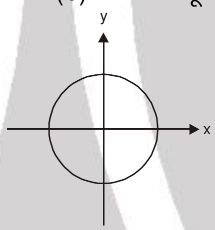
Subjective Easy, only learning value problems

Section (A) : Kinematics of circular motion

Section (A) : वृत्तीय गति की गतिकी

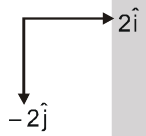
A-1. Figure shows a circular path taken by a particle. If the instantaneous velocity of the particle is $\vec{v}$ = (2m /s) $\hat{i}$ – (2 m/s) $\hat{j}$. Through which quadrant is the particle moving when it is travelling (a) clockwise and (b) counter clockwise around the circle?

चित्र में एक कण की गति का वृत्ताकार पथ दर्शाया गया है। यदि कण का तात्क्षणिक वेग $\vec{v}$ = (2m /s) $\hat{i}$ – (2 m/s) $\hat{j}$, है तो किस चतुर्थांश में कण वृत पर (a) दक्षिणावर्त तथा (b) वामावर्त घूम रहा होगा ?

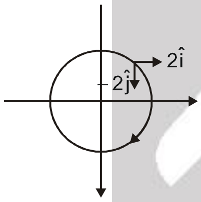


Ans. (a) first (b) third. (a) प्रथम (b) तृतीय

Sol. Given दिया है $\vec{v} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$

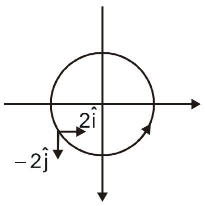


(a) when moves in clockwise (जब दक्षिणावर्त घूमता है)



Ans. : First quadrant प्रथम पाद

(b) When moves in counter clockwise जब वामावर्त घूमता है।



Ans. : Third quadrant तृतीय पाद

A-2. Find the ratio of angular speeds of minute hand and hour hand of a watch and also find the angular speed of the second's hand in a watch.
घड़ी की मिनट व घण्टे की सुई की कोणीय चालों का अनुपात ज्ञात कीजिए। सेकण्ड की सुई की कोणीय चाल भी ज्ञात करो।

Ans. 12 : 1, $\frac{\pi}{30}$ rad/sec. रेडियन/सेकण्ड

Sol. $\omega_{minute} = \frac{2\pi}{60 \times 60} = \frac{2\pi}{3600}$ rad/sec. रेडियन/सेकण्ड

$\omega_{hour} = \frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60} = \frac{2\pi}{12 \times 3600}$ rad/sec. रेडियन/सेकण्ड

$\omega_{minute} : \omega_{hour} =$ 12 : 1 **Ans.**

$\omega_{second} = \frac{2\pi}{60}$ rad/sec. $= \frac{\pi}{30}$ rad/sec **Ans.**

A-3. A wheel is subjected to uniform angular acceleration about its axis. Initially its angular velocity is zero. In the first 2 seconds, it rotates through an angle θ_1. In the next 2 seconds, it rotates through an additional angle θ_2. find the ratio of θ_2/θ_1 .
एक पहिये को एक समान कोणीय त्वरण से अपने अक्ष के प्रति घुमाया जाता है, इसकी प्रारम्भिक कोणीय चाल शून्य है। प्रथम 2 सेकण्ड में यह θ_1 कोण से घूमता है। अगले 2 से० में यह θ_2 कोण से ओर घूमता है। अनुपात θ_2/θ_1 का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. 3 : 1

Sol. Given दिया है $\omega_0 = 0$, α = const नियतांक ,

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

for first two seconds प्रथम दो सेकण्ड के लिए

$\theta_1 = 0 + \frac{1}{2}\alpha \times (2)^2 = 2\alpha$

for next two seconds अगले दो सेकण्ड के लिए

$\theta_2 = \theta_4 - \theta_2 = \frac{1}{2}\alpha (4)^2 - \frac{1}{2}\alpha (2)^2 = 6\alpha$

$\theta_2 / \theta_1 = 3 : 1$ **Ans.**

A-4. If the equation for the angular displacement of a particle moving on a circular path is given by $(\theta) = 2t^3 + 0.5$, where θ is in radians and t in seconds, then find the angular velocity of the particle after 2 seconds from its start.
वृत्तीय पथ पर गति कर रहे कण के कोणीय विस्थापन का समीकरण $(\theta) = 2t^3 + 0.5$ से व्यक्त किया जाता है यहाँ θ रेडियन में t सेकण्ड मात्रक में है तो इसके प्रारम्भ से 2 सेकण्ड पश्चात् कण का कोणीय वेग ज्ञात कीजिए ?

Ans. 24 rad/sec 24 रेडियन/सैकण्ड

Sol. Given दिया है $\theta = 2t^3 + 0.5$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 6t^2$

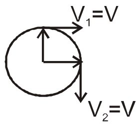
at t = 2 sec. पर

$\omega = 6 \times (2)^2 = 24$ rad/sec. **Ans.**

A-5. The length of second's hand in a watch is 1 cm. Find the magnitude of change in velocity of its tip in 15 seconds. Also find out the magnitude of average acceleration during this interval
एक घड़ी में सेकण्ड की सुई की लम्बाई 1 सेमी है। 15 सेकण्ड में इसके सिरे के वेग में परिवर्तन का परिमाण ज्ञात कीजिए। इस समयान्तराल में औसत त्वरण का परिमाण भी ज्ञात कीजिए ?

Ans. $\frac{\pi\sqrt{2}}{30}$ cm/sec, $\frac{\pi\sqrt{2}}{30 \times 15}$ cm/s^2 $\frac{\pi\sqrt{2}}{30}$ सेमी./सेकण्ड , $\frac{\pi\sqrt{2}}{30 \times 15}$ सेमी./सेकण्ड^2

Sol. Given दिया है ℓ = R = 1 cm , t = 15 Second



$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

$\Delta V = \sqrt{2}\,V$

$V = \omega R$

$V = \frac{2\pi}{60} \times 1 = \frac{\pi}{30}$ cm/sec.

$\Delta V = \frac{\sqrt{2}\pi}{30}$ cm/sec.

$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi\sqrt{2}}{30 \times 15}$ cm/sec^2. **Ans.**

Section (B) : Radial and Tangential acceleration
Section (B) : त्रिज्यीय एवं स्पर्श रेखीय त्वरण

B-1. A particle moves uniformly in a circle of radius 25 cm at two revolution per second. Find the acceleration of the particle in m/s^2 .
एक कण 25 सेमी त्रिज्या के वृत्त में दो घूर्णन प्रति सेकण्ड की समान दर से घूम रहा है। कण का त्वरण मी/से^{2} मात्रक में ज्ञात करो।

Ans. $4\pi^2$

Sol. R = 0.25 m , ω = 2 rev./sec. = 4π rad/sec. ($a_t = 0$)

$a_c = \omega^2 R$

$= (4\pi)^2 \times 0.25$

$= 4\pi^2$ m/s^2. **Ans.**

B-2. A car is moving with speed 30 m/sec on a circular path of radius 500 m. Its speed is increasing at the rate of 2 m/sec^2. What is the acceleration of the car at that moment?
500 मी. त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर एक कार 30 मी/से० की चाल से गतिमान हैं। इसकी चाल 2 मी/से^{2} की दर से बढ़ रही हैं, इस क्षण कार का त्वरण कितना होगा ?

Ans. $\left(\frac{\sqrt{181}}{5} \text{m/sec}^2\right)$

Sol. Given दिया गया है V = 30 m/s , R = 500 m , $\frac{dv}{dt}$ = 2 m/s^2.

$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(30)^2}{500} = \frac{9}{5}$ m/s^2.

$a_t = \frac{dv}{dt} = 2$ m/s^2

$a_t = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{181}}{5}$ m/s^2 **Ans.**

B-3. A particle moves in a circle of radius 1.0 cm at a speed given by v= 2.0 t where v is in cm/s and t in seconds.
1.0 cm त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर एक कण v = 2.0 t चाल से गति करता है, जहाँ v सेमी० /सै० में तथा t सैकण्ड में है तो
(a) Find the radial acceleration of the particle at t = 1s.
t = 1 सैकण्ड पर कण का त्रिज्यीय त्वरण ज्ञात कीजिए।
(b) Find the tangential acceleration at t = 1s
t = 1 सैकण्ड पर कण का स्पर्श रेखीय त्वरण ज्ञात कीजिए।
(c) Find the magnitude of the acceleration at t = 1s.
t = 1 सैकण्ड पर कण के त्वरण का परिमाण ज्ञात कीजिए।

Ans : (a) 4.0 cm/s^2, (b) 2.0 cm/s^2, (c) $\sqrt{20}$ cm/s^2

Sol. R = 1.0 cm , V = 2.0 t
at t = 1 sec पर $\Rightarrow$ V = 2.0 cm/sec.

$$a_c = \frac{v^2}{R} = 4 \text{ cm/sec}^2.$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2.0 \text{ cm/sec}^2.$$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{4^2 + 2^2}$$

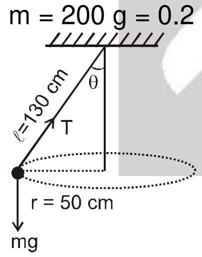
$$= 2\sqrt{5} \text{ cm/sec}^2.$$ **Ans.**

Section (C) : Circular Motion in Horizontal plane
Section (C) : क्षैतिज तल में वृत्तीय गति

C-1. A small sphere of mass 200 gm is attached to an inextensible string of length 130 cm whose upper end is fixed to the ceiling. The sphere is made to describe a horizontal circle of radius 50 cm. Calculate the time period of this conical pendulum and the tension in the string. (π^2 = 10)
छत से लटकायी गयी 130 सेमी० लम्बी अवितान्य डोरी के दूसरे सिरे पर 200 ग्राम द्रव्यमान का छोटा गोला लटकाया गया है। गोले को 50 सेमी त्रिज्या के क्षैतिज वृत में गति करवायी जाती है। इस शंकु लोलक (Conical pendulum) के आवर्तकाल एवं डोरी में तनाव की गणना कीजिए। (π^2 = 10)

Ans. $2\sqrt{\frac{6}{5}}$ sec., $\frac{13}{6}$ N (with π^2 = 10) (π^2 = 10 मानिए)

Sol. m = 200 g = 0.2 kg , g = π^2 m/s^2



Time period आवर्त काल $= 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.2}{\pi^2}} = 2\sqrt{\frac{6}{5}}$ **Ans.**

Tension तनाव $= \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{0.2 \times \pi^2}{12/13} = \frac{13}{6}$N **Ans.**

C-2. A motorcyclist wants to drive on the vertical surface of wooden 'well' of radius 5 m, in horizontal plane with speed of $5\sqrt{5}$ m/s. Find the minimum value of coefficient of friction between the tyres and the wall of the well . (take g = 10 m/s^2)

एक मोटर साईकिल चालक, 5 मी० त्रिज्या वाले लकड़ी के कुएं की ऊर्ध्व सतह पर, $5\sqrt{5}$ मी/से० चाल से क्षैतिज तल में मोटरसाइकिल चलाना चाहता है। कुए की दीवार और टायरों के बीच घर्षण गुणांक का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। (दिया है g = 10 m/s^2)

Ans. $\frac{2}{5}$

Sol. $N = \frac{mv^2}{r}$ given दिया है $r = 5$ m , $v = 5\sqrt{5}$ m/s

for no slipping फिसलन न होने के लिए $f \geq mg$

$$\mu_{min} N = mg$$

$$\mu_{min} = \frac{mg}{N} = \frac{rg}{v^2}$$

$$\mu_{min} = \frac{5 \times 10}{(5\sqrt{5})^2} = \frac{2}{5} \text{ **Ans.**}$$

C-3. A mass is kept on a horizontal frictionless surface. It is attached to a string and rotates about a fixed centre at an angular velocity ω_0. If the length of the string and angular velocity are doubled, find the tension in the string which was initially T_0 .

एक द्रव्यमान, घर्षणहीन क्षैतिज तल पर रखा है। यह एक डोरी से जुड़ा हुआ है और जड़वत् केन्द्र के परितः ω_0 कोणीय वेग से घूम रहा है। यदि डोरी की लम्बाई एवं कोणीय वेग दो गुने कर दिये जायें, तो डोरी में तनाव का मान ज्ञात कीजिये। पूर्व में यह T_0 था।

Ans. $8T_0$

Sol. $\omega_i = \omega_0$, $\ell = \ell_0$

$\omega_f = 2\omega_0$, $\ell = 2\ell_0$

$T_i = m\omega_0^2\ell_0 = T_0$

$T_f = m(2\omega_0)^2 (2\ell_0) = 8T_0$ **Ans.**

C-4. A ceiling fan has a diameter (of the circle through the outer edges of the three blades) of 120 cm and rpm 1500 at full speed. Consider a particle of mass 1g sticking at the outer end of a blade. What is the net force on it, when the fan runs at full speed ? Who exerts this force on the particle ? How much force does the particle exert on the blade in the plane of motion ?

एक छत के पंखे का व्यास (तीनों पंखुड़ियों के बाह्य किनारों से बनने वाले वृत्त का) 120 cm है तथा इसकी अधिकतम चाल 1500 चक्कर प्रति मिनट है। मानाकि इसकी पंखुड़ी के बाह्य किनारे पर 1g द्रव्यमान का कण चिपक जाता है। जब पंखा अधिकतम चाल से घूम रहा हो तो कण पर लगने वाला अधिकतम बल कितना होगा ? कण पर यह बल किसके कारण लगेगा ? पंखुड़ी पर गति के तल में कण कितना बल लगायेगा ?

Ans : $\frac{15\pi^2}{10} = 14.8\text{N}, \frac{15\pi^2}{10} = 14.8$ N.

Sol. $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi \times 1500}{60}$ rad/sec

$r = \frac{d}{2} = 60$ cm $= 0.6$ m

$m = 1$ g $= 10^{-3}$ kg

$$F = m\omega^2 r = 10^{-3} \times \left(\frac{2\pi \times 1500}{60}\right)^2 \times 0.6 = \frac{15\pi^2}{10} = 14.8 \text{ **Ans.**}$$

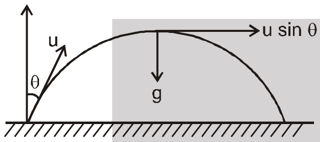
This force is exerted by blade of fan and equal force is exerted by particle on blade in same magnitude but opposite in direction.

यह बल पंखे की ब्लेड़ों द्वारा आरोपित है। कण द्वारा पंखुडियों पर समान परिमाण का विपरीत दिशा में बल लगाया जायेगा।

Section (D) : Radius of curvature
Section (D) : वक्रता त्रिज्या

D-1. A ball is projected with initial speed u and making an angle θ with the vertical. Consider a small part of the trajectory near the highest position and take it approximately to be a circular arc. What is the radius of this circle? This radius is called the radius of curvature of the curve at the point.
एक गेंद को ऊर्ध्व से θ कोण पर प्रारम्भिक चाल u से प्रक्षेपित किया गया है। उच्चतम स्थिति में पथ के अल्प भाग को लगभग वृत्ताकार चाप मान लीजिये। इस वृत्त की त्रिज्या क्या होगी ? यह त्रिज्या वक्र के उस बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या कहलाती है।

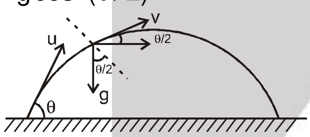
Ans : $\dfrac{u^2 \sin^2 \theta}{g}$

Sol.


$R = \dfrac{(v_\perp)^2}{a_\perp} = \dfrac{u^2 \sin^2 \theta}{g}$ **Ans.**

D-2. A particle is projected with initial speed u and at an angle θ with horizontal. What is the radius of curvature of the parabola traced out by the projectile at a point where the particle velocity makes an angle θ/2 with the horizontal?
एक कण क्षैतिज से θ कोण पर प्रारम्भिक चाल u से प्रक्षेपित किया गया है। जहाँ कण का वेग क्षैतिज से θ/2 कोण बनाता हो, उस बिन्दु पर प्रक्षेप्य द्वारा तय किये गये परवलय की वक्रता त्रिज्या क्या होगी

Ans : $\dfrac{u^2 \cos^2 \theta}{g \cos^3 (\theta/2)}$

Sol.


$u \cos\theta = v \cos \theta/2$

$\Rightarrow v = \dfrac{u \cos\theta}{\cos\theta/2}$

$a_\perp = g \cos \theta/2 \quad \Rightarrow R = \dfrac{v^2}{a_\perp} = \dfrac{u^2 \cos^2 \theta}{g \cos^3 \theta/2}$ **Ans.**

Section (E) : Circular motion in vertical plane ऊर्ध्व तल में वृत्तीय गति :

E-1. A weightless thread can support tension upto 30 N. A stone of mass 0.5 kg is tied to it and is revolved in a circular path of radius 2 m in a vertical plane. If g = 10 m/s², find the maximum angular velocity of the stone.
एक भारहीन डोरी 30 N तनाव सहन कर सकती है। इससे 0.5 किग्रा. द्रव्यमान का पत्थर बांधकर उर्ध्वतल में 2 मी. त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर घुमाया जाता है। यदि g = 10 मी/से² है, तो पत्थर का अधिकतम कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

Ans. 5 rad/s रेडियन/सैकण्ड

Sol. Tension is maximum in circular motion in vertical plane at lowest position.
उर्ध्व तल में वृत्तीय गति की निम्नतम स्थिति में अधिकतम तनाव होता है
At lowest position निम्नतम स्थिति में

$T_{max} - mg = m\omega^2 R$

$\Rightarrow \quad 30 - 0.5 \times 10 = 0.5\, \omega^2 \times 2$

$\omega^2 = \dfrac{25}{0.5 \times 2} \quad \Rightarrow \quad \omega = 5$ rad/sec. **Ans.**

E-2. A simple pendulum oscillates in a vertical plane. When it passes through the mean position, the tension in the string is 3 times the weight of the pendulum bob. What is the maximum angular displacement of the pendulum of the string with respect to the downward vertical.
एक सरल लोलक ऊर्ध्व तल में दोलन कर रहा है, जब यह माध्य स्थिति से गुजरता है तब रस्सी में तनाव लोलक के भार का तीन गुना है। लोलक की डोरी का ऊर्ध्व नीचे की दिशा से कोणीय विस्थापन का अधिकतम मान कितना होगा ।

Ans. 90°

Sol. Tension at lowest point निम्नतम बिन्दु पर तनाव = 3 mg
Therefore velocity at lowest point अतः निम्नतम बिन्दु पर वेग

$$T - mg = \frac{mv^2}{\ell} \quad \Rightarrow \quad 3mg - mg = \frac{mv^2}{\ell}$$

$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\ell}$

velocity at maximum displacement is zero.
From energy conservation
अधिकतम विस्थापन पर वेग शून्य है
ऊर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 90^\circ$ **Ans.**

E-3. A small body of mass m hangs at one end of a string of length a, the other end of which is fixed. It is given a horizontal velocity u at its lowest position so that the string would just becomes slack, when it makes an angle of 60° with the upward drawn vertical line. Find the tension in the string at point of projection.
a लम्बाई की रस्सी के एक सिरे से एक m द्रव्यमान का छोटा पिण्ड लटक रहा है, जिसका दूसरा सिरा जड़वत है। पिण्ड को निम्नतम बिन्दु पर क्षैतिज वेग u इस प्रकार दिया जाता है कि ऊपरी ऊर्ध्व रेखा से 60° के कोण पर रस्सी ढीली पड़ जाती है। प्रक्षेपण बिन्दु पर डोरी में तनाव ज्ञात कीजिये।

Ans. $\frac{9}{2}$ mg

Sol. When string become slack apply equation for centripetal force.
जब डोरी ढीली पड़ जाती है, तो अभिकेन्द्रीय बल की समीकरण लगाने पर

$$\frac{mv^2}{a} = mg\cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{ga}{2}} \quad .....(i)$$

apply energy conservation ऊर्जा संरक्षण प्रयुक्त करने पर

$$\frac{1}{2} mu^2 = \frac{1}{2} mv^2 + mga(1 + \cos\theta) \quad ....(ii)$$

from equation (i) & (ii)
समीकरण (i) व (ii) से

$$u = \sqrt{\frac{7ga}{2}}$$

apply equation for centripetal force at lowest position.
निम्नतम स्थिति पर अभिकेन्द्रीय बल की समीकरण लगाने पर

$$T - mg = \frac{mu^2}{a}$$

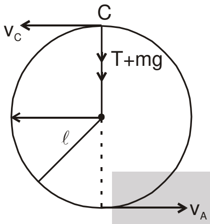
put the value of u and we get
u का मान रखने पर प्राप्त होगा।

$$T = 9mg/2$$

E-4. A body attached to a string of length ℓ describes a vertical circle such that it is just able to cross the highest point. Find the minimum velocity at the bottom of the circle.
ℓ लम्बाई की डोरी से बंधी हुई वस्तु ऊर्ध्व वृत्त को इस प्रकार पूरा करती है कि यह शीर्ष बिन्दु को ठीक पार करने में सफल हो जाती है। वृत्त के निम्नतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग ज्ञात कीजिए।

Ans. $\sqrt{5g\ell}$

Sol. At higest point C उच्चतम बिन्दु C पर



$$T + mg = \frac{mv_C^2}{\ell}$$

but लेकिन $T > 0$

$\Rightarrow \quad \frac{mv_C^2}{\ell} - mg > 0$

$\Rightarrow \quad v_C > \sqrt{g\ell}$

$\therefore \quad V_C \text{ min} = \sqrt{g\ell}$

Using energy conservation between C & A
C व A के मध्य ऊर्जा संरक्षण का उपयोग करते हुए।

$mg(2\ell) + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \Rightarrow \quad mg(2\ell) = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mg\ell$

$\Rightarrow \quad v_A = \sqrt{5g\ell} \quad$ (min)

Section (F) : Motion of a vehicle, Centrifugal force and rotation of earth
Section (F) : वाहन की गति, अपकेन्द्रीय बल तथा पृथ्वी का घूर्णन

F-1. When the road is dry and coefficient of friction is μ, the maximum speed of a car in a circular path is 10 ms^{-1}. If the road becomes wet and coefficient of friction become $\frac{\mu}{2}$, what is the maximum speed permitted?
जब सड़क सूखी हो और घर्षण गुणांक μ हो, तो कार की वृत्ताकार पथ पर अधिकतम चाल 10 ms^{-1}. है। यदि सड़क गीली हो जाये ओर घर्षण गुणांक $\frac{\mu}{2}$ हो जाता है। तब अधिकतम सम्भव चाल कितनी होगी ?

Ans. $5\sqrt{2}$ ms^{-1}

Sol. For safe driving सुरक्षित सवारी के लिए $v_{max} = \sqrt{\mu rg}$

$$10 = \sqrt{\mu rg}$$

for wet road गीली सड़क के लिए $v' = \sqrt{\frac{\mu}{2}rg} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ m/s **Ans.**

F-2. Find the maximum speed at which a car can turn round a curve of 30 m radius on a level road if the coefficient of friction between the tyres and the road is 0.4 [g = 10 m/s²]
कार के टायर एवं सड़क के मध्य घर्षण गुणांक 0.4 है। कार की वह अधिकतम चाल ज्ञात कीजिए जिससे कि यह समतल सड़क पर 30 मी० त्रिज्या के वृत्त में सुरक्षित घूम सके। [g = 10 m/s²]

Ans. $\sqrt{120}$ m/s

Sol. Maximum safe speed अधिकतम सुरक्षित चाल = $\sqrt{\mu rg}$ = $\sqrt{0.4 \times 30 \times 10}$ = $\sqrt{120}$ m/s **Ans.**

F-3. A train has to negotiate a curve of radius 400 m. By how much height should the outer rail be raised with respect to inner rail for a speed of 48 km/hr ? The distance between the rails is 1 m :
एक ट्रेन को 400 मी. त्रिज्या वाले वक्र पर घूमना है। 48 किमी./घण्टा की चाल के लिये आंतरिक पटरी की तुलना में बाह्य पटरी को कितना ऊँचा उठाना चाहिये? पटरियों के बीच की दूरी 1 मी. है।

Ans. $\frac{2}{45}$ m

Sol. v = 48 km/hr = 40/3 m/s.
For safe turn without friction घर्षणरहित सुरक्षित घुमाव के लिए

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{h}{x}$$

given दिया है $x \approx \ell = 1\text{m} \Rightarrow$ $h = \frac{v^2}{rg} = \frac{(40/3)^2}{400 \times 10} = \frac{2}{45}$ m **Ans.**

F-4. A road surrounds a circular playing field having radius of 10 m. If a vehical goes around it at an average speed of 18 km/hr, find proper angle of banking for the road. If the road is horizontal (no banking), what should be the minimum friction coefficient so that a scooter going at 18 km/hr does not skid.
एक वृत्तीय खेल मैदान जिसकी त्रिज्या 10m है, के चारो ओर सड़क है। यदि एक वाहन 18 km/hr की औसत चाल से इस पर चलता है तो सड़क के लिए उपयुक्त बंकन कोण ज्ञात करो। यदि सड़क क्षैतिज है (बंकित नहीं), घर्षण गुणांक का न्यूनतम मान कितना होना चाहिए , जिससे 18 km/hr चाल से गतिशील स्कूटर नहीं फिसले।

Ans. $\tan^{-1}(1/4)$, 1/4

Sol. Proper angle of banking बंकन का उपयुक्त कोण

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{(5)^2}{10 \times 10} = \frac{1}{4} \qquad (\because 18 \text{ km/hr} = 5 \text{ m/s})$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{4}$$ **Ans.**

minimum coefficient of friction for no banking बंकन की अनुपस्थिति में न्यूनतम घर्षण गुणांक

$$\mu = \frac{v^2}{rg} = \frac{(5)^2}{10 \times 10} = \frac{1}{4}$$

$$\mu = \frac{1}{4}$$ **Ans.**

F-5. A circular road of radius 1000 m has banking angle 45°. Find the maximum safe speed of a car having mass 2000 kg, if the coefficient of friction between tyre and road is 0.5.
1000 m त्रिज्या की वृत्तीय सड़क का बंकन कोण 45° है। 2000 किग्रा. द्रव्यमान की कार के लिए अधिकतम सुरक्षित चाल का मान ज्ञात कीजिए। (सड़क और टायर के बीच घर्षण गुणांक 0.5 है)

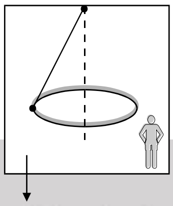
Ans. $100\sqrt{3}$ m/s

Sol. Maximum safe speed अधिकतम सुरक्षित चाल = $v_{max} = \sqrt{gr\left(\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu\tan\theta}\right)} = \sqrt{1000 \times 10 \left(\frac{1 + 0.5}{1 - 0.5 \times 1}\right)}$

= $100\sqrt{3}$ m/s **Ans.**

F-6._ In the figure shown a lift goes downwards with a constant retardation. An observer in the lift observers a conical pendulum in the lift, revolving in a horizontal circle with time period 2 seconds. The distance between the centre of the circle and the point of suspension is 2.0 m. Find the retardation of the lift in m/s^2. Use $\pi^2 = 10$ and $g = 10\ m/s^2$

दिए गए चित्र में लिफ्ट नियत मंदन से नीचे की और गति कर रही है। एक प्रेक्षक जो लिफ्ट के अन्दर है, 2 सैकण्ड के आवर्त–काल वाले क्षैतिज वृत्त में चक्कर काट रहे कोनिकल पेंण्डूलम (शंक्वाकार लोलक) को देखता है। वृत के केन्द्र एवम् किलकीत बिन्दु के बीच दूरी 2.0 m है। लिफ्ट का मंदन (m/s^2 में) ज्ञात कीजिए। उपयोग में लें $\pi^2 = 10$ और $g = 10\ m/s^2$



Sol. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell\cos\theta}{g_{eff.}}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g_{eff.}}}$

$g_{eff.} = g + a$; $T = 2$ put रखने पर $\Rightarrow g_{eff} = 20 \Rightarrow g + a = 20 \Rightarrow a = 10\ m/s^2$.

Ans. Retardation मंदन **= 10 m/s²**

Ans. 10 m/s²

F-7. A turn of radius 20 m is banked for the vehicles going at a speed of 36 km/h. If the coefficient of static friction between the road and the tyre is 0.4, what are the possible speeds of a vehicle so that it neither slips down nor skids up ?

36 km/h चाल से गतिशील वाहनों के लिये बंकित किये गये एक मोड़ की त्रिज्या 20 m है। यदि टायरों तथा सड़क के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक का मान 0.4 है, तो वाहन की चाल के सम्भव मान क्या हो सकते है कि वाहन न तो नीचे और न ही ऊपर की ओर से फिसले।

Ans : Between $\sqrt{\dfrac{50}{3}} \times \dfrac{18}{5}$ = 14.7 km/h and 54 km/hr

Ans : $\sqrt{\dfrac{50}{3}} \times \dfrac{18}{5}$ = 14.7 km/h तथा 54 km/hr के बीच

Sol. v = 36 km/hr = 10 m/s

$\tan\theta = \dfrac{v^2}{Rg} = \dfrac{10\times10}{20\times10} = \dfrac{1}{2}$

$v_{max} = \sqrt{Rg\left(\dfrac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta}\right)}$ = 15 m/s = 54 km/hr **Ans.**

$v_{min} = \sqrt{Rg\left(\dfrac{\tan\theta-\mu}{1+\mu\tan\theta}\right)} = \sqrt{\dfrac{20\times10(0.5-0.4)}{(1+0.5\times0.4)}}$

$= \sqrt{\dfrac{20\times10\times0.1}{1.2}} = \sqrt{\dfrac{50}{3}} \times \dfrac{18}{5}$ km/hr **Ans.**

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

Single Choice Objective, straight concept/formula oriented

Section (A) : Kinematics of circular motion वृतीय गतिकी

A-1. Two racing cars of masses m_1 and m_2 are moving in circles of radii r and 2r respectively and their angular speeds are equal. The ratio of the time taken by cars to complete one revolution is :
दो कारें जिनके द्रव्यमान m_1 व m_2 है, क्रमशः r तथा 2r त्रिज्या के वृत्त में गतिशील है। उनकी कोणीय चालें समान है। इन कारों द्वारा एक परिक्रमण पूर्ण करने में लगे समय का अनुपात होगा ?
(A) $m_1 : m_2$ (B) 1 : 2 (C*) 1 : 1 (D) $m_1 : 2m_2$

Sol. Speed चाल $v_1 = \frac{2\pi r}{t}$

$v_2 = \frac{2\pi r}{t}$

$\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{2\pi}{t_1}$ ...(i)

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{v_2}{2r} = \frac{2\pi}{t_2}$ ...(ii)

From eq. (i) and (ii)

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow 1 = \frac{t_2}{t_1}$

A-2. A wheel is at rest. Its angular velocity increases uniformly with time and becomes 80 radian per second after 5 second. The total angular displacement is :
(A) 800 rad (B) 400 rad (C*) 200 rad (D) 100 rad
एक पहिया विरामावस्था में है। इसका कोणीय वेग समय के साथ एकसमान रूप से बढ़ता है और 5 सेकण्ड पश्चात् 80 रेडियन प्रति सेकण्ड हो जाता है। इसका कुल कोणीय विस्थापन होगा –
(A) 800 रेडियन (B) 400 रेडियन (C*) 200 रेडियन (D) 100 रेडियन

Sol. ω = 80 rad/sec, t = 5 sec, $\omega_0 = 0$
θ = ?
If α constant, then यदि α नियत है, तो

$\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) t = \left(\frac{80+0}{2}\right) 5 = 200$ rad **Ans.**

A-3. A particle moves along a circle of radius $\left(\frac{20}{\pi}\right)$ m with tangential acceleration of constant magnitude. If the speed of the particle is 80 m/s at the end of the second revolution after motion has begun, the tangential acceleration is:
एक कण $\left(\frac{20}{\pi}\right)$ मी. त्रिज्या के वृत्त के अनुदिश नियत परिमाण के स्पर्श रेखीय त्वरण के साथ गति कर रहा है। गति प्रारम्भ करने के पश्चात् 2 चक्कर पूरे कर लेने पर इसकी चाल 80 मी/से. हो जाती है। स्पर्श रेखीय त्वरण का मान है।–
(A) 160 π m/s^2 (B) 40 π m/s^2 (C*) 40 m/s^2 (D) 640 π m/s^2

Sol. $r = \frac{20}{\pi}$ m, a_t = constant नियतांक
n = 2nd revolution दूसरा घूर्णन
v = 80 m/s

$\omega_0 = 0$, $\omega_f = \frac{v}{r} = \frac{80}{20/\pi} = 4\pi$ rad/sec

$\theta = 2\pi \times 2 = 4\pi$

from 3rd equation तृतीय समीकरण से

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

$\Rightarrow \quad (4\pi)^2 = 0^2 + 2 \times \alpha \times (4\pi)$

$\alpha = 2\pi$ rad/s^2

$a_t = \alpha r = 2\pi \times \dfrac{20}{\pi} = 40$ m/s^2 **Ans.**

A-4. During the circular motion with constant speed :
नियत चाल से वृत्तीय गति के लिए :
(A) Both velocity and acceleration are constant
वेग तथा त्वरण दोंनो नियत रहते है।
(B) velocity is constant but the acceleration changes
वेग नियत रहता है, किन्तु त्वरण परिवर्तित होता है।
(C) acceleration is constant but the velocity changes
त्वरण नियत रहता है किन्तु वेग परिवर्तित होता है।
(D*) velocity and acceleration both change
वेग एवं त्वरण दोंनो ही परिवर्तित होते है।

Sol. Speed = constant
In uniform circular motion, velocity and acceleration are constant in magnitude but direction is changes. Therefore velocity and acceleration both change.
चाल = नियतांक
नियत चाल से वृत्तीय गति में, वेग व त्वरण के परिमाण नियत रहते हैं, पर दिशा बदलती रहती है। अतः वेग व त्वरण दोनों परिवर्तनशील होते हैं।

Section (B) : Radial and Tangential acceleration
Section (B) : त्रिज्यीय एवं स्पर्श रेखीय त्वरण

B-1. Two particles P and Q are located at distances r_P and r_Q respectively from the axis of a rotating disc such that $r_P > r_Q$:
दो कण P एवं Q किसी घूमती चकती के अक्ष से क्रमशः r_P व r_Q दूरी पर इस प्रकार स्थित है कि $r_P > r_Q$ तो ?
(A) Both P and Q have the same acceleration (B) Both P and Q do not have any acceleration
(C*) P has greater acceleration than Q (D) Q has greater acceleration than P
(A) P व Q दोनों का त्वरण समान होगा। (B) P व Q दोनों में ही त्वरण नहीं होगा।
(C*) P का त्वरण Q से अधिक होगा। (D) Q का त्वरण P से अधिक होगा।

Sol. Angular velocity of every particle of disc is same
चकती के प्रत्येक कण का कोणीय वेग समान होगा।

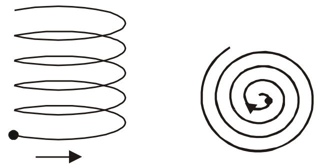
$a_P = \omega^2 r_p$, $a_Q = \omega^2 r_Q$

$\because r_P > r_Q \Rightarrow a_P > a_Q$ **Ans.**

B-2. Let a_r and a_t represent radial and tangential acceleration. The motion of a particle may be circular if :
माना कि a_r एवं a_t त्रिज्यीय तथा स्पर्श रेखीय त्वरण को व्यक्त करते है। कण की गति वृत्तीय हो सकती है, यदि–
(A) $a_r = 0, a_t = 0$ (B) $a_r = 0, a_t \neq 0$ (C*) $a_r \neq 0, a_t = 0$ (D) none of these
(A) $a_r = 0, a_t = 0$ (B) $a_r = 0, a_t \neq 0$ (C*) $a_r \neq 0, a_t = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. For circular motion of particle a_r not equal to zero, a_t may or may not be zero ($a_r = v^2 / r$)
कण की वृत्तीय गति के लिए a_r अशून्य है व a_t शून्य या अशून्य कुछ भी हो सकता है। ($a_r = v^2 / r$)

B-3. A particle is going with constant speed along a uniform helical and spiral path separately as shown in figure (in case (a), verticle acceleration of particle is negligible)
एक कण नियत चाल से चित्रानुसार अलग–अलग कुण्डलीनुमा व सर्पिलाकार पथों पर गतिशील है – (स्थिति (a) में ऊर्ध्वाधर दिशा में कण का त्वरण नगण्य है।)



(A) The velocity of the particle is constant in both cases
दोनों स्थितियों में कण का वेग नियत है।
(B) The magnitude of acceleration of the particle is constant in both cases
दोनों स्थितियों में कण के त्वरण का परिमाण नियत है।
(C*) The magnitude of accleration is constant in (a) and decreasing in (b)
स्थिति (a) में त्वरण का परिमाण नियत तथा स्थिति (b) में घट रहा है।
(D) The magnitude of accleration is decreasing continuously in both the cases
दोनों स्थितियों में कण के त्वरण का परिमाण निरन्तर कम हो रहा है।

Sol. $a_c = \frac{v^2}{r}$, radius is constant in case (a) and increase in case (b). So that magnitude of acceleration is constant in case (a) and decrease in case (b).
$a_c = \frac{v^2}{r}$, प्रथम प्रकरण (a) में त्रिज्या नियत है व प्रकरण (b) में वृद्धिमान है। अतः त्वरण का परिमाण प्रकरण (a) में नियत व प्रकरण (b) में घटता है।

B-4. If the radii of circular paths of two particles of same masses are in the ratio of 1 : 2, then in order to have same centripetal force, their speeds should be in the ratio of :
यदि समान द्रव्यमान वाले दो कणों के वृत्ताकार पथों की त्रिज्याओं का अनुपात 1 : 2 है, तो समान अभिकेन्द्रीय बल के लिए इनकी चालों का अनुपात होगा –
(A) 1 : 4 (B) 4 : 1 (C*) 1 : $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}$: 1

Sol. $F_{C1} = F_{C2} \Rightarrow \frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{mv_2^2}{r_2}$

$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Ans.**

Section (C) : Circular Motion in Horizontal plane
Section (C) : क्षैतिज तल में वृत्तीय गति

C-1. A stone of mass of 16 kg is attached to a string 144 m long and is whirled in a horizontal smooth surface. The maximum tension the string can withstand is 16 N. The maximum speed of revolution of the stone without breaking it, will be :
144 मी. लम्बी रस्सी से एक 16 किग्रा द्रव्यमान के पत्थर को बाँध कर चिकने क्षैतिज तल में घुमाया जाता है। डोरी की अधिकतम तनाव सहन क्षमता 16 N न्यूटन है। डोरी के बिना टूटे, पत्थर के परिक्रमण की अधिकतम चाल है –
(A) 20 ms^{-1} (B) 16 ms^{-1} (C) 14 ms^{-1} (D*) 12 ms^{-1}

Sol. r = 144 m, m = 16 kg, T_{max} = 16 N

$T = \frac{mv^2}{r}$

$v = \sqrt{\frac{Tr}{M}} = \sqrt{\frac{16 \times 144}{16}}$ = 12 m/s **Ans.**

C-2. On horizontal smooth surface a mass of 2 kg is whirled in a horizontal circle by means of a string at an initial angular speed of 5 revolutions per minute. Keeping the radius constant the tension in the string is doubled. The new angular speed is nearly:
(A) 14 rpm (B) 10 rpm (C) 2.25 rpm (D*) 7 rpm
एक चिकने क्षैतिज तल पर डोरी की सहायता से 2 किग्रा. द्रव्यमान को क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है। इसकी प्रारम्भिक कोणीय चाल 5 चक्कर/मिनट है। त्रिज्या नियत रखकर डोरी में तनाव दो गुना करने पर नयी कोणीय चाल लगभग होगी–
(A) 14 चक्कर/मिनट (B) 10 चक्कर/मिनट (C) 2.25 चक्कर/मिनट (D*) 7 चक्कर/मिनट

Sol. $T = m\omega^2 r$
$\Rightarrow T^1 = 2T = m\omega_1^2\, r$
$\omega_1 = \sqrt{2}\ \omega = \sqrt{2} \times 5 = \sqrt{50} \approx 7$ rev/min **Ans.**

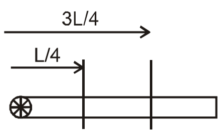
C-3. A particle is kept fixed on a uniformly rotating turn-table As seen from the ground , the particle goes in a circle, its speed is 10 cm/s and acceleration is 10 cm/s^2.The particle is now shifted to a new position to make the radius half of the original value.The new values of the speed and acceleration will be
एक समान रूप से घूर्णन गति कर रही घूर्णी मेज पर m द्रव्यमान का एक कण स्थिर रखा हुआ है। जमीन से देखने पर, कण वृत्ताकार पथ पर गतिमान दिखाई देता है, इसकी चाल 10 cm/s तथा त्वरण 10 cm/s^2 है। कण को विस्थापित करके इसकी त्रिज्या का मान मूल त्रिज्या का आधा कर दिया जाता है। इसकी नयी चाल तथा त्वरण के मान है –
(A) 20 cm/s, 20 cm/s^2 (B*) 5 cm/s, 5 cm/s^2 (C) 40 cm/s, 10 cm/s^2 (D) 40 cm/s,40 cm/s^2

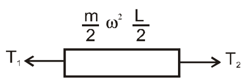
Sol. Uniformly rotating turn table means angular velocity is constant. New radius is half of the original value.
समरूप घूर्णित मेज का अभिप्राय कोणीय वेग नियत है। नयी त्रिज्या प्रारम्भिक मान की आधी है।
$r' = r/2$ and व ω = constant नियतांक
$v' = \omega r' = \omega r/2 = v/2 = 5$ cm/s **Ans.**
$a' = \omega^2 r' = \omega^2 r/2 = a/2 = 5$ cm/s^2 **Ans.**

C-4. A coin placed on a rotating turntable just slips if it is placed at a distance of 16 cm from the centre. If the angular velocity of the turntable is doubled, it will just slip at a distance of
घूर्णन कर रही एक घूर्णी मेज के केन्द्र से 16 cm दूर रखा हुआ एक सिक्का ठीक फिसलने की स्थिति में है। यदि घूर्णी मेज का कोणीय वेग दुगना कर दिया जाये तो यह निम्न दूरी पर ठीक फिसलने की स्थिति में होगा –
(A) 1 cm (B) 2 cm (C*) 4 cm (D) 8 cm

Sol. For just slip $\Rightarrow \mu mg = m\omega^2 r$
here ω is double then radius is 1/4th
ठीक फिसलने के लिए $\Rightarrow \mu mg = m\omega^2 r$
यदि ω दुगनी कर दी जाए, तो त्रिज्या 1/4th होगी
$r' = 4$ cm **Ans.**

C-5. A rod of length L is hinged at one end and it is rotated with a constant angular velocity in a horizontal plane . Let T_1 and T_2 be the tensions at the points L/4 and 3L/4 away from the hinged end.
L लम्बाई की एक छड़ एक सिरे पर किलकित करके क्षैतिज तल में नियत कोणीय वेग से घूर्णित की जाती है। माना कि किलकित बिन्दु से L/4 तथा 3L/4 दूरियों पर तनाव T_1 तथा T_2 है –
(A*) $T_1 > T_2$
(B) $T_2 > T_1$
(C) $T_1 = T_2$
(D) The relation between T_1 and T_2 depends on whether the rod rotates clockwise or anticlockwise
T_1 तथा T_2 के मध्य सम्बंध इस पर निर्भर करेगा कि छड़ दक्षिणावर्ती अथवा वामावर्ती घूर्णन कर रही है।

Sol.




$T_1 - T_2 = \frac{M}{2}\,\omega^2\,\frac{L}{2}$
$T_1 > T_2$ **Ans.**

Section (D) : Radius of curvature
Section (D) : वक्रता त्रिज्या

D-1. A stone is projected with speed u and angle of projection is θ. Find radius of curvature at t = 0.
एक पत्थर u चाल से, θ प्रक्षेपण कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है। t = 0 पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(A) $\frac{u^2\cos^2\theta}{g}$ (B) $\frac{u^2}{g\sin\theta}$ (C*) $\frac{u^2}{g\cos\theta}$ (D) $\frac{u^2\sin^2\theta}{g}$

Sol. At t = 0 पर
$a_\perp = g\cos\theta$,
$R = \frac{v^2}{a_\perp} = \frac{u^2}{g\cos\theta}$

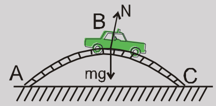
D-2. A particle of mass m is moving with constant velocity $\vec{v}$ on smooth horizontal surface. A constant force $\vec{F}$ starts acting on particle perpendicular to velocity v. Radius of curvature after force F start acting is :
द्रव्यमान m का एक कण नियत वेग $\vec{v}$ से चिकनी क्षैतिज सतह पर गतिशील है। एक नियत बल $\vec{F}$, कण पर वेग v के लम्बवत् लगना प्रारम्भ होता है। बल F के लगने के बाद वक्रता त्रिज्या है :

(A*) $\frac{mv^2}{F}$ (B) $\frac{mv^2}{F\cos\theta}$ (C) $\frac{mv^2}{F\sin\theta}$ (D) none of these इनमें से कोई नहीं

Sol. Force is perpendicular to $\vec{v}$ बल $\vec{v}$ के लम्बवत् है।
$a_\perp = \frac{F}{m}$ $\Rightarrow$ $R = \frac{v^2}{a_\perp}$ $\Rightarrow$ $R = \frac{mv^2}{F}$ **Ans.**

Section (E) : Circular motion in vertical plane उर्ध्व तल में वृत्तीय गति :

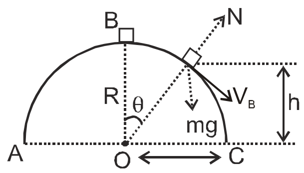
E-1. A car is going on an overbridge of radius R, maintaining a constant speed. As the car is descending on the overbridge from point B to C, the normal force on it :



एक कार R त्रिज्या के पुल पर नियत चाल से जा रही है जब कार पुल पर बिन्दु B से C की ओर नीचे उतरती है। तो इस पर अभिलम्ब बल

(A) increase (B*) decreases
(C) remains constant (D) first increases then decreases.
(A) बढ़ेगा। (B*) घटेगा।
(C) नियत रहेगा। (D) पहले बढ़ेगा फिर घटेगा।

Sol. Let the car looses the contact at angle θ with vertical
माना उर्ध्व से θ कोण पर कार पथ से संपर्क छोड़ती है



$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$ $\Rightarrow$ $N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}$

During descending on overbridge θ is incerese. So $\cos\theta$ is decrease therefore normal reaction is decrease.
पुल से उतरने के दौरान θ बढता है, अतः $\cos\theta$ घटता है तो अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल घटता है।

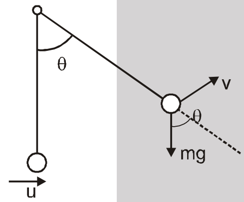
E-2. In a circus, stuntman rides a motorbike in a circular track of radius R in the vertical plane. The minimum speed at highest point of track will be :
सर्कस में एक आदमी R त्रिज्या के ऊर्ध्व वृत्त में मोटर साइकिल चलाता है। पथ के शीर्ष बिन्दु पर न्यूनतम चाल होगी–
(A) $\sqrt{2gR}$ (B) $2gR$ (C) $\sqrt{3gR}$ (D*) $\sqrt{gR}$

Sol. For circular motion in vertical plane normal reaction is minimum at highest point and it is zero, minimum speed of motorbike is -
उर्ध्व वृत्तीय गति में उच्चतम बिन्दु पर, अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल न्यूनतम (शून्य) होता है। मोटर साईकिल की न्यूनतम चाल होगी-

$$mg = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gR}$$ **Ans.**

E-3. A particle is moving in a vertical circle. The tensions in the string when passing through two positions at angles 30° and 60° from downward vertical are T_1 and T_2 respectively. Then
एक कण ऊर्ध्व वृत्त में घूम रहा है। ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा से 30° तथा 60° के कोण पर रस्सियों में तनाव क्रमशः T_1 तथा T_2 है। तो
(A) $T_1 = T_2$ (B) $T_2 > T_1$
(C*) $T_1 > T_2$
(D) Tension in the string always remains the same
डोरी में तनाव सदैव समान रहेगा।

Sol.



$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$ ....(1) (from centripetal force अभिकेन्द्रीय बल से)

from energy conservation. ऊर्जा संरक्षण से

$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgr(1 - \cos\theta)$ (here u is speed at lowest point) (यहाँ u निम्नतम बिन्दु पर चाल है)

from (1) and (2) समीकरण (1) व (2) से

$$T = \frac{mu^2}{r} + 3mg\cos\theta - 2mg$$

for $\theta = 30^\circ$ & 60° के लिए $\Rightarrow$ $T_1 > T_2$ **Ans.**

E-4. A bucket is whirled in a vertical circle with a string attached to it.The water in bucket does not fall down even when the bucket is inverted at the top of its path. In this position choose most appropiate option if v is the speed at the top.
एक बाल्टी को रस्सी से बांधकर ऊर्ध्व वृत्त में घुमाया जाता है। पथ के शीर्ष बिन्दु पर बाल्टी उल्टी हो जाती है, फिर भी बाल्टी का पानी नीचे नहीं गिरता है। इस स्थिति में सही विकल्प का चयन करो। यदि शीर्ष बिन्दु पर चाल v है।

(A) $mg = \frac{mv^2}{r}$ (B) mg is greater than $\frac{mv^2}{r}$
(C*) mg is not greater than $\frac{mv^2}{r}$ (D) mg is not less than $\frac{mv^2}{r}$
(A) $mg = \frac{mv^2}{r}$ (B) mg, $\frac{mv^2}{r}$ से ज्यादा है।
(C*) mg, $\frac{mv^2}{r}$ से ज्यादा नहीं है। (D) mg, $\frac{mv^2}{r}$ से कम नहीं है।

Sol. For water does not fall at topmost point of path that means at topmost point N should be greater than or equal to zero.
पथ के उच्चतम बिन्दु पर जल के ना बिखरने के लिए N शून्य अथवा इससे अधिक होना चाहिए।

for N = 0 के लिए, $mg = \frac{mv^2}{r}$

and तथा for N > 0 के लिए , $mg < \frac{mv^2}{r}$

so that mg is not greater than $\frac{mv^2}{r}$

अतः mg , $\frac{mv^2}{r}$ से बड़ा नहीं है।

Section (F) : Motion of a vehicle, Centrifugal force and rotation of earth
Section (F) : वाहन की गति, अपकेन्द्रीय बल तथा पृथ्वी का घूर्णन

F-1. A train A runs from east to west and another train B of the same mass runs from west to east at the same speed with respect to earth along the equator. Normal force by the track on train A is N_1 and that on train B is N_2:
विषुवत रेखा पर, ट्रेन A पूर्व से पश्चिम की ओर तथा समान द्रव्यमान की ट्रेन B पश्चिम से पूर्व की ओर पृथ्वी के सापेक्ष समान चाल से गतिशील है। पटरी द्वारा ट्रेन A पर अभिलम्ब बल N_1 तथा ट्रेन B पर N_2 है –
(A*) $N_1 > N_2$
(B) $N_1 < N_2$
(C) $N_1 = N_2$
(D) the information is insufficient to find the relation between N_1 and N_2.
N_1 तथा N_2 के मध्य सम्बन्ध व्यक्त करने के लिये दी गई सूचना अपर्याप्त है।

Sol. When train A moves form east to west
जब ट्रेन A पूर्व से पश्चिम को जाती है।

$$mg - N_1 = \frac{m(v+\omega R)^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = mg - \frac{m(v+\omega R)^2}{R}$$

$N_1 = F_1$

When train B moves from west to east जब ट्रेन B, पश्चिम से पूर्व को जाती है।

$$mg - N_2 = \frac{m(v-\omega R)^2}{R} \Rightarrow \quad N_2 = mg - \frac{m(v-\omega R)^2}{R}$$

$N_2 = F_2$
$F_1 > F_2$ **Ans.**

F-2_ If the apparent weight of the bodies at the equator is to be zero, then the earth should rotate with angular velocity
अगर विषुवत रेखा पर वस्तुओं का आभासी भार शून्य हो तो पृथ्वी को किस कोणीय वेग से घूमना होगा –

(A*) $\sqrt{\frac{g}{R}}$ rad/sec (B) $\sqrt{\frac{2g}{R}}$ rad/sec (C) $\sqrt{\frac{g}{2R}}$ rad/sec (D) $\sqrt{\frac{3g}{2R}}$ rad/sec

Sol. $mg = m\omega^2 R$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$

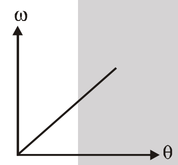
PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. Each situation in column I gives graph of a particle moving in circular path. The variables ω, θ and t represent angular speed (at any time t) , angular displacement (in time t) and time respectively. Column II gives certain resulting interpretation. Match the graphs in column I with statements in column II and indicate your answer by darkening appropriate bubbles in the 4 × 4 matrix given in the OMR.
स्तम्भ-I में दी गई स्थिति कण की वृत्तीय गति का ग्राफ बताता है। यहाँ चर ω, θ तथा t क्रमशः कोणीय चाल (किसी समय t पर), कोणीय विस्थापन (समय t में) तथा समय को दर्शाते है। स्तम्भ-II में कुछ परिणाम के निष्कर्ष दिए गये है। स्तम्भ-I में दिये गये आरेख को उनके संगत कथनों (स्तम्भ-II) से सुमेलित कीजिये व अपने उत्तरों को OMR में दी गई 4 × 4 की मेट्रिक्स में उचित बुलबुलों को गहरा कर दीजिए।

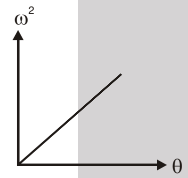
Column-I
स्तम्भ - I

Column-II
स्तम्भ-II



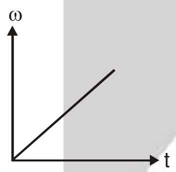
(A) ω - θ graph

(p) Angular acceleration of particle is uniform
कण का कोणीय त्वरण एकसमान है।



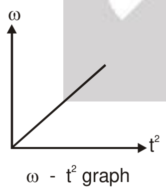
(B) ω^2 - θ graph

(q) Angular acceleration of particle is non-uniform
कण का कोणीय त्वरण असमान है।



(C) ω - t graph

(r) Angular acceleration of particle is directly proportional to t.
कण का कोणीय त्वरण, 't' के सीधे समानुपाती है।



(D) ω - t^2 graph

(s) Angular acceleration of particle is directly proportional to θ.
कण का कोणीय त्वरण, θ के सीधे समानुपाती हैं।

Ans. (A) q,s (B) p (C) p (D) q,r

Sol. **(Tough)** From graph (a) $\Rightarrow$ $\omega = k\theta$ where k is positive constant

angular acceleration = $\omega \dfrac{d\omega}{d\theta}$ = $k\theta \times k = k^2\theta$

$\therefore$ angular acceleration is non uniform and directly proportional to θ. $\therefore$ (A) q, s

From graph (b) $\Rightarrow$ $\omega^2 = k\theta$. Differentiating both sides with respect to θ.

$2\omega \dfrac{d\omega}{d\theta} = k$ or $\omega \dfrac{d\omega}{d\theta} = \dfrac{k}{2}$ Hence angular acceleration is uniform. $\therefore$ (B) p

From graph (c) $\Rightarrow$ $\omega = kt$

angular acceleration $= \dfrac{d\omega}{dt} = k$ Hence angular acceleration is uniform $\Rightarrow$ (C) p

From graph (d) $\Rightarrow$ $\omega = kt^2$

angular acceleration = $\dfrac{d\omega}{dt}$ = 2kt Hence angular acceleration is non uniform and directly proportional to t.

$\therefore$ (D) q,r

हल. ग्राफ (a) से $\Rightarrow$ $\omega = k\theta$ जहा k एक धनात्मक नियतांक है।

कोणीय त्वरण = $\omega \dfrac{d\omega}{d\theta}$ = $k\theta \times k = k^2\theta$

$\therefore$ कोणीय त्वरण असमान है और यह θ के सीधे समानुपाती है $\therefore$ (A) q, s

ग्राफ (b) से $\Rightarrow$ $\omega^2 = k\theta$. दोनो तरफ θ सापेक्ष अवकलन करने पर

$2\omega \dfrac{d\omega}{d\theta} = k$ or या $\omega \dfrac{d\omega}{d\theta} = \dfrac{k}{2}$ अतः कोणीय त्वरण एकसमान है। $\therefore$ (B) p

ग्राफ (c) से $\Rightarrow$ $\omega = kt$

कोणीय त्वरण $= \dfrac{d\omega}{dt} = k$ अतः कोणीय त्वरण एकसमान है $\Rightarrow$ (C) p

ग्राफ (d) से $\Rightarrow$ $\omega = kt^2$

कोणीय त्वरण = $\dfrac{d\omega}{dt}$ = 2kt अतः कोणीय त्वरण असमान है और समय t के सीधे समानुपाती है।

$\therefore$ (D) q,r

2. A particle is moving with speed $v = 2t^2$ on the circumference of circle of radius R. Match the quantities given in column-I with corresponding results in column-II **(9.2_M_Bank_Circu) Made Sushil Rajpurohit 2008**

Column-I	**Column-II**
(A) Magnitude of tangential acceleration of particle	(p) decreases with time.
(B) Magnitude of Centripetal acceleration of particle	(q) increases with time
(C) Magnitude of angular speed of particle with respect to centre of circle	(r) remains constant
(D) Angle between the total acceleration vector and centripetal acceleration vector of particle	(s) depends on the value of radius R

एक कण वृत्त की परिधि पर चाल $v = 2t^2$ से गति कर रहा है। वृत्त की त्रिज्या R है। स्तम्भ-I में दी गई राशियों को स्तम्भ-II में परिणामों से सुमेलित करिये।

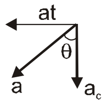
स्तम्भ - I	**स्तम्भ-II**
(A) कण के स्पर्शरेखीय त्वरण का परिमाण	(p) समय के साथ घटता है।
(B) कण के अभिकेन्द्रीय त्वरण का परिमाण	(q) समय के साथ बढ़ता है।
(C) कण की कोणीय चाल (वृत्त के केन्द्र के सापेक्ष) का परिमाण	(r) नियत रहता है।
(D) कण के कुल त्वरण सदिश तथा अभिकेन्द्रीय त्वरण सदिश के मध्य कोण	(s) त्रिज्या R के मान पर निर्भर करता है।

Ans : (A) q (B) q, s (C) q, s (D) p, s

Sol. $v = 2t^2$

Tangential acceleration $a_t = 4t$

Centripetal acceleration $a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4t^4}{R}$

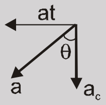


Angular speed $\omega = \frac{v}{R} = \frac{4t}{R}$, $\tan\theta = \frac{a_t}{a_c} = \frac{4tR}{4t^4} = \frac{R}{t^3}$

Sol. $v = 2t^2$

स्पर्श रेखीय त्वरण $a_t = 4t$

अभिकेन्द्रीय त्वरण $a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4t^4}{R}$



कोणीय चाल $\omega = \frac{v}{R} = \frac{4t}{R}$, $\tan\theta = \frac{a_t}{a_c} = \frac{4tR}{4t^4} = \frac{R}{t^3}$

Exercise-2

✍ **Marked Questions can be used as Revision Questions.**
✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

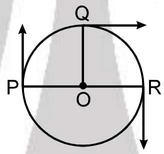
PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (SINGLE CORRECT QUESTIONS)

SECTION (A) : KINEMATICS OF CIRCULAR MOTION

SECTION (A) : वृत्तीय गति की गतिकी

1.✍ Three point particles P, Q, R move in a circle of radius ' r ' with different but constant speeds. They start moving at t = 0 from their initial positions as shown in the figure. The angular velocities (in rad/sec) of P, Q and R are 5π, 2π & 3π respectively, in the same sense. The time at which they all meet is:
तीन बिन्दुवत कण P, Q, R एक r त्रिज्या के वृत्त में भिन्न परन्तु नियत चालों से गति करते है। वे t = 0 पर चित्र में प्रदर्शित उनकी प्रारम्भिक स्थितियों से गति करना प्रारम्भ करते है। P, Q व R के कोणीय वेग (रेडियन/सैकण्ड में) क्रमशः 5π, 2π व 3π समान दिशा में है। कितने समयान्तराल बाद वे मिलते है।



(A) 2/3 sec (B) 1/6 sec (C) 1/2 sec (D*) 3/2 sec

Sol. $\omega_{QP} = 2\pi - 5\pi = -3\pi$ rad/s
$\omega_{RP} = 3\pi - 5\pi = -2\pi$ rad/s

Time when Q particle reaches at P $= t_1 = \dfrac{\pi/2}{3\pi} = \dfrac{1}{6}$ sec.

समय जब कण Q, P पर पहुँचता है $= t_1 = \dfrac{\pi/2}{3\pi} = \dfrac{1}{6}$ sec.

$t_2 = \dfrac{5\pi/2}{3\pi} = \dfrac{5}{6}$ sec.

$t_3 = \dfrac{9\pi/2}{3\pi} = \dfrac{3}{2}$ sec.

Time where R particle reaches at P. $t_1 = \dfrac{\pi}{2\pi} = \dfrac{1}{2}$ sec.

समय जब कण R, P पर पहुँचता है $t_1 = \dfrac{\pi}{2\pi} = \dfrac{1}{2}$ sec.

$t_2 = \dfrac{3\pi}{2\pi} = \dfrac{3}{2}$ sec.

Common time to reaches at P is $\dfrac{3}{2}$ sec. **Ans.**

P पर पहुँचने का उभयनिष्ठ समय $\dfrac{3}{2}$ sec. **Ans.**

2.✍ The kinetic energy K of a particle moving along a circle of radius R depends on the distance covered s as $K = as^2$ where a is a positive constant. The total force acting on the particle is :
R त्रिज्या के वृत्त पर चलते हुए कण की गतिज ऊर्जा K, की तय की गयी दूरी s पर निर्भरता $K= as^2$ के अनुसार है, जहाँ a एक धनात्मक स्थिरांक है। कण पर लग रहा कुल बल है–

(A) $2a\dfrac{s^2}{R}$ (B*) $2as\left(1+\dfrac{s^2}{R^2}\right)^{1/2}$ (C) $2as$ (D) $2a\dfrac{R^2}{s}$

Sol. $K = \frac{1}{2}mv^2 = as^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2as^2}{m}$

$a_C = \frac{v^2}{R} = \frac{2as^2}{mR}$

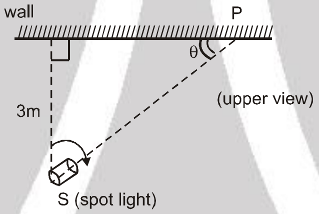
$a_t = v\frac{dv}{ds} = \frac{2as}{m}$

$a = \sqrt{\left(\frac{2as^2}{mR}\right)^2 + \left(\frac{2as}{m}\right)^2} = \frac{2as}{m}\left(1+\frac{s^2}{R^2}\right)^{1/2}$

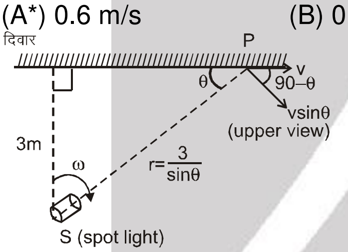
Total force कुल बल $= ma = 2as\left(1+\frac{s^2}{R^2}\right)^{1/2}$ **Ans.**

3. A spot light S rotates in a horizontal plane with a constant angular velocity of 0.1 rad/s. The spot of light P moves along the wall at a distance 3 m. What is the velocity of the spot P when $\theta = 45^0$?

एक स्पॉट लाइट S, नियत कोणीय वेग 0.1 रेडियन/से. के साथ क्षैतिज तल में घूमती है। लाइट स्पॉट P, 3 मी. दूर स्थित दीवार के अनुदिश गति करता है। जब $\theta = 45°$ है तो स्पॉट P का वेग कितना है –



(A*) 0.6 m/s (B) 0.5 m/s (C) 0.4 m/s (D) 0.3 m/s



Sol.

$\omega = \frac{v_\perp}{r} = \frac{v\sin\theta}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega r}{\sin\theta} = \frac{3\omega}{\sin^2\theta} \Rightarrow v = \frac{0.1\times 3}{(1/\sqrt{2})^2} = 0.6$ m/s **Ans.**

SECTION (B) : RADIAL AND TANGENTIAL ACCELERATION
SECTION (B) : त्रिज्यीय एवं स्पर्श रेखीय त्वरण

4. The velocity and acceleration vectors of a particle undergoing circular motion are $\vec{v} = 2\hat{i}$ m/s and $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$ m/s² respectively at an instant of time. The radius of the circle is

वृत्तीय गति कर रहे कण का किसी समय पर वेग और त्वरण क्रमशः $\vec{v} = 2\hat{i}$ m/s और $\vec{a} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$ m/s² है। वृत्तीय पथ की त्रिज्या होगी –

(A*) 1m (B) 2m (C) 3m (D) 4m

Sol. It can be observed that component of acceleration perpendicular to velocity is
वेग के लम्बवत् त्वरण के घटक है –

$a_c = 4$ m/s²

$\therefore$ त्रिज्या radius $= \frac{v^2}{a_c} = \frac{(2)^2}{4} = 1$ m.

5. A particle moves with deceleration along the circle of radius R so that at any moment of time its tangential and normal accelerations are equal in magnitude. At the initial moment t = 0 the speed of the particle equals v_0, then :
R त्रिज्या के वृत्त पर एक कण मंदित गति करता है जिससे किसी भी समय कण के लिए स्पर्शी और अभिकेन्द्रिय त्वरणों का परिमाण बराबर है। प्रारम्भिक स्थिति में t = 0 पर कण की चाल v_0 है तो

(i) the speed of the particle as a function of the distance covered s will be
कण की चाल तय की गई दूरी s के फलन के रूप में होगी।

(A*) $v = v_0\, e^{-s/R}$ (B) $v = v_0\, e^{s/R}$ (C) $v = v_0\, e^{-R/s}$ (D) $v = v_0\, e^{R/s}$

(ii) the total acceleration of the particle as function of velocity.
कण का कुल त्वरण, वेग के फलन के रूप में होगा।

(A*) $a = \sqrt{2}\dfrac{v^2}{R}$ (B) $a = \dfrac{v^2}{R}$ (C) $a = \dfrac{2v^2}{R}$ (D) $a = \dfrac{2\sqrt{2}\ v^2}{R}$

Sol. (i) deceleration of particles कण का मंदन

$$\left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|v\frac{dv}{ds}\right| = \frac{v^2}{R}$$

$$-v\frac{dv}{ds} = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dv}{v} = \frac{ds}{R}$$

Integrating both side दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

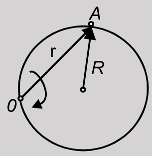
$$-\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_0^s \frac{ds}{R} \quad \Rightarrow \quad -\left[\log v\right]_{v_0}^{v} = \frac{s}{R}$$

$v = v_0\, e^{-s/R}$ **Ans.**

(ii) $|a_t| = a_C$

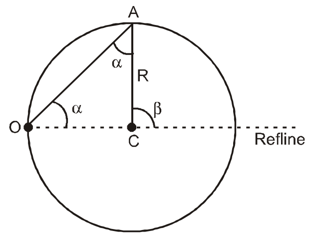
$a = \sqrt{2}\ a_C = \sqrt{2}\ \dfrac{v^2}{R}$ **Ans.**

6. A particle A moves along a circle of radius R = 50 cm so that its radius vector r relative to the fixed point O (Figure) rotates with the constant angular velocity $\omega = 0.40$ rad/s. Then modulus v of the velocity of the particle, and the modulus a of its total acceleration will be
एक कण A, R = 50 सेमी त्रिज्या के वृत्त पर चित्रानुसार इस तरह गति करता है कि जडवत् बिन्दु O के सापेक्ष त्रिज्यीय सदिश r नियत कोणीय वेग $\omega = 0.40$ रेडियन/से. के साथ घूमता है। कण के वेग का परिमाण v तथा कुल त्वरण a के परिमाण के मान होंगे ?



(A) v = 0.4 m/s, a = 0.4 m/s^2 (B) v = 0.32 m/s, a = 0.32 m/s^2
(C) v = 0.32 m/s, a = 0.4 m/s^2 (D*) v = 0.4 m/s, a = 0.32 m/s^2
(A) v = 0.4 मी/से, a = 0.4 मी/से^{2} (B) v = 0.32 मी/से, a = 0.32 मी/से^{2}
(C) v = 0.32 मी/से, a = 0.4 मी/से^{2} (D*) v = 0.4 मी/से, a = 0.32 मी/से^{2}

Sol.



$\beta = 2\alpha \;\Rightarrow\; \frac{d\beta}{dt} = \frac{2d\alpha}{dt} = 2 \times 0.4 = 0.8$ rad/s

$v_{AC} = \omega r = 0.8 \times \frac{1}{2} = 0.4$ m/s

$a_C = \omega^2 r = (0.8)^2 \frac{1}{2} = 0.32$ m/s^2

$a = a_C = 0.32$ m/s^2 $\qquad (a_t = 0)$

SECTION (C) : CIRCULAR MOTION IN HORIZONTAL PLANE

SECTION (C) : क्षैतिज तल में वृत्तीय गति

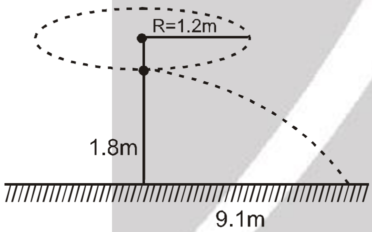
7. A boy whirls a stone in a horizontal circle 1.8 m above the ground by means of a string with radius 1.2 m. It breaks and stone flies off horizontally, striking the ground 9.1 m (horizontal range) away. The centripetal acceleration during the circular motion was nearly: (use g = 9.8 m/s^2)

एक लड़का 1.2 मी. लम्बी डोरी की सहायता से एक पत्थर को जमीन से 1.8 मी. ऊपर क्षैतिज वृत में घुमाता है। पत्थर घूमाते डोरी टूट जाती है और पत्थर क्षैतिज दिशा में उड़ कर 9.1 मी. (क्षैतिज परास) दूर जमीन से टकराता है। वृत्तीय गति के दौरान अभिकेन्द्रीय त्वरण (लगभग) कितना था – (g = 9.8 m/s^2 लें)

(A) 94 m/s^2 (B) 141 m/s^2 (C*) 188 m/s^2 (D) 282 m/s^2

(A) 94 मी./से.^{2} (B) 141 मी./से.^{2} (C*) 188 मी./से.^{2} (D) 282 मी./से.^{2}

Sol.



The time taken to fall on ground भूमि पर गिरने में लगा समय $= \sqrt{\frac{2 \times 1.8}{9.8}} = \sqrt{\frac{36}{98}}$

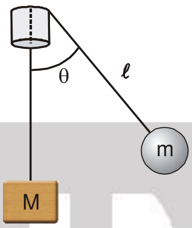
velocity at time of string breaks डोरी टूटने के समय वेग

$v = \frac{\text{distance}}{\text{time}} \; \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} \;\Rightarrow\; v = 9.1\sqrt{\frac{98}{36}}$

Centripetal acceleration अभिकेन्द्रीय त्वरण $= \frac{v^2}{R} = \frac{9.1 \times 9.1 \times 98}{1.2 \times 36} = 187.856 = 188$ m/s^2 **Ans.**

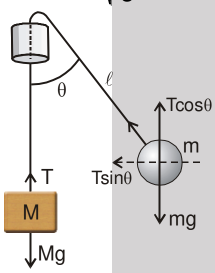
8. A large mass M hangs stationary at the end of a light string that passes through a smooth fixed ring to a small mass m that moves around in a horizontal circular path. If ℓ is the length of the string from m to the top end of the tube and θ is angle between this part and vertical part of the string as shown in the figure, then time taken by m to complete one circle is equal to

एक भारी द्रव्यमान M हल्की रस्सी से स्थिर रूप से लटक रहा है तथा रस्सी का दूसरा सिरा चिकनी जड़वत् वलय से गुजारने के बाद छोटे द्रव्यमान m से बंधा है, जो क्षैतिज वृत्तीय पथ में घूम रहा है। यदि m से ट्यूब के ऊपरी सिरे तक रस्सी की लम्बाई ℓ और रस्सी के इस भाग तथा रस्सी के ऊर्ध्वाधर भाग के बीच कोण θ है, (चित्रानुसार) तो m द्वारा एक चक्कर लगाने में लिये गये समय का मान होगा :



(A) $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g\sin\theta}}$ (B) $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g\cos\theta}}$ (C) $2\pi\sqrt{\dfrac{m\ell}{gM\sin\theta}}$ (D*) $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell m}{g M}}$

Sol.



For M to be stationary

M स्थिरावस्था में होने–के लिए

$$T = Mg \quad .... (1)$$

Also for mass m,

m के लिए

$$T\cos\theta = mg \quad .... (2)$$

$$T\sin\theta = \frac{mv^2}{\ell\sin\theta} \quad .... (3)$$

dividing (3) by (2)

(3) में (2) का भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{v^2}{g\ell\sin\theta} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g\ell}{\cos\theta}}\,.\,\sin\theta$$

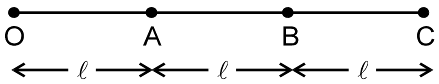
Time period आवर्त काल = $\dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi\ell\sin\theta}{\sqrt{\dfrac{g\ell}{\cos\theta}}.\sin\theta}$

From (1) and (2) $\cos\theta = \dfrac{m}{M}$

समीकरण (1) और (2) से

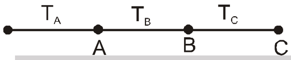
then time period अतः आवर्त काल = $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell m}{gM}}$

9. Three identical particles are joined together by a thread as shown in figure. All the three particles are moving on a smooth horizontal plane about point O. If the speed of the outermost particle is v_0, then the ratio of tensions in the three sections of the string is :(Assume that the string remains straight)
तीन एक समान कण चित्रानुसार एक धागे से जुड़े हुए है। तीनों कण बिन्दु O के चारों तरफ चिकने क्षैतिज तल पर घूम रहे है। यदि सबसे बाहर वाले कण का वेग v_0 हो, तो धागे के तीनों भागों में तनाव का अनुपात होगा (रस्सी को हमेशा सीधी मानिए)



(A) 3 : 5 : 7 (B) 3 : 4 : 5 (C) 7 : 11 : 6 (D*) 6 : 5 : 3

Sol. ω = const., for all three particles नियतांक, सभी तीनों कणों के लिए



$\omega = \dfrac{v}{3\ell}$

$T_C = m\omega^2\, 3\ell$

$T_B - T_C = m\omega^2 2\ell$

$T_B = 5\ m\omega^2\ell$

$T_A - T_B = m\omega^2\ell$

$T_A = 6\ m\omega^2\ell$

$T_C : T_B : T_A :: 3 : 5 : 6$ **Ans.**

10. A Toy cart attached to the end of an unstretched string of length a, when revolved moves on a smooth horizontal table in a circle of radius 2a with a time period T. Now the toy cart is speeded up until it moves in a circle of radius 3a with a period T'. If Hook's law holds then (Assume no friction) :
जब a लम्बाई की बिना खिंची हुई डोरी से बंधी हुई खिलौना गाड़ी को क्षैतिज चिकनी मेज पर घुमाया जाता है तो क्षैतिज वृत्त की त्रिज्या 2a एवं आवर्तकाल T प्राप्त होता है। अब खिलौना गाड़ी की चाल, क्षैतिज वृत की त्रिज्या 3a और आवर्तकाल T' होने तक बढ़ायी जाती है। यदि हुक का नियम लागू रहता है (घर्षण नगण्य है) तो–

(A) $T' = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,T$ (B*) $T' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)T$ (C) $T' = \left(\dfrac{3}{2}\right)T$ (D) $T' = T$

Sol. $F = kx,\ T_1 = ka = m\omega^2\, 2a \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$

Time period आवर्तकाल $= \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}} = T$

$T_2 = 2ka = m\omega^2 3a \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$

Time period आवर्त काल $= 2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{2k}} = T'$

$T' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)T$ **Ans.**

SECTION (D) : RADIUS OF CURVATURE
SECTION (D) : वक्रता त्रिज्या

11. A stone of mass 1 kg tied to a light inextensible string of length L = $\frac{10}{3}$ m, whirling in a circular path in a vertical plane. The ratio of maximum tension in the string to the minimum tension in the string is 4, If g is taken to be 10 m/s^2, the speed of the stone at the highest point of the circle is :

1 किग्रा द्रव्यमान के पत्थर को L = $\frac{10}{3}$ मी. लम्बी अवितान्य डोरी से बांधकर ऊर्ध्व तल में वृत्ताकार पथ पर घुमाया जाता है। डोरी में अधिकतम तनाव और न्यूनतम तनाव का अनुपात 4 है। यदि g का मान 10 मी/से^{2} माना जाये तो वृत्त के शीर्षतम बिन्दु पर पत्थर की चाल होगी –

(A*) 10 m/s (B) $5\sqrt{2}$ m/s (C) $10\sqrt{3}$ m/s (D) 20 m/s

(A*) 10 मी/से. (B) $5\sqrt{2}$ मी/से. (C) $10\sqrt{3}$ मी/से. (D) 20 मी/से.

Sol. Maximum tension in string at lowest डोरी में अधिकतम तनाव निम्नतम बिन्दु पर होगा

$$T_{max} = \frac{mv_{LP}^2}{L} + mg \qquad ...(1)$$

minimum tension in string at heighest point. उच्चतम बिन्दु पर न्यूनतम तनाव

$$T_{min} = \frac{mv_{HP}^2}{L} - mg \qquad ...(2)$$

from energy conservation उर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2}mv_{LP}^2 = 2mgL + \frac{1}{2}mv_{HP}^2 \qquad ....(3)$$

from (1) & (3) (1) व (3) से

$$T_{max} = \frac{1}{L}mv_{HP}^2 + 5\text{ mg} \qquad ...(4)$$

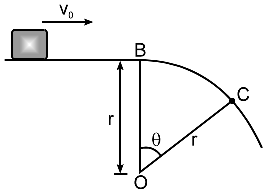
from (2) & (4) (2) व (4) से

$$4 = \frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{\frac{mv_{HP}^2}{L} + 5\text{ mg}}{\frac{mv_{HP}^2}{L} - mg} \quad \Rightarrow \quad 3mv_{HP}^2 = 9\text{ mgL}$$

$\Rightarrow$ $V_{HP} = \sqrt{3gL}$ = 10 m/s **Ans.**

12. A small frictionless block slides with velocity $0.5\sqrt{gr}$ on the horizontal surface as shown in the Figure. The block leaves the surface at point C. The angle θ in the Figure is :

एक छोटा घर्षणरहित गुटका क्षैतिज सतह पर चित्रानुसार वेग $0.5\sqrt{gr}$ से फिसलता है। गुटका बिन्दु C पर सतह को छोड़ देता है। चित्र में कोण θ है :



(A) $\cos^{-1}(4/9)$ (B*) $\cos^{-1}(3/4)$ (C) $\cos^{-1}(1/2)$ (D) none of the above उपर्युक्त कोई नही।

Sol. Given दिया है $v_B = 0.5\sqrt{gr}$

Assume block leave the contact at C, N = 0

माना ब्लॉक C पर संपर्क छोड़ता है, N = 0

$$\frac{mv_C^2}{r} = mg\cos\theta \qquad .... (1)$$

from energy conservation ऊर्जा संरक्षण से $\frac{1}{2}mv_B^2 + mgr(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_C^2$ .... (2)

from equation (1) and (2). समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}gr\right) + mg\,r(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mg\,r\cos\theta$$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\frac{3}{4}$ **Ans.**

13. A sphere of mass m is suspended by a thread of length 'ℓ' is oscillating in a vertical plane, the angular amplitude being θ_0. What is the tension in the thread when it makes an angle θ with the vertical during oscillations ? If the thread can support a maximum tension of 2 mg, then what can be the maximum angular amplitude of oscillation of the sphere without breaking the rope?

m द्रव्यमान के गोले को ℓ लम्बाई के धागे से लटकाकर ऊर्ध्वतल में दोलन करवाया जाता है, इसका कोणीय आयाम θ_0 है। दोलन के दौरान जब धागा ऊर्ध्व से θ कोण बनाता है, तब इसमें तनाव कितना होगा ? यदि धागा अधिकतम 2 mg भार तनाव सहन कर सकता है तो गोले के दोलन का अधिकतम आयाम कितना हो सकता कि धागा टूटे नहीं ?

(A*) $3\,mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0$, $\theta_0 = 60^0$ (B) $3\,mg\cos\theta + 2mg\cos\theta_0$,, $\theta_0 = 60^0$

(C) $2mg\cos\theta - 3mg\cos\theta_0$, $\theta_0 = 30^0$ (D) $2mg\cos\theta + 3mg\cos\theta_0$,, $\theta_0 = 30^0$

Sol. Apply Newton's law at angle θ θ कोण पर न्यूटन का नियम प्रयुक्त करने पर

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{\ell} \qquad ...(1)$$

apply energy conservation from θ_0 to θ θ_0 से θ के मध्य उर्जा संरक्षण से

$$mg\,\ell(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad ...(2)$$

From (1) and (2) (1) और (2) से

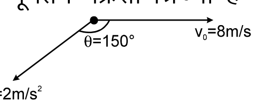
$$T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0 \qquad ....(3)$$

$T_{max} = 2mg$ (put in equation (3)) समीकरण (3) में रखने पर

$\Rightarrow \quad \theta_0 = 60^\circ$ **Ans.**

14. The figure shows the velocity and acceleration of a point like body at the initial moment of its motion. The acceleration vector of the body remains constant. The minimum radius of curvature of trajectory of the body is

चित्र में एक बिन्दु द्रव्यमान की गति के प्रारम्भिक क्षण के वेग तथा त्वरण दर्शाये गये है। यदि वस्तु का (बिन्दु द्रव्यमान) त्वरण सदिश नियत रहता है तो वस्तु के पथ की न्यूनतम वक्रता त्रिज्या है–

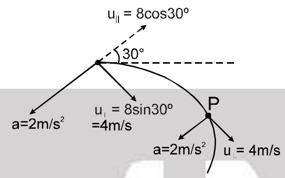


(A) 2 meter   (B) 4 meter   (C*) 8 meter   (D) 16 meter.

Sol. The acceleration vector shall change the component of velocity $u_{||}$ along the acceleration vector.
त्वरण सदिश के समान्तर वेग का घटक $u_{||}$ त्वरण सदिश द्वारा परिवर्तित होता है।

$$r = \frac{v^2}{a_n}$$

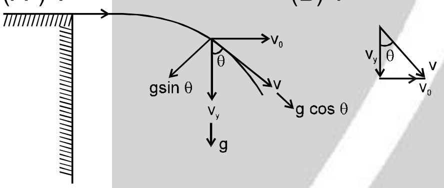
Radius of curvature r_{min} means v is minimum and a_n is maximum. This is at point P when component of velocity parallel to acceleration vector becomes zero, that is $u_{||} = 0$.
v न्यूनतम तथा a_n अधिकतम के लिए न्यूनतम वक्रता त्रिज्या r_{min} होगी। ऐसा P बिन्दु पर है, जब त्वरण सदिश के समान्तर वेग का घटक शून्य हैं। अर्थात्
$u_{||} = 0$



$$\therefore \qquad R = \frac{u_\perp^2}{a} = \frac{4^2}{2} = 8 \text{ meter.}$$

SECTION (E) : CIRCULAR MOTION IN VERTICAL PLANE ऊर्ध्व तल में वृत्तीय गति :

15. A particle is projected horizontally from the top of a tower with a velocity v_0. If v be its velocity at any instant, then the radius of curvature of the path of the particle at that instant is directly proportional to:
एक कण को मीनार के शीर्ष से क्षैतिज दिशा में वेग v_0 से फेंका जाता है। यदि किसी क्षण इसका वेग v हो, तो इस क्षण पर कण के पथ की वक्रता त्रिज्या (जहां पर उस क्षण कण है) निम्न के समानुपाती होगी।
(A*) v^3 (B) v^2 (C) v (D) 1/v

Sol.


As we know : जैसे कि हम जानते है।

$$a_C = \frac{v^2}{R} \text{ (centripetal acceleration) (अभिकेन्द्रीय त्वरण)}$$

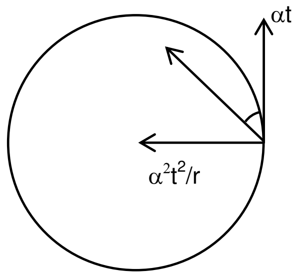
(चित्रानुसार) From figure ; $g \sin\theta = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{g\sin\theta}$

$$\Rightarrow \qquad g \cdot \frac{v_0}{v} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(since चूंकि } \sin\theta_i = \frac{v_0}{v}\text{)} \Rightarrow \qquad R \,\alpha\, v^3$$

16._ A racing car moves along circular track of radius b. The car starts from rest and its speed increases at a constant rate α. Let the angle between the velocity and the acceleration be θ at time t. Then $(\cos\theta)$ is :
एक दौडने वाली कार b त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गति करती है। कार विराम से चलना शुरू करती है तथा इसकी चाल नियत दर α से बढ़ती है। माना t समय पर वेग तथा त्वरण के बीच कोण θ है, तो $(\cos\theta)$ है :

(A) 0 (B) $\alpha t^2/b$ (C) $\frac{b}{(b+\alpha t^2)}$ (D*) $\frac{b}{(b^2+\alpha^2 t^4)^{\frac{1}{2}}}$

Sol.



$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2\alpha^4 t^4}{b^2}}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + \alpha^2 t^4}}$$

PART - II : SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE

भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

SECTION (A) : KINEMATICS OF CIRCULAR MOTION

SECTION (A) : वृत्तीय गति की गतिकी

1. A solid body rotates with deceleration about a stationary axis with an angular deceleration $\beta \propto \sqrt{\omega}$ where ω is its angular velocity. If at the initial moment of time its angular velocity was equal to ω_0 then the mean angular velocity of the body averaged over the whole time of rotation till it comes to rest is $\frac{\omega_0}{n}$ where n is.

एक ठोस वस्तु एक स्थिर अक्ष के परितः मंदित होते हुए कोणीय मन्दन $\beta \propto \sqrt{\omega}$ से घूम रही है, यहाँ ω कोणीय वेग है। यदि प्रारम्भ में इसका कोणीय वेग ω_0 हो तो घूर्णन के पूरे समय के दौरान जब तक कि यह विरामावस्था पर नही आ जाता, वस्तु का औसत कोणीय वेग $\frac{\omega_0}{n}$ है जहाँ n होगा

Ans. 3

Sol. $\beta = \frac{d\omega}{dt} \propto -\sqrt{\omega} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -k\sqrt{\omega} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{0} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = \int_0^T -k \; dt \Rightarrow 2\sqrt{\omega_0} = kT$

$$<\omega> = \frac{\int_0^T \omega \; dt}{T} = \frac{2 \; \omega_0^{3/2}}{3 \; k \left(2\frac{\sqrt{\omega_0}}{k}\right)} = \frac{\omega_0}{3}$$

Ans. $<\omega> = \omega_0 / 3$

SECTION (B) : RADIAL AND TANGENTIAL ACCELERATION
SECTION (B) : त्रिज्यीय एवं स्पर्श रेखीय त्वरण

2. A particle moves clockwise in a circle of radius 1 m with centre at (x, y) = (1m, 0). It starts at rest at the origin at time t = 0. Its speed increases at the constant rate of $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ m/s². If the net acceleration at t = 2 sec is $\frac{\pi}{2}\sqrt{(1+N\pi^2)}$ then what is the value of N ?

एक कण वृत पर दक्षिणावर्ती गति कर रहा है, जिसकी त्रिज्या 1 मी. और केन्द्र (x, y) = (1मी., 0) पर है। यह समय t = 0 पर मूल बिन्दु से गति प्रारम्भ करता है। इसकी चाल $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ मी/से² की नियत दर से बढ़ रही है। यदि t = 2 sec पर परिणामी त्वरण $\frac{\pi}{2}\sqrt{(1+N\pi^2)}$ है तो N का मान क्या होगा ?

Ans. N = 4

Sol. R = 1m,7

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{2}$ m/s²

at t = 0 पर, u = 0, $\omega_0 = 0$

$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{\pi}{2}$ rad/s²

$v = u + a_t t = 0 + \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$ m/s

$a_t = \frac{\pi}{2}$ m/s², $a_c = \frac{v^2}{r} = \pi^2$ m/s²

$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \pi^4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+4\pi^2}$ m/s² **Hence N = 4 Ans.**

3. Two particles A and B move anticlockwise with the same speed v in a circle of radius R and are diametrically opposite to each other. At t = 0, A is imparted a tangential acceleration of constant magnitude $a_t = \frac{72v^2}{25\pi R}$. If the time in which A collides with B is $\frac{5\pi R}{N_1 v}$, the angle traced by A during this time is $\frac{11\pi}{N_2}$, its angular velocity is $\frac{17v}{N_3 R}$ and radial acceleration at the time of collision is $\frac{289\ v^2}{5RN_4}$. Then calculate the value of $N_1 + N_2 + N_3 + N_4$.

दो कण A और B समान चाल v के साथ R त्रिज्या के वृत्त पर वामावर्त गति करते हुए परस्पर व्यासतः अभिमुख हैं। t = 0 पर A को नियत परिमाण का स्पर्श रेखीय त्वरण $a_t = \frac{72v^2}{25\pi R}$ प्रदान किया जाता है। यदि : A को B से टकराने में लगा समय $\frac{5\pi R}{N_1 v}$ है तो इस समय अंतराल में A द्वारा तय किया गया कोण $\frac{11\pi}{N_2}$ है इसका कोणीय वेग $\frac{17v}{N_3 R}$ तथा टक्कर के समय त्रिज्यीय त्वरण $\frac{289\ v^2}{5RN_4}$ है तब $N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ का मान ज्ञात करो।

Ans. N = 22

Sol. $\omega_{0(rel)} = 0,\qquad \theta_{rel} = \pi,\ \alpha_{rel} = \dfrac{72\ \ v^2}{25\ \ \pi R^2}$

$\theta_{rel} = \omega_{0(rel)}\, t + \dfrac{1}{2}\ \alpha_{rel}\ t^2$

$\pi = 0 + \dfrac{1}{2}\ \dfrac{72\ \ v^2}{25\ \ \pi R^2}\ t^2$

$t = \dfrac{5\pi R}{6V}$ sec. $\qquad$ Hence $N_1 = 6$

Angle traced by A, A द्वारा निरूपित कोण, $\theta = \dfrac{v}{R} \cdot \dfrac{5\pi R}{6V} + \dfrac{1}{2}\ \dfrac{72\ \ v^2}{25\ \ \pi R^2} \cdot \left(\dfrac{5\pi R}{6V}\right)^2$

$= \dfrac{5\pi}{6} + \pi = \dfrac{11}{6}\ \pi$ $\qquad$ Hence $N_2 = 6$

angular velocity कोणीय वेग $\omega = \omega_0 + \alpha\, t = \dfrac{v}{R} + \dfrac{72\ \ v^2}{25\ \ \pi R^2} \cdot \left(\dfrac{5\pi R}{6V}\right)$

$= \dfrac{v}{R} + \dfrac{12v}{5R} = \dfrac{17v}{5R}$ $\qquad$ Hence $N_3 = 5$

$a_c = \omega^2 R = \left(\dfrac{17v}{5R}\right)^2 R = \dfrac{289\ \ v^2}{25\ \ R}$ $\qquad$ Hence $N_4 = 5$

$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N = 22$

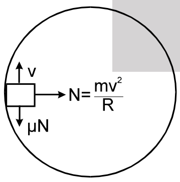
SECTION (C) : CIRCULAR MOTION IN HORIZONTAL PLANE
SECTION (C) : क्षैतिज तल में वृत्तीय गति

4. A block of mass m = 1kg moves on a horizontal circle against the wall of a cylindrical room of radius R = $2\sqrt{2}$ m. The floor of the room on which the block moves is smooth but the friction coefficient between the wall and the block is μ= 1. The block is given an initial speed v_0.
If speed at a instant is v = 2m/s then calculate resultant acceleration of block in m/s^2 at that instant

R = $2\sqrt{2}$ m त्रिज्या के एक बेलनाकार कमरे की दीवार पर एक m=1kg द्रव्यमान का पिण्ड क्षैतिज वृत्ताकार पथ पर गति करता है। जिस कमरे में यह पिण्ड घूम रहा है, उसका फर्श घर्षण रहित है, किन्तु पिण्ड तथा दीवार के मध्य घर्षण μ= 1. है। पिण्ड को आरम्भिक चाल v_0 प्रदान की गई है।
यदि किसी क्षण पर चाल v = 2m/s है तब उस क्षण पर ब्लॉक के परिणामी त्वरण की गणना कीजिए (m/s^2 में)।

Ans $2\ m/s^2$

Sol.



The normal reaction by wall on the block is $N = \dfrac{mv^2}{R}$

दीवार द्वारा ब्लॉक पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल $N = \dfrac{mv^2}{R}$

The friction force on the block by the wall is $f = \mu N = \dfrac{\mu mv^2}{R}$

दीवार द्वारा ब्लॉक पर घर्षण बल $f = \mu N = \dfrac{\mu mv^2}{R}$

The tangential acceleration of the block = $\frac{f}{m} = \frac{\mu v^2}{R}$

ब्लॉक का स्पर्शरेखीय त्वरण = $\frac{f}{m} = \frac{\mu v^2}{R}$

Net acceleration कुल त्वरण = $\sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\mu^2 + 1} \times \left(\frac{v^2}{R}\right)$ = 2 m/sec^2

5. A car goes on a horizontal circular road of radius R = $\sqrt{27}$ meter, the speed increasing at a constant rate $\frac{dv}{dt}$ = a = 1 m/s^2, starting from rest. The friction coefficient between the road and the tyre is μ = 0.2. Find the time at which the car will skid.

एक R = $\sqrt{27}$ मीटर त्रिज्या की वृत्ताकार क्षैतिज सड़क पर एक कार विराम से प्रारम्भ होकर $\frac{dv}{dt}$ = a = 1 m/s^2 की नियत दर से बढ़ती हुई चाल से गतिशील है। सड़क तथा टायर के मध्य घर्षण गुणांक μ = 0.2 है। वह समय ज्ञात करिये जिस पर कार फिसल जायेगी।

Ans. 3

Sol. Net force on car = frictional force f

कार पर कुल बल = घर्षण बल f

$\therefore$ $f = m\sqrt{a^2 + \frac{v^4}{R^2}}$ (where m is mass of the car) ....(1) (जहाँ m कार का द्रव्यमान है) ....(1)

For skidding to just occur फिसलने के लिए

$f = \mu N = \mu mg$ ....(2)

$\therefore$ From (1) and (2) (1) तथा (2) से

$v = \{R^2[\mu^2 g^2 - a^2]\}^{1/4}$

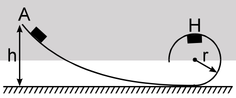
v = u + at $\Rightarrow$ t = $\frac{v}{u}$ = 3 sec

SECTION (D) : RADIUS OF CURVATURE

SECTION (D) : वक्रता त्रिज्या

6. A small body of mass m = 0.5 kg is allowed to slide on an inclined frictionless track from rest position as shown in the figure. (g = 10 m/s^2)

m = 0.5 kg द्रव्यमान का एक छोटा पिण्ड एक चिकने नततल पर, विरामावस्था से चित्र में दर्शाये अनुसार फिसलना प्रारम्भ करता है। (g = 10 m/s^2)



If h is double of that minimum height required to complete the loop successfully, calculate resultant force on the block at position H in newton

यदि पिण्ड को वृतिय गति पूर्ण करने के लिए आवश्यक न्यूनतम ऊँचाई की दुगनी ऊँचाई h से छोड़ा जाये तो स्थिति H में पिण्ड पर लगने वाले परिणामी बल का मान न्यूटन में ज्ञात कीजिए।

Ans. F_{net} = 30

Sol. (i) for complete the loop minimum velocity at lowest point is $v = \sqrt{5gr}$

लूप पूर्ण करने के लिए निम्नतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग $v = \sqrt{5gr}$

from energy conservation उर्जा संरक्षण से

$\frac{1}{2} mv^2 = mgh$ $\quad\quad \frac{1}{2} m(\sqrt{5gr})^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{5}{2} r$ **Ans.**

(ii) h is double then velocity at h position is

h दुगना है तब h स्थिति पर वेग होगा -

$mg2h - mg\,2r = \frac{1}{2} mv^2$ (from energy conservation) (ऊर्जा संरक्षण से)

$v = \sqrt{6gr}$

Normal reaction at highest point. (उच्चतम बिन्दु पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल)

$F_R = N + mg = \frac{m(\sqrt{6gr})^2}{r}$

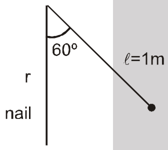
$F_R = 6\ mg$ **Ans.**

7. A nail is located at a certain distance vertically below the point of suspension of a simple pendulum. The pendulum bob is released from the position where the string makes an angle of 60° from the vertical. Calculate the value of x if distance of the nail from the point of suspension is $\frac{x}{10}$ such that the bob will just perform revolution with the nail as centre. Assume the length of pendulum to be 1m.

एक सरल लोलक के निलम्बन बिन्दु से ठीक ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कुछ दूरी पर एक कील स्थित है। लोलक को उस स्थिति से छोड़ा जाता है जब इसकी डोरी ऊर्ध्व से 60° कोण बनाती है। यदि कील की निलम्बन बिन्दु से दूरी $\frac{x}{10}$ इस प्रकार है कि गोलक कील के परितः केन्द्र मानकर ठीक पूर्ण चक्कर करता हो तब x का मान ज्ञात करो। माना सरल लोलक की लम्बाई 1m है।

Ans. x = 8

Sol.



velocity at lowest point न्यूनतम बिन्दु पर वेग

$mg\ell(1 - \cos 60^\circ) = \frac{1}{2} mv^2$ (from energy conservation) (ऊर्जा संरक्षण से)

$v = \sqrt{g\ell}$

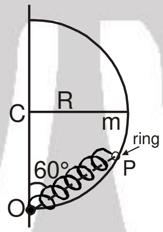
for completing the loop. लूप पूर्ण करने के लिए

$v = \sqrt{5g(\ell - r)} = \sqrt{g\ell}$

$r = \frac{4}{5}$ m **Ans.**

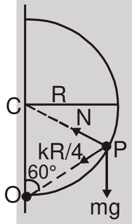
8. A smooth semicircular wire-track of radius R is fixed in a vertical plane shown in fig. One end of a massless spring of natural length (3R/4) is attached to the lower point O of the wire track. A small ring of mass m, which can slide on the track, is attached to the other end of the spring. The ring is held stationary at point P such that the spring makes an angle of 60° with the vertical. The spring constant K = mg/R. Consider the instant when the ring is released, If the tangential acceleration of the ring is $\frac{x\sqrt{3}g}{8}$ and the normal reaction is $\frac{y\ \ mg}{8}$ then calculate value of x + y.

चित्रानुसार ऊर्ध्वाधर तल में स्थित R त्रिज्या के चिकने अर्द्धवृत्ताकार तार के पथ पर (3R/4) सामान्य लम्बाई की द्रव्यमानहीन स्प्रिंग का एक सिरा तार के निम्नतम बिन्दु O से जुड़ा है। एक m द्रव्यमान का छोटा छल्ला जो कि तार पर फिसल सकता है, स्प्रिंग के दूसरे सिरे से जुड़ा हुआ है। छल्ला P बिन्दु पर स्थिर है तथा इस स्थिति में स्प्रिंग ऊर्ध्वाधर से 60° का कोण बनाती है। स्प्रिंग का बल नियतांक K = mg/R है। जब छल्ले को छोड़ा जाता है तो इस स्थिति पर यदि छल्ले का स्पर्श रेखीय त्वरण $\frac{x\sqrt{3}g}{8}$ है तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया $\frac{y\ \ mg}{8}$ है तो x + y का मान ज्ञात करो।



Ans. x + y = 8

Sol. CP = CO = Radius of circle (R) वृत्त की त्रिज्या



∴ $\angle COP = \angle CPO = 60^\circ$

∴ $\angle OCP$ is also 60º

$\angle OCP$ भी 60º है।

Therefore, ΔOCP is an equilateral triangle.

अतः ΔOCP समबाहु त्रिभुज है।

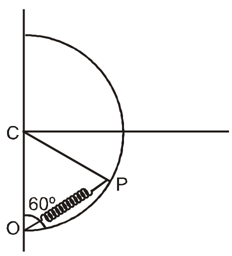
Hence अतः, OP = R

Natural length of spring is 3R/4.

स्प्रिंग की प्राकृत लम्बाई 3R/4

∴ Extension in the spring

∴ स्प्रिंग में प्रसार



$$x = R - \frac{3R}{4} = \frac{R}{4}$$

⇒ Spring force स्प्रिंग बल , $F = kx = \left(\frac{mg}{R}\right)\left(\frac{R}{4}\right) = \frac{mg}{4}$

The free body diagram of the ring will be a shown.

वलय का मुक्त वस्तु आरेख निर्दिष्ट है।

Here यहाँ , $F = kx = \frac{mg}{4}$

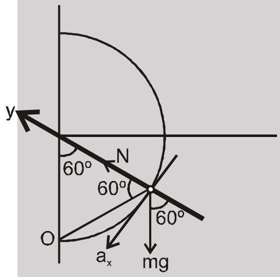
and तथा N = Normal reaction अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल

Tangential acceleration a_r = The ring will move towards the x-axis just after the release. So, net force along x-axis :

स्पर्शीय त्वरण a_r = वलय मुक्त होने पर x-अक्ष की ओर गति करेगी। अतः x अक्ष के अनुदिश कुल बल होगा :

$$F_x = F \sin 60^\circ + mg \sin 60^\circ = \left(\frac{mg}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$F_x = \frac{5\sqrt{3}}{8}\ mg$$



Therefore, tangential acceleration of the ring.

अतः वलय का स्पर्शरेखीय त्वरण

$$a_T = a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{5\sqrt{3}}{8}\ g$$

$$a_T = \frac{5\sqrt{3}}{8} g \qquad \text{hence } x = 5$$

Normal Reaction N : Net force along y-axis on the ring just after the release will be zero.

अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल N : y-अक्ष के अनुदिश वलय पर कुल बल मुक्त करने के ठीक पश्चात् शून्य होगा।

$$F_y = 0$$

$$\therefore \quad N + F \cos 60^\circ = mg \cos 60^\circ$$

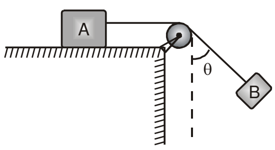
$$\therefore \quad N = mg \cos 60^\circ - F \cos 60^\circ = \frac{mg}{2} - \frac{mg}{4}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{mg}{2} - \frac{mg}{8}$$

$$N = \frac{3mg}{8} \qquad \text{Hence } y = 3$$

9. Two particles A and B each of mass m are connected by a massless string. A is placed on the rough table. The string passes over a small, smooth peg. B is left from a position making an $\angle\theta$ with the vertical. If the minimum coefficient of friction between A and the table is $\mu_{min} = 3 - N \cos \theta$ so that A does not slip during the motion of mass B. Then calculate the value of N

समान द्रव्यमान m के दो कण A व B द्रव्यमानहीन रस्सी से जुड़े हैं। कण A खुरदरी टेबल पर रखा है। रस्सी चिकनी तथा छोटी खूंटी से गुजरती है। कण B को ऊर्ध्वाधर से $\angle\theta$ कोण बनाती हुई स्थिति से मुक्त किया जाता है यदि कण A तथा टेबल के बीच न्यूनतम घर्षण गुणांक $\mu_{min} = 3 - N \cos \theta$ है जिससे कि कण B की गति के दौरान कण A नहीं फिसलें तब N का मान ज्ञात करो ।



Ans: $N = 2$

Sol. Block B rotate in vertical plane. Tension is maximum in string at lowest position. When block B at lowest position and block A does not slide that means block A not slide at any position of B.

At lowest position

ब्लॉक B ऊर्ध्व तल में घूमता है। निम्नतम स्थिति में डोरी में अधिकतम तनाव होगा, जब ब्लॉक B निम्नतम स्थिति में हो और ब्लॉक A ना फिसले अर्थात् B की किसी भी स्थिति के लिए ब्लॉक A नहीं फिसलेगा।

न्यूनतम स्थिति पर

$$T - mg = \frac{mv^2}{\ell} \Rightarrow \quad T = mg + \frac{mv^2}{\ell} \quad ....(1)$$

From energy conservation उर्जा संरक्षण से

$$mg\ell(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 \quad ...(2)$$

from equation (1) and (2) समीकरण (1) व (2) से

$$T = mg + 2mg(1 - \cos\theta)$$

$= 3mg - 2mg \cos\theta$

for no slipping. फिसलन न होने के लिए

$T = \mu mg = 3mg - 2mg \cos\theta$

$\mu_{min} = 3 - 2\cos\theta$ **Ans.**

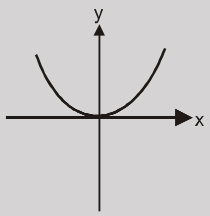
10. A particle moves along the plane trajectory y (x) with velocity v whose modulus is constant. Find the curvature radius of the trajectory at that point x = 0, if the trajectory has the form of a parabola $y = \frac{1}{10}x^2$.

एक कण समतल पथ y (x) के अनुदिश v वेग जिसका परिमाण नियत है, से गति करता है। बिन्दु x = 0 पर कण के पथ की वक्रता त्रिज्या ज्ञात करो यदि पथ का रूप परवलय $y = \frac{1}{10}x^2$ हो

Ans : **R = 5**

Sol. Parabola $y = ax^2$ is shown. It is clear from diagram that at x = 0 velocity is along x-axis and constant a_N is along y-axis. So,

परवलय $y = ax^2$ चित्रानुसार है x = 0 पर चित्र से स्पष्ट है कि वेग x-अक्ष के अनुदिश है तथा नियतांक a_N , y–अक्ष के अनुदिश है। अतः



$$a_N = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2a \times \frac{dx}{dt} = 2aVx$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2av\frac{dx}{dt} = 2av^2 \quad \left(\because \frac{d^2x}{dt^2} = 0\right)$$

$$a_N = 2av^2$$

$$R = \frac{v^2}{2av^2} = \frac{1}{2a}.$$

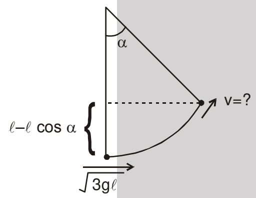
11. A particle of mass m is suspended by string of length ℓ from a fixed rigid support. A sufficient horizontal velocity $v_0 = \sqrt{3g\ell}$ is imparted to it suddenly. Calculate the angle (in degree) made by the string with the vertical when the acceleration of the particle is inclined to the string by 45º.
m द्रव्यमान का कण, ℓ लम्बाई की डोरी की सहायता से एक स्थिर आधार से लटकाया गया है इस को अचानक क्षैतिज दिशा में $v_0 = \sqrt{3g\ell}$ वेग प्रदान किया जाता है। जब कण का त्वरण डोरी से 45° कोण पर झुका हुआ हो तो डोरी द्वारा ऊर्ध्व से बनाया गया कोण (डिग्री में) ज्ञात कीजिए।

Ans. $\alpha = 90°$

Sol. $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

$\tan 45º = \dfrac{a_t}{a_c} \Rightarrow a_t = a_C$

$\Rightarrow g \sin\alpha = \dfrac{v^2}{t}$ ...(1)



Using energy conservation
ऊर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2} m\, 3g\ell - \frac{1}{2} mv^2 = mg\,\ell\,(1 - \cos\alpha)$$

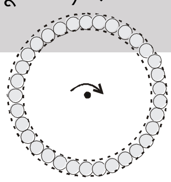
$$\Rightarrow mv^2 = 3mg\ell - 2mg\ell + 2mg\ell\cos\alpha$$

$$mv^2 = mg\ell + 2mg\ell\cos\alpha \quad \text{.............(2)}$$

By eq. (1) and (2)
$\sin\alpha = 1 + 2\cos\alpha$
$\Rightarrow \alpha = 90º$

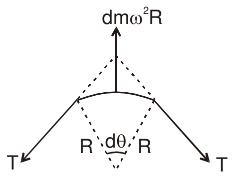
SECTION (F) : MOTION OF A VEHICLE, CENTRIFUGAL FORCE AND ROTATION OF EARTH
SECTION (F) : वाहन की गति, अपकेन्द्रीय बल तथा पृथ्वी का घूर्णन

12. A uniform metallic chain in a form of circular loop of mass m = 3 kg with a length ℓ = 1 m rotates at the rate of n = 5 revolutions per second. Find the tension T (in Newton) in the chain.
m = 3kg द्रव्यमान तथा ℓ = 1m लम्बाई की समरूप धात्विक जंजीर वृत्तीय लूप के रूप में n = 5 चक्कर प्रति सेकण्ड की दर से घूर्णन कर रही है। जंजीर में तनाव T (न्यूटन में) ज्ञात करो।



Ans. $T = m\ell n^2 = 75$ N

Sol.



$dm\omega^2 R = 2T \sin\dfrac{d\theta}{2}$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{m}{\ell} R d\theta\right) \omega^2 R = T d\theta$

$\therefore \quad T = \frac{m}{\ell} \omega^2 R^2 \quad ....(1)$

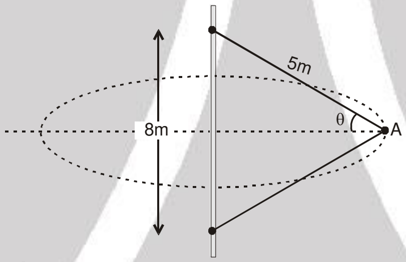
But परन्तु $\omega = 2\pi n$

$\ell = 2\pi R$

$\therefore \quad T = m\ell n^2$

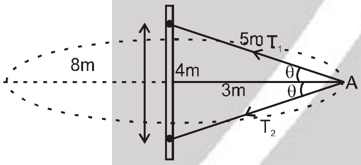
13. A 4 kg block is attached to a vertical rod by means of two strings of equal length. When the system rotates uniformly about the axis of the rod, the strings are extended as shown in figure. If tension in upper and lower chords are 200 newton and 10x newton respectively and angular velocity of particle is $\sqrt{\frac{y}{2}}$ than calculate value of x + y.

4 किग्रा द्रव्यमान का पिण्ड दो समान लम्बाई की डोरियों की सहायता से एक ऊर्ध्व छड़ से जुड़ा हुआ है। जब यह निकाय छड़ की अक्ष के परितः एकसमान रूप से घूर्णन करता है तो डोरियाँ चित्र में दर्शाये अनुसार तन जाती है। यदि ऊपरी तथा निचली डोरीयों में तनाव क्रमशः 200 न्यूटन तथा 10x न्यूटन है तथा कण का कोणीय वेग $\sqrt{\frac{y}{2}}$ है, तो x + y का मान होगा।



Ans. x = 15, y = 35, x + y = 50 Ans.

Sol. Centripetal acceleration अभिकेन्द्रीय त्वरण



$m\omega^2 r = T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta \quad .... (1)$

apply Newton law in vertical direction उर्ध्वदिशा में न्यूटन का नियम लगाने पर

$T_1 \sin\theta = mg + T_2 \sin\theta \quad .....(2)$

given दिया है m = 4 kg, T_1 = 20 kgf = 200 N, r = 3m

$\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$

Put in equation (2) समीकरण (2) में प्रयुक्त करने पर प्राप्त होगा

T_2 = 150 N = 10x **Ans.**

$\omega = \sqrt{\frac{35}{2}}$

14. A simple pendulum is suspended from the ceiling of a car taking a turn of radius 10 m at a speed of 36 km/h. Find the angle (in degree) made by the string of the pendulum with the vertical if this angle does not change during the turn. Take g = 10 m/s^2.

36 km/h की चाल से 10 m त्रिज्या के वृत्ताकार मोड़ पर घूम रही एक कार की छत से एक लोलक लटकाया गया है। यदि घुमाव लेने के दौरान लोलक की डोरी का ऊर्ध्वाधर से कोण परिवर्तित नहीं होता है तो कोण का मान डिग्री में ज्ञात कीजिए। दिया गया है g = 10 m/s^2.

Ans : 45º

Sol. V = 10 m/s

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{10\times10}{10\times10}\right) = 45^\circ$$

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार(ONE OR MORE THAN ONE OPTION CORRECT TYPE)

SECTION (A) : KINEMATICS OF CIRCULAR MOTION
SECTION (A) : वृत्तीय गति की गतिकी

SECTION (B) : RADIAL AND TANGENTIAL ACCELERATION
SECTION (B) : त्रिज्यीय एवं स्पर्श रेखीय त्वरण

1. A stone is projected from level ground at t = 0 sec such that its horizontal and vertical components of initial velocity are 10 m/s and 20 m/s respectively. Then the instant of time at which magnitude of tangential and magnitude of normal components of acceleration of stone are same is : (neglect air resistance) $g = 10\ m/s^2$.

एक पत्थर को समय t = 0 sec पर धरातल से प्रक्षेपित किया जाता है तथा प्रक्षेपण के समय वेग के क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटक क्रमशः 10 m/s तथा 20 m/s है तो वह समय क्या होगा जब पत्थर के त्वरण के स्पर्शरेखीय तथा अभिलम्ब घटक परिमाण में बराबर होंगे। $g = 10\ m/s^2$. (हवा के घर्षण को नगण्य मानें)

(A) $\frac{1}{2}$ sec (B*) 1 sec (C*) 3 sec (D) 4 sec.

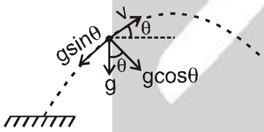
Sol. Tangential acceleration = $a_t = g\sin\theta$

Normal acceleration = $a_n = g\cos\theta$

स्पर्श रेखीय त्वरण = $a_t = g\sin\theta$

अभिलम्ब त्वरण = $a_n = g\cos\theta$

$a_t = a_n$



$g\sin\theta = g\cos\theta \Rightarrow \theta = 45^\circ$

$\Rightarrow v_y = v_x$

$u_y - gt = u_x$

$20 - (10)t = 10$

t = 1 sec.

During downward motion

नीचे की तरफ गति के दौरान

$a_t = a_n$

$v_y = -v_x$

$20 - 10t = -10 \Rightarrow t = 3$ sec.

SECTION (C) : CIRCULAR MOTION IN HORIZONTAL PLANE
SECTION (C) : क्षैतिज तल में वृत्तीय गति

2. A heavy particle is tied to the end A of a string of length 1.6 m. Its other end O is fixed. It revolves as a conical pendulum with the string making 60° with the vertical. Then ($g = 9.8\ m/s^2$)
एक भारी कण1.6 m लम्बाई की रस्सी के एक सिरे A पर जोड़ा जाता है तथा दूसरा सिरा O (स्थिर) है। यह एक शंकवाकार लोलक (conical pendulum) की तरह घूर्णन गति करता है, जिसका ऊर्ध्वाधर से कोण 60° है, तब ($g = 9.8\ m/s^2$)

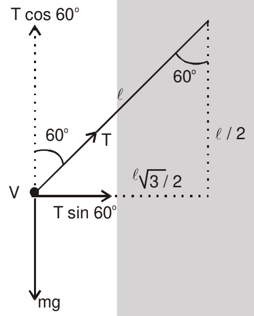
(A*) its period of revolution is $\frac{4\pi}{7}$ sec. (इसका घूर्णनकाल $\frac{4\pi}{7}$ सैकण्ड होगा।)

(B*) the tension in the string is double the weight of the particle
रस्सी में तनाव कण के भार का दुगुना होगा।

(C*) the speed of the particle = $2.8\sqrt{3}$ m/s
कण की चाल = $2.8\sqrt{3}$ m/s होगी।

(D*) the centripetal acceleration of the particle is $9.8\sqrt{3}\ m/s^2$.
कण का अभिकेन्द्रीय त्वरण $9.8\sqrt{3}\ m/s^2$ होगा।

Sol.



$$\frac{T\sqrt{3}}{2} = \frac{mv^2}{(\ell\sqrt{3}/2)} \qquad ....(1)$$

$$\frac{T}{2} = mg \qquad ....(2)$$

Hence T = 2 mg , So (B) holds
अतः T = 2 mg, (B) सही है।
From (1) & (2) $V^2 = 3\,g\ell/2$
(1) व (2) से $V^2 = 3\,g\ell/2$

$\therefore \quad V = \sqrt{\frac{3 \times 9.8 \times 1.6}{2}}$

$\therefore \quad V = 2.8\sqrt{3}$ m/s . So (C) hold

$\therefore \quad V = 2.8\sqrt{3}$ m/s . अतः (C) सही है।

$a_c = V^2/r = \frac{(3g\ell/2)}{(\ell\sqrt{3}/2)} = \sqrt{3} \times g = 9.8\sqrt{3}\ m/s^2$

$\therefore$ (D) holds (D) सही है।

$t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\sqrt{\ell\sqrt{3}/2}}{\sqrt{(3g\ell/2)}}$

$t = 4\pi/7$ $\therefore$ (A) holds.
$\therefore$ (A) सही है।

3. A car of mass M is travelling on a horizontal circular path of radius r. At an instant its speed is v and tangential acceleration is a :
r त्रिज्या के वृत्ताकार क्षैतिज पथ पर M द्रव्यमान की एक कार गतिशील है। किसी क्षण पर इसकी चाल v है तथा स्पर्श रेखीय त्वरण a है –

(A) The acceleration of the car is towards the centre of the path
कार का त्वरण , पथ के केन्द्र की ओर है।

(B*) The magnitude of the frictional force on the car is greater than $\frac{mv^2}{r}$
कार पर लग रहे घर्षण बल का परिमाण $\frac{mv^2}{r}$ से अधिक है।

(C*) The friction coefficient between the ground and the car is not less than a/g.
कार एवं जमीन के मध्य घर्षण गुणांक का मान a/g से कम नहीं है।

(D) The friction coefficient between the ground and the car is $\mu = \tan^{-1}\frac{v^2}{rg}$
कार एवं जमीन के मध्य घर्षण गुणांक $\mu = \tan^{-1}\frac{v^2}{rg}$ है।

Sol. $a_t = \frac{dv}{dt} = a$

friction force on car कार पर घर्षण बल $= m\sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + a^2}$

which is greater than जो कि $\frac{mv^2}{r}$ से अधिक है।

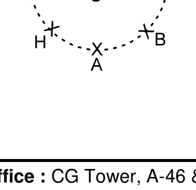
$\mu_{min} = \frac{\sqrt{(v^2/r)^2 + a^2}}{g}$

therefore it is not less than $\frac{a}{g}$ for safe turn.

अतः यह सुरक्षित घुमाव के लिए $\frac{a}{g}$ से कम नहीं है।

SECTION (D) : RADIUS OF CURVATURE
SECTION (D) : वक्रता त्रिज्या

4. A machine, in an amusement park, consists of a cage at the end of one arm, hinged at O. The cage revolves along a vertical circle of radius r (ABCDEFGH) about its hinge O, at constant linear speed v =. $\sqrt{gr}$ The cage is so attached that the man of weight 'w' standing on a weighing machine, inside the cage, is always vertical. Then which of the following is/are correct
मनोरंजन पार्क में एक मशीन की भुजा के एक सिरे पर पिंजरा है तथा दूसरा सिरा O पर कीलकित है। पिंजरा r त्रिज्या के उर्ध्व वृत्त (ABCDEFGH) में O के परितः नियत रेखीय चाल v = $\sqrt{gr}$ से घूमता है। पिंजरे को इस प्रकार जोड़ा गया है कि w भार का आदमी पिंजरे के अन्दर रखी भार मशीन पर हमेशा उर्ध्वाधर रहता है तो निम्न में से कौनसा/कौनसे सत्य हैं।



(A) the reading of his weight on the machine is the same at all positions
प्रत्येक स्थिति में मशीन पर उसके भार का पाठ्यांक समान होगा।
(B*) the weight reading at A is greater than the weight reading at E by 2 w.
A पर मशीन का पाठ्यांक, E पर मशीन के पाठ्यांक से 2 w ज्यादा होगा।
(C*) the weight reading at G = w
G पर मशीन का पाठ्यांक = w
(D*) the ratio of the weight reading at E to that at A = 0
E और A पर भार पाठ्यांक का अनुपात शून्य होगा।
(E*) the ratio of the weight reading at A to that at C = 2.
A और C पर भार पाठ्यांक, का अनुपात 2 होगा।

Sol. Speed of cage पिंजरे की चाल = $\sqrt{gr}$ = const. नियतांक
Normal reaction at (weight reading) अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल (भार पाठ्यांक)

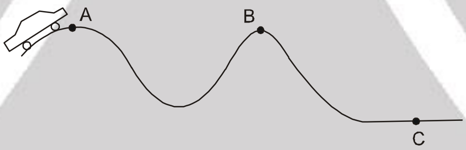
$$N_A - mg = \frac{mv^2}{r}$$

$N_A = 2mg = 2w$ **Ans.**
Weight reading at G & C = mg = w **Ans.**
G व C पर भार पाठ्यांक = mg = w **Ans.**
weight reading at E
E पर भार पाठ्यांक

$$mg - N_E = \frac{mv^2}{r}$$

$N_E = 0$ **Ans.**

5. A car is moving with constant speed on a road as shown in figure. The normal reaction by the road on the car is N_A, N_B and N_C when it is at the points A, B and C respectively.
चित्रानुसार सड़क पर एक कार नियत चाल से गतिशील है। जब यह बिन्दुओं A, B तथा C पर होती है तो कार पर सड़क द्वारा आरोपित अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल क्रमशः N_A, N_B तथा N_C है तब –



(A) $N_A = N_B$ (B*) $N_A > N_B$ (C) $N_A < N_B$ (D*) $N_C > N_A$

Sol. For normal reaction at points A and B. बिन्दुओं A तथा B पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के लिए

$$mg - N = \frac{mv^2}{r}$$

$$N = mg - \frac{mv^2}{r}$$

$\Rightarrow$ $N_A > N_B$ and normal reaction at C is $N_C = mg$, so $N_C > N_A > N_B$ **Ans.**
$\Rightarrow$ $N_A > N_B$ तथा बिन्दु C पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल $N_C = mg$, अतः $N_C > N_A > N_B$ **Ans.**

SECTION (E) : CIRCULAR MOTION IN VERTICAL PLANE ऊर्ध्व तल में वृत्तीय गति :
SECTION (F) : MOTION OF A VEHICLE, CENTRIFUGAL FORCE AND ROTATION OF EARTH
SECTION (F) : वाहन की गति, अपकेन्द्रीय बल तथा पृथ्वी का घूर्णन

6. Assuming the motion of Earth around the Sun as a circular orbit with a constant speed of 30 km/s.
माना कि पृथ्वी 30 km/s की नियत चाल से सूर्य के चारों ओर वृत्ताकार पथ पर परिक्रमा करती है –
(A*) The average velocity of the earth during a period of 1 year is zero
एक वर्ष के दौरान पृथ्वी का औसत वेग शून्य है।
(B) The average speed of the earth during a period of 1 year is zero.
एक वर्ष के दौरान पृथ्वी की औसत चाल शून्य है।
(C) The average acceleration during first 6 monts of the year is zero
वर्ष के प्रथम 6 महिने के दौरान औसत त्वरण शून्य है।
(D*) The instantaneous acceleration of the earth points towards the Sun.
पृथ्वी का तात्क्षणिक त्वरण सूर्य की ओर इंगित रहता है।

Sol. (A) During a period of 1 year displacement is equal to zero, so that average velocity is equal to zero.
(B) During a period of one year distance travel is not equal to zero. So that average speed is not equal to zero.
(C) During a period of first 6 month of the year change in velocity not equal to zero. So that average acceleration is not equal to zero.
(D) In uniform circular motion instantaneous acceleration is act towards centre of circular path.
(A) एक वर्ष के दौरान विस्थापन शून्य है, अतः औसत वेग शून्य होगा।
(B) एक वर्ष में तय दूरी शून्य नहीं होती, अतः औसत चाल शून्य नहीं होगी।
(C) एक वर्ष में प्रथम 6 माह के दौरान वेग परिवर्तन शून्य नहीं है, अतः औसत त्वरण शून्य नही होगा।
(D) नियत वृत्तीय गति में तात्क्षणिक त्वरण वृत्तीय पथ के केन्द्र की ओर क्रियाशील होता है।

7. A car of mass m attempts to go on the circular road of radius r, which is banked for a speed of 36 km/hr. The friction coefficient between the tyre and the road is negligible.

36 km/hr चाल के लिये बंकित r त्रिज्या की वृत्तीय सड़क पर m द्रव्यमान की कार गति करने का प्रयास करती है। सड़क तथा टायरों के मध्य घर्षण गुणांक नगण्य है –
(A) The car cannot make a turn without skidding.
कार फिसले बिना नहीं घूम सकती है।
(B*) If the car turns at a speed less than 36 km/hr, it will slip down
यदि कार 36 km/hr, से कम चाल से घूमे तो यह नीचे की ओर फिसलेगी।
(C) If the car turns at the constant speed of 36 km/hr, the force by the road on the car is equal to $\frac{mv^2}{r}$
यदि कार नियत चाल 36 km/hr से घूमे, तो सड़क द्वारा कार पर लगाया गया बल $\frac{mv^2}{r}$ के बराबर है।
(D*) If the car turns at the correct speed of 36 km/hr, the force by the road on the car is greater than mg as well as greater than $\frac{mv^2}{r}$.
यदि कार ठीक 36 km/hr, चाल से घूमे, तो सड़क के द्वारा कार पर बल mg से अधिक होगा साथ ही यह $\frac{mv^2}{r}$ से भी अधिक होगा।

Sol. When speed of car is 36 km/hr, car can make a turn without skidding. If speed is less than 36 km/hr than tendency of slipping is downward so it will slip down. If speed is greater than 36 km/hr than tendency of slipping upward so it will slip up.
If the car's turn at correct speed 36 km/hr
जब कार की चाल 36 km/hr, है, तो कार बिना फिसले घूम सकती है। यदि चाल 36 km/hr से कम है तो इसके नीचे की ओर फिसलने की प्रवत्ति होती है, अतः नीचे फिसल जाती है। यदि चाल 36 km/hr से अधिक है तो इसकी ऊपर की ओर फिसलने की प्रवत्ति होती है अतः ऊपर की ओर फिसलेगी। यदि कार ठीक 36 km/hr चाल पर घूम ले
तो $N \cos\theta = mg$

$$N \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$N = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{r}\right)}$$ **Ans.**

8._ A particle is attached to an end of a rigid rod. The other end of the rod is hinged and the rod rotates always remaining horizontal. It's angular speed is increasing at constant rate. The mass of the particle is 'm'. The force exerted by the rod on the particle is $\vec{F}$, then :
दृढ़ छड़ के एक किनारे पर एक वस्तु को बांधा जाता है। दुसरे किनारे को किलकित कर छड़ को घूमाया जाता है जिससे वह हमेशा क्षैतिज बनी रहें तथा इसकी चाल नियत दर से हमेशा बढ़ती रहें। वस्तु का द्रव्यमान 'm' हैं, छड़ के द्वारा वस्तु पर बल $\vec{F}$ है, तो –
(A*) $F > mg$
(B) F is constant (F नियत है)
(C*) The angle between $\vec{F}$ and horizontal plane decreases. ($\vec{F}$ तथा क्षेतिज सतह के बीच का कोण घटता है)
(D*) The angle between $\vec{F}$ and the rod decreases. ($\vec{F}$ तथा छड़ के बीच का कोण घटता है)

Sol. $F = \sqrt{f^2 + F_t^2 + (mg)^2} > mg$
(चूंकि as $\frac{d|\vec{V}|}{dt}$ = constant नियत $\therefore$ F_t = constant नियत)
Now when the angular speed of the rod is increasing at const. rate the resultant force will be more inclined towards $\vec{f}$.
Hence the angle between $\vec{F}$ and horizontal plane decreases so as with the rod due to increases in $f = m\omega^2 r$ only.
जब छड़ का कोणीय वेग नियत दर से बढ़ता है तो परिणामी बल $\vec{f}$ की ओर अधिक झुकेगा।
अतः $\vec{f}$ तथा क्षैतिज तल के मध्य कोण घटेगा। छड़ के साथ कोण भी घटेगा क्योंकि $f = m\omega^2 r$ में वृद्धि हो रही है।

9._ A particle starting form rest at the highest point slides down the outside of a smooth vertical circular track of radius 0.3 m. When it leaves the track its vertical fall is h and the linear velocity is v. The angle made by the radius at that position of the particle with the vertical is θ. Now consider the following observation : ($g = 10$ m/s^2)
(I) h = 0.1 m and cos θ = 2/3. (II) h = 0.2 m and cosθ = 1/3. (III) v = $\sqrt{2}$ m/s^{-1}. (IV) After leaving the circular track the particle will describe a parabolic path. Therefore,
(A*) (I) and (III) both are correct
(B*) only (II) is incorrect
(C) only (III) is correct
(D*) (IV) is correct

एक कण उच्च बिन्दु पर विराम अवस्था से 0.3 m त्रिज्या के चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्ताकार पथ के बाहर नीचे की ओर फिसलना प्रारम्भ करता है। जब इसे पथ से छोड़ते है, तो इसी सीधी ऊँचाई h है तथा रेखीय वेग v है। ऊर्ध्वाधर से कण की उसी स्थिति पर त्रिज्या द्वारा बनाया गया कोण θ है। अब निम्न प्रेक्षणों पर विचार कीजिए। $(g = 10\ m/s^2)$

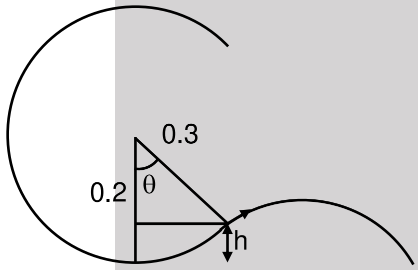
(I) h = 0.1 m तथा $\cos\theta = 2/3$. (II) h = 0.2 m तथा $\cos\theta = 1/3$. (III) $v = \sqrt{2}\ m/s^{-1}$. (IV) कण वृत्ताकार पथ को छोड़ने के बाद एक परवलय पथ प्रदर्शित करेगा

इसलिए,

(A) (I) व (III) दोनों सही है
(B) केवल (II) गलत है
(C) केवल (III) सही है।
(D) (IV) सही है।

Ans. **(ABD)**

Sol.



$v = \sqrt{2g(2R-h)}$ If h = 0.1

$= \sqrt{2.10(0.5)} = \sqrt{10}$

$\cos\theta = \frac{2}{3}$

$v\sqrt{2g(0.6-0.2)}$ If h = 0.2

$= \sqrt{2\cdot 10\cdot(0.4)} = 2\sqrt{2}m/s$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$

(a) and (d) are correct.

10. A particle moves along a horizontal circle such that the radial force acting on it is directly proportional to square of time. Then choose the correct option :

एक कण क्षैतिज वृत्त में इस प्रकार से गति कर रहा है कि इस पर कार्यरत त्रिज्यीय बल (radial force) समय के वर्ग के सीधे समानुपाती है तो सही विकल्प चुनिए –

(A) tangential force acting on it is directly proportional to time
(B*) power developed by total force is directly proportional to time
(C*) average power developed by the total force over first t second from rest is directly proportional to time
(D*) angle between total force and radial force decreases with time

(A) इस पर कार्यरत स्पर्श रेखीय बल समय के समानुपाती है।
(B*) कुल बल द्वारा प्रदान की गई कुल शक्ति समय के समानुपाती है।
(C*) कुल बल द्वारा प्रदान की गई औसत शक्ति विरामावस्था से प्रारम्भ करते हुए समय t तक समय के समानुपाती होगी।
(D*) कुल बल तथा त्रिज्यीय बल (radial force) मध्य कोण समय के साथ घटेगा।

Sol. $a_n = kt^2$

$\frac{v^2}{R} = kt^2$

$v = \sqrt{kR}\, t$

$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{kR}$ constant नियतांक

$\tan\phi = \frac{a_t}{a_n} \propto \frac{1}{t^2}$

$p = F_t v$

$\propto t$

$\langle p \rangle \propto t$.

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

Comprehension # 1
अनुच्छेद # 1

A particle undergoes uniform circular motion. The velocity and angular velocity of the particle at an instant of time is $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ m/s and $\vec{\omega} = x\hat{i} + 6\hat{j}$ rad/sec.

एक कण एकसमान वृत्तीय गति करता है। किसी क्षण पर कण का वेग तथा कोणीय वेग क्रमशः $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ m/s तथा $\vec{\omega} = x\hat{i} + 6\hat{j}$ rad/sec है।

1. The value of x in rad/s is
x का मान रेडियन/सैकण्ड में है –
(A) 8 (B*) – 8 (C) 6 (D) can't be calculated परिकलन नही किया जा सकता

2. The radius of circle in metres is
वृत्त की त्रिज्या मीटर में है –
(A*) 1/2 m (B) 1 m (C) 2 m (D) can't be calculated

3. The acceleration of particle at the given instant is
दिये गये क्षण पर कण का त्वरण है –
(A*) $-50\hat{k}$ (B) $-42\hat{k}$ (C) $2\hat{i} + 3\hat{j}$ (D) $50\hat{k}$

Sol. 1 to 3.
The angular velocity and linear velocity are mutually perpendicular

$\therefore \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 3x + 24 = 0$ or या $x = -8$

The radius of circle $r = \frac{v}{\omega} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ meter

The acceleration of particle undergoing uniform circular motion is

$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = (-8\hat{i} + 6\hat{j}) \times (3\hat{i} + 4\hat{j}) = -50\hat{k}$

कोणीय वेग तथा रेखीय वेग परस्पर लम्बवत् है।

$\therefore \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 3x + 24 = 0$ or $x = -8$

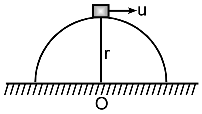
वृत्त की त्रिज्या $r = \frac{v}{\omega} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ मीटर

एक समान वृत्तीय गति में कण का त्वरण

$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = (-8\hat{i} + 6\hat{j}) \times (3\hat{i} + 4\hat{j}) = -50\hat{k}$

Comprehension # 2

A small block of mass m is projected horizontally from the top of the smooth and fixed hemisphere of radius r with speed u as shown. For values of $u \geq u_0$, ($u_0 = \sqrt{gr}$) it does not slide on the hemisphere.
[i.e. leaves the surface at the top itself]
द्रव्यमान m का एक छोटा गुटका r त्रिज्या के एक चिकने एवं स्थिर दृढ़ अर्द्धगोले के शीर्ष से क्षैतिज दिशा में u चाल से चित्रानुसार प्रक्षेपित किया जाता है। दर्शाए अनुसार $u \geq u_0$, ($u_0 = \sqrt{gr}$) मान के लिए यह अर्द्धगोले पर नहीं फिसलता है। (अर्थात् अर्द्धगोले के शीर्ष पर ही सतह को छोड़ देता है।)



4. For $u = 2u_0$, it lands at point P on ground. Find OP.
$u = 2u_0$, के लिए यह गुटका सतह पर बिन्दु P पर गिरता है, OP ज्ञात करो -

(A) $\sqrt{2}\ r$ (B) 2 r (C) 4r (D*) $2\sqrt{2}\ r$

Sol. $mg = \dfrac{mu_0^2}{r} \Rightarrow u_0 = \sqrt{gr}$

Now, along vertical अब, उर्ध्वाधर दिशा के अनुदिश ;

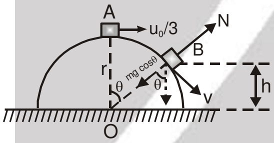
$r = \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2r}{g}}$

Along horizontal क्षैतिज के अनुदिश ; $OP = 2u_0 t = 2\sqrt{2}\ r$

5. For $u = u_0/3$, find the height from the ground at which it leaves the hemisphere.
$u = u_0/3$, के लिए सतह से वह ऊँचाई ज्ञात करो जिस पर यह गुटका अर्द्धगोले को छोड़ देता है -

(A) $\dfrac{19\,r}{9}$ (B*) $\dfrac{19\,r}{27}$ (C) $\dfrac{10r}{9}$ (D) $\dfrac{10r}{27}$

Sol. As at B it leaves the hemisphere,
क्योकि, B पर यह अर्द्धगोले को छोड़ देता है।



$\therefore$ $N = 0$

$mg\cos\theta = \dfrac{mV^2}{r}$

$mg\ \dfrac{h}{r} = \dfrac{mV^2}{r}$

$mv^2 = mgh$ ....(1)

By energy conservation between A and B
अतः A और B के मध्य ऊर्जा संरक्षण से

$mgr + \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{u_0}{3}\right)^2 = mgh + \dfrac{1}{2}mv^2$

Put u_0 and mv^2 $\therefore$ $h = \dfrac{19r}{27}$

u_0 और mv^2 का मान रखने पर

6. Find its net acceleration at the instant it leaves the hemisphere.
यह गुटका जिस क्षण अर्द्धगोले को छोड़ता है तब इसका कुल त्वरण क्या है -

(A) g/4 (B) g/2 (C*) g (D) g/3

Sol. As क्योंकि $a_c = \frac{v^2}{r} = g\cos\theta$

$\therefore \quad a_t = g \sin\theta$

$\therefore \quad a_{net} = g$

Alternate Solution : वेकल्पिक हल

when block leave only the force left is mg.

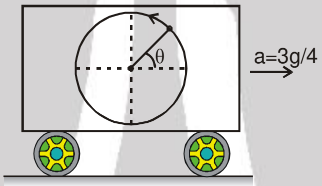
जब गुटका अर्द्धगोले को छोड़ देता है तब केवल mg बल रहता है।

$\therefore \quad a_{net} = g$.

Comprehension # 3

A bus is moving with a constant acceleration a = 3g/4 towards right. In the bus, a ball is tied with a rope of length ℓ and is rotated in vertical circle as shown.

एक बस a = 3g/4 नियत त्वरण से दांयी तरफ गति कर रही है। बस में एक गेंद जो ℓ लम्बाई की रस्सी से जुड़ी है, ऊर्ध्वाधर तल में चित्रानुसार वृत्तीय गति कर रही है।

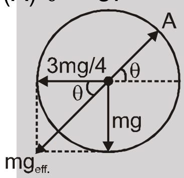


7. At what value of angle θ, tension in the rope will be minimum

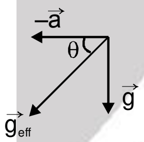
कोण θ के किस मान पर रस्सी में तनाव न्यूनतम होगा।

(A) θ = 37º (B*) θ = 53º (C) θ = 30º (D) θ = 90º

Sol.



$\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{a}$



Tension would be minimum when it (tension) is along $\vec{g}_{eff}$

तनाव, न्यूनतम होगा जब, यह (तनाव) $\vec{g}_{eff}$ के अनुदिश है।

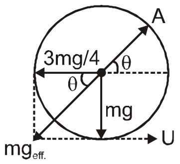
$\tan\theta = \frac{mg}{\frac{3}{4}mg} = \frac{4}{3} \qquad \therefore \qquad \theta = 53º$.

8. At above mentioned position, find the minimum possible speed V_{min} during whole path to complete the circular motion :

उपरोक्त स्थिति पर, सम्पूर्ण पथ के दौरान न्यूनतम सम्भव चाल V_{min} ज्ञात करो जिससे वृत्तीय गति पूर्ण हो सके –

(A) $\sqrt{5\ g\ell}$ (B) $\frac{5}{2}\sqrt{g\ell}$ (C*) $\frac{\sqrt{5g\ell}}{2}$ (D) $\sqrt{g\ell}$

Sol.



$V_{min} = \sqrt{\ell g_{eff}} = \sqrt{\ell \frac{5}{4} g} = \frac{\sqrt{5\ell g}}{2}$.

9. For above value of V_{min} find maximum tension in the string during circular motion.
V_{min} के उपरोक्त मान के लिए वृत्तीय गति के दोरान रस्सी में अधिकतम तनाव ज्ञात करो।

(A) 6 mg (B) $\frac{117}{20}$mg (C*) $\frac{15}{2}$mg (D) $\frac{17}{2}$mg

Sol. $T_{max} = 6\ mg_{eff}$ $\left(g_{eff} = \frac{5}{4} g\right)$

$= \frac{15}{2}$mg

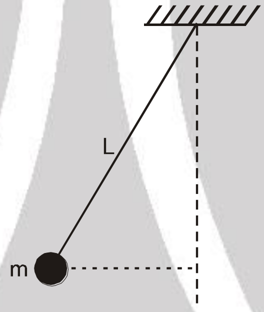
Exercise-3

✍ **Marked Questions can be used as Revision Questions.**
✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**
*** Marked Questions may have more than one correct option.**
*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है।**

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

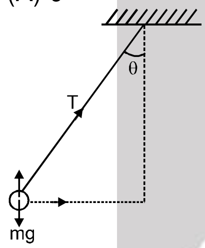
भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1.✍ A ball of mass (m) 0.5 kg is attached to the end of a string having length (L) 0.5 m. The ball is rotated on a horizontal circular path about vertical axis. The maximum tension that the string can bear is 324 N. The maximum possible value of angular velocity of ball (in radian/s) is :
0.5 m लम्बाई (L) की डोरी के एक सिरे पर 0.5 kg द्रव्यमान (m) की गेंद जुड़ी है। यह गेंद क्षैतिज–तल में ऊर्ध्वाधर–अक्ष के परितः वृत्तीय पथ पर घूमती है। डोरी में लग सकने वाला अधिकतम तनाव 324 N है। गेंद का अधिकतम सम्भावित कोणीय वेग (radian/s में) होगा। **[JEE 2011, 3/160, –1]**



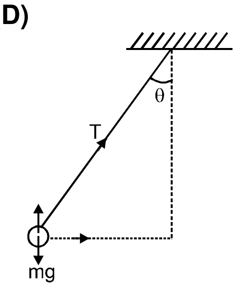
(A) 9 (B) 18 (C) 27 (D*) 36

Sol.



$T \sin\theta = m L\sin\theta\, \omega^2$
$324 = 0.5 \times 0.5 \times \omega^2$
$\omega^2 = \dfrac{324}{0.5 \times 0.5}$
$\omega = \sqrt{\dfrac{324}{0.5 \times 0.5}}$
$\omega = \dfrac{18}{0.5} = 36$ rad/sec.

Sol. (D)



$T \sin\theta = m L\sin\theta\, \omega^2$

$324 = 0.5 \times 0.5 \times \omega^2$

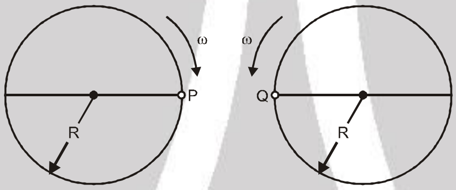
$\omega^2 = \dfrac{324}{0.5 \times 0.5}$

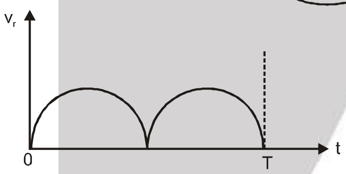
$\omega = \sqrt{\dfrac{324}{0.5 \times 0.5}}$

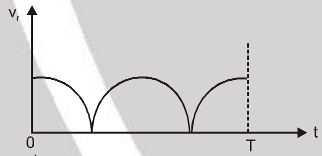
$\omega = \dfrac{18}{0.5} = 36$ rad/sec.

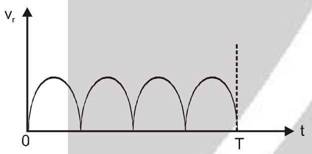
2. Two identical discs of same radius R are rotating about their axes in opposite directions with the same constant angular speed ω. The disc are in the same horizontal plane.At time t = 0 , the points P and Q are facing each other as shown in the figure. The relative speed between the two points P and Q is v_r. as function of times best represented by

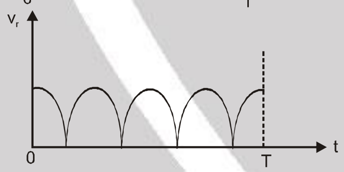
समान त्रिज्या R वाली दो एकसमान डिस्क अपनी धुरी पर एक समान व स्थिर कोणीय चाल ω से विपरीत दिशा में घूम रही हैं। डिस्क एक ही क्षैतिज तल में हैं। समय t = 0 पर बिन्दु P और Q चित्र में दर्शाये अनुसार आमने–सामने हैं। बिन्दु P और बिन्दु Q की आपेक्षिक चाल v_r को एक आवर्तनकाल (T) में देखें। तब v_r का समय के साथ परिवर्तन का किस ग्राफ में सर्वोत्तम वर्णन है ? **[IIT-JEE-2012, Paper-2; 3/66, –1]**



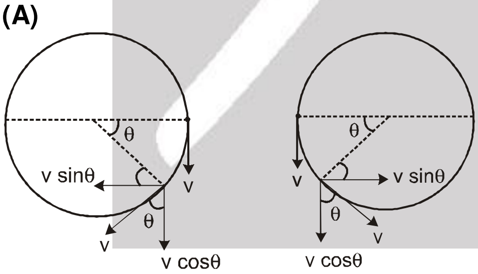
(A*)


(B)


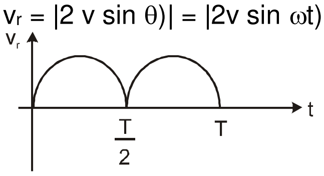
(C)


(D)


Ans. **(A)**

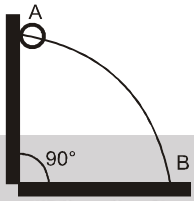
Sol.


$v_r = |2 \text{ v} \sin \theta)| = |2v \sin \omega t)|$



3. A wire, which passes through the hole is a small bead, is bent in the form of quarter of a circle. The wire is fixed vertically on ground as shown in the figure. The bead is released from near the top of the wire and it slides along the wire without friction. As the bead moves from A to B, the force it applies on the wire is

एक तार जो एक छोटे मोती के मध्य में स्थित छिद्र से गुजरता है, को एक चतुर्थांश वृत्त के अनुरूप मोड़ा गया है। तार को भूमि पर ऊर्ध्व तल में स्थित किया गया है जैसा चित्र में दर्शाया गया है। मोती को तार के ऊपरी सिरे से छोड़ा जाता है, जिससे यह तार के अनुदिश बिना किसी घर्षण के सरकता है। जब मोती A से B तक सरकता है, तब इसके द्वारा तार पर लगने वाला बल है **[JEE (Advanced)-2014, 3/60, –1]**



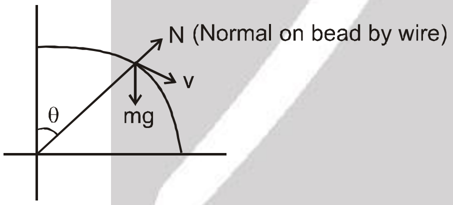
(A) always radially outwards
(B) always radially inwards
(C) radially outwards initially and radially inwards later
(D*) radially inwards initially and radially outwards later.
(A) हमेशा त्रिज्य दिशा में बहिर्मुखी (radially outwards)
(B) हमेशा त्रिज्य अन्तर्मुखी (radially inwards)
(C) प्रारम्भ में त्रिज्य दिशा में बहिर्मुखी तत्पश्चात् त्रिज्य दिशा में अन्तर्मुखी
(D*) प्रारम्भ में त्रिज्य दिशा में अन्तर्मुखी तत्पश्चात् त्रिज्य दिशा में बहिर्मुखी

Ans. (D)

Sol. Using conservation of energy : $mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2$

Radial force Equation : $mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$

$\Rightarrow N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R} = mg(3\cos\theta - 2)$



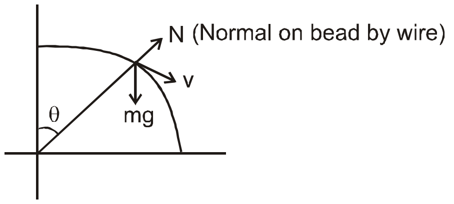
Normal act radially outward on bead if $\cos\theta > \frac{2}{3}$

Normal radially inward on bead if $\cos\theta < \frac{2}{3}$

$\therefore$ Normal on ring is opposite to reaction on bead.

HINDI: ऊर्जा संरक्षण से : $mgR\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2$

त्रिज्यीय बल समीकरण : $mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R} = mg\,(3\cos\theta - 2)$



मोती पर अभिलम्ब त्रिज्य बाहर की ओर होगा यदि $\cos\theta > \frac{2}{3}$

मोती पर अभिलम्ब त्रिज्य बाहर की ओर होगा यदि $\cos\theta < \frac{2}{3}$

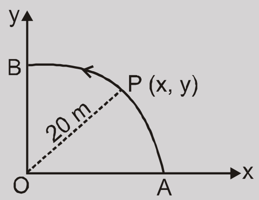
$\therefore$ मोती पर प्रतिक्रिया वलय पर अभिलम्ब के विपरीत है

PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. A point P moves in counter-clockwise direction on a circular path as shown in the figure. The movement of 'P' is such that it sweeps out a length $s = t^3 + 5$, where s is in metres and t is in seconds. The radius of the path is 20 m. The acceleration of 'P' when t = 2 s is nearly. **[AIEEE - 2010, 4/144]**

एक बिन्दु P एक वृत्तीय पथ पर वामावर्ती दिशा में गतिशील है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। 'P' की गति इस प्रकार है कि वह लम्बाई $s = t^3 + 5$ घेरता है, जहाँ s मीटर में है और t सेकण्ड में है। पथ की त्रिज्या 20 m है। जब t = 2 s, तब 'P' का त्वरण लगभग है



(1) 13 m/s² (2) 12 m/s² (3) 7.2 m/s² (4*) 14 m/s²

Sol. $S = t^3 + 5$

Linear speed of the particle

कण की रैखीय चाल

$$v = \frac{dS}{dt} = 3t^2$$

at t = 2 s पर $v = (3 \times 2^2)$ m/s = 12 m/s

Linear acceleration रैखीय त्वरण

$$a_1 = \frac{dv}{dt} = 6t$$

at t = 2 s, पर $a_1 = 12\ m/s^2$

The centripetal acceleration अभिकेन्द्रीय त्वरण

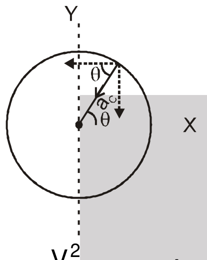
$$a_2 = \frac{v^2}{R} = \frac{12^2}{20}\ m/s^2 = 7.2\ m/s^2$$

$$\therefore \quad a_{net}\ a_{\text{परिणामी}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{12^2 + 7.2^2} = 14\ m/s^2$$

2. For a particle in uniform circular motion, the acceleration $\vec{a}$ at a point P (R, θ) on the circle of radius R is (Here θ is measured from the x-axis) **[AIEEE - 2010, 4/144]**
एकसमान वृत्तीय गति कर रहे कण के लिए, त्रिज्या R के वृत्त पर स्थित बिन्दु P (R, θ) के लिए त्वरण $\vec{a}$ है।
(यहाँ θ, x-अक्ष से मापा गया है)

(1) $-\frac{v^2}{R}\cos\theta\,\hat{i} + \frac{v^2}{R}\sin\theta\,\hat{j}$ (2) $-\frac{v^2}{R}\sin\theta\,\hat{i} + \frac{v^2}{R}\cos\theta\,\hat{j}$

(3*) $-\frac{v^2}{R}\cos\theta\,\hat{i} - \frac{v^2}{R}\sin\theta\,\hat{j}$ (4) $\frac{v^2}{R}\hat{i} + \frac{v^2}{R}\hat{j}$

Sol.


$a_C = -\frac{V^2}{R}\cos\theta\,\hat{i} - \frac{V^2}{R}\sin\theta\,\hat{j}$

3. Two cars of masses m_1 and m_2 are moving in circles of radii r_1 and r_2, respectively. Their speeds are such that they make complete circles in the same time t. The ratio of their centripetal acceleration is :
द्रव्यमान m_1 एवं m_2 की दो कारें क्रमशः त्रिज्याऐं r_1 एवं r_2 के वृत्तों में गतिशील हैं। इनकी चाल इस प्रकार हैं कि वे एक समान समय t में सम्पूर्ण वृत्त की गति करती है। इनके अभिकेन्द्रीय त्वरण का अनुपात है:
[AIEEE 2012 ; 4/120, –1]

(1) $m_1 r_1 : m_2 r_2$ (2) $m_1 : m_2$ (3*) $r_1 : r_2$ (4) 1 : 1

Ans. **(3)**

Sol. They have same ω.
centripetal acceleration = $\omega^2 r$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega^2 r_1}{\omega^2 r_2} = \frac{r_1}{r_2}$

इनका ω समान है।
अभिकेन्द्रिय त्वरण = $\omega^2 r$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega^2 r_1}{\omega^2 r_2} = \frac{r_1}{r_2}$

4. A particle is moving with a uniform speed in a circular orbit of radius R in a central force inversely proportional to the n^{th} power of R. If the period of rotation of the particle is T, then :

(1*) $T \alpha R^{(n+1)/2}$ (2) $T \alpha R^{n/2}$ (3) $T \alpha R^{3/2}$ For any n. (4) $T \alpha R^{\frac{n}{2}+1}$

एक कण R त्रिज्या के एक वृत्ताकार पथ पर किसी एक केन्द्रिय बल जो कि R की n वीं घात के व्युत्क्रमानुपाती है, के अतंर्गत घूमता है। यदि कण का आवर्त काल T हो, तो : **[JEE (Main) 2018; 4/120, –1]**

(1*) $T \alpha R^{(n+1)/2}$ (2) $T \alpha R^{n/2}$

(3) $T \alpha R^{3/2}$ (n के किसी भी मान के लिए) (4) $T \alpha R^{\frac{n}{2}+1}$

Ans. **(1)**

Sol. $F = \frac{k}{R^n} = m\omega^2 R$

$\omega^2 \alpha \frac{1}{R^{n+1}} \Rightarrow \;\therefore\; T = \frac{2\pi}{\omega}$ So इसलिये $T \alpha R^{\frac{n+1}{2}}$

5. A particle is moving in a circular path of radius a under the action of an attractive potential $U = -\frac{k}{2r^2}$. Its total energy is : **[JEE (Main) 2018; 4/120, –1]**

(1*) zero (2) $-\frac{3}{2}\frac{k}{a^2}$ (3) $-\frac{k}{4a^2}$ (4) $\frac{k}{2a^2}$

एक कण किसी एक आकर्षण विभव $U = -\frac{k}{2r^2}$ के अंतर्गत त्रिज्या a के एक गोलाकार पथ में चल रहा है उसकी कुल ऊर्जा होगी–

(1) शून्य (2) $-\frac{3}{2}\frac{k}{a^2}$ (3) $-\frac{k}{4a^2}$ (4) $\frac{k}{2a^2}$

Sol. $U = -\frac{K}{2r^2}$

$F = -\frac{du}{dr} = -\left(-\frac{K}{2}\left(-\frac{2}{r^3}\right)\right) = -\frac{K}{r^3}$

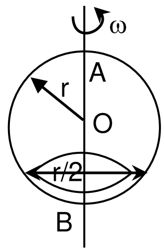
$\frac{K}{r^3} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow mv^2 = \frac{K}{r^2}$

K.E. $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{K}{2r^2}$

E = P.E. + K.E. = 0

6. A smooth wire of length $2\pi r$ is bent into a circle and kept in a vertical plane. A bead can slide smoothly on the wire. When the circle is rotating with angular speed ω about the vertical diameter AB, as shown in figure, the bead is at rest with respect to the circular ring at position P as shown. Then the value of ω^2 is equal to : **[JEE (Main) 2019; 4/120, –1]**

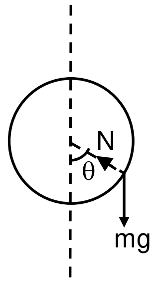
$2\pi r$ लम्बाई के एक घर्षण रहित तार को वृत्त बनाकर ऊर्ध्वाधर समतल में रखा है। एक मणिका (bead) इस तार पर फिसलती है। वृत्त को एक ऊर्ध्वाधर अक्ष AB के परितः चित्रानुसार कोणीय वेग ω से घुमाया जाता है तो वृत्त के सापेक्ष मणिका चित्रानुसार बिन्दु P पर स्थिर पायी जाती है। ω^2 का मान होगा:



(1) $\frac{2g}{r}$ (2) $\frac{\sqrt{3}\,g}{2r}$ (3) $\frac{(g\sqrt{3})}{r}$ (4) $\frac{2g}{r\sqrt{3}}$

Ans. **(4)**

Sol.



$\theta = 30^\circ$

$N \sin 30^\circ = m\omega^2 \dfrac{r}{2}$

$N \cos 30^\circ = mg$

$\tan 30^\circ = \dfrac{\omega^2 r}{2g} \quad \omega^2 = \dfrac{2g}{\sqrt{3}r}$

7. A spring mass system (mass m, spring constant k and natural length ℓ) rests in equilibrium on a horizontal disc. The free end of the spring is fixed at the centre of the disc. If the disc together with spring mass system, rotates about it's axis with an angular velocity ω, ($k >> m\omega^2$) the relative change in the length of the spring is best given by the option :

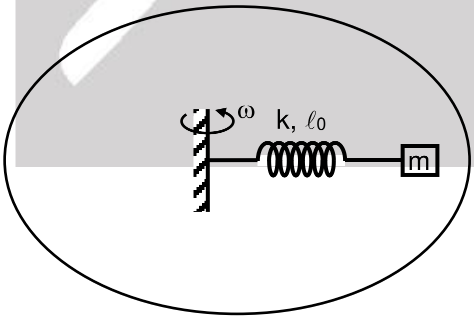
एक कमानी द्रव्यमान (spring mass) निकाय (द्रव्यमान m, कमानी स्थिरांक k और प्राकृतिक लम्बाई ℓ) संतुलित अवस्था में एक क्षैतिज डिस्क पर रखा हुआ है। कमानी का खाली सिरा डिस्क के केन्द्र पर अबाद्ध है। यदि अब डिस्क को इस कमानी द्रव्यमान निकाय के सथ्ज्ञ इसके अक्ष के चारों ओर ω, ($k >> m\omega^2$) कोणीय वेग से घुमाया जाय तो ℓ के सापेक्ष कमानी की लम्बाई में बदलाव के लिये कौनसा विकल्प सर्वश्रेष्ठ है ?

[JEE (Main) 2020, 09 January; 4/100, –1]

(1) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\dfrac{m\omega^2}{k}\right)$ (2) $\dfrac{m\omega^2}{3k}$ (3) $\dfrac{2m\omega^2}{k}$ (4) $\dfrac{m\omega^2}{k}$

Ans. (4)

Sol.



$m\omega^2(\ell_0 + x) = kx$

$\left(\dfrac{\ell_0}{x} + 1\right) = \dfrac{k}{m\omega^2} \quad x = \dfrac{\ell_0 m\omega^2}{k - m\omega^2}$

$k >> m\omega^2$

So, $\dfrac{x}{\ell_0}$ is equal to $\dfrac{m\omega^2}{k}$. अतः $\dfrac{x}{\ell_0}$, $\dfrac{m\omega^2}{k}$ के बराबर है

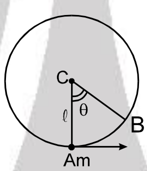
High Level Problems (HLP)

SUBJECTI VE QUESTIONS

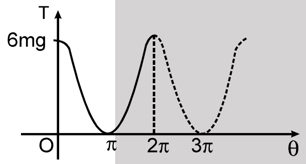
विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. A particles of mass m is attached at one end of a light, inextensible string of length ℓ whose other end is fixed at the point C. At the lowest point the particle is given minimum velocity to complete the circular path in the vertical plane. As it moves in the circular path the tension in the string changes with θ. θ is defined in the figure. As θ varies from '0' to '2π' (i.e. the particle completes one revolution) plot the variation of tension 'T' against 'θ'.

द्रव्यमान m का एक कण एक हल्की, अवितान्य ℓ लम्बाई की डोरी के एक सिरे से जुड़ा है जिसका दूसरा सिरा बिन्दु C पर स्थित है। निम्नतम बिन्दु पर कण को ऊर्ध्वाधर तल में वृत्ताकार पथ पूर्ण करने के लिए न्यूनतम वेग दिया जाता है। जैसे–जैसे यह वृत्ताकार पथ में गति करता है, डोरी में तनाव कोण θ के साथ परिवर्तित होता है। θ चित्रानुसार परिभाषित है। जब θ शून्य से '2π' (अर्थात् कण एक परिक्रमा पूरा करता है।) तक परिवर्तित होता है तो तनाव 'T' में 'θ' के साथ परिवर्तन का आरेख बनाओ।



Ans.



Sol. By Newton's law at B

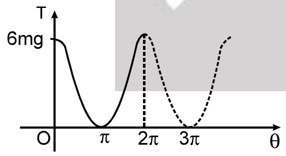
B पर न्यूटन के नियम से

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{\ell}$$

By energy conservation b/w A and B

A व B के मध्य ऊर्जा संरक्षण से

$$mg\ell(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(5\ell g)$$



$mv^2 = m\,5\ell g - 2mg\ell(1 - \cos\theta)$

$T = mg\cos\theta + m\,5\,g - 2mg(1 - \cos\theta)$

$= 3\,mg + 3\,mg\cos\theta$

$= 3mg\,(1 + \cos\theta) = 6\,mg\cos^2(\theta/2)$

2. A person stands on a spring balance at the equator. (a) By what percentage is the balance reading less than his true weight ? (b) If the speed of earth's rotation is increased by such an amount that the balance reading is half the true weight, what will be the length of the day in this case ?
विषुवत रेखा पर स्थित कमानीदार तुला पर एक व्यक्ति खड़ा हुआ है। (a) तुला उसके वास्तविक भार का कितना प्रतिशत कम पाठयांक दर्शायेगी ? (b) यदि पृथ्वी के घूर्णन की चाल का मान इतना बढ़ा दिया जाये कि तुला का पाठयांक उसके वास्तविक भार का आधा रह जाये तो इस स्थिति में दिन की अवधि कितनी होगी ?

[Ans : (a) $\frac{\omega^2 R}{g} \times 100 =$ **0.34% ,** **(b)** $2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$ = **2.0 hour]**

Sol. (a) at equator भूमध्य पर

$T + m\omega^2 R = mg.$

$\% \ \frac{\Delta T}{T} = \frac{\omega^2 R}{g}$

$= \left(\frac{4\pi^2 \times 6400 \times 1000}{(24 \times 60 \times 60)^2 \times 9.8}\right) \times 100 = 0.34\ \%$ **Ans.**

(b) $T = \frac{mg}{2}$ ....(1)

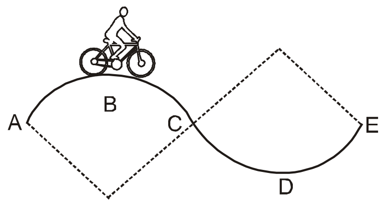
$T + m\omega^2 R = mg$ ....(2)

from (1) and (2) समीकरण (1) व (2) से

$\omega^2 R = g/2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 2hr$ **Ans.**

3. A track consists of two circular parts ABC and CDE of equal radius 100 m and joined smoothly as shown in fig. Each part subtends a right angle at its centre. A cycle weighing 100 kg together with the rider travels at a constant speed of 18 km/h on the track. (a) Find the normal contact force by the road on the cycle when it is at B and D. (b) Find the force of friction exerted by the track on the tyres when the cycle is at B, C and D. (c) Find the normal force between the road and the cycle just, before and just after the cycle crosses C. (d) What should be the minimum friction coefficient between the road and the tyre, which will ensure that the cyclist can move with constant speed ? Take g = 10m/s^2.
जैसा कि चित्र में प्रदर्शित किया गया है कि 100 m की समान त्रिज्या के दो वृत्ताकार भागों ABC तथा CDE को जोड़कर एक पथ बनाया गया है। प्रत्येक भाग केन्द्र पर समकोण अंतरित करता है। एक साईकिल जिसका सवार सहित भार 100 kg है, इस पथ पर 18 km/h की नियत चाल से गति कर रही है (a) जब साईकिल B व D पर है, तब इस पर सड़क के द्वारा अभिलम्बवत् सम्पर्क बल ज्ञात कीजिए। (b) B, C तथा D पर सड़क के द्वारा साईकिल के टायर पर लगाया गया घर्षण बल ज्ञात कीजिए। (c) साइकिल के C बिन्दु को पार करने के तुरन्त पहले तथा तुरंत पश्चात् साइकिल तथा सड़क के मध्य अभिलम्बवत् बल ज्ञात कीजिए। (d) साइकिल तथा सड़क के मध्य घर्षण गुणांक का न्यूनतम मान कितना होना चाहिए, जिससे साइकिल नियत चाल से गति कर सके ? (g = 10m/s^2)



Ans : (a) 975N, 1025 N , (b) 0,707N, 0 , (c) 682N , 732 N , (d) 1.037

Sol. Constant speed नियत चाल = 18 km/hr = 5m/sec.
m = 100 kg, r = 100 m

(a) at B पर $mg - N_B = \frac{mv^2}{r} = \frac{100 \times 5^2}{100} = 25$

$N_B = 975$ N **Ans.**

at D पर $N_D - mg = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow N_D = 1025$ N **Ans.**

(b) at B & D friction force act is zero.
B व D पर कार्यशील घर्षण बल शून्य होगा

at C पर $\Rightarrow f = mg \sin 45 = 100 \times 10 \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because$ v = constant नियतांक)

= 707 N **Ans.**

(c) for BC part
BC भाग के लिए

$mg \cos 45 - N_{BC} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N_{BC} = 682$ N

for CD part
CD भाग के लिए

$N_{CD} - mg \cos 45 = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N_{CD} = 732$ N

(d) $f \le \mu N \Rightarrow \mu \ge \frac{f}{N}$

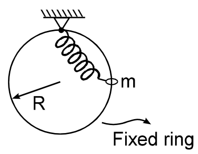
position where its maximum and N is minimum which is in part BC at C position.
स्थिति जहाँ पर यह अधिकतम है और N न्यूनतम है, वह BC भाग में C स्थिति पर होगी।

$\mu \ge \frac{mg\sin 45^o}{mg\cos 45^o - \frac{mv^2}{r}} \Rightarrow \mu \ge \frac{707}{682} = 1.037$ **Ans. (in di)**

4. A ring of radius R is placed such that it lies in a vertical plane. The ring is fixed. A bead of mass m is constrained to move along the ring without any friction. One end of the spring is connected with the mass m and other end is rigidly fixed with the topmost point of the ring. Initially the spring is in un-extended position and the bead is at a vertical distance R from the lowermost point of the ring. The bead is now released from rest.
एक R त्रिज्या की वलय को ऊर्ध्वाघर तल में रखा गया है। वलय स्थिर अवस्था में है। m द्रव्यमान का एक मनका वलय की परिधि में बिना घर्षण के गति कर सकता है। स्प्रिंग का एक सिरा मनके से तथा दूसरा सिरा वलय के साथ उच्चतम बिन्दु जहाँ वलय स्थिर है, से जोड़ा जाता है। प्रारम्भ में स्प्रिंग अविस्तारित है तथा मनका वलय के निम्नतम बिन्दु से ऊर्ध्वाधर R दूरी पर है। अब मनके को विराम से छोड़ा जाता है।

(a) What should be the value of spring constant K such that the bead is just able to reach bottom of the ring.
K स्प्रिंग नियतांक का मान क्या होगा ताकि मनका वलय के निम्नतम बिन्दु पर पहुँच सके।

(b)The tangential and centripetal accelerations of the bead at initial and bottommost position for the same value of spring constant K.
K के इसी मान के लिए मनके के स्पर्श रेखीय तथा त्रिज्यीय त्वरण, प्रारम्भिक तथा निम्नतम बिन्दु स्थिति के लिए क्या होंगे।



Ans. (a) $K = \frac{mg}{R\ (3 - 2\sqrt{2})}$ (b) at intial instant $a_t = g$, $a_c = 0$

at bottommost position $a_t = 0$ $a_c = 0$

Sol. (a) Applying conservation of energy between initial and final position is
Loss in gravitational P.E. of the bead of mass m = gain in spring P. E.

$\therefore \quad mg\,R = \frac{1}{2}\,K\,(2R - \sqrt{2}\,R)^2$

or $\quad K = \frac{mg}{R\ \ (3-2\sqrt{2})}$

(b) At $\quad t = 0$
$a_t = g$
$a_c = 0$
at lowest point
$a_t = 0$
$a_c = 0$
The centripetal acceleration of bead at the initial and final position is zero because its speed at both position is zero.
The tangential acceleration of the bead at initial position is g.
The tangential acceleration of the bead at lower most position is zero.

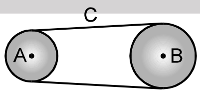
Sol. (a) प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति के मध्य ऊर्जा संरक्षण नियम लगाने पर
m द्रव्यमान के मनके की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में कमी = स्प्रिंग की P.E. में वृद्धि

$\therefore \quad mg\,R = \frac{1}{2}\,K\,(2R - \sqrt{2}\,R)^2$

या $\quad K = \frac{mg}{R\ \ (3-2\sqrt{2})}$

(b) $\quad t = 0$ पर
$a_t = g$
$a_c = 0$
न्यूनतम बिन्दु पर
$a_t = 0$
$a_c = 0$
प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति पर मनके का अभिकेन्द्रीय त्वरण शून्य है क्योंकि दोंनो स्थितियों पर चाल शून्य है।
प्रारम्भिक स्थिति पर मनके का स्पर्शरेखीय त्वरण g है।
न्यूनतम स्थिति पर मनके का स्पर्शरेखीय त्वरण शून्य है।

5. Wheel A of radius r_A = 10cm is coupled by a belt C to another wheel of radius r_B = 25 cm as in the figure. The belt does not slip. At time t = 0 wheel A increases it's angular speed from rest at a uniform rate of $\pi/2$ rad/sec^2. Find the time in which wheel B attains a speed of 100 rpm (wheel are fixed).
r_A = 10cm त्रिज्या का एक पहिया A, r_B = 25 cm त्रिज्या के अन्य पहिये से बेल्ट C की सहायता से चित्रानुसार युग्मित किया जाता है। बेल्ट फिसलती नहीं है। t = 0 पर पहिया $\pi/2$ rad/sec^2 की एक समान चाल से विरामावस्था से इसकी कोणीय चाल को बढ़ाता है। किस समय पहिया B,100 rpm की चाल प्राप्त कर लेगा। (पहिया स्थिर (fixed) है)



Ans. 50/3 sec.
Sol. Since belt is not slipping, speed at rim of A and B is same
चूंकि बेल्ट फिसलती नहीं है A तथा B की रिम पर चाल समान है

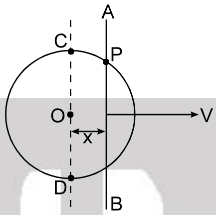
$\omega_A r_A = \omega_B r_B$

$\omega_A = 100 \times \frac{25}{10} = 250 \text{ rpm} = 250 \times \frac{2\pi}{60}\text{ rad/sec.} = \frac{25\pi}{3}\text{ rad/sec.}$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$t = \frac{\frac{25\pi}{3} - 0}{\pi/2} = \frac{50}{3}\text{ sec.}$

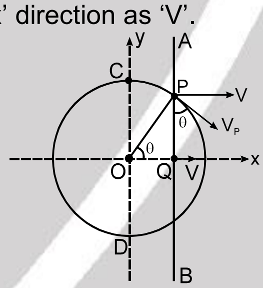
6. A rod AB is moving on a fixed circle of radius R with constant velocity 'v' as shown in figure. P is the point of intersection of the rod and the circle. At an instant the rod is at a distance $x = \frac{3R}{5}$ from centre of the circle. The velocity of the rod is perpendicular to the rod and the rod is always parallel to the diameter CD.
चित्रानुसार एक छड़ AB, R त्रिज्या के स्थिर वृत्त पर नियत वेग 'v' से गति कर रही है। वृत्त तथा छड़ का प्रतिच्छेदन बिन्दु P है। किसी क्षण वृत्त के केन्द्र से छड़ की दूरी $x = \frac{3R}{5}$ है। छड़ का वेग छड़ के लम्बवत् है तथा छड़ व्यास CD के समान्तर है।



(a) Find the speed of point of intersection P.
प्रतिच्छेदन बिन्दु P की चाल ज्ञात करो।
(b) Find the angular speed of point of intersection P with respect to centre of the circle.
प्रतिच्छेदन बिन्दु P की वृत्त के केन्द्र के सापेक्ष कोणीय चाल ज्ञात करो।

Ans. (a) $V_P = \frac{5}{4} V$ (b) $\omega = \frac{V_P}{R} = \frac{5V}{4R}$

Sol. (a)
As a rod AB moves, the point 'P' will always lie on the circle.
$\therefore$ its velocity will be along the circle as shown by 'V_P' in the figure.
If the point P has to lie on the rod 'AB' also then it should have component in 'x' direction as 'V'.



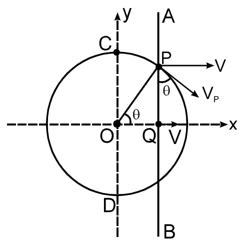
$\therefore$ $V_P \sin\theta = V$ $\Rightarrow$ $V_P = V \operatorname{cosec}\theta$

here $\cos\theta = \frac{x}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{3R}{5} = \frac{3}{5}$

$\therefore$ $\sin\theta =$ $\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta =$

$\therefore$ $V_P = \frac{5}{4} V$ **...Ans.**

हल (a) जब छड़ AB गति करेगी, बिन्दु 'P' हमेशा वृत्त पर स्थित होगा।
$\therefore$ चित्रानुसार इसका वेग 'V_P' वृत्त के अनुदिश होगा। यदि बिन्दु P छड़ 'AB' पर स्थित होगा तो इसका 'x' दिशा में घटक 'V' होना चाहिए।



$\therefore$ $V_P \sin\theta = V$ $\Rightarrow$ $V_P = V \operatorname{cosec}\theta$

यहाँ $\cos\theta = \frac{x}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{3R}{5} = \frac{3}{5}$

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{4}{5} \qquad \therefore \text{cosec}\,\theta = \frac{5}{4}$

$\therefore \quad V_P = \frac{5}{4}\,V$ **...Ans.**

Sol. (b) $\omega = \frac{V_P}{R} = \frac{5V}{4R}$

ALTERNATIVE SOLUTION : वैकल्पिक हल

Sol. (a) Let 'P' have coordinate (x, y)

माना 'P' के निर्देशांक (x, y)

$x = R\cos\theta,\ y = R\sin\theta.$

$V_X = \frac{dx}{dt} = -R\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} = V \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{-V}{R\sin\theta}$

तथा and $\quad V_Y = R\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = R\cos\theta\left(-\frac{V}{R\ \sin\theta}\right) = -V\cot\theta$

$\therefore \quad V_P = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V^2 + V^2\cot^2\theta} = V\,\text{cosec}\,\theta$ **...Ans.**

Sol. (b) $\omega = \frac{V_P}{R} = \frac{5V}{4R}$

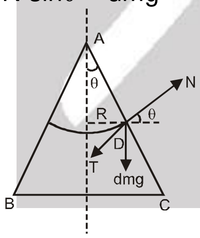
7. A chain of mass m forming a circle of radius R is slipped on a smooth round cone with half-angle θ. Find the tension of the chain if it rotates with a constant angular velocity ω about a vertical axis coinciding with the symmetry axis of the cone.

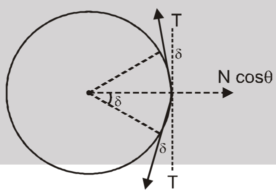
m द्रव्यमान की एक जंजीर जो R त्रिज्या के वृत्त का निर्माण करती है, एक अर्द्धकोण θ वाले एक चिकने शंकु के चारों ओर से फिसल रही है। जंजीर में तनाव ज्ञात करो यदि यह ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष नियत कोणीय वेग ω से शंकु के सममित अक्ष के अनुदिश घूर्णन करती है।

[Ans : T = (cotθ + ω²R / g) mg / 2π]

Sol. Taking a small element at D D पर एक छोटा अवयव लेने पर

$N\sin\theta = dmg$





$N = \frac{dmg}{\sin\theta}$

$2T\sin\delta - N\cos\theta = dm\omega^2R$

$2T\sin\delta = dm(\omega^2R + g\cot\theta)$

But δ is very small, $\sin\delta$ δ लेकिन δ बहुत छोटा है अतः $\sin\delta$ δ

$2T\,\delta = \frac{md\ell}{2\pi R}(\omega^2R + g\cot\theta)$

$2T\left(\frac{d\ell}{2R}\right) = \frac{md\ell}{2\pi R}(\omega^2R + g\cot\theta)$

$T = \frac{mg}{2\pi}\left(\frac{\omega^2R}{g} + \cot\theta\right).$

8. A small sphere of mass m suspended by a thread is first taken aside so that the thread forms the right angle with the vertical and then released, then :
m द्रव्यमान के छोटे गोले को धागे से बांधकर लटकाया गया है। इसको पहले एक ओर इतना विस्थापित किया जाता है कि धागा ऊर्ध्व से समकोण बनाता है फिर इसको छोड़ दिया जाता है, तो–

(i) Find the total acceleration of the sphere and the thread tension as a function of θ, (the angle of deflection of the thread from the vertical)
गोले का कुल त्वरण तथा धागे में तनाव, θ के फलन के रूप में क्या होगा। (θ = धागे द्वारा ऊर्ध्व से बनाया गया कोण)

Ans. $g\sqrt{1+3\cos^2\theta}$, $T = 3mg\cos\theta$

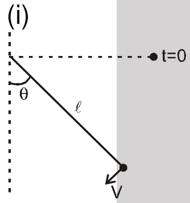
(ii) Find the angle θ between the thread and the vertical at the moment when the total acceleration vector of the sphere is directed horizontally
जब कुल त्वरण सदिश क्षैतिज दिशा में हो तो धागे एवं उर्ध्व के मध्य कोण θ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(iii) Find the thread tension at the moment when the vertical component of the sphere's velocity is maximum
जब गोले के वेग का ऊर्ध्वाधर घटक अधिकतम हो तो धागे में तनाव ज्ञात कीजिए।

Ans. $mg\sqrt{3}$

Sol. (i)



at θ angle θ कोण पर $a_t = g\sin\theta$

from centripetal acceleration अभिकेन्द्रीय त्वरण से

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{\ell} \qquad ...(1)$$

From energy conservation : ऊर्जा संरक्षण से

$$0 + mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2g\ell\cos\theta} \qquad ....(2)$$

from (1) & (2) (1) व (2) से

$T = 3mg\cos\theta$

$a_C = 2g\cos\theta$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = g\sqrt{1+3\cos^2\theta}$

(ii) Vertical component of sphere velocity is maximum when acceleration in vertical is zero that means net force in vertical direction is zero.
गोले के वेग का उर्ध्वघटक अधिकतम होगा जब उर्ध्व त्वरण शून्य होगा, अर्थात् उर्ध्व दिशा में कुल बल शून्य होगा

Net force in vertical at θ angle θ कोण पर उर्ध्व दिशा में कुल बल

$$T\cos\theta = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad ...(3)$$

and tension also from equation समीकरण से तनाव

$$T = 3mg\cos\theta \qquad ....(4)$$

from (3) & (4) से

$$3\,mg\cos\theta = \frac{mg}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$T = mg\sqrt{3}$ **Ans.**

(iii) Total acceleration is directed along horizontal that means $a_{vertical} = 0$
कुल त्वरण क्षैतिज दिशा में है, अर्थात् $a_{vertical} = 0$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \textbf{Ans.}$$

9. Find the magnitude and direction of the force acting on the particle of mass m during its motion in the plane xy according to the law $x = a \sin \omega t$, $y = b\cos \omega t$, where a, b and ω are constants.
xy तल में m द्रव्यमान के कण की गति के दौरान कण पर नियम x = a sint, y = bcost (जहाँ a,b और ω नियतांक है) के अनुसार लगने वाले बल का परिमाण और दिशा ज्ञात करो।

[Ans : $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$, where $\vec{r}$ is the radius vector of the particle relative to the origin of coordinates; $F = m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$]

[Ans : : $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$, जहाँ $\vec{r}$, मूल बिन्दु के निर्देशांक के सापेक्ष कण का त्रिज्य सदिश है।
$\mathbf{F = m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}}$ **]**

Sol. $\vec{F} = m\vec{a}$ or $\vec{F} = m(\vec{a}_x + \vec{a}_y)$ $(\because\ a_2 = 0)$

$x = a \sin \omega t$

$v_x = \dfrac{dx}{dt} = a w \cos(\omega t)$

$a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t)$

$v_y = \dfrac{dy}{dt} = -b\,\omega \sin(\omega t)$

$a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = -b\,\omega^2 \cos(\omega t)$

So अतः $\vec{F} = m(-a\omega^2 \sin\omega t\,\hat{i} - b\omega^2 \cos\omega t\,\hat{j})$

$\vec{F} = -m\omega^2(a\sin\omega t\,\hat{i} + b\cos\omega t\,\hat{j})$

$\vec{F} = -m\omega^2(x\hat{i} + y\hat{j})$

$|\vec{F}| = m\omega^2\sqrt{x^2+y^2}$

direction दिशा $\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{b}{a}\cot(\omega t)$ (from x-axis) (x-अक्ष से)

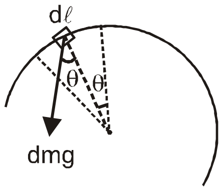
or या $[(x\hat{i} + y\hat{j})]$ is position vector of the particle in corrdinate system. Because of negative sign force is opposite to it and always acting towards the orzon.
$[(x\hat{i} + y\hat{j})]$ निर्देशांक निकाय में कण का स्थिति सदिश है। ऋणात्मक चिन्ह के कारण बल इसकी विपरीत दिशा में है तथा सदैव मूल बिन्दु की ओर कार्यरत है।

10. A chain of length ℓ is placed on a smooth spherical surface of radius R with one of its ends fixed at the top of the sphere. What will be the acceleration a of each element of the chain when its upper end is released? It is assumed that the length of the chain $\ell < \frac{1}{2}\pi R$
ℓ लम्बाई की एक जंजीर, R त्रिज्या की चिकनी गोलीय सतह पर रखी हुई है तथा इसका एक सिरा गोले के ऊपरी सतह पर है। जंजीर के प्रत्येक अवयव का त्वरण a क्या होगा जब इसके ऊपरी सिरे को छोड़ा जाता है। यह मानिए कि जंजीर की लम्बाई $\ell < \frac{1}{2}\pi R$

[Ans : a = [1 – cos(ℓ/R)] Rg/ℓ]

Sol. Net tangential force acting on the element due to gravity is
गुरूत्व के कारण अवयव पर कार्यरत कुल स्पर्श रेखीय बल

d mg $\sin\theta$ है



Total external force on chain along the length is
जंजीर पर लम्बाई के अनुदिश कुल बाह्य बल

$$F = \int dmg\sin\theta$$

$$F = \int_0^{\ell/R} \frac{m}{\ell} g\sin\theta \; R \; d\theta$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{gR}{\ell}\int_0^{\ell/R} \sin\theta \, d\theta$$

$$a = \frac{gR}{\ell}\left[-\cos\theta\right]_0^{\ell/R}$$

$$a = \frac{gR}{\ell}\left[1-\cos\left(\frac{\ell}{R}\right)\right]$$

11. A point moves in the plane so that its tangential acceleration ω_τ = a, and its normal acceleration ω_n= bt^4, where a and b are positive constants , and t is time. At the moment t = 0, the point was at rest. Find how the curvature radius R of the point's trajectory and the total acceleration ω depend on the distance covered s.
एक बिन्दु तल में गति करता है जिससे इसका स्पर्शरेखीय त्वरण ω_τ = a, तथा इसका अभिकेन्द्रीय त्वरण ω_n= bt^4 है , जहाँ a तथा b धनात्मक नियतांक है तथा t समय है। t = 0 समय पर बिन्दु विरामावस्था में था। पथ के बिन्दु की वक्रता त्रिज्या ओर कुल त्वरण ω की, तय की गई दूरी S के साथ निर्भरता ज्ञात करो।

[Ans : $R = a^3 / 2bs$, $\omega = a\sqrt{1+(4bs^2/a^3)^2}$]

Sol. $\omega_t = a$

So, अतः $v = at = \sqrt{2as}$

also, तथा $\omega_N = \dfrac{v^2}{R}$, $bt^4 = \dfrac{a^2t^2}{R}$, $t^2 = \dfrac{a^2}{bR}$

and तथा $bt^4 = \dfrac{2as}{R}$

$$b\left(\frac{a^2}{bR}\right)^2 = \frac{2as}{R}$$

$$R = \frac{a^3}{2bs}$$

$$\omega = \sqrt{{\omega_t}^2 + {\omega_N}^2} = (\because \omega_N = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2t^2}{R} = \frac{a^4}{bR^2})$$

$$\omega = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a^4}{bR^2}\right)^2}, \qquad \omega = a\sqrt{1+\left(\frac{4bS^2}{a^3}\right)^2}.$$

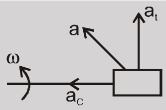
12. A block of mass m is kept on a horizontal ruler. The friction coefficient between the ruler and the block is $\mu = 0.5$. The ruler is fixed at one end and the block is at a distance L =1 m from the fixed end. The ruler is rotated about the fixed end in the horizontal plane through the fixed end. If the angular speed of the ruler is uniformly increased from zero at a constant angular acceleration $\alpha = 3$ rad/sec^2. Find the angular speed at which block will slip. (g = 10m/s^2)

एक क्षैतिज पट्टी पर m द्रव्यमान का एक पिण्ड रखा हुआ है। पट्टी तथा पिण्ड के मध्य घर्षण गुणांक μ=0.5 है। पट्टी को एक सिरे पर कीलकित किया गया है तथा इस सिरे से ब्लॉक की दूरी L =1m है। पट्टी को कीलकित सिरे के परितः क्षैतिज तल में घुमाया जाता है। यदि पट्टी की कोणीय चाल शून्य से नियत कोणीय त्वरण $\alpha = 3$ rad/sec^2 से एकसमान रूप से बढ़ायी जाये तो किस कोणीय चाल पर पिण्ड फिसल जायेगा। (g = 10m/s^2)

Ans : 2 rad/sec.

Sol. Angular velocity increase with constant angular acceleration α

कोणीय वेग, नियत कोणीय त्वरण α से वृद्धिमान है



$a_c = \omega^2 L$, $a_t = \alpha L$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\omega^2 L\right)^2 + (\alpha L)^2} \qquad ....(1)$$

for just slipping ठीक फिसलन के लिए $\Rightarrow$ ma = μmg

$\Rightarrow$ a = μg .... (2)

form (1) & (2) समीकरण (1) व (2) से

$$\mu g = \sqrt{\left(\omega^2 L\right)^2 + (\alpha L)^2}$$

$$\omega = \left[\left(\frac{\mu g}{L}\right)^2 - \alpha^2\right]^{1/4} \quad \textbf{Ans.}$$

ω = 2 rad/sec.

13. A particle moves along the plane trajectory y (x) with velocity v whose modulus is constant. Find the acceleration of the particle at the point x = 0 and the curvature radius of the trajectory at that point if the trajectory has the form

(a) of a parabola $y = ax^2$.

(b) of an ellipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$; a and b are constants here.

एक कण किसी तल में पथ y (x) के अनुदिश वेग v से गतिशील है, जिसका परिमाण नियत है। बिन्दु x = 0 पर कण का त्वरण तथा पथ वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए। यदि

(a) पथ की समीकरण परवलय $y = ax^2$ है।

(b) पथ की समीकरण दीर्घवृत्त $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ है ; जहाँ a तथा b नियत है।

Ans : (a) $\omega = 2av^2$, R = $\frac{1}{2a}$; (b) $\omega = bv^2 / a^2$, R = a^2 / b]

14. A particle moves in the plane xy with velocity v = a $\hat{i}$ + bx $\hat{j}$, where $\hat{i}$ and $\hat{j}$ are the unit vectors of the x and y axes and a and b are constants. At the initial moment of time the particle was located at the point x = y = 0. Find:

(a) the equation of the particle's trajectory y (x);

(b) the curvature radius of trajectory as a function of x.

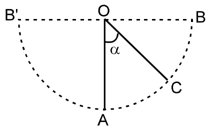
एक कण xy तल में वेग v = a $\hat{i}$ + bx $\hat{j}$ से गतिशील है, जहाँ $\hat{i}$ तथा $\hat{j}$ क्रमशः x तथा y अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश है एवं a तथा b नियत है। प्रारम्भिक क्षण पर कण बिन्दु x = y = 0 पर स्थित है। ज्ञात कीजिए।

(a) कण के पथ की समीकरण y (x);

(b) पथ की वक्रता त्रिज्या x के फलन के रूप में।

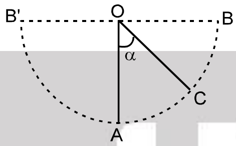
[Ans : (a) $y = (b/2a)y^2$, (b) $R = v^2 / \omega_n = v^2 / \sqrt{\omega^2 - \omega^2_\tau} = (a/b)\,[1 + (xb/a)^2]^{3/2}$]

15. A simple pendulum is vibrating with an angular amplitude of 90º as shown in the given figure. For what value of α, is the acceleration directed?



(i) vertically upwards
(ii) horizontally
(iii) vertically downwards

एक सरल लोलक कोणीय आयाम 90º से चित्र में दर्शाये अनुसार दोलन कर रहा है। α के किस मान के लिए त्वरण निर्देशित है



(i) ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर
(ii) क्षैतिज दिशा में
(iii) ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर

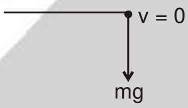
Ans. (i) 0º, (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, (iii) 90º

Sol. (i) At $\alpha = 0º$ पर

$$a_{net} = \frac{v^2}{R} \uparrow$$

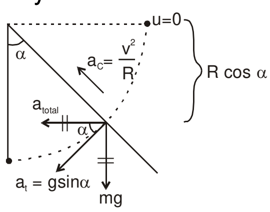
acceleration is vertically up
त्वरण ऊपर की ओर

(ii) At $\alpha = 90º$ is at B
$\alpha = 90º$ पर B



Acceleration is vertically down.
त्वरण ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर

(iii) Horizontally क्षैतिज में



$$\tan\alpha = \frac{v^2/R}{g\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad g\sin\alpha \,.\, \tan\alpha = \frac{v^2}{R} \qquad .....(1)$$

Using energy conservation :

ऊर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR\cos\alpha \qquad ....(2)$$

By (1) & (2)

(1) व (2) से

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

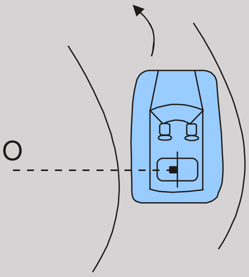
$$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

16. A car moving at a speed of 36 km/hr is taking a turn on a circular road of radius 50 m. A small wooden plate is kept on the seat with its plane perpendicular to the radius of the circular road (figure). A small block of mass 100g is kept on the seat which rests against the plate. The friction coefficient between the block and the plate is $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58$.

36 km/hr की चाल से गतिशील एक कार, 50 m त्रिज्या की वृत्ताकार सड़क पर मुड़ती है। इसकी सीट पर एक लकड़ी की प्लेट इस प्रकार रखी हुई है कि प्लेट का तल, वृत्तीय सड़क की त्रिज्या के लम्बवत् है। सीट पर 100g द्रव्यमान का एक ब्लॉक रखा हुआ है जो कि प्लेट पर टिका हुआ है। (चित्र) प्लेट तथा ब्लॉक के मध्य घर्षण गुणांक $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58$. है।

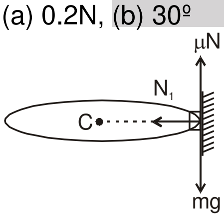
(a) Find the normal contact force exerted by the plate on the block.
प्लेट द्वारा ब्लॉक पर लगाया गया अभिलम्बवत् बल ज्ञात कीजिए।

(b) The plate is slowly turned so that the angle between the normal to the plate and the radius of the road slowly increases. Find the angle at which the block will just start sliding on the plate.
प्लेट को धीरे–धीरे इस प्रकार घुमाया जाता है कि प्लेट के अभिलम्ब तथा सड़क की त्रिज्या के मध्य कोण धीरे धीरे बढ़ता है। कोण का वह मान ज्ञात करिये जिसके लिये ब्लॉक प्लेट पर खिसकना शुरू कर देगा।



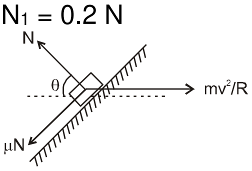
Ans : (a) 0.2N, (b) 30º

Sol.



(a) $N_1 = \frac{mv^2}{R} = \frac{1\times100}{10\times50}$

$N_1 = 0.2$ N



(b)

$N = \frac{mv^2}{R} \cos\theta$ ....(1)

for just slipping ठीक फिसलने के लिए

$\mu N = \frac{mv^2}{R} \sin\theta$ .....(2)

from eqn (1) & (2) समी० (1) व (2) से

$\tan\theta = \mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{0.58} = 1.724 \Rightarrow \theta = 30^\circ$ **Ans.**

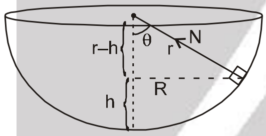
17. A hemispherical bowl of radius r = 0.1m is rotating about its axis (which is vertical) with an angular velocity ω. A particle of mass 10^{-2}kg on the frictionless inner surface of the bowl is also rotating with the same ω. the particle is at a height h from the bottom of the bowl. (a) Obtain the relation between h and ω. What is the minimum value of ω needed in order to have a nonzero value of h. (b) It is desired to measure 'g' using this setup by measuring h accurately. Assuming that r and ω are known precisely and that the least count in the measurement of h is 10^{-4} m. What is minimum error g in the measured value of g.[g = 9.8m/s²]

r = 0.1 मी. त्रिज्या का एक अर्धगोलाकार प्याला ω कोणीय वेग के साथ इसकी अक्ष (जो कि ऊर्ध्व है) के परितः घूम रहा है। प्याले की घर्षण रहित आंतरिक सतह पर 10^{-2} किग्रा द्रव्यमान का कण भी साथ में ω कोणीय चाल के साथ घूम रहा है। कण प्याले के पेंदे से h ऊंचाई पर है। (a) h एवं ω के मध्य सम्बन्ध स्थापित कीजिये। h के अशून्य मान के लिए ω का न्यूनतम मान कितना होना चाहिए ? (b) इस व्यवस्था में h का मान शुद्धता से मापकर हम g का मान ज्ञात करना चाहते हैं। मान लीजिये कि r एवं ω एकदम शुद्धता से ज्ञात है और h के मापन में अल्पतमांक 10^{-4} मी. है। g के मापे गये मान में न्यूनतम त्रुटि Δg कितनी है ? (g = 9.8 मी/से²)

Ans. (a) $7\sqrt{2}$ rad/s (b) -9.8 x 10^{-3} m/s²

(a) $7\sqrt{2}$ रेडियन/सैक० (b) -9.8 x 10^{-3} m/s²

Sol.



$$\frac{N\sin\theta = m\omega^2 R}{N\cos\theta = mg}$$

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{\omega^2 R}{g}$

$\Rightarrow \quad \frac{R}{r-h} = \frac{\omega^2 R}{g} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = g/(r-h)$ ......(1)

(a) $h > 0 \quad \Rightarrow \quad r - \frac{g}{\omega^2} > 0$

$\Rightarrow \quad \omega > \sqrt{g/r} = \sqrt{\frac{9.8}{0.1}} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ rad/second **Ans.**

(b) $g = \omega^2 (r-h)$

$\frac{\Delta g}{g} = -\frac{\Delta h}{h} = -\frac{10^{-4}}{h}$

maximum value of h is 0.1 so that $\Delta g = -\frac{g \times 10^{-4}}{h} = -9.8 \times 10^{-3}$ m/s² **Ans.**

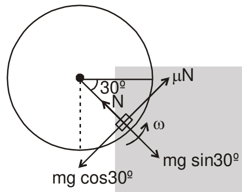
h का अधिकतम मान 0.1 है इसलिए $\Delta g = -\frac{g \times 10^{-4}}{h} = -9.8 \times 10^{-3}$ m/s² **Ans.**

18. A block is placed inside a horizontal hollow cylinder. The cylinder is rotating with constant angular speed one revolution per second about its axis. The angular position of the block at which it begins to slide is 30° below the horizontal level passing through the center. Find the radius of the cylinder if the coefficient of friction is 0.6. What should be the minimum constant angular speed of the cylinder so that the block reaches the highest point of the cylinder ?

एक ब्लॉक को खोखले क्षैतिज बेलन में रखा गया है। बेलन अपनी अक्ष के परितः एक चक्कर प्रति सेकण्ड की नियत कोणीय चाल से घूम रहा है। ब्लॉक केन्द्र से गुजरने वाले क्षैतिज तल से नीचे की ओर 30° कोण पर फिसलना प्रारम्भ कर देता है। यदि घर्षण गुणांक 0.6 है तो बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिये। बेलन की न्यूनतम नियत कोणीय चाल कितनी हो जिससे कि ब्लॉक बेलन के शीर्ष तक पहुंच सके ?

Ans. 0.24m, 8.9rad/sec रेडियन/सैक०

Sol.



$N - mg \sin 30º = m\omega^2 R$ .....(1)

$mg \cos 30º = \mu N$ .....(2)

$\omega = 2\pi$ rad/s

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}mg}{2} = \mu\left[\frac{mg}{2} + m\omega^2 R\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{2}(\sqrt{3} - \mu) = \omega^2 R$$

$$R = \frac{g \ (\sqrt{3} - \mu)}{2\omega^2} \qquad R = \frac{9.8 \ (\sqrt{3} - 0.6)}{2(2\pi)^2} = 0.24 \text{ m} \qquad \textbf{Ans.}$$

For minimum angular velocity, normal sould be zero at heighest point

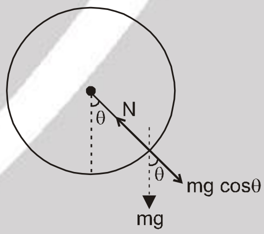
न्यूनतम कोणीय चाल के लिए, उच्चतम बिन्दु पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया शून्य होनी चाहिए।

$m\omega^2 R = mg$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.24}} = 6.4 \text{ rad/second}$$

Also, condition for which block will not slip on cylinder is

तथा शीर्ष जिसके लिए ब्लॉक बेलन पर नहीं फिसलेगा, है



$N - mg \cos\theta = m\omega^2 R$

$N = mg \cos\theta + m\omega^2 R$

$f_{r\,max} = \mu N = \mu(mg \cos\theta + m\omega^2 R)$

For the block does not slip over cylinder,

ब्लॉक के बेलन पर नहीं फिसलने पर

$mg \sin\theta \le f_{rmax}$

$mg \sin\theta \le \mu \, mg \cos\theta + \mu \, m\omega^2 R$

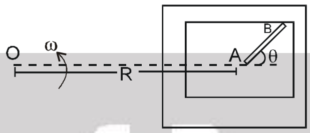
$$\omega \ge \frac{g\sin\theta - mg\cos\theta}{\mu R} \qquad \omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu R}(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

block will not shift anywhere if ω is greater than maximum possible value of RHS which is

ब्लॉक कहीं भी प्रतिस्थापित हो सकता है। यदि ω, RHS के अधिकतम सम्भव मान से अधिक है। RHS का मान है

$$\omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu R}(1+\mu^2)^{1/2}} \ ; \quad \omega \ge 8.9 \text{ rad/sec.} \ ; \qquad \omega_{min} = 8.9 \text{ rad/sec} .$$

19. A table with smooth horizontal surface is fixed in a cabin that rotates with a uniform angular velocity ω in a circular path of radius R (figure). A smooth groove AB of length L(< < R) is made on the surface of the table .The groove makes an angle θ with the radius OA of the circle in which the cabin rotates. A small particle is kept at the point A in the groove and is released to move along AB. Find the time taken by the particle to reach the point B.
चित्रानुसार एक केबिन R त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर एक समान कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रहा है, इस केबिन में चिकनी सतह की एक टेबल दृढ़ आधार पर रखी हुई है। टेबल की सतह में L लम्बाई (L< < R) का एक खांचा AB बनाया गया है। केबिन के वृत्तीय पथ की त्रिज्या OA से यह खांचा θ कोण बनाता है। खांचे में बिन्दु A पर एक छोटा कण रखकर AB के अनुदिश गति के लिये मुक्त कर दिया जाता है। कण को बिन्दु B तक पहुँचने में लगा समय ज्ञात करिये।



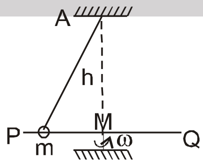
[Ans : $\sqrt{\dfrac{2L}{\omega^2 R\cos\theta}}$ **]**

Sol. Centripetal acceleration at A = ω^2R
acceleration along AB = $\omega^2R\cos\theta$
Time taken to reach the point B
A पर अभिकेन्द्रीय त्वरण = ω^2R
AB के अनुदिश त्वरण = $\omega^2R\cos\theta$
B बिन्दु तक पहुंचने में लिया गया समय

$L = 0 + \dfrac{1}{2}(\omega^2 R\cos\theta)t^2$ (L << R)

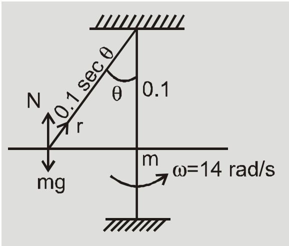
$t = \sqrt{\dfrac{2\ L}{\omega^2 R\cos\theta}}$ **Ans.**

20. A smooth rod PQ is rotated in a horizontal plane about its mid point M which is h = 0.1 m vertically below a fixed point A at a constant angular velocity 14 rad/s. A light elastic string of natural length 0.1 m requiring 1.47 N/cm has one end fixed at A and its other end attached to a ring of mass m = 0.3 kg which is free to slide along the rod. When the ring is stationary relative to rod, then find inclination of string with vertical, tension in string, force exerted by ring on the rod. (g = 9.8 m/s^2)
एक चिकनी छड़ PQ, इसके मध्य बिन्दु M के परितः नियत कोणीय वेग 14 रेडियन/से. के साथ क्षैतिज तल में घूमती है। बिन्दु M एक स्थिर बिन्दु A से h = 0.1 मी ऊर्ध्वाधर नीचे है। एक प्रत्यास्थ एवं हल्की डोरी जिसकी प्राकृतिक लम्बाई 0.1 मीटर तथा बल नियतांक 1.47 न्यूटन/सेमी है, का एक सिरा A पर बंधा हुआ है और इसके दूसरे सिरे से m = 0.3 किग्रा द्रव्यमान की एक वलय जुड़ी हुई है। वलय छड़ के अनुदिश फिसल सकती है। जब वलय, छड़ के सापेक्ष स्थिर है तो डोरी का ऊर्ध्व से झुकाव, डोरी में तनाव, वलय द्वारा छड़ पर लगाया गया बल क्रमशः ज्ञात कीजिए। –(g = 9.8 m/s^2)



Ans. $\cos\theta = 3/5$, T = 9.8 N , N $= \dfrac{147}{50} = 2.94$ N

Sol.



$T = kx = 147\,(0.1 \sec\theta - 0.1)$

$T \sin\theta = m\,\omega^2 r$

$\Rightarrow \quad 147(0.1 \sec\theta - 0.1)\sin\theta = 0.3 \times (14)^2\,(0.1 \tan\theta)$

$1 - \cos\theta = 0.4$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \theta = 53^\circ$

$T = 147\,(0.1 \sec 53 - 0.1) = 9.8$ N

$N = T\cos\theta - mg = 9.8 \times \dfrac{3}{5} - 0.3 \times 9.8 = 2.94$ N

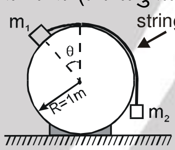
$N = 2.94$ N **Ans.**

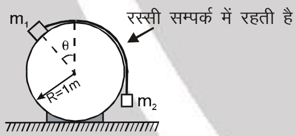
21. A mass m_1 lies on fixed, smooth cylinder. An ideal cord attached to m_1 passes over the cylinder and is connected to mass m_2 as shown in the figure.

द्रव्यमान m_1, एक स्थिर एवम् चिकने बेलन पर रखा हुआ है। एक आदर्श रस्सी को m_1 द्रव्यमान से जोड़कर बेलन पर रखते हुए दूसरी ओर m_2 द्रव्यमान से चित्रानुसार जोड़ा जाता है।

Find the value of θ in degree (shown in diagram) for which the system is in equilibrium if $m_1 = \sqrt{2}$ kg and $m_2 = 1$ kg

θ का मान डिग्री में ज्ञात करो (चित्रानुसार) जिसके लिए निकाय साम्य अवस्था में हो यदि $m_1 = \sqrt{2}$ kg तथा $m_2 = 1$ kg।





Ans. 45

Sol. The system is in equilibrium when

$m_1 g\sin\theta = m_2 g$

or $\quad \sin\theta = \dfrac{m_2}{m_1}$

22. In above question if $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 4$kg . The system is released from rest when $\theta = 30^\circ$. Find the value of N if the magnitude of acceleration of mass m_1 just after the system is released is $\dfrac{N}{9}$ m/s^2 .

उपरोक्त प्रश्न में यदि $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 4$kg निकाय को $\theta = 30^\circ$ पर विराम से छोड़ा जाता है। निकाय के छोड़ने के तुरन्त बाद m_1 के त्वरण का परिमाण $\dfrac{N}{9}$ m/s^2 . है तो N का मान ज्ञात करो।

Ans. 15

Sol. Let the tangential acceleration of m_1 be a.

$\therefore \quad m_2 g - m_1 g \sin\theta = (m_1 + m_2)\,a$

$a = \dfrac{40 - 25}{9} = \dfrac{15}{9}$ m/s^2

the normal acceleration of m_1 is zero.

$\because \quad$ speed of m_1 is zero.

$\therefore \quad$ The magnitude of acceleration of $m_1 = \dfrac{15}{9}$ m/s^2 .

Sol. (a) निकाय साम्यावस्था में है

$m_1 g\sin\theta = m_2 g$

या $\sin\theta = \frac{m_2}{m_1}$

(b) माना m_1 का स्पर्शरेखीय त्वरण a है

$\therefore$ $m_2 g - m_1 g \sin\theta = (m_1 + m_2)\, a$

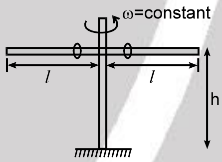
$a = \frac{40-25}{9} = \frac{15}{9}\, m/s^2$

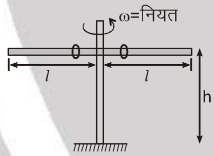
m_1 का अभिकेन्द्रीय त्वरण शून्य है। $\because$ m_1 की चाल शून्य है।

$\therefore$ m_1 के त्वरण का परिमाण $= \frac{15}{9}\, m/s^2$.

23. Two identical rings which can slide along the rod are kept near the mid point of a smooth rod of length 2ℓ(ℓ = 1 m) The rod is rotated with constant angular velocity ω = 3 radian/ sec about vertical axis passing through its centre. The rod is at height h = 5 m from the ground. Find the distance (in meter) between the points on the ground where the rings will fall after leaving the rods.

दो एकसमान वलय, जो छड़ के अनुदिश फिसल सकती है, इनको 2ℓ(ℓ = 1 m) लम्बाई वाली चिकनी छड़ के मध्य बिन्दु के पास रखते हैं। छड़ को इसके मध्य बिन्दु से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष ω = 3 radian/ sec के नियत कोणीय वेग से घुमाते है। छड़ की जमीन से ऊँचाई h = 5m है। जमीन पर उन दोनों बिन्दुओं के बीच की दूरी (मीटर में) बताइये जहां पर वलय छड़ से अलग होकर गिरेगी।

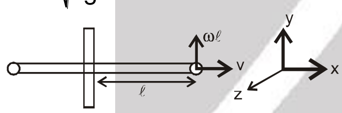




Ans.: 10 m

Sol. Time take by ring to fall on ground. वलय को जमीन तक गिरने में लगा समय

$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$



from centripetal force अभिकेन्द्रीय बल से

$m\omega^2 x = ma = mv\,\frac{dv}{dx}$

$\omega^2 x = v\frac{dv}{dx}$

$\int_0^{\ell} \omega^2 x \;\; d\;\; x = \int_0^{v} vdv$

$\omega^2 \frac{L^2}{2} = \frac{v^2}{2}$

$v_x = \omega L$

$x = \omega\ell \,.\, T = \omega\ell\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v_y = \omega L$

$y = \omega\ell T = \omega\ell\,\sqrt{\frac{2h}{g}}$

distance of one ring from center is केन्द्र से एक वलय की दूरी

$= \sqrt{y^2 + (x + \ell)^2}$

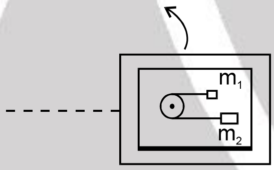
distance between the point on the ground where the rings will fall after leaving the rods.
छड़ छोड़ने के बाद वलय के जमीन पर गिरने वाले बिन्दु के मध्य दूरी

$= 2\sqrt{y^2 + (x + \ell)^2}$

where जहाँ $x = y = \omega\ell \sqrt{\frac{2h}{g}}$

24. A table with smooth horizontal surface is placed in a cabin which moves in a circle of a large radius R (figure). A smooth pulley of small radius is fastened to the table. Two masses m and 2m placed on the table are connected through a string over the pulley. Initially the masses are held by a person with the string along the outward radius and then the system is released from rest (with respect to the cabin). Find the value of $\frac{T}{ma}$ where a is the magnitude of the initial acceleration of the masses as seen from the cabin and 'T' is the tension in the string.

चित्रानुसार एक केबिन बहुत बड़ी त्रिज्या R वाले वृत्त में गति कर रहा है, इसमें क्षैतिज एवं चिकनी सतह वाली टेबल रखी हुई है। एक अल्प त्रिज्या की घर्षण रहित घिरनी टेबल से जुड़ी हुई है। घिरनी से होकर गुजर रही एक डोरी से जुड़े हुए दो द्रव्यमान m तथा 2m टेबल पर रखे हुए है। एक व्यक्ति प्रारम्भ में दोंनो द्रव्यमानों को पकड़कर स्थिरावस्था में (केबिन के सापेक्ष) इस प्रकार रखता है कि डोरी, त्रिज्या के अनुदिश बाहर की ओर रहती है, इसके पश्चात् वह निकाय को मुक्त कर देता है। केबिन में प्रेक्षण लेने पर द्रव्यमानों का प्रारम्भिक त्वरण a तथा डोरी में तनाव 'T' हो तो $\frac{T}{ma}$ का मान ज्ञात कीजिये।



Ans. 4

Sol. $a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\,\omega^2 R = \frac{\omega^2 R}{3}$

$T = \frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1}\,\omega^2 R = \frac{4}{3}\,m\omega^2 R$