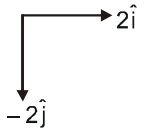
CIRCULAR MOTION

EXERCISE –1

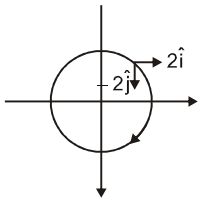
भाग - I

Section (A)

A-1. दिया है $\vec{v} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$

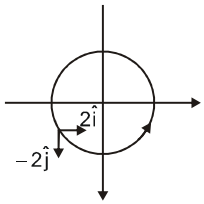


(a) जब दक्षिणावर्त घूमता है



Ans. : प्रथम पाद

(b) जब वामावर्त घूमता है।



Ans. : तृतीय पाद

A-2. $\omega_{minute} = \frac{2\pi}{60\times 60} = \frac{2\pi}{3600}$ रेडियन/सेकण्ड

$\omega_{hour} = \frac{2\pi}{12\times 60\times 60} = \frac{2\pi}{12\times 3600}$ रेडियन/सेकण्ड

$\omega_{minute} : \omega_{hour} = 12 : 1$ **Ans.**

$\omega_{second} = \frac{2\pi}{60}$ rad/sec. $= \frac{\pi}{30}$ rad/sec **Ans.**

A-3. दिया है $\omega_0 = 0$, α = नियतांक ,

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

प्रथम दो सेकण्ड के लिए

$\theta_1 = 0 + \frac{1}{2}\alpha\times(2)^2 = 2\alpha$

अगले दो सेकण्ड के लिए

$\theta_2 = \theta_4 - \theta_2 = \frac{1}{2}\alpha(4)^2 - \frac{1}{2}\alpha(2)^2 = 6\alpha$

$\theta_2 / \theta_1 = 3 : 1$ **Ans.**

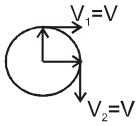
A-4. दिया है $\theta = 2t^3 + 0.5$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 6t^2$

at t = 2 sec. पर

$\omega = 6 \times (2)^2 = 24$ rad/sec. **Ans.**

A-5. दिया है $\ell = R = 1$ cm , t = 15 Second



$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

$\Delta V = \sqrt{2}\, V$

$V = \omega R$

$V = \frac{2\pi}{60} \times 1 = \frac{\pi}{30}$ cm/sec.

$\Delta V = \frac{\sqrt{2}\pi}{30}$ cm/sec.

$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi\sqrt{2}}{30 \times 15}$ cm/sec^2. **Ans.**

Section (B)

B-1. R = 0.25 m , $\omega = 2$ rev./sec. $= 4\pi$ rad/sec. $(a_t = 0)$

$a_c = \omega^2 R$

$= (4\pi)^2 \times 0.25$

$= 4\pi^2$ m/s^2. **Ans.**

B-2. दिया गया है V = 30 m/s , R = 500 m , $\frac{dv}{dt} = 2$ m/s^2.

$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(30)^2}{500} = \frac{9}{5}$ m/s^2.

$a_t = \frac{dv}{dt} = 2$ m/s^2

$a_t = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{181}}{5}$ m/s^2 **Ans.**

B-3. R = 1.0 cm , V = 2.0 t

at t = 1 sec पर $\Rightarrow$ V = 2.0 cm/sec.

$a_c = \frac{v^2}{R} = 4$ cm/sec^2.

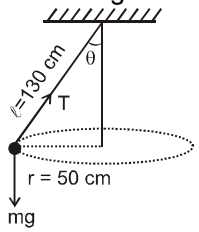
$a_t = \frac{dv}{dt} = 2.0$ cm/sec^2.

$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{4^2 + 2^2}$

$= 2\sqrt{5}$ cm/sec^2. **Ans.**

Section (C)

C-1. $m = 200\ g = 0.2\ kg$, $g = \pi^2\ m/s^2$



आवर्त काल $= 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.2}{\pi^2}} = 2\sqrt{\frac{6}{5}}$ **Ans.**

तनाव $= \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{0.2\times\pi^2}{12/13} = \frac{13}{6}N$ **Ans.**

C-2. $N = \frac{mv^2}{r}$ दिया है $r = 5\ m$, $v = 5\sqrt{5}\ m/s$

फिसलन न होने के लिए $f \geq mg$

$\mu_{min}\ N = mg$

$\mu_{min} = \frac{mg}{N} = \frac{rg}{v^2}$

$\mu_{min} = \frac{5\times10}{(5\sqrt{5})^2} = \frac{2}{5}$ **Ans.**

C-3. $\omega_i = \omega_0$, $\ell = \ell_0$

$\omega_f = 2\omega_0$, $\ell = 2\ell_0$

$T_i = m\omega_0^2\ell_0 = T_0$

$T_f = m(2\omega_0)^2(2\ell_0) = 8T_0$ **Ans.**

C-4. $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi\times1500}{60}$ rad/sec

$r = \frac{d}{2} = 60\ cm = 0.6\ m$

$m = 1\ g = 10^{-3}\ kg$

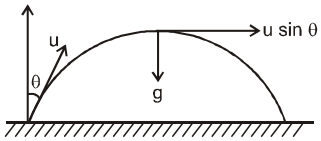
$F = m\omega^2 r = 10^{-3}\times\left(\frac{2\pi\times1500}{60}\right)^2\times0.6$

$= \frac{15\pi^2}{10} = 14.8$ **Ans.**

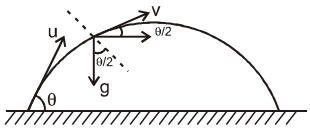
यह बल पंखे की ब्लेड़ों द्वारा आरोपित है। कण द्वारा पंखुडियों पर समान परिमाण का विपरीत दिशा में बल लगाया जायेगा।

Section (D)

D-1.



$R = \frac{(v_\perp)^2}{a_\perp} = \frac{u^2\sin^2\theta}{g}$ **Ans.**

D-2. 

$u\cos\theta = v\cos\theta/2$

$\Rightarrow v = \dfrac{u\cos\theta}{\cos\theta/2}$

$a_\perp = g\cos\theta/2 \Rightarrow R = \dfrac{v^2}{a_\perp} = \dfrac{u^2\cos^2\theta}{g\cos^3\theta/2}$ **Ans.**

Section (E)

E-1. उर्ध्व तल में वृत्तीय गति की निम्नतम स्थिति में अधिकतम तनाव होता है
निम्नतम स्थिति में

$T_{max} - mg = m\omega^2R$

$\Rightarrow \quad 30 - 0.5\times10 = 0.5\,\omega^2\times2$

$\omega^2 = \dfrac{25}{0.5\times2} \quad \Rightarrow \quad \omega = 5$ rad/sec. **Ans.**

E-2. निम्नतम बिन्दु पर तनाव = 3 mg
अतः निम्नतम बिन्दु पर वेग

$T - mg = \dfrac{mv^2}{\ell} \quad \Rightarrow \quad 3mg - mg = \dfrac{mv^2}{\ell}$

$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\ell}$

अधिकतम विस्थापन पर वेग शून्य है
ऊर्जा संरक्षण से

$\dfrac{1}{2}mv^2 = mg\ell(1-\cos\theta)$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 90^\circ$ **Ans.**

E-3. जब डोरी ढीली पड़ जाती है, तो अभिकेन्द्रीय बल की समीकरण लगाने पर

$\dfrac{mv^2}{a} = mg\cos60^\circ \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\dfrac{ga}{2}}$ .....(i)

ऊर्जा संरक्षण प्रयुक्त करने पर

$\dfrac{1}{2}mu^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + mga(1+\cos\theta)$ ....(ii)

समीकरण (i) व (ii) से

$u = \sqrt{\dfrac{7ga}{2}}$

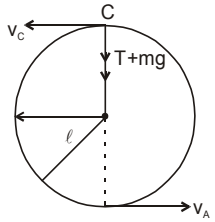
निम्नतम स्थिति पर अभिकेन्द्रीय बल की समीकरण लगाने पर

$T - mg = \dfrac{mu^2}{a}$

u का मान रखने पर प्राप्त होगा।

$T = 9mg/2$

E-4. उच्चतम बिन्दु C पर



$T + mg = \frac{mv_C^2}{\ell}$

लेकिन $T > 0$

$\Rightarrow \quad \frac{mv_C^2}{\ell} - mg > 0$

$\Rightarrow \quad v_C > \sqrt{g\ell}$

$\therefore \quad V_C \text{ min} = \sqrt{g\ell}$

C व A के मध्य ऊर्जा संरक्षण का उपयोग करते हुए।

$mg(2\ell) + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \Rightarrow \quad mg(2\ell) = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mg\ell$

$\Rightarrow \quad v_A = \sqrt{5g\ell} \quad (\text{min})$

Section (F)

F-1. सुरक्षित सवारी के लिए $v_{max} = \sqrt{\mu rg}$

$10 = \sqrt{\mu rg}$

गीली सड़क के लिए $v' = \sqrt{\frac{\mu}{2}rg} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ m/s **Ans.**

F-2. अधिकतम सुरक्षित चाल $= \sqrt{\mu rg} = \sqrt{0.4 \times 30 \times 10} = \sqrt{120}$ m/s **Ans.**

F-3. v = 48 km/hr = 40/3 m/s.
घर्षणरहित सुरक्षित घुमाव के लिए

$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{h}{x}$

दिया है $x \approx \ell = 1\text{m} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{rg} = \frac{(40/3)^2}{400 \times 10} = \frac{2}{45}$ m **Ans.**

F-4. बंकन का उपयुक्त कोण

$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{(5)^2}{10 \times 10} = \frac{1}{4} \quad (\because 18 \text{ km/hr} = 5 \text{ m/s})$

$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{4}$ **Ans.**

बंकन की अनुपस्थिति में न्यूनतम घर्षण गुणांक

$\mu = \frac{v^2}{rg} = \frac{(5)^2}{10 \times 10} = \frac{1}{4}$

$\mu = \frac{1}{4}$ **Ans.**

F-5. अधिकतम सुरक्षित चाल = $v_{max} = \sqrt{gr\left(\frac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta}\right)} = \sqrt{1000\times10\ \left(\frac{1+0.5}{1-0.5\times1}\right)}$

$= 100\sqrt{3}$ m/s **Ans.**

F-6._ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g_{eff.}}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g_{eff.}}}$

$g_{eff.} = g + a$; $T = 2$ put रखने पर $\Rightarrow$ $g_{eff} = 20 \Rightarrow g + a = 20 \Rightarrow a = 10\ m/s^2$.

Ans. मंदन **= 10 m/s²**

Ans. 10 m/s²

F-7. $v = 36$ km/hr $= 10$ m/s

$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg} = \frac{10\times10}{20\times10} = \frac{1}{2}$

$v_{max} = \sqrt{Rg\left(\frac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta}\right)} = 15$ m/s $= 54$ km/hr **Ans.**

$v_{min} = \sqrt{Rg\ \left(\frac{\tan\theta-\mu}{1+\mu\tan\theta}\right)} = \sqrt{\frac{20\times10(0.5-0.4)}{(1+0.5\times0.4)}}$

$= \sqrt{\frac{20\times10\times0.1}{1.2}} = \sqrt{\frac{50}{3}} \times \frac{18}{5}$ km/hr **Ans.**

भाग - II

Section (A)

A-1. चाल $v_1 = \frac{2\pi r}{t}$

$v_2 = \frac{2\pi r}{t}$

$\omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{2\pi}{t_1}$ ...(i)

$\Rightarrow\ \omega_2 = \frac{v_2}{2r} = \frac{2\pi}{t_2}$ ...(ii)

From eq. (i) and (ii)

$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow 1 = \frac{t_2}{t_1}$

A-2. $\omega = 80$ rad/sec, $t = 5$ sec, $\omega_0 = 0$

$\theta = ?$

यदि α नियत है, तो

$\theta = \left(\frac{\omega+\omega_0}{2}\right) t = \left(\frac{80+0}{2}\right) 5 = 200$ rad **Ans.**

A-3. $r = \frac{20}{\pi}$ m, a_t = नियतांक

$n = 2^{nd}$ दूसरा घूर्णन

$v = 80$ m/s

$\omega_0 = 0$, $\omega_f = \frac{v}{r} = \frac{80}{20/\pi} = 4\pi$ rad/sec

$\theta = 2\pi \times 2 = 4\pi$
तृतीय समीकरण से
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$
$\Rightarrow \quad (4\pi)^2 = 0^2 + 2 \times \alpha \times (4\pi)$
$\alpha = 2\pi \text{ rad/s}^2$
$a_t = \alpha r = 2\pi \times \frac{20}{\pi} = 40 \text{ m/s}^2$ **Ans.**

A-4. चाल = नियतांक
नियत चाल से वृत्तीय गति में, वेग व त्वरण के परिमाण नियत रहते हैं, पर दिशा बदलती रहती है। अतः वेग व त्वरण दोनों परिवर्तनशील होते हैं।

Section (B)

B-1. चकती के प्रत्येक कण का कोणीय वेग समान होगा।
$a_P = \omega^2 r_p$, $a_Q = \omega^2 r_Q$
$\because r_P > r_Q \Rightarrow a_P > a_Q$ **Ans.**

B-2. कण की वृत्तीय गति के लिए a_r अशून्य है व a_t शून्य या अशून्य कुछ भी हो सकता है। ($a_r = v^2 / r$)

B-3. $a_c = \frac{v^2}{r}$, प्रथम प्रकरण (a) में त्रिज्या नियत है व प्रकरण (b) में वृद्धिमान है। अतः त्वरण का परिमाण प्रकरण (a) में नियत व प्रकरण (b) में घटता है।

B-4. $F_{C1} = F_{C2} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{mv_2^2}{r_2}$

$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **Ans.**

Section (C)

C-1. $r = 144$ m, $m = 16$ kg, $T_{max} = 16$ N

$T = \frac{mv^2}{r}$

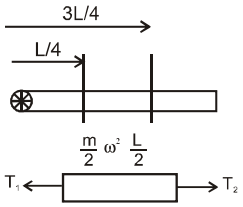
$v = \sqrt{\frac{Tr}{M}} = \sqrt{\frac{16 \times 144}{16}} = 12 \text{ m/s}$ **Ans.**

C-2. $T = m\omega^2 r$
$\Rightarrow T^1 = 2T = m\omega_1^2 r$
$\omega_1 = \sqrt{2}\ \omega = \sqrt{2} \times 5 = \sqrt{50} \approx 7$ rev/min **Ans.**

C-3. समरूप घूर्णित मेज का अभिप्राय कोणीय वेग नियत है। नयी त्रिज्या प्रारम्भिक मान की आधी है।
$r' = r/2$ and व ω = constant नियतांक
$v' = \omega r' = \omega r/2 = v/2 = 5$ cm/s **Ans.**
$a' = \omega^2 r' = \omega^2 r/2 = a/2 = 5 \text{ cm/s}^2$ **Ans.**

C-4. ठीक फिसलने के लिए $\Rightarrow \mu mg = m\omega^2 r$
यदि ω दुगनी कर दी जाए, तो त्रिज्या $1/4^{th}$ होगी
$r' = 4$ cm **Ans.**

C-5.



$T_1 - T_2 = \frac{M}{2}\omega^2\frac{L}{2}$

$T_1 > T_2$ **Ans.**

Section (D)

D-1. t = 0 पर

$a_\perp = g\cos\theta$,

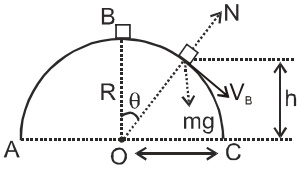
$R = \frac{v^2}{a_\perp} = \frac{u^2}{g\cos\theta}$

D-2. बल $\vec{v}$ के लम्बवत् है।

$a_\perp = \frac{F}{m} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2}{a_\perp} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv^2}{F}$ **Ans.**

Section (E)

E-1. माना उर्ध्व से θ कोण पर कार पथ से संपर्क छोड़ती है



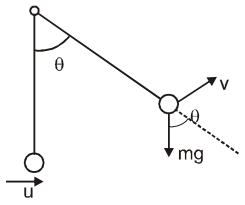
$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}$

पुल से उतरने के दौरान θ बढता है, अतः $\cos\theta$ घटता है तो अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल घटता है।

E-2. उर्ध्व वृत्तीय गति में उच्चतम बिन्दु पर, अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल न्यूनतम (शून्य) होता है। मोटर साईकिल की न्यूनतम चाल होगी-

$mg = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gR}$ **Ans.**

E-3.



$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$ ....(1) (अभिकेन्द्रीय बल से)

ऊर्जा संरक्षण से

$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgr(1 - \cos\theta)$ (here u is speed at lowest point) (यहाँ u निम्नतम बिन्दु पर चाल है)

समीकरण (1) व (2) से

$$T = \frac{mu^2}{r} + 3mg\cos\theta - 2mg$$

for $\theta = 30^\circ$ & 60° के लिए $\Rightarrow$ $T_1 > T_2$ **Ans.**

E-4. पथ के उच्चतम बिन्दु पर जल के ना बिखरने के लिए N शून्य अथवा इससे अधिक होना चाहिए।

$N = 0$ के लिए, $mg = \frac{mv^2}{r}$

तथा $N > 0$ के लिए , $mg < \frac{mv^2}{r}$

अतः mg , $\frac{mv^2}{r}$ से बड़ा नहीं है।

Section (F)

F-1. जब ट्रेन A पूर्व से पश्चिम को जाती है।

$$mg - N_1 = \frac{m(v+\omega R)^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = mg - \frac{m(v+\omega R)^2}{R}$$

$N_1 = F_1$

जब ट्रेन B, पश्चिम से पूर्व को जाती है।

$$mg - N_2 = \frac{m(v-\omega R)^2}{R} \Rightarrow \quad N_2 = mg - \frac{m(v-\omega R)^2}{R}$$

$N_2 = F_2$

$F_1 > F_2$ **Ans.**

F-2 $mg = m\omega^2 R$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$

भाग - III

1. ग्राफ (a) से $\Rightarrow$ $\omega = k\theta$ जहा k एक धनात्मक नियतांक है।

कोणीय त्वरण $= \omega\frac{d\omega}{d\theta} = k\theta \times k = k^2\theta$

$\therefore$ कोणीय त्वरण असमान है और यह θ के सीधे समानुपाती है $\therefore$ (A) q, s

ग्राफ (b) से $\Rightarrow$ $\omega^2 = k\theta$. दोनो तरफ θ सापेक्ष अवकलन करने पर

$2\omega\frac{d\omega}{d\theta} = k$ or या $\omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{k}{2}$ अतः कोणीय त्वरण एकसमान है। $\therefore$ (B) p

ग्राफ (c) से $\Rightarrow$ $\omega = kt$

कोणीय त्वरण $= \frac{d\omega}{dt} = k$ अतः कोणीय त्वरण एकसमान है $\Rightarrow$ (C) p

ग्राफ (d) से $\Rightarrow$ $\omega = kt^2$

कोणीय त्वरण $= \frac{d\omega}{dt} = 2kt$ अतः कोणीय त्वरण असमान है और समय t के सीधे समानुपाती है।

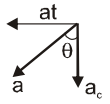
$\therefore$ (D) q,r

2. $v = 2t^2$

स्पर्श रेखीय त्वरण $a_t = 4t$

अभिकेन्द्रीय त्वरण $a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4t^4}{R}$

कोणीय चाल $\omega = \frac{v}{R} = \frac{4t}{R}$,



$\tan\theta = \frac{a_t}{a_c} = \frac{4tR}{4t^4} = \frac{R}{t^3}$

EXERCISE –2

भाग - I

1. $\omega_{QP} = 2\pi - 5\pi = -3\pi$ rad/s

$\omega_{RP} = 3\pi - 5\pi = -2\pi$ rad/s

समय जब कण Q, P पर पहुँचता है $= t_1 = \frac{\pi/2}{3\pi} = \frac{1}{6}$ sec.

$t_2 = \frac{5\pi/2}{3\pi} = \frac{5}{6}$ sec.

$t_3 = \frac{9\pi/2}{3\pi} = \frac{3}{2}$ sec.

समय जब कण R, P पर पहुँचता है $t_1 = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ sec.

$t_2 = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$ sec.

P पर पहुँचने का उभयनिष्ठ समय $\frac{3}{2}$ sec. **Ans.**

2. $K = \frac{1}{2}mv^2 = as^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{2as^2}{m}$

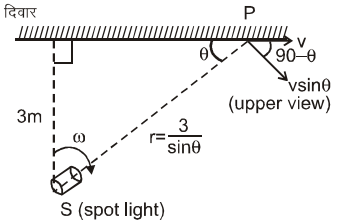
$a_C = \frac{v^2}{R} = \frac{2as^2}{mR}$

$a_t = v\frac{dv}{ds} = \frac{2as}{m}$

$a = \sqrt{\left(\frac{2as^2}{mR}\right)^2 + \left(\frac{2as}{m}\right)^2} = \frac{2as}{m}\left(1+\frac{s^2}{R^2}\right)^{1/2}$

कुल बल $= ma = 2as\left(1+\frac{s^2}{R^2}\right)^{1/2}$ **Ans.**

3.



$\omega = \frac{v_\perp}{r} = \frac{v\sin\theta}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\omega r}{\sin\theta} = \frac{3\omega}{\sin^2\theta} \Rightarrow v = \frac{0.1\times 3}{(1/\sqrt{2})^2} = 0.6$ m/s **Ans.**

4. वेग के लम्बवत् त्वरण के घटक है –

$a_c = 4$ m/s^2

$\therefore$ त्रिज्या $= \frac{v^2}{a_c} = \frac{(2)^2}{4} = 1$ m.

5. (i) कण का मंदन

$$\left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|v\frac{dv}{ds}\right| = \frac{v^2}{R}$$

$$-v\frac{dv}{ds} = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dv}{v} = \frac{ds}{R}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

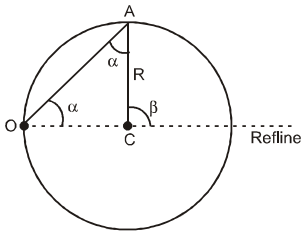
$$-\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_{0}^{s}\frac{ds}{R} \quad \Rightarrow \quad -\left[\log v\right]_{v_0}^{v} = \frac{s}{R}$$

$v = v_0 e^{-s/R}$ **Ans.**

(ii) $|a_t| = a_C$

$a = \sqrt{2}\ a_C = \sqrt{2}\ \frac{v^2}{R}$ **Ans.**

6.



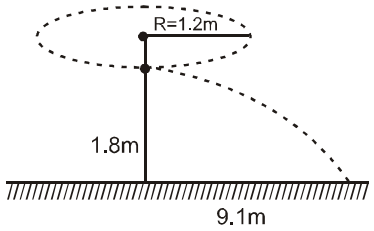
$\beta = 2\alpha \ \Rightarrow \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{2d\alpha}{dt} = 2 \times 0.4 = 0.8$ rad/s

$v_{AC} = \omega r = 0.8 \times \frac{1}{2} = 0.4$ m/s

$a_C = \omega^2 r = (0.8)^2\ \frac{1}{2} = 0.32$ m/s^2

$a = a_C = 0.32$ m/s^2 $\quad (a_t = 0)$

7.



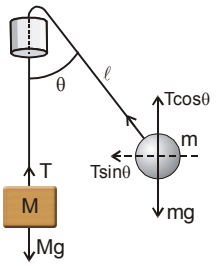
भूमि पर गिरने में लगा समय $= \sqrt{\frac{2\times1.8}{9.8}} = \sqrt{\frac{36}{98}}$

डोरी टूटने के समय वेग

$v = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} \Rightarrow \quad v = 9.1\sqrt{\frac{98}{36}}$

अभिकेन्द्रीय त्वरण $= \frac{v^2}{R} = \frac{9.1\times9.1\times98}{1.2\times36} = 187.856 = 188$ m/s^2 **Ans.**

8.



M स्थिरावस्था में होने–के लिए

$$T = Mg \qquad \ldots. (1)$$

m के लिए

$$T\cos\theta = mg \qquad \ldots. (2)$$

$$T\sin\theta = \frac{mv^2}{\ell\ \sin\theta} \qquad \ldots. (3)$$

(3) में (2) का भाग देने पर

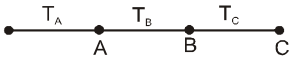
$$\tan\theta = \frac{v^2}{g\ \ell\ \sin\theta} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{g\ \ell}{\cos\theta}}\ .\ \sin\theta$$

आवर्त काल $= \dfrac{2\pi\ R}{v} = \dfrac{2\pi\ \ell\ \sin\theta}{\sqrt{\dfrac{g\ \ell}{\cos\theta}}.\sin\theta}$

समीकरण (1) और (2) से

अतः आवर्त काल $= 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell\ m}{g\ M}}$

9. ω = नियतांक, सभी तीनों कणों के लिए



$$\omega = \frac{v}{3\ell}$$

$T_C = m\omega^2\, 3\ell$

$T_B - T_C = m\omega^2 2\ell$

$T_B = 5\ m\omega^2\ell$

$T_A - T_B = m\omega^2\ell$

$T_A = 6\ m\omega^2\ell$

$T_C : T_B : T_A :: 3 : 5 : 6$ **Ans.**

10. $F = kx,\ T_1 = ka = m\omega^2\, 2a \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$

आवर्तकाल $= \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}} = T$

$T_2 = 2ka = m\omega^2 3a \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{2k}{3m}}$

आवर्त काल $= 2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{2k}} = T'$

$T' = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)T$ **Ans.**

11. डोरी में अधिकतम तनाव निम्नतम बिन्दु पर होगा

$$T_{max} = \frac{mv_{LP}^2}{L} + mg \qquad ...(1)$$

उच्चतम बिन्दु पर न्यूनतम तनाव

$$T_{min} = \frac{mv_{HP}^2}{L} - mg \qquad ...(2)$$

उर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2}mv_{LP}^2 = 2mgL + \frac{1}{2}mv_{HP}^2 \qquad ....(3)$$

(1) व (3) से

$$T_{max} = \frac{1}{L}mv_{HP}^2 + 5\ mg \qquad ...(4)$$

(2) व (4) से

$$4 = \frac{T_{max}}{T_{min}} = \frac{\frac{mv_{HP}^2}{L} + 5\ mg}{\frac{mv_{HP}^2}{L} - mg} \quad \Rightarrow \quad 3mv_{HP}^2 = 9\ mgL$$

$\Rightarrow$ $V_{HP} = \sqrt{3gL} = 10$ m/s **Ans.**

12. दिया है $v_B = 0.5\sqrt{gr}$

माना ब्लॉक C पर संपर्क छोड़ता है, N = 0

$$\frac{mv_C^2}{r} = mg\cos\theta \qquad .... (1)$$

ऊर्जा संरक्षण से $\frac{1}{2}mv_B^2 + mgr(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mv_C^2$ ..... (2)

समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}gr\right) + mgr(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}mgr\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\frac{3}{4} \qquad \textbf{Ans.}$$

13. θ कोण पर न्यूटन का नियम प्रयुक्त करने पर

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{\ell} \qquad ...(1)$$

θ_0 से θ के मध्य उर्जा संरक्षण से

$$mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad ...(2)$$

(1) और (2) से

$T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_0$ ....(3)

$T_{max} = 2mg$ समीकरण (3) में रखने पर

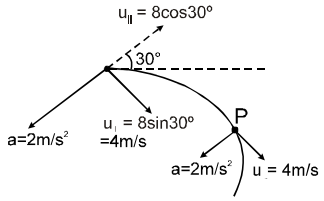
$\Rightarrow$ $\theta_0 = 60^\circ$ **Ans.**

14. त्वरण सदिश के समान्तर वेग का घटक $u_{\parallel}$ त्वरण सदिश द्वारा परिवर्तित होता है।

$r = \frac{v^2}{a_n}$

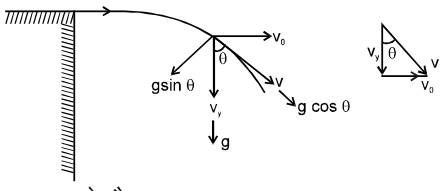
v न्यूनतम तथा a_n अधिकतम के लिए न्यूनतम वक्रता त्रिज्या r_{min} होगी। ऐसा P बिन्दु पर है, जब त्वरण सदिश के समान्तर वेग का घटक शून्य हैं। अर्थात्

$u_{\parallel} = 0$



$\therefore \quad R = \frac{u_{\perp}^2}{a} = \frac{4^2}{2} = 8$ meter.

15.



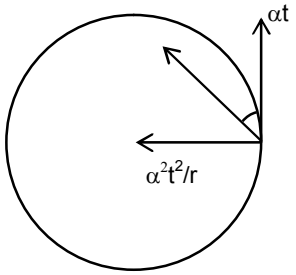
जैसे कि हम जानते है।

$a_C = \frac{v^2}{R}$ अभिकेन्द्रीय त्वरण

(चित्रानुसार); $g \sin\theta = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{g\sin\theta}$

$\Rightarrow \quad g \cdot \frac{v_0}{v} = \frac{v^2}{R}$ (चूंकि $\sin\theta_i = \frac{v_0}{v}$) $\Rightarrow \quad R \propto v^3$

16.



$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2\alpha^4 t^4}{b^2}}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + \alpha^2 t^4}}$

भाग - II

1. $\beta = \frac{d\omega}{dt} \propto -\sqrt{\omega} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = -k\sqrt{\omega} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{0} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = \int_{0}^{T} -k\ dt \Rightarrow 2\sqrt{\omega_0} = kT$

$$<\omega> = \frac{\int_0^T \omega\ dt}{T} = \frac{2\ \omega_0^{3/2}}{3\ k\ \left(2\frac{\sqrt{\omega_0}}{k}\right)} = \frac{\omega_0}{3}$$

Ans. $<\omega> = \omega_0 / 3$

2. R = 1m,7

$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{2}$ m/s²

t = 0 पर, u = 0, $\omega_0 = 0$

$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{\pi}{2}$ rad/s²

$v = u + a_t t = 0 + \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$ m/s

$a_t = \frac{\pi}{2}$ m/s² , $a_c = \frac{v^2}{r} = \pi^2$ m/s²

$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \pi^4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+4\pi^2}$ m/s² **Hence N = 4 Ans.**

3. $\omega_{0(rel)} = 0$, $\theta_{rel} = \pi$, $\alpha_{rel} = \frac{72\ v^2}{25\ \pi R^2}$

$\theta_{rel} = \omega_{0(rel)}\, t + \frac{1}{2}\ \alpha_{rel}\, t^2$

$\pi = 0 + \frac{1}{2}\ \frac{72\ v^2}{25\ \pi R^2}\ t^2$

$t = \frac{5\pi R}{6V}$ sec. Hence $N_1 = 6$

A द्वारा निरूपित कोण, $\theta = \frac{v}{R} \cdot \frac{5\pi R}{6V} + \frac{1}{2}\ \frac{72\ v^2}{25\ \pi R^2} \cdot \left(\frac{5\pi R}{6V}\right)^2$

$= \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11}{6}\ \pi$ Hence $N_2 = 6$

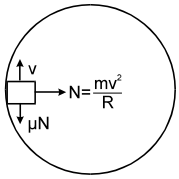
कोणीय वेग $\omega = \omega_0 + \alpha\, t = \frac{v}{R} + \frac{72\ v^2}{25\ \pi R^2} \cdot \left(\frac{5\pi R}{6V}\right)$

$= \frac{v}{R} + \frac{12v}{5R} = \frac{17v}{5R}$ Hence $N_3 = 5$

$a_c = \omega^2 R = \left(\frac{17v}{5R}\right)^2 R = \frac{289\ v^2}{25\ R}$ Hence $N_4 = 5$

$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N = 22$

4.



दीवार द्वारा ब्लॉक पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल $N = \frac{mv^2}{R}$

दीवार द्वारा ब्लॉक पर घर्षण बल $f = \mu N = \frac{\mu mv^2}{R}$

ब्लॉक का स्पर्शरेखीय त्वरण = $\frac{f}{m} = \frac{\mu v^2}{R}$

कुल त्वरण = $\sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{\mu^2 + 1} \times \left(\frac{v^2}{R}\right) = 2\ m/sec^2$

5. कार पर कुल बल = घर्षण बल f

$\therefore$ $f = m\sqrt{a^2 + \frac{v^4}{R^2}}$ (जहाँ m कार का द्रव्यमान है) .....(1)

फिसलने के लिए

$f = \mu N = \mu mg$ ....(2)

$\therefore$ (1) तथा (2) से

$v = \{R^2[\mu^2 g^2 - a^2]\}^{1/4}$

$v = u + at \Rightarrow t = \frac{v}{u}$ = 3 sec

6. (i) लूप पूर्ण करने के लिए निम्नतम बिन्दु पर न्यूनतम वेग $v = \sqrt{5gr}$

उर्जा संरक्षण से

$\frac{1}{2} mv^2 = mgh$

$\frac{1}{2} m (\sqrt{5gr})^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{5}{2} r$ **Ans.**

(ii) h दुगना है तब h स्थिति पर वेग होगा -

$mg2h - mg\ 2r = \frac{1}{2} mv^2$ (ऊर्जा संरक्षण से)

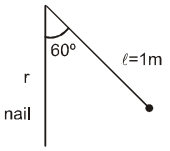
$v = \sqrt{6gr}$

उच्चतम बिन्दु पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल

$F_R = N + mg = \frac{m(\sqrt{6gr})^2}{r}$

$F_R = 6\ mg$ **Ans.**

7.



न्यूनतम बिन्दु पर वेग

$mg\ell\,(1 - \cos 60^\circ) = \frac{1}{2}mv^2$ ऊर्जा संरक्षण से

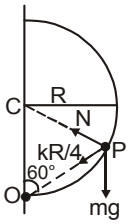
$v = \sqrt{g\ell}$

लूप पूर्ण करने के लिए

$v = \sqrt{5g(\ell - r)} = \sqrt{g\ell}$

$r = \frac{4}{5}$ m **Ans.**

8. CP = CO = (R) वृत्त की त्रिज्या



$\therefore$ $\angle COP = \angle CPO = 60^\circ$

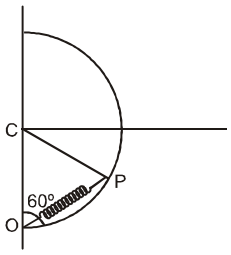
$\angle OCP$ भी 60° है।

अतः ΔOCP समबाहु त्रिभुज है।

अतः, OP = R

स्प्रिंग की प्राकृत लम्बाई 3R/4

$\therefore$ स्प्रिंग में प्रसार



$$x = R - \frac{3R}{4} = \frac{R}{4}$$

$\Rightarrow$ स्प्रिंग बल , $F = kx = \left(\frac{mg}{R}\right)\left(\frac{R}{4}\right) = \frac{mg}{4}$

वलय का मुक्त वस्तु आरेख निर्दिष्ट है।

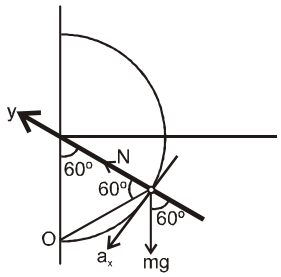
यहाँ , $F = kx = \frac{mg}{4}$

तथा N = अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल

स्पर्शीय त्वरण a_r = वलय मुक्त होने पर x-अक्ष की ओर गति करेगी। अतः x अक्ष के अनुदिश कुल बल होगा :

$$F_x = F \sin 60^\circ + mg \sin 60^\circ = \left(\frac{mg}{4}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$F_x = \frac{5\sqrt{3}}{8}\ mg$$



अतः वलय का स्पर्शरेखीय त्वरण

$$a_T = a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{5\sqrt{3}}{8}\, g$$

$$a_T = \frac{5\sqrt{3}}{8} g \qquad \text{hence } x = 5$$

अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल N : y-अक्ष के अनुदिश वलय पर कुल बल मुक्त करने के ठीक पश्चात् शून्य होगा।

$$F_y = 0$$

$$\therefore \quad N + F\cos 60^\circ = mg\cos 60^\circ$$

$$\therefore \quad N = mg\cos 60^\circ - F\cos 60^\circ = \frac{mg}{2} - \frac{mg}{4}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{mg}{2} - \frac{mg}{8}$$

$$N = \frac{3mg}{8} \qquad \text{Hence } y = 3$$

9. ब्लॉक B ऊर्ध्व तल में घूमता है। निम्नतम स्थिति में डोरी में अधिकतम तनाव होगा, जब ब्लॉक B निम्नतम स्थिति में हो और ब्लॉक A ना फिसले अर्थात् B की किसी भी स्थिति के लिए ब्लॉक A नहीं फिसलेगा।

न्यूनतम स्थिति पर

$$T - mg = \frac{mv^2}{\ell} \Rightarrow \qquad T = mg + \frac{mv^2}{\ell} \quad ....(1)$$

उर्जा संरक्षण से

$$mg\ell(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} mv^2 \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$T = mg + 2mg(1 - \cos\theta)$$

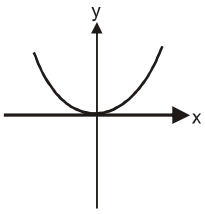
$= 3mg - 2mg\cos\theta$

फिसलन न होने के लिए

$T = \mu mg = 3mg - 2mg\cos\theta$

$\mu_{min} = 3 - 2\cos\theta$ **Ans.**

10. परवलय $y = ax^2$ चित्रानुसार है $x = 0$ पर चित्र से स्पष्ट है कि वेग x-अक्ष के अनुदिश है तथा नियतांक a_N , y–अक्ष के अनुदिश है। अतः



$$a_N = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$\frac{dy}{dt} = 2a \times \frac{dx}{dt} = 2aVx$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 2av\ \frac{dx}{dt} = 2av^2 \quad (\because \frac{d^2x}{dt^2} = 0\ )$

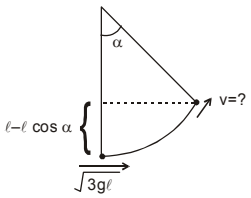
$a_N = 2av^2$

$R = \frac{v^2}{2av^2} = \frac{1}{2a}.$

11. $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\tan 45^\circ = \frac{a_t}{a_c} \quad \Rightarrow \quad a_t = a_C$

$\Rightarrow \quad g \sin \alpha = \frac{v^2}{t} \qquad ...(1)$



ऊर्जा संरक्षण से

$\frac{1}{2}\ m\ 3g\ell - \frac{1}{2}\ mv^2 = mg\ \ell\ (1 - \cos \alpha)$

$\Rightarrow \quad mv^2 = 3mg\ell - 2mg\ell \cos \alpha$

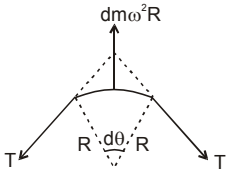
$mv^2 = mg\ell + 2mg\ell \cos \alpha \qquad .....(2)$

By eq. (1) and (2)

$\sin \alpha = 1 + 2 \cos \alpha$

$\Rightarrow \quad \alpha = 90^\circ$

12.



$dm\omega^2R = 2T \sin \frac{d\theta}{2}$

$\Rightarrow \quad \left(\frac{m}{\ell}Rd\theta\right)\ \omega^2R = Td\theta$

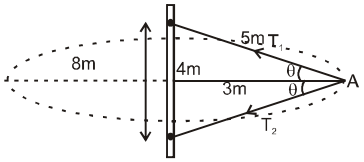
$\therefore \quad T = \frac{m}{\ell}\ \omega^2R^2 \qquad ....(1)$

परन्तु $\omega = 2\pi n$

$\ell = 2\pi R$

$\therefore \quad T = m\ell n^2$

13. अभिकेन्द्रीय त्वरण



$m\omega^2 r = T_1 \cos\theta + T_2 \cos\theta$ .... (1)

उर्ध्वदिशा में न्यूटन का नियम लगाने पर

$T_1 \sin\theta = mg + T_2 \sin\theta$ .....(2)

given दिया है $m = 4$ kg, $T_1 = 20$ kgf $= 200$ N, $r = 3$m

$\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$

समीकरण (2) में प्रयुक्त करने पर प्राप्त होगा

$T_2 = 150$ N $= 10x$ **Ans.**

$\omega = \sqrt{\frac{35}{2}}$

14. $V = 10$ m/s

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

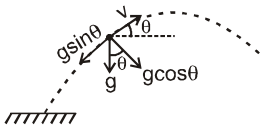
$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{10\times10}{10\times10}\right) = 45^\circ$$

भाग - III

1. स्पर्श रेखीय त्वरण $= a_t = g\sin\theta$

अभिलम्ब त्वरण $= a_n = g\cos\theta$

$a_t = a_n$



$g\sin\theta = g\cos\theta \Rightarrow \theta = 45°$

$\Rightarrow v_y = v_x$

$u_y - gt = u_x$

$20 - (10)t = 10$

$t = 1$ sec.

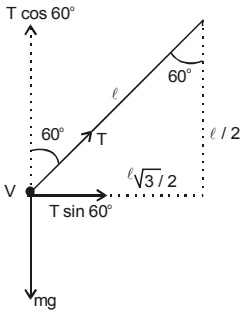
नीचे की तरफ गति के दौरान

$a_t = a_n$

$v_y = -v_x$

$20 - 10t = -10 \Rightarrow t = 3$ sec.

2.



$$\frac{T}{2}\sqrt{3} = \frac{mv^2}{(\ell\sqrt{3}/2)} \quad \text{.....(1)}$$

$$\frac{T}{2} = mg \quad \text{.....(2)}$$

अतः $T = 2\,mg$, (B) सही है।

(1) व (2) से $V^2 = 3\,g\ell/2$

$$\therefore \quad V = \sqrt{\frac{3 \times 9.8 \times 1.6}{2}}$$

$\therefore \quad V = 2.8\sqrt{3}$ m/s . अतः (C) सही है।

$$a_c = V^2/r = \frac{(3g\ell/2)}{(\ell\sqrt{3}/2)} = \sqrt{3} \times g = 9.8\sqrt{3}\ m/s^2$$

$\therefore$ (D) सही है।

$$t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\ \pi\ \sqrt{\ell\ \sqrt{3}/2}}{\sqrt{(3\ g\ \ell\ /2)}} \qquad t = 4\pi/7 \therefore \text{(A) सही है।}$$

3. $a_t = \frac{dv}{dt} = a$

कार पर घर्षण बल $= m\sqrt{\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 + a^2}$

जो कि $\frac{mv^2}{r}$ से अधिक है।

$$\mu_{min} = \frac{\sqrt{(v^2/r)^2 + a^2}}{g}$$

अतः यह सुरक्षित घुमाव के लिए $\frac{a}{g}$ से कम नहीं है।

4. पिंजरे की चाल $= \sqrt{gr}$ = नियतांक

अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल (भार पाठ्यांक)

$$N_A - mg = \frac{mv^2}{r}$$

$N_A = 2mg = 2w$ **Ans.**

G व C पर भार पाठ्यांक $= mg = w$ **Ans.**

E पर भार पाठ्यांक

$$mg - N_E = \frac{mv^2}{r}$$

$N_E = 0$ **Ans.**

5. बिन्दुओं A तथा B पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के लिए

$$mg - N = \frac{mv^2}{r}$$

$$N = mg - \frac{mv^2}{r}$$

$\Rightarrow \quad N_A > N_B$ तथा बिन्दु C पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल $N_C = mg$, अतः $N_C > N_A > N_B$ **Ans.**

6. (A) एक वर्ष के दौरान विस्थापन शून्य है, अतः औसत वेग शून्य होगा।
(B) एक वर्ष में तय दूरी शून्य नहीं होती, अतः औसत चाल शून्य नहीं होगी।
(C) एक वर्ष में प्रथम 6 माह के दौरान वेग परिवर्तन शून्य नहीं है, अतः औसत त्वरण शून्य नही होगा।
(D) नियत वृत्तीय गति में तात्क्षणिक त्वरण वृत्तीय पथ के केन्द्र की ओर क्रियाशील होता है।

7. जब कार की चाल 36 km/hr, है, तो कार बिना फिसले घूम सकती है। यदि चाल 36 km/hr से कम है तो इसके नीचे की ओर फिसलने की प्रवत्ति होती है, अतः नीचे फिसल जाती है। यदि चाल 36 km/hr से अधिक है तो इसकी ऊपर की ओर फिसलने की प्रवत्ति होती है अतः ऊपर की ओर फिसलेगी। यदि कार ठीक 36 km/hr चाल पर घूम ले
तो $N\cos\theta = mg$

$$N\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

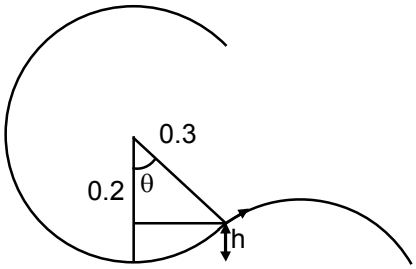
$$N = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{r}\right)}$$ **Ans.**

8. $F = \sqrt{f^2 + F_t^2 + (mg)^2} > mg$

(चूंकि as $\frac{d|\vec{V}|}{dt}$ = नियत $\therefore F_t$ = नियत

जब छड़ का कोणीय वेग नियत दर से बढ़ता है तो परिणामी बल $\vec{f}$ की ओर अधिक झुकेगा।
अतः $\vec{f}$ तथा क्षैतिज तल के मध्य कोण घटेगा। छड़ के साथ कोण भी घटेगा क्योंकि $f = m\omega^2 r$ में वृद्धि हो रही है।

9.



$v = \sqrt{2g(2R-h)}$ If h = 0.1

$= \sqrt{2.10(0.5)} = \sqrt{10}$

$\cos\theta = \frac{2}{3}$

$v\sqrt{2g(0.6-0.2)}$ If h = 0.2

$= \sqrt{2\cdot 10\cdot(0.4)} = 2\sqrt{2}m/s$

$\cos\theta = \frac{1}{3}$

(a) and (d) are correct.

10. $a_n = kt^2$

$\frac{v^2}{R} = kt^2$

$v = \sqrt{kR}\,t$

$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{kR}$ नियतांक

$\tan\phi = \frac{a_t}{a_n} \propto \frac{1}{t^2}$

$p = F_t\, v$

$\propto t$

$\langle p \rangle \propto t.$

भाग - IV

1 to 3. कोणीय वेग तथा रेखीय वेग परस्पर लम्बवत् है।

$\therefore\ \vec{v}\cdot\vec{\omega} = 3x + 24 = 0 \quad$ or $\quad x = -8$

वृत्त की त्रिज्या $r = \frac{v}{\omega} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ मीटर

एक समान वृत्तीय गति में कण का त्वरण

$$\vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{v} = (-8\ \hat{i} + 6\ \hat{j})\times(3\ \hat{i} + 4\ \hat{j}) = -50\ \hat{k}$$

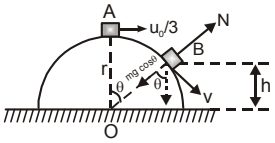
4. $mg = \frac{mu_0^2}{r} \quad \Rightarrow \quad u_0 = \sqrt{gr}$

अब, उर्ध्वाधर दिशा के अनुदिश ;

$$r = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2r}{g}}$$

क्षैतिज के अनुदिश ; $OP = 2u_0t = 2\sqrt{2}\ r$

5. क्योकि, B पर यह अर्द्धगोले को छोड़ देता है।



$\therefore \quad N = 0$

$$mg\cos\theta = \frac{mV^2}{r}$$

$$mg\,\frac{h}{r} = \frac{mV^2}{r}$$

$mv^2 = mgh$ .....(1)

अतः A और B के मध्य ऊर्जा संरक्षण से

$$mgr + \frac{1}{2}m\left(\frac{u_0}{3}\right)^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

u_0 और mv^2 का मान रखने पर $\quad \therefore \quad h = \frac{19r}{27}$

6. क्योकि $a_c = \frac{v^2}{r} = g\cos\theta$

$\therefore \quad a_t = g\sin\theta$

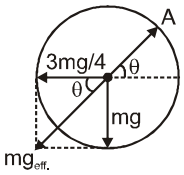
$\therefore \quad a_{net} = g$

वैकल्पिक हल

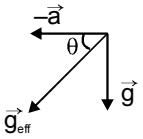
जब गुटका अर्द्धगोले को छोड़ देता है तब केवल mg बल रहता है।

$\therefore \quad a_{net} = g.$

7.



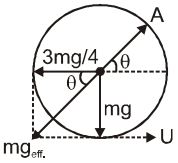
$\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{a}$



तनाव, न्यूनतम होगा जब, यह (तनाव) $\vec{g}_{eff}$ के अनुदिश है।

$\tan\theta = \dfrac{mg}{\frac{3}{4}mg} = \dfrac{4}{3}$ $\quad\therefore\quad$ $\theta = 53^\circ$.

8.



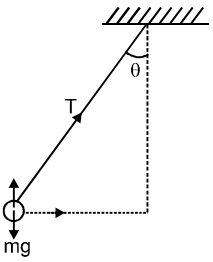
$V_{min} = \sqrt{\ell g_{eff}} = \sqrt{\ell\dfrac{5}{4}g} = \dfrac{\sqrt{5\ell g}}{2}$.

9. $T_{max} = 6\, mg_{eff}$ $\quad(g_{eff} = \dfrac{5}{4}g)$

$= \dfrac{15}{2}mg$

EXERCISE – 3
PART - I

1.



$T\sin\theta = m\, L\sin\theta\, \omega^2$

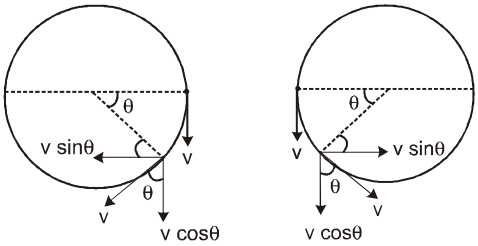
$324 = 0.5 \times 0.5 \times \omega^2$

$\omega^2 = \dfrac{324}{0.5\times0.5}$

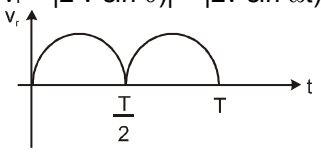
$\omega = \sqrt{\dfrac{324}{0.5\times0.5}}$

$\omega = \dfrac{18}{0.5} = 36$ rad/sec.

2.



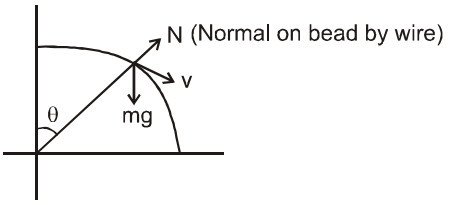
$v_r = |2\ v \sin\theta)| = |2v \sin \omega t)|$



3. ऊर्जा संरक्षण से : $mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2$

त्रिज्यीय बल समीकरण : $mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$

$\Rightarrow N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R} = mg(3\cos\theta - 2)$



मोती पर अभिलम्ब त्रिज्य बाहर की ओर होगा यदि $\cos\theta > \frac{2}{3}$

मोती पर अभिलम्ब त्रिज्य बाहर की ओर होगा यदि $\cos\theta < \frac{2}{3}$

$\therefore$ मोती पर प्रतिक्रिया वलय पर अभिलम्ब के विपरीत है

भाग - II

1. $S = t^3 + 5$

कण की रैखीय चाल

$$v = \frac{dS}{dt} = 3t^2$$

$t = 2$ s पर $v = (3 \times 2^2)$ m/s = 12 m/s

रैखीय त्वरण

$$a_1 = \frac{dv}{dt} = 6t$$

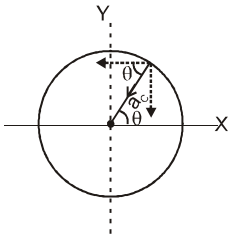
$t = 2$ s, पर $a_1 = 12$ m/s^2

अभिकेन्द्रीय त्वरण

$$a_2 = \frac{v^2}{R} = \frac{12^2}{20}\ m/s^2 = 7.2\ m/s^2$$

$\therefore$ $a_{\text{परिणामी}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{12^2 + 7.2^2} = 14$ m/s^2

2.



$$a_C = -\frac{V^2}{R}\cos\theta\ \hat{i} - \frac{V^2}{R}\sin\theta\ \hat{j}$$

3. इनका ω समान है।

अभिकेन्द्रिय त्वरण = $\omega^2 r$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega^2 r_1}{\omega^2 r_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

4. $$F = \frac{k}{R^n} = m\omega^2 R$$

$$\omega^2 \alpha \frac{1}{R^{n+1}} \Rightarrow \ \therefore\ T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{इसलिये} \quad T \alpha R^{\frac{n+1}{2}}$$

5. $$U = -\frac{K}{2r^2}$$

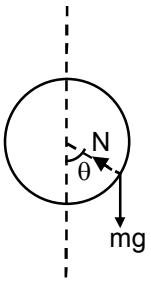
$$F = -\frac{du}{dr} = -\left(-\frac{K}{2}\left(-\frac{2}{r^3}\right)\right) = -\frac{K}{r^3}$$

$$\frac{K}{r^3} = \frac{mv^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad mv^2 = \frac{K}{r^2}$$

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{K}{2r^2}$$

E = P.E. + K.E. = 0

6.



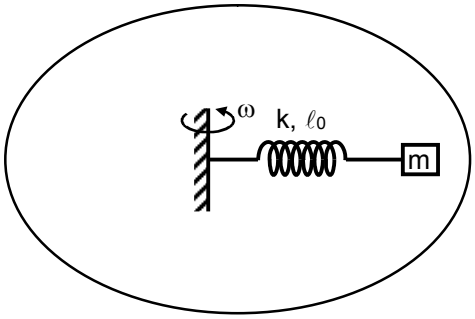
$\theta = 30^\circ$

$$N\sin 30^\circ = m\omega^2\frac{r}{2}$$

$$N\cos 30^\circ = mg$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\omega^2 r}{2g} \qquad \omega^2 = \frac{2g}{\sqrt{3}r}$$

7.



$m\omega^2 (\ell_0 + x) = kx$

$$\left(\frac{\ell_0}{x} + 1\right) = \frac{k}{m\omega^2}$$

$$x = \frac{\ell_0 m\omega^2}{k - m\omega^2}$$

$k >> m\omega^2$

अतः $\frac{x}{\ell_0}$, $\frac{m\omega^2}{k}$ के बराबर है

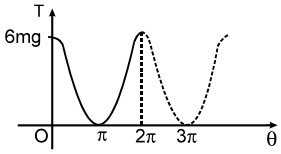
HIGH LEVEL PROBLEMS

1. B पर न्यूटन के नियम से

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{\ell}$$

A व B के मध्य ऊर्जा संरक्षण से

$$mg\ell(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(5\ell g)$$



$mv^2 = m\,5\ell g - 2mg\ell(1 - \cos\theta)$

$T = mg\cos\theta + m\,5\,g - 2mg(1 - \cos\theta)$

$= 3\,mg + 3\,mg\cos\theta$

$= 3mg\,(1 + \cos\theta) = 6\,mg\cos^2(\theta/2)$

2. (a) भूमध्य पर

$T + m\omega^2 R = mg.$

$$\% \frac{\Delta T}{T} = \frac{\omega^2 R}{g}$$

$$= \left(\frac{4\pi^2 \times 6400 \times 1000}{(24 \times 60 \times 60)^2 \times 9.8}\right) \times 100 = 0.34\ \%$$ **Ans.**

(b) $T = \frac{mg}{2}$ ....(1)

$T + m\omega^2 R = mg$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) से

$\omega^2 R = g/2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 2hr$ **Ans.**

3. नियत चाल = 18 km/hr = 5m/sec.
m = 100 kg, r = 100 m

(a) B पर $mg - N_B = \frac{mv^2}{r} = \frac{100 \times 5^2}{100} = 25$

$N_B = 975$ N **Ans.**

D पर $N_D - mg = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad N_D = 1025$ N **Ans.**

(b) B व D पर कार्यशील घर्षण बल शून्य होगा

C पर $\Rightarrow f = mg \sin 45 = 100 \times 10 \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because$ v = नियतांक)

$= 707$ N **Ans.**

(c) BC भाग के लिए

$mg \cos 45 - N_{BC} = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_{BC} = 682$ N

CD भाग के लिए

$N_{CD} - mg \cos 45 = \frac{mv^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N_{CD} = 732$ N

(d) $f \le \mu N \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{f}{N}$

स्थिति जहाँ पर यह अधिकतम है और N न्यूनतम है, वह BC भाग में C स्थिति पर होगी।

$\mu \ge \frac{mg\sin 45^\circ}{mg\cos 45^\circ - \frac{mv^2}{r}} \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{707}{682} = 1.037$ **Ans. (in di)**

4. (a) प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति के मध्य ऊर्जा संरक्षण नियम लगाने पर
m द्रव्यमान के मनके की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में कमी = स्प्रिंग की P.E. में वृद्धि

$\therefore \quad mg R = \frac{1}{2} K (2R - \sqrt{2} R)^2$

या $K = \frac{mg}{R\ (3 - 2\sqrt{2})}$

(b) t = 0 पर
$a_t = g$
$a_c = 0$
न्यूनतम बिन्दु पर
$a_t = 0$
$a_c = 0$
प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति पर मनके का अभिकेन्द्रीय त्वरण शून्य है क्योंकि दोंनो स्थितियों पर चाल शून्य है।
प्रारम्भिक स्थिति पर मनके का स्पर्शरेखीय त्वरण g है।
न्यूनतम स्थिति पर मनके का स्पर्शरेखीय त्वरण शून्य है।

5. चूंकि बेल्ट फिसलती नहीं है A तथा B की रिम पर चाल समान है

$\omega_A r_A = \omega_B r_B$

$\omega_A = 100 \times \frac{25}{10} = 250 \text{ rpm} = 250 \times \frac{2\pi}{60}$ rad/sec.

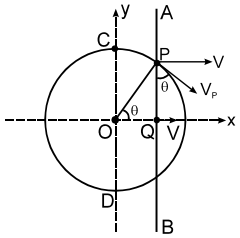
$= \frac{25\pi}{3}$ rad/sec.

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$t = \frac{\frac{25\pi}{3} - 0}{\pi/2} = \frac{50}{3}$ sec.

6. **(a)** जब छड़ AB गति करेगी, बिन्दु 'P' हमेशा वृत्त पर स्थित होगा।

∴ चित्रानुसार इसका वेग 'V_P' वृत्त के अनुदिश होगा। यदि बिन्दु P छड़ 'AB' पर स्थित होगा तो इसका 'x' दिशा में घटक 'V' होना चाहिए।



∴ $V_P \sin\theta = V \quad \Rightarrow \quad V_P = V \operatorname{cosec}\theta$

यहाँ $\cos\theta = \frac{x}{R} = \frac{1}{R} \cdot \frac{3R}{5} = \frac{3}{5}$

∴ $\sin\theta = \frac{4}{5} \quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$

∴ $V_P = \frac{5}{4} V$ **...Ans.**

Sol. (b) $\omega = \frac{V_P}{R} = \frac{5V}{4R}$

ALTERNATIVE SOLUTION : वैकल्पिक हल

Sol. (a) माना 'P' के निर्देशांक (x, y)

$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta.$

$V_X = \frac{dx}{dt} = -R\sin\theta \frac{d\theta}{dt} = V \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{-V}{R\sin\theta}$

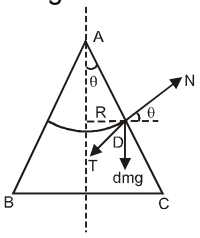
तथा $V_Y = R\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = R\cos\theta\left(-\frac{V}{R\sin\theta}\right) = -V\cot\theta$

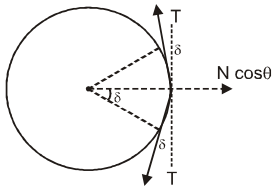
∴ $V_P = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V^2 + V^2\cot^2\theta} = V\operatorname{cosec}\theta$ **...Ans.**

Sol. (b) $\omega = \frac{V_P}{R} = \frac{5V}{4R}$

7. D पर एक छोटा अवयव लेने पर

$N\sin\theta = dmg$





$$N = \frac{dmg}{\sin\theta}$$

$2T\sin\delta - N\cos\theta = dm\omega^2R$

$2T\sin\delta = dm(\omega^2R + g\cot\theta)$

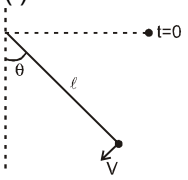
लेकिन δ बहुत छोटा है अतः $\sin\delta \approx \delta$

$$2T\,\delta = \frac{md\ell}{2\pi R}(\omega^2R + g\cot\theta)$$

$$2T\left(\frac{d\ell}{2R}\right) = \frac{md\ell}{2\pi R}(\omega^2R + g\cot\theta)$$

$$T = \frac{mg}{2\pi}\left(\frac{\omega^2R}{g} + \cot\theta\right).$$

8. (i)



θ कोण पर $a_t = g\sin\theta$

अभिकेन्द्रीय त्वरण से

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{\ell} \qquad ...(1)$$

ऊर्जा संरक्षण से

$$0 + mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g\ell\cos\theta} \qquad ....(2)$$

(1) व (2) से

$T = 3mg\cos\theta$

$a_C = 2g\cos\theta$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = g\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

(ii) गोले के वेग का उर्ध्वघटक अधिकतम होगा जब उर्ध्व त्वरण शून्य होगा, अर्थात् उर्ध्व दिशा में कुल बल शून्य होगा

θ कोण पर उर्ध्व दिशा में कुल बल

$$T\cos\theta = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad ...(3)$$

समीकरण से तनाव

$$T = 3mg\cos\theta \qquad ....(4)$$

from (3) & (4) से

$$3\,mg\cos\theta = \frac{mg}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$T = mg\sqrt{3} \qquad \textbf{Ans.}$$

(iii) कुल त्वरण क्षैतिज दिशा में है, अर्थात् $a_{vertical} = 0$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \textbf{Ans.}$$

9. $\vec{F} = m\vec{a}$ or $\vec{F} = m(\vec{a}_x + \vec{a}_y)$ ($\because$ $a_2 = 0$)

$x = a \sin \omega t$

$v_x = \frac{dx}{dt} = aw \cos(\omega t)$

$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \sin(\omega t)$

$v_y = \frac{dy}{dt} = -b\,\omega \sin(\omega t)$

$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -b\,\omega^2 \cos(\omega t)$

अतः $\vec{F} = m(-a\omega^2 \sin\omega t\hat{i} - b\omega^2 \cos\omega t\,\hat{j})$

$\vec{F} = -m\omega^2(a\sin\omega t\hat{i} + b\cos\omega t\,\hat{j})$

$\vec{F} = -m\omega^2(x\hat{i} + y\,\hat{j})$

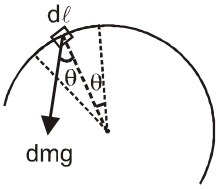
$|\vec{F}| = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$

दिशा $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\cot(\omega t)$ (x-अक्ष से)

or $[(x\hat{i} + y\hat{j})]$ निर्देशांक निकाय में कण का स्थिति सदिश है। ऋणात्मक चिन्ह के कारण बल इसकी विपरीत दिशा में है तथा सदैव मूल बिन्दु की ओर कार्यरत है।

10. गुरूत्व के कारण अवयव पर कार्यरत कुल स्पर्श रेखीय बल

$d\,mg\sin\theta$ है



जंजीर पर लम्बाई के अनुदिश कुल बाह्य बल

$F = \int dmg\sin\theta$

$F = \int_0^{\ell/R} \frac{m}{\ell} g\sin\theta\ R\ d\theta$

$a = \frac{F}{m} = \frac{gR}{\ell}\int_0^{\ell/R} \sin\theta\, d\theta$

$a = \frac{gR}{\ell}\left[-\cos\theta\right]_0^{\ell/R}$

$a = \frac{gR}{\ell}\left[1 - \cos\left(\frac{\ell}{R}\right)\right]$

11. $\omega_t = a$

अतः $v = at = \sqrt{2as}$

तथा $\omega_N = \frac{v^2}{R}$

$bt^4 = \frac{a^2t^2}{R}$

$$t^2 = \frac{a^2}{bR}$$

तथा $bt^4 = \frac{2as}{R}$

$$b\left(\frac{a^2}{bR}\right)^2 = \frac{2as}{R}$$

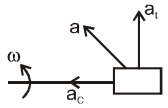
$$R = \frac{a^3}{2bs}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_t^2 + \omega_N^2} = \left(\because \omega_N = \frac{v^2}{R} = \frac{a^2t^2}{R} = \frac{a^4}{bR^2}\right)$$

$$\omega = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a^4}{bR^2}\right)^2}$$

$$\omega = a\sqrt{1 + \left(\frac{4bS^2}{a^3}\right)^2}\ .$$

12. कोणीय वेग, नियत कोणीय त्वरण α से वृद्धिमान है



$a_c = \omega^2 L$, $a_t = \alpha L$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\omega^2 L\right)^2 + (\alpha L)^2} \qquad ....(1)$$

ठीक फिसलन के लिए $\Rightarrow$ $ma = \mu mg$

$\Rightarrow$ $a = \mu g$ .... (2)

समीकरण (1) व (2) से

$$\mu g = \sqrt{\left(\omega^2 L\right)^2 + (\alpha L)^2}$$

$$\omega = \left[\left(\frac{\mu g}{L}\right)^2 - \alpha^2\right]^{1/4}$$ **Ans.**

$\omega = 2$ rad/sec.

13. (a) $\omega = 2av^2$, $R = \frac{1}{2a}$; (b) $\omega = bv^2 / a^2$, $R = a^2 / b$]

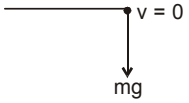
14. (a) $y = (b/2a)y^2$, (b) $R = v^2 / \omega_n = v^2 / \sqrt{\omega^2 - \omega^2_\tau} = (a/b)\,[1 + (xb/a)^2]^{3/2}$]

15. (i) At $\alpha = 0^\circ$ पर

$$a_{net} = \frac{v^2}{R} \uparrow$$

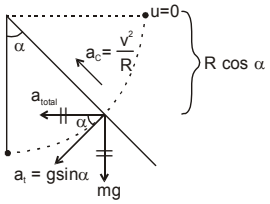
त्वरण ऊपर की ओर

(ii) At $\alpha = 90^\circ$ is at B
$\alpha = 90^\circ$ पर B



त्वरण ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर

(iii) क्षैतिज में



$$\tan\alpha = \frac{v^2/R}{g\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad g\sin\alpha \,.\, \tan\alpha = \frac{v^2}{R} \qquad .....(1)$$

ऊर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR\cos\alpha \qquad ....(2)$$

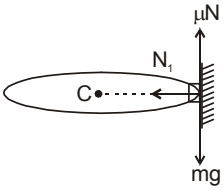
By (1) & (2)
(1) व (2) से

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

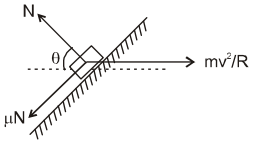
$$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

16.



(a) $N_1 = \frac{mv^2}{R} = \frac{1\times100}{10\times50}$

$N_1 = 0.2$ N



(b)

$$N = \frac{mv^2}{R}\cos\theta \qquad ....(1)$$

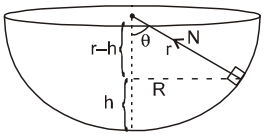
ठीक फिसलने के लिए

$$\mu N = \frac{mv^2}{R}\sin\theta \qquad .....(2)$$

समी० (1) व (2) से

$$\tan\theta = \mu = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{0.58} = 1.724 \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$ **Ans.**

17.



$$\frac{N\sin\theta = m\omega^2 R}{N\cos\theta = mg}$$

$\therefore$ $\tan\theta = \dfrac{\omega^2 R}{g}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{R}{r-h} = \dfrac{\omega^2 R}{g}$ $\Rightarrow$ $\omega^2 = g/(r-h)$ .....(1)

(a) $h > 0$ $\Rightarrow$ $r - \dfrac{g}{\omega^2} > 0$

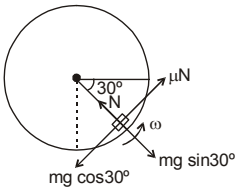
$\Rightarrow$ $\omega > \sqrt{g/r} = \sqrt{\dfrac{9.8}{0.1}} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ rad/second **Ans.**

(b) $g = \omega^2 (r-h)$

$$\frac{\Delta g}{g} = -\frac{\Delta h}{h} = -\frac{10^{-4}}{h}$$

h का अधिकतम मान 0.1 है इसलिए $\Delta g = -\dfrac{g\times 10^{-4}}{h} = -9.8\times 10^{-3}$ m/s^2 **Ans.**

18.



$N - mg\sin 30^\circ = m\omega^2 R$ .....(1)

$mg\cos 30^\circ = \mu N$ .....(2)

$\omega = 2\pi$ rad/s

$\Rightarrow$ $\dfrac{\sqrt{3}mg}{2} = \mu\left[\dfrac{mg}{2} + m\omega^2 R\right]$ $\Rightarrow$ $\dfrac{g}{2}(\sqrt{3}-\mu) = \omega^2 R$

$$R = \frac{g\ (\sqrt{3}-\mu)}{2\omega^2}$$

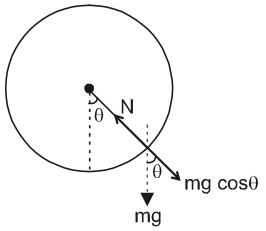
$$R = \frac{9.8\ (\sqrt{3}-0.6}{2(2\pi)^2} = 0.24 \text{ m}$$ **Ans.**

न्यूनतम कोणीय चाल के लिए, उच्चतम बिन्दु पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया शून्य होनी चाहिए।

$m\omega^2 R = mg$

$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}} = \sqrt{\dfrac{9.8}{0.24}} = 6.4$ rad/second

तथा शीर्ष जिसके लिए ब्लॉक बेलन पर नहीं फिसलेगा, है



$N - mg\cos\theta = m\omega^2 R$

$N = mg\cos\theta + m\omega^2 R$

$f_{r\,max} = \mu N = \mu(mg\cos\theta + m\omega^2 R)$

ब्लॉक के बेलन पर नहीं फिसलने पर

$mg\sin\theta \le f_{rmax}$

$mg\sin\theta \le \mu\, mg\cos\theta + \mu\, m\omega^2 R$

$$\omega \ge \frac{g\sin\theta - mg\cos\theta}{\mu R}$$

$$\omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu R}(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

ब्लॉक कहीं भी प्रतिस्थापित हो सकता है। यदि ω, RHS के अधिकतम सम्भव मान से अधिक है। RHS का मान है

$$\omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu R}(1+\mu^2)^{1/2}} \quad ; \quad \omega \ge 8.9 \text{ rad/sec.} \quad ; \quad \omega_{min} = 8.9 \text{ rad/sec .}$$

19. A पर अभिकेन्द्रीय त्वरण = $\omega^2 R$

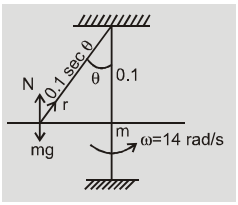
AB के अनुदिश त्वरण = $\omega^2 R\cos\theta$

B बिन्दु तक पहुंचने में लिया गया समय

$$L = 0 + \frac{1}{2}(\omega^2 R\cos\theta)t^2 \qquad (L << R)$$

$$t = \sqrt{\frac{2\ L}{\omega^2 R\cos\theta}} \qquad \textbf{Ans.}$$

20.



$T = kx = 147(0.1\sec\theta - 0.1)$

$T\sin\theta = m\omega^2 r$

$\Rightarrow \quad 147(0.1\sec\theta - 0.1)\sin\theta = 0.3 \times (14)^2 (0.1\tan\theta)$

$1 - \cos\theta = 0.4$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{3}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 53^\circ$$

$T = 147(0.1\sec 53 - 0.1) = 9.8$ N

$$N = T\cos\theta - mg = 9.8 \times \frac{3}{5} - 0.3 \times 9.8 = 2.94 \text{ N}$$

N = 2.94 N **Ans.**

21. The system is in equilibrium when

$m_1 g\sin\theta = m_2 g$

$$\text{or} \qquad \sin\theta = \frac{m_2}{m_1}$$

22. (a) निकाय साम्यावस्था में है

$m_1 g\sin\theta = m_2 g$

$$\text{या} \qquad \sin\theta = \frac{m_2}{m_1}$$

(b) माना m_1 का स्पर्शरेखीय त्वरण a है

$\therefore \quad m_2 g - m_1 g\sin\theta = (m_1 + m_2)a$

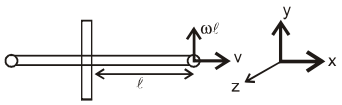
$$a = \frac{40-25}{9} = \frac{15}{9}\ m/s^2$$

m_1 का अभिकेन्द्रीय त्वरण शून्य है। $\because$ m_1 की चाल शून्य है।

$\therefore$ m_1 के त्वरण का परिमाण = $\frac{15}{9}$ m/s^2 .

23. वलय को जमीन तक गिरने में लगा समय

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



अभिकेन्द्रीय बल से

$$m\omega^2 x = ma = mv\,\frac{dv}{dx}$$

$$\omega^2 x = v\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^{\ell} \omega^2 x \;\; d \;\; x = \int_0^{v} v dv$$

$$\omega^2 \frac{L^2}{2} = \frac{v^2}{2}$$

$v_x = \omega L$

$x = \omega\ell$. $T = \omega\ell\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v_y = \omega L$

$y = \omega\ell T = \omega\ell\sqrt{\frac{2h}{g}}$

केन्द्र से एक वलय की दूरी

$= \sqrt{y^2 + (x+\ell)^2}$

छड़ छोड़ने के बाद वलय के जमीन पर गिरने वाले बिन्दु के मध्य दूरी

$= 2\sqrt{y^2 + (x+\ell)^2}$

जहाँ $x = y = \omega\ell\sqrt{\frac{2h}{g}}$

24. $a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\,\omega^2 R = \frac{\omega^2 R}{3}$

$T = \frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1}\,\omega^2 R = \frac{4}{3}\,m\omega^2 R$