प्रत्यास्थता और श्यानता (ELASTICITY & VISCOSITY)

प्रत्यास्थता व अप्रत्यास्थता

किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण जिसके कारण यह अपना मूल विन्यास फिर से प्राप्त कर लेती है (अर्थात् आकृति व आकार) जब बाह्य विरूपक बल हटा लिया जाता है, तो यह गुण प्रत्यास्थता कहलाता है। किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण जिसके कारण वस्तु अपना मूल विन्यास फिर से प्राप्त नहीं करती जब बाह्य बल हटा लिया जाता है। यह गुण सुघट्यता (अप्रत्यास्थता) कहलाती है।

विरूपक बल : एक बाह्य बल जो किसी वस्तु पर आरोपित करने पर इसका आकार या आकृति या दोनों परिवर्तित कर देता है। विरूपक बल कहलाता है।

पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु : जब विरूपक बल हटा लिया जाता है तो यदि वस्तु अपनी मूल आकृति को पूर्णतया फिर से प्राप्त कर लेती है तो यह पूर्ण प्रत्यास्थ कहलाती है। चूंकि कोई भी वस्तु अपनी मूल आकृति फिर से पूर्णतया नहीं प्राप्त कर सकती इसलिए पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु का विचार केवल काल्पनिक विचार है। क्वार्टज फाइबर, पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु के निकटतम है।

पूर्ण सुघट्य (अप्रत्यास्थ वस्तु) : एक वस्तु पूर्ण अप्रत्यास्थ कहलाती है, यदि यह अपनी मूल आकृति थोड़ी सी भी प्राप्त नहीं करती हो चाहे विरूपक बल हटा लिया जाये। चूंकि प्रत्येक पदार्थ विरूपक बल हटाने पर आंशिक रूप से अपनी मूल आकृति प्राप्त करता है। इसलिये पूर्ण सुघट्य (अप्रत्यास्थ) वस्तु का विचार भी एक काल्पनिक विचार है पैराफिन वेक्स, गीली मिट्टी पूर्ण सुघट्य (अप्रत्यास्थ) वस्तु के निकटतम है।

प्रत्यास्थता का कारण : एक ठोस में परमाणु व अणु इस प्रकार व्यवस्थित होते है कि प्रत्येक अणु पर पड़ौसी अणुओं के कारण बल लगता है। ये बल अन्तराणविक बल कहलाते है। जब वस्तु पर कोई विरूपक बल आरोपित नहीं होता तब ठोस (अर्थात् वस्तु) का प्रत्येक अणु इसकी साम्यावस्था स्थिति में होता है और ठोस के अणुओं के मध्य अन्तराणविक बल न्यूनतम होता है।

वस्तु पर विरूपक बल आरोपित करने पर अणु या तो एक दूसरे के पास आते है या एक दूसरे से दूर जाते है। इसके परिणामस्वरूप अणु उनकी साम्यावस्था से विस्थापित हो जाते हैं। दूसरे शब्दों में अन्तराणविक बल परिवर्तित हो जाते है व अणुओं पर प्रत्यानयन बल उत्पन्न होते हैं। जब विरूपक बल हटा लिया जाता है, तो ये प्रत्यानयन बल ठोस के अणुओं को उनकी अपनी साम्यावस्था स्थितियों में लाते है और इस प्रकार ठोस (या वस्तु) अपनी मूल आकृति फिर से प्राप्त करता है।

प्रतिबल

जब वस्तु पर विरूपक बल आरोपित किया जाता है तो वस्तु के अन्दर समान प्रत्यानयन बल विपरीत दिशा में उत्पन्न होता है। वस्तु के प्रति इकाई क्षेत्रफल पर प्रत्यानयन बल प्रतिबल कहलाता है।

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{प्रत्यानयन बल}}{\text{वस्तु का क्षेत्रफल}} = \frac{F}{A}$$

प्रतिबल की इकाई N/m^2 है। प्रतिबल तीन प्रकार का होता है।

1. अनुदैर्ध्य या अभिलम्ब प्रतिबल

जब वस्तु एक विमीय है तो प्रति इकाई क्षेत्रफल पर बल, अनुदैर्ध्य प्रतिबल कहलाता है।

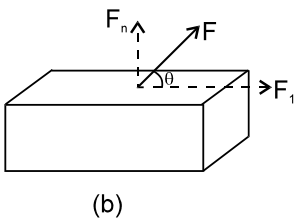
यह दो प्रकार का होता है : (a) सम्पीड़न प्रतिबल (b) तनन प्रतिबल

उदाहरण :

(i) चित्र में दर्शाये एक ठोस गुटके पर विचार करें। माना F उस फलक पर आरोपित किया जाता है, जिसका क्षेत्रफल A है। को दो घटकों में वियोजित करने पर :

$F_n = F \sin\theta$ अभिलम्ब बल तथा $F_t = F \cos\theta$ स्पर्श रेखीय बल कहलाता है।

$\therefore$ अभिलम्ब (तनन) प्रतिबल $= \frac{F_n}{A} = \frac{F\sin\theta}{A}$



(b)

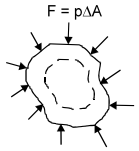
2. स्पर्श रेखीय या अपरूपण प्रतिबल

यह, वस्तु के पृष्ठ के स्पर्श रेखीय प्रति इकाई क्षेत्रफल पर कार्यरत प्रत्यानयन बल के रूप में परिभाषित किया जाता है। उपरोक्त प्रदर्शित चित्र के संदर्भ में।

स्पर्श रेखीय (अपरूपण) प्रतिबल = $\frac{F_t}{A} = \frac{F\cos\theta}{A}$

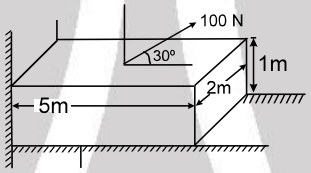
प्रतिबल का प्रभाव विरूपण उत्पन्न करना या आकार, आयतन और आकृति में परिवर्तन करना है। (अर्थात् वस्तु का अभिविन्यास)

3. आयतन प्रतिबल : जब वस्तु की सम्पूर्ण सतह पर, सतह के लम्बवत् बल कार्यरत होता है, तो प्रति इकाई क्षेत्रफल पर कार्यरत बल दाब कहलाता है। दाब का प्रभाव आयतन परिवर्तन करना है। वस्तु की समांगता पर निर्भर करते हुए वस्तु की आकृति बदल भी सकती है और नहीं भी।



Solved Example

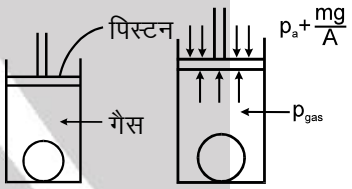
Example 1. एक स्थिर गुटके पर अनुदैर्ध्य प्रतिबल और स्पर्श रेखीय प्रतिबल ज्ञात करो।



Solution : अनुदैर्ध्य या अभिलम्ब प्रतिबल $\Rightarrow$ $\sigma_l = \frac{100\sin 30^\circ}{5\times 2} = 5\ N/m^2$

स्पर्श रेखीय प्रतिबल $\Rightarrow$ $\sigma_t = \frac{100\ \cos\ 30^\circ}{5\times 2} = 5\sqrt{3} N/m^2$

Example 2. $\frac{10}{\pi}$ सेमी० त्रिज्या की गोलाकार वस्तु पर आयतन प्रतिबल ज्ञात करो यदि पिस्टन का क्षेत्रफल व द्रव्यमान क्रमशः 50 cm^2 व 50 kg है। यह गैस से भरे एक बेलन में है।



Solution : $p_{gas} = \frac{mg}{A} + p_a = \frac{50\times 10}{50\times 10^{-4}} + 1\times 10^5 = 2\times 10^5\ N/m^2$

आयतन प्रतिबल = $p_{gas} = 2\times 10^5\ N/m^2$

विकृति

वस्तु के विन्यास (अर्थात् आकृति, लम्बाई या आयतन) में परिवर्तन तथा इसके मूल विन्यास का अनुपात विकृति कहलाता है।

अर्थात् विकृति $\in$ = $\frac{\text{विन्यास में परिवर्तन}}{\text{मूल विन्यास}}$ यह ईकाईहीन है।

विकृति के प्रकार

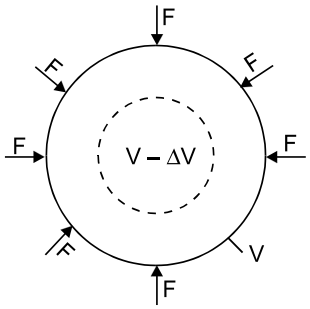
विकृति तीन प्रकार की होती है –

(i) अनुदैर्ध्य विकृति : इस प्रकार की विकृति तब उत्पन्न होती है जब विरूपक बल वस्तु की लम्बाई में परिवर्तन करता है। यह वस्तु की लम्बाई में परिवर्तन व मूल लम्बाई के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है।

L लम्बाई के तार पर विचार करें : जब तार को बल F के द्वारा खींचा जाता है, तो माना तार की लम्बाई में परिवर्तन ΔL है,

$\therefore$ अनुदैर्ध्य विकृति, $\in_\ell = \frac{\text{लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{मूल लम्बाई}}$ या अनुदैर्ध्य विकृति = $\frac{\Delta L}{L}$

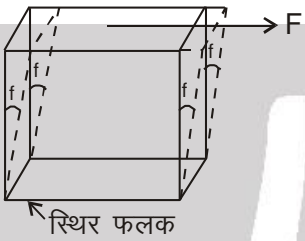
(ii) आयतन विकृति : इस प्रकार की विकृति तब उत्पन्न होती है जब विरूपक बल चित्र में प्रदर्शित वस्तु के आयतन में परिवर्तन करता है। यह वस्तु के आयतन में परिवर्तन व उसके मूल आयतन के अनुपात के बराबर होता है।

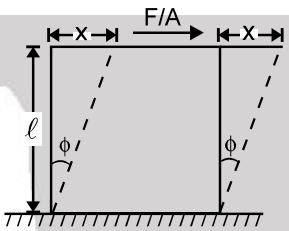


यदि ΔV = आयतन में परिवर्तन V = मूल आयतन

$\in_v$ = आयतन विकृति = $\frac{\Delta V}{V}$

(iii) अपरूपण विकृति : इस प्रकार की विकृति तब उत्पन्न होती है जब विरूपक बल वस्तु की आकृति में परिवर्तन करता है। यह उस कोण (ϕ) के रूप में परिभाषित है जिससे स्थिर फलक के लम्बवत् फलक चित्रानुसार घूम जाती है।





$\tan \phi$ या $\phi = \frac{x}{\ell}$

हुक का नियम व प्रत्यास्थता गुणांक

इस नियम के अनुसार, प्रत्यास्थ सीमा के अन्दर प्रतिबल, विकृति के समानुपाती होता है

अर्थात् प्रतिबल $\propto$ विकृति

या प्रतिबल = नियतांक × विकृति या $\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$ = प्रत्यास्थता गुणांक

यह नियतांक प्रत्यास्थता गुणांक कहलाता है।

इस प्रकार प्रत्यास्थता गुणांक प्रतिबल व विकृति के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है।

प्रत्यास्थता गुणांक वस्तु के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है और इसकी विमाओं (अर्थात् लम्बाई, आयतन आदि) पर निर्भर नहीं करता।

मात्रक : प्रत्यास्थता गुणांक का SI मात्रक Nm^{-2} या पास्कल (Pa) है।

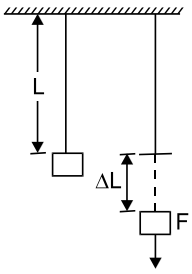
प्रत्यास्थता गुणांक के प्रकार

विकृति के संगत तीन प्रकार के प्रत्यास्थता गुणांक होते है।

1. यंग का प्रत्यास्थता गुणांक (Y)
2. आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (K)
3. दृढ़ता गुणांक (η)

1. यंग का प्रत्यास्थता गुणांक

यह अभिलम्ब प्रतिबल व अनुदैर्ध्य विकृति का अनुपात होता है।



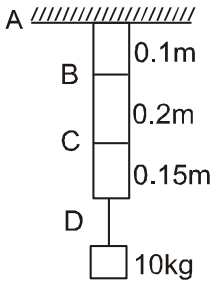
अर्थात् यंग गुणांक (Y) = $\frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$

अभिलम्ब प्रतिबल = F/A,

अनुदैर्ध्य विकृति = $\Delta L/L$

$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{FL}{A\Delta L}$

Example 3. बिन्दु B, C व D में विस्थापन ज्ञात करो।



$Y_{AB} = 2.5 \times 10^{10}\ N/m^2$

$Y_{BC} = 4 \times 10^{10}\ N/m^2$

$Y_{CD} = 1 \times 10^{10}\ N/m^2$

$A = 10^{-7}\ m^2$

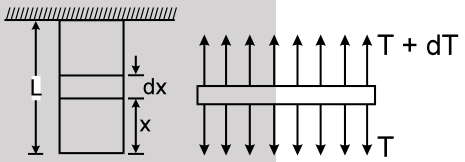
Solution : $\Delta L_B = \Delta L_{AB} = \frac{FL}{AY} = \frac{MgL}{AY} = \frac{10\times10\times0.1}{10^{-7}\times2.5\times10^{10}} = 4 \times 10^{-3}\ m = 4mm$

$\Delta L_C = \Delta L_B + \Delta L_{BC} = 4 \times 10^{-3} + \frac{100\times0.2}{10^{-7}\times4\times10^{10}} = 4 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-3} = 9mm$

$\Delta L_D = \Delta L_C + \Delta L_{CD} = 9 \times 10^{-3} + \frac{100\times0.15}{10^{-7}\times1\times10^{10}} = 9 \times 10^{-3} + 15 \times 10^{-3} = 24\ mm$

छड़ के भार के कारण इसका विस्तार

माना छड़ का स्वंय का भार 'W', अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 'A" व लम्बाई 'L' है। पेंदे से 'x' दूरी पर एक अल्पांश पर विचार करते है तो



$$T = \frac{W}{L}x$$

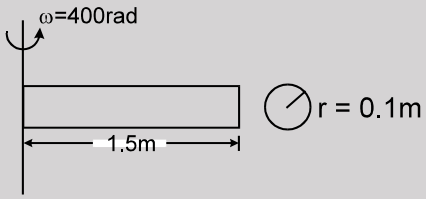
अल्पांश 'dx' में विस्तार = $\frac{T.dx}{AY}$

कुल विस्तार = $s = \int_0^L \frac{Tdx}{AY} = \int_0^L \frac{Wxdy}{LAY}$

नोट : इसका कुल भार द्रव्यमान केन्द्र पर, व प्रभावी लम्बाई $\ell/2$ मानकर किया जा सकता है।

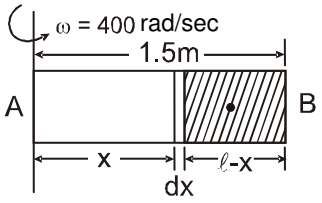
Solved Example

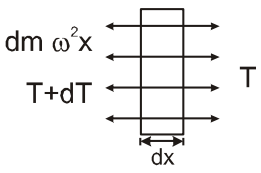
Example 4. दिया है $Y = 2 \times 10^{11}\ N/m^2$ $\rho = 10^4\ kg/m^3$ छड़ में विस्तार ज्ञात करो।

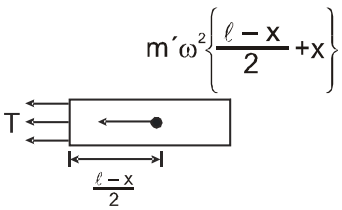


Solution : छायांकित भाग का द्रव्यमान $m' = \frac{m}{\ell}(\ell - x)$ [जहां m = कुल द्रव्यमान = ρ A l]

$T = m'\ \omega^2\left[\frac{\ell - x}{2} + x\right] \Rightarrow T = \frac{m}{\ell}\ (\lambda - x)\ \omega^2\left(\frac{\ell + x}{2}\right)$ $T = \frac{m\omega^2}{2\ell}\ (\ell^2 - x^2)$







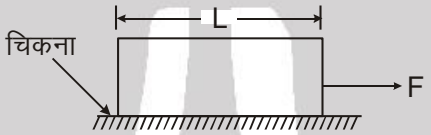
A पर तनाव अधिकतम $\left(\frac{m\omega^2\ell}{2}\right)$ व 'B' पर न्यूनतम (शून्य), होगा। 'dx' चौड़ाई के अल्पांश की लम्बाई में विस्तार $=\left(\frac{m\omega^2\ell}{2}\right)$ है।

कुल विस्तार $\delta = \int \frac{Tdx}{AY} = \int_0^{\ell} \frac{m\omega^2(\ell^2 - x^2)}{2\ell\ AY}\ dx$

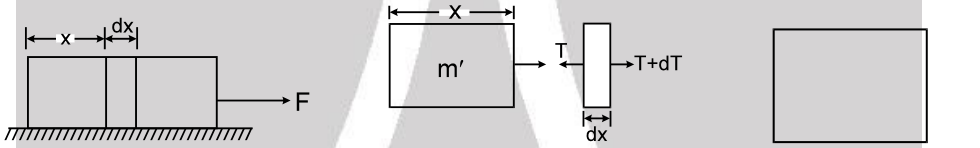
$$\delta = \frac{m\omega^2}{2\ell AY}\left[\ell^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{m\omega^2 \times 2\ell^3}{2\ell AY \times 3} = \frac{m\omega^2\ell^2}{3AY} = \frac{\rho A\ell\omega^2\ell^2}{3AY}$$

$$\delta = \frac{\rho\omega^2\ell^3}{3Y} = \frac{10^4 \times (400) \times (1.5)^3}{3 \times 2 \times 10^{11}} = 9 \times 10^{-3}\ m = 9mm$$

Example 5. गुटके में विस्तार ज्ञात करो यदि गुटके के द्रव्यमान, अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल व यंग गुणांक क्रमशः m, A व y है।



Solution :



त्वरण $a = \frac{F}{m}$ तो $T = m'a$ जहाँ $m' = \frac{m}{\ell}x$

$$T = \frac{m}{\ell} \times \frac{F}{m} = \frac{F\ x}{\ell}$$

अल्पांश 'dx' में विस्तार $= \frac{Tdx}{AY} \Rightarrow$ कुल विस्तार, $\delta = \int_0^{\ell} \frac{Tdx}{AY}\ d = \int_0^{\ell} \frac{Fxdx}{A\ell Y} = \frac{F\ell}{2AY}$

नोट : इस प्रश्न को करने की कोशिश करें, यदि गुटके व सतह के बीच घर्षण दिया गया है। (μ = घर्षण गुणांक) व

स्थिति : (I) $F < \mu mg$ (II) $F > \mu mg$

Answer दोंनो स्थितियों में उत्तर होगा $\frac{F\ell}{2AY}$

2. आयतन प्रत्यास्थता गुणांक :

यह अभिलम्ब प्रतिबल व आयतन विकृति के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है।

अर्थात् $B = \frac{\text{दाब}}{\text{आयतन विकृति}}$

प्रतिबल, प्रति इकाई क्षेत्रफल पर अभिलम्ब बल है एवं यह आरोपित दाब (p) के बराबर है।

$B = \frac{p}{\frac{-\Delta V}{V}} = -\frac{pV}{\Delta V}$ ऋण चिन्ह दर्शाता है कि दाब (p) में वृद्धि आयतन में कमी (ΔV) का कारण है।

सम्पीड्यता : आयतन प्रत्यास्थता गुणांक का व्युत्क्रम सम्पीड्यता कहलाता है। सम्पीड्यता की इकाई SI में $N^{-1}\ m^2$ या पास्कल$^{-1}$ (Pa^{-1}) है।

ठोसों का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक, द्रवों के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक का पचास गुना है एवं गैसों के लिए यह ठोसों की तुलना में 10^{-8} गुना है।

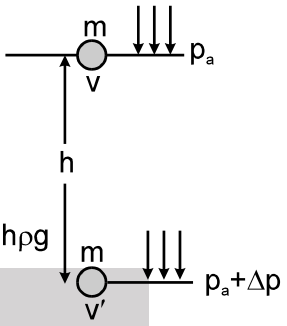
$B_{\text{ठोस}} > B_{\text{द्रव}} > B_{\text{गैस}} \Rightarrow$ गैस का समतापी प्रत्यास्थता गुणांक B = P (गैस का दाब)

गैस का रूद्धोष्म प्रत्यास्थता गुणांक $B = \gamma \times P$ जहां $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ है।

Solved Example

Example 6. झील की वह गहराई ज्ञात करो जिस पर जल का घनत्व सतह से 1% अधिक है। दी गई सम्पीड्यता $k = 50 \times 10^{-6}$ /atm है।

Solution : $B = \dfrac{\Delta p}{-\dfrac{\Delta V}{V}}$ $\qquad \dfrac{\Delta V}{V} = -\dfrac{\Delta p}{B}$



हम जानते है $p = p_{atm} + h\rho g$ या $m = \rho V$ = नियतांक

$d\rho . v + dv . \rho = 0$

$d\rho\, V + dV . \rho = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{d\rho}{\rho} = -\dfrac{dV}{V}$

अर्थात् $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} = \dfrac{\Delta p}{B} \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{\Delta\rho}{\rho} = \dfrac{1}{100}$

$\dfrac{1}{100} = \dfrac{h\rho g}{B}$ [ρ = नियतांक मानते हुए]

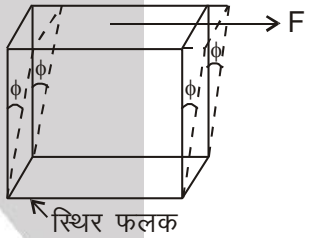
$h\rho g = \dfrac{B}{100} = \dfrac{1}{100\ k} \Rightarrow h\rho g = \dfrac{1\times1\times10^5}{100\ \times50\times10^{-6}}$

$h = \dfrac{10^5}{5000\times10^{-6}\times1000\times10} = \dfrac{100\times10^3}{50} = 2\text{km}$ **Ans.**

3. दृढ़ता गुणांक :

यह स्पर्श रेखीय प्रतिबल व अपरूपण विकृति के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। हम एक घन पर विचार करते है जिसका निचला फलक स्थिर है व ऊपरी फलक जिसका क्षेत्रफल A है, पर स्पर्श रेखीय बल F आरोपित है।

∴ स्पर्श रेखीय प्रतिबल = F/A.



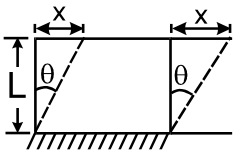
माना कि घन की ऊर्ध्वाधर भुजाएं कोण ϕ से विस्थापित होती है जो अपरूपण विकृति कहलाती है।

∴ दृढ़ता गुणांक $\eta = \dfrac{\text{स्पर्श रेखीय प्रतिबल}}{\text{अपरूपण विकृति}}$ या $\eta = \dfrac{F/A}{\phi} = \dfrac{F}{A\phi}$

Solved Example

Example 7. 5 cm भुजा के रबर के घन की एक भुजा स्थिर है जबकि एक स्पर्श रेखीय बल 1800 N को विपरीत फलक पर आरोपित किया जाता है। अपरूपण विकृति एवं विकृत फलक का पार्श्व विस्थापन ज्ञात कीजिए। रबर के लिए दृढ़ता गुणांक $2.4 \times 10^6\ N/m^2$ है।

Solution : $L = 5 \times 10^{-2}$ m $\Rightarrow \dfrac{F}{A} = \eta\ \dfrac{x}{L}$

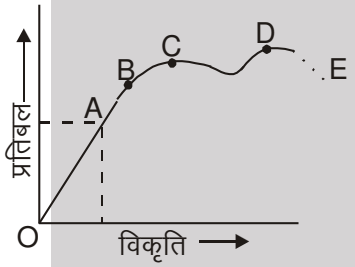


विकृति $\theta = \dfrac{F}{A\eta} = \dfrac{1800}{25\times10^{-4}\times2.4\times10^6} = \dfrac{180}{25\times24} = \dfrac{3}{10}$ = 0.3 radian

$\dfrac{x}{L} = 0.3 \Rightarrow x = 0.3 \times 5 \times 10^{-2} = 1.5 \times 10^{-2}$ m = 1.5 cm **Ans.**

प्रतिबल के साथ विकृति में परिवर्तन

जब एक तार एक भार द्वारा खींचा जाता है, यह देखा जाता है कि भार के अल्प मान के लिए तार में उत्पन्न विस्तार भार के समानुपाती है। भार हटाने पर तार इसकी मूल लम्बाई तक वापस आ जाता है। तार इसकी मूल विमाओं तक वापस केवल तब लौटता है, जब आरोपित भार एक निश्चित सीमा से कम या बराबर हो। यह सीमा प्रत्यास्थता सीमा कहलाती है। इस प्रकार प्रत्यास्थता सीमा, वह अधिकतम प्रतिबल है, जिसके हटाने पर वस्तुएं उनकी मूल विमाऐं फिर से प्राप्त कर लेती है। प्रदर्शित चित्र में इस प्रकार का व्यवहार ग्राफ के OB भाग से निरूपित किया जाता है। अब जैसे ही हम प्रतिबल को ओर बढ़ाते है। एक बिन्दु A प्राप्त होता है प्रतिबल, विकृति के समानुपाती है। बिन्दु A से B पर पहुँचने पर हम प्रतिबल को हटाते है तो तार इसकी मूल विमाओं में वापस आता है। परन्तु प्रतिबल, विकृति के समानुपाती नहीं है।



OB → प्रत्यास्थता सीमा (Elastic limit)
OA → समानुपाती सीमा (Limit of Proportionality)
C → परासम्भव बिन्दु (Yield Point)
CD → सुघट्य व्यवहार (Plastic behaviour)
D → विभंजक बिन्दु (Ultimate point)
DE → भंजन (खण्डन) (Fracture)

जैसे ही हम बिन्दु B के पार जाते है तो प्रतिबल में बहुत अल्प वृद्धि के लिए भी उत्पन्न विकृति बहुत अधिक होती है। इस प्रकार का व्यवहार बिन्दु C के आस–पास प्रेक्षित होता है एवं इस स्थिति पर तार श्यान द्रव की तरह बहने लगता है। बिन्दु C परासम्भव बिन्दु कहलाता है। यदि प्रतिबल ओर बढ़ाया जाये, तो तार विभंजक बिन्दु D पर टूट जाता है। इस बिन्दु के संगत प्रतिबल भंजन प्रतिबल या पदार्थ की तनन सामर्थ्य कहा जाता है। जिस पदार्थ के लिए सुघट्य परास CD आपेक्षिक रूप से अधिक होती है। तन्य पदार्थ कहलाता है। ये पदार्थ टूटने से पहले स्थायी रूप से विकृत हो जाते है। जिन पदार्थो के लिए सुघट्य सीमा आपेक्षिक रूप से कम होती है भंगुर पदार्थ कहलाते है। ये पदार्थ प्रत्यास्थता सीमा पार होते ही टूट जाते है।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. भंजन प्रतिबल = भंजन बल /अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल
2. पदार्थ के लिए भंजन प्रतिबल नियत है।
3. एक दिये गये पदार्थ का भंजक बल तार के अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल पर निर्भर करता है।
4. कार्यकारी प्रतिबल सदैव भंजक प्रतिबल से कम रखा जाता है ताकि सुरक्षा गुणांक = भंजक प्रतिबल /कार्यकारी प्रतिबल का मान अधिक हो सके।
5. भंजक विकृति = विस्तार या सम्पीड़न /मूल विमा
6. पदार्थ के लिए भंजन विकृति नियत होती है।

प्रत्यास्थ उत्तर प्रभाव

हम जानते है कि कुछ पदार्थो की वस्तुएं उनका मूल विन्यास प्राप्त करने में कुछ समय लेती है, जब विरूपक बल हटाया जाता है। विरूपक बल हटाने पर वस्तुओं द्वारा मूल विन्यास प्राप्त करने में लगा समय प्रत्यास्थ उत्तर प्रभाव कहलाता है। क्वार्टज फाइबर व फॉस्फर ब्रॉन्ज (कांसा) के लिए प्रत्यास्थ उत्तर प्रभाव नगण्य रूप से अल्प है। इस कारण से क्वार्टज व फॉस्फर ब्रॉन्ज से बने सस्पेन्शन, गेल्वेनोमीटर व इलेक्ट्रोमीटर में उपयोग किये जाते है।

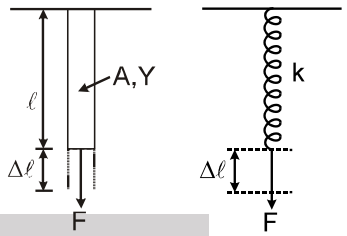
ग्लास फाइबर के लिए प्रत्यास्थ उत्तर प्रभाव बहुत ज्यादा है। फाइबर को इसकी मूल अवस्था में वापस आने में घण्टों लग जाते है।

प्रत्यास्थ श्रांति

पदार्थ पर बार–बार विकृति के कारण पदार्थ की सामर्थ्य में हानि प्रत्यास्थ श्रांति (लचक की थकान) कहलाती है। इसलिए लम्बे समय तक उपयोग में आने के बाद पुल असुरक्षित घोषित कर दिये जाते है।

छड़ का स्प्रिंग के रूप में विश्लेषण

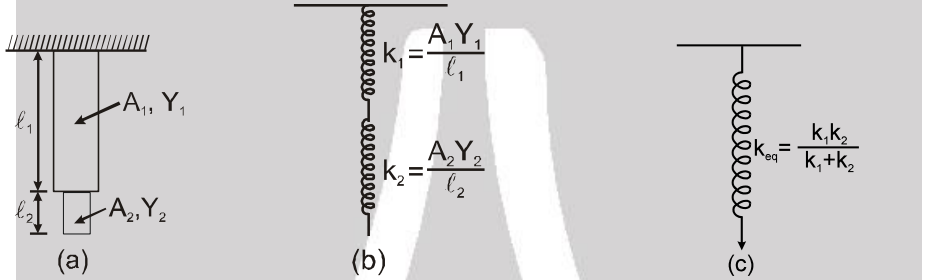
$Y = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} \Rightarrow Y = \frac{F\ell}{A\Delta\ell}$ या $F = \frac{AY}{\ell}\Delta\ell$



$\frac{AY}{\ell}$ = नियत, छड़ के पदार्थ के प्रकार व ज्यामिती पर निर्भर करता है।

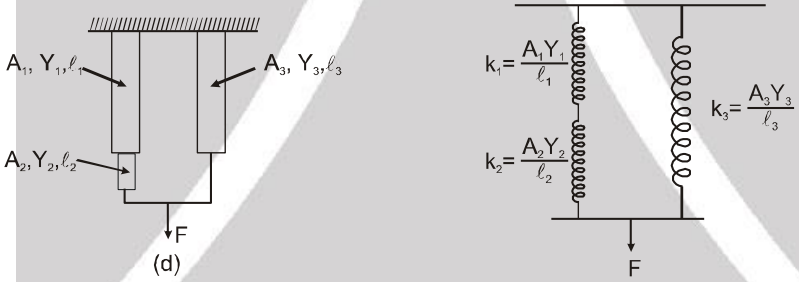
$F = k\Delta\ell$

जहां $k = \frac{AY}{\ell}$ = तुल्य स्प्रिंग नियतांक।



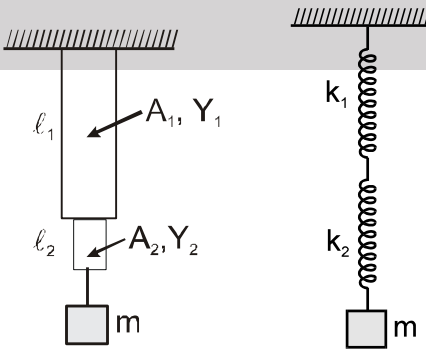
चित्र (a) में प्रदर्शित छड़ो के निकाय के लिए प्रतिस्थापित स्प्रिंग निकाय चित्र (b) में प्रदर्शित है (दो स्प्रिंग श्रेणीक्रम में) चित्र (c) तुल्य स्प्रिंग निकाय को प्रदर्शित करता है।

चित्र (d) छड़ों के दूसरे संयोजन व उनके प्रतिस्थापित स्प्रिंग निकाय को प्रदर्शित करता है।



Solved Example

Example 8. एक 'm' द्रव्यमान चित्रानुसार छड़ों से जुड़ा है। यह द्रव्यमान थोड़ा–सा खींचा जाता है व छोड़ा जाता है, क्या द्रव्यमान की गति स.आ.ग. है। यदि हाँ तो आवर्तकाल ज्ञात करो।

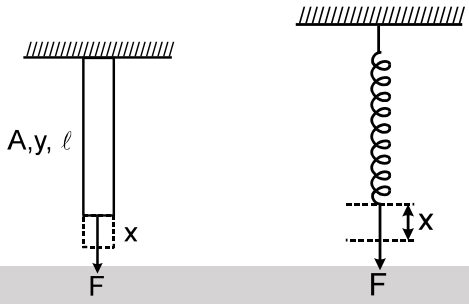


Solution : $k_{eq} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$

जहाँ $k_1 = \frac{A_1Y_1}{\ell_1}$ तथा $k_2 = \frac{A_2Y_2}{\ell_2}$

एक तने हुए तार या छड़ में संचित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा

तुल्य स्प्रिंग में संचित विकृति ऊर्जा



$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

जहाँ $x = \frac{F\ell}{AY}$, $k = \frac{AY}{\ell}$ $\qquad U = \frac{1}{2}\frac{AY}{\ell}\frac{F^2\ell^2}{A^2Y^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F^2\ell}{AY}$

समीकरण पुनः व्यवस्थित की जा सकती है।

$$U = \frac{1}{2}\frac{F^2}{A^2} \times \frac{\ell A}{Y} \qquad [\ell A = \text{छड़ का आयतन},\ F/A = \text{प्रतिबल}]$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{(\text{प्रतिबल})^2}{Y} \times \text{आयतन}$$

पुनः $U = \frac{1}{2}\frac{F}{A} \times \frac{F}{AY} \times A\ell \qquad [\text{विकृति} = \frac{F}{AY}]$

$$U = \frac{1}{2} \text{ प्रतिबल} \times \text{विकृति} \times \text{आयतन}$$

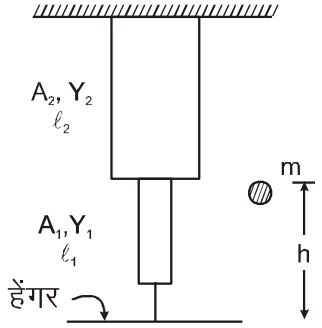
पुनः $U = \frac{1}{2}\frac{F^2}{A^2Y^2} A\ell Y$

$$U = \frac{1}{2} Y (\text{विकृति})^2 \times \text{आयतन}$$

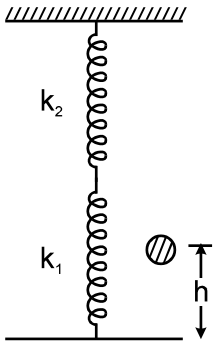
विकृति ऊर्जा घनत्व $= \frac{\text{विकृति ऊर्जा}}{\text{आयतन}} = \frac{1}{2}\frac{(\text{प्रतिबल})^2}{Y} = \frac{1}{2}Y(\text{विकृति})^2 = \frac{1}{2}$ प्रतिबल × विकृति

Solved Example

Example 9. 'm' द्रव्यमान की एक गेंद 'h' ऊचाँई से गिरती है जो टकराने के बाद द्रव्यमानरहित हेंगर से चिपक जाती है। यह घूमता नहीं है। छड़ में अधिकतम विस्तार ज्ञात करो। यह मानते हुए कि छड़ द्रव्यमानरहित है।



Solution : ऊर्जा संरक्षण लगाने पर



$$mg\,(h + x) = \frac{1}{2}\,\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}\,x^2$$

जहाँ $k_1 = \frac{A_1Y_1}{\ell_1}$ $k_2 = \frac{A_2Y_2}{\ell_2}$

तथा $k_{eq} = \frac{A_1A_2Y_1Y_2}{A_1Y_1\ell_2 + A_2Y_2\ell_1}$

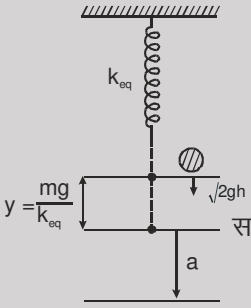
$k_{eq}x^2 - 2mgx - 2mgh = 0$

$$x = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 + 8mghk_{eq}}}{2k_{eq}}\,,\; x_{max} = \frac{mg}{k_{eq}} + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k_{eq}^2} + \frac{2mgh}{k_{eq}}}$$

सरल आवर्त गति द्वारा (अन्य विधि) :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \qquad v = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$$

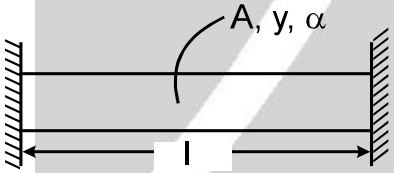
$$\sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}\,\sqrt{a^2 - y^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{2mgh}{k_{eq}} + \frac{m^2g^2}{k_{eq}^2}} = a$$



अधिकतम विस्तार

$$= a + y = \frac{mg}{k_{eq}} + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k_{eq}} + \frac{2mgh}{k_{eq}}}$$

तापीय प्रतिबल :

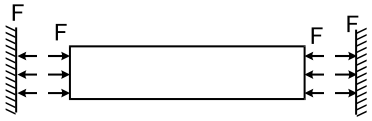


यदि छड़ का ताप ΔT से बढ़ाया जाये तो लम्बाई में परिवर्तन $\Delta\ell = \ell\,\alpha\,\Delta T$

विकृति = $\frac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha\;\Delta T$

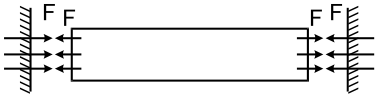
परन्तु दृढ़ आधार के कारण कोई विकृति नहीं है। आधार छड़ की लम्बाई समान रखने के लिए बल प्रदान करते है।

$Y = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$



यदि ΔT = (+) धनात्मक

तापीय प्रतिबल = Y विकृति = $Y\,\alpha\,\Delta T$

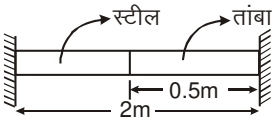


यदि ΔT = (–) ऋणात्मक

यदि ΔT = (–) ऋणात्मक

$$\frac{F}{A} = Y\alpha\;\Delta T \qquad F = AY\,\alpha\,\Delta T$$

Example 10. जब संयुक्त छड़ स्वतंत्र है तो संयुक्त लम्बाई, ताप 20ºC से 120ºC तक बढाने पर 2.002 m तक बढ़ती है। जब संयुक्त छड़ सहारे के बीच में स्थित है तो लम्बाई में कोई परिवर्तन नहीं है। स्टील के लिए Y व α ज्ञात करो यदि $Y_{cu} = 1.5 \times 10^{13}$ N/m², $\alpha_{cu} = 1.6 \times 10^{-5}$/ºC



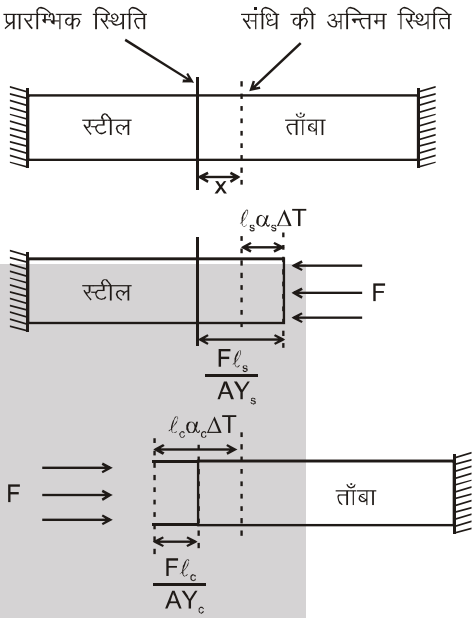
Solution : $\Delta\ell = \ell_s \alpha_s \Delta T + \ell_c \alpha_c \Delta T$

$.002 = [1.5 \alpha_s + 0.5 \times 1.6 \times 10^{-5}] \times 100$

$\alpha_s = \dfrac{1.2\times10^{-5}}{1.5} = 8 \times 10^{-6}$/ºC

घटकों की लम्बाई में कोई परिवर्तन नहीं है।

स्टील के लिए



$$x = \ell_s \alpha_s \Delta T - \frac{F\ell_s}{AY_s} = 0$$

$$\frac{F}{AY_s} = \alpha_s \Delta T \quad \text{..... (A)}$$

ताँबे के लिए

$$x = \frac{F\ell_c}{AY_c} - \ell_c \alpha_c \Delta T = 0$$

$$\frac{F}{AY_c} = \alpha \Delta T \quad \text{..... (B)}$$

$$(B)/(A) \Rightarrow \frac{Y_s}{Y_c} = \frac{\alpha_c}{\alpha_s}$$

$$Y_s = Y_c \frac{\alpha_c}{\alpha_s} = \frac{1.5\times10^{13}\times16\times10^{-5}}{8\times10^{-6}} \Rightarrow Y_s = 3\times10^{13} \text{ N/m}^2$$

प्रत्यास्थता के अनुप्रयोग

पदार्थो की प्रत्यास्थता के कुछ मुख्य उपयोग नीचे दिये गये है :

1. पुलों में प्रयुक्त किये गये पदार्थ उनकी प्रत्यास्थ सामर्थ्य समय के साथ कम करते है। अतः लम्बे उपयोग के बाद पुल असुरक्षित घोषित कर दिये जाते है।
2. **एक पर्वत की अधिकतम ऊचाँई ज्ञात करने में :**
   पर्वत के आधार पर दाब = $h\rho g$ = प्रतिबल। एक साधारण चट्टान की प्रत्यास्थता सीमा = 3×10^8 N m^{-2}
   प्रतिबल प्रत्यास्थता सीमा से कम होना चाहिए, अन्यथा चट्टान बिखर जायेगी।

   $h < \dfrac{3\times10^8}{\rho g} < 10^4$ m ($\because \rho = 3 \times 10^3$ kg m^{-3} ; g = 10 ms^{-2}) या h = 10 km

   यह ध्यान रहे कि माउण्ट एवरेस्ट की ऊचाँई लगभग 9 km है।

एक तार का ऐंठन नियतांक

$C = \dfrac{\pi\eta r^4}{2\ell}$ जहां η दृढ़ता गुणांक, r व ℓ क्रमशः तार की त्रिज्या व लम्बाई है।

(a) कोण θ से ऐंठन (मोड़ने) के लिए आवश्यक बलाघूर्ण $\tau = C\theta$.

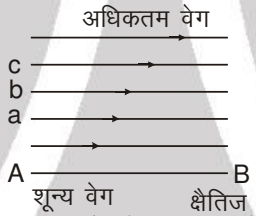
(b) कोण θ से ऐंठन में किया गया कार्य $W = \dfrac{1}{2}C\theta^2$.

श्यानता

जब एक ठोस वस्तु, दूसरी ठोस वस्तु पर फिसलती है तो उनके मध्य एक घर्षण बल कार्य करने लगता है। यह बल वस्तुओं के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करता है। इसी प्रकार जब द्रव की एक परत उसी द्रव की दूसरी परत पर फिसलती है तो उनके मध्य एक घर्षण बल कार्य करता है जो परतों के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करता है। यह बल आन्तरिक घर्षण बल कहलाता है।

माना एक द्रव एक स्थिर क्षैतिज सतह AB (चित्र) पर धारा रेखीय गति में बह रहा है। द्रव की वह परत जो सतह के सम्पर्क में है, विराम पर स्थित है जबकि दूसरी परतों का वेग स्थिर सतह से दूरी के साथ बढ़ता है। चित्र में तीरों की लम्बाई परतों के बढ़ते वेग को निरूपित करती है। इस प्रकार द्रव की समीपवर्ती परतों के मध्य आपेक्षिक गति है। तीन समान्तर परतों a, b व c पर विचार करते है। उनके वेग बढ़ते क्रम में है। परत a, परत b, को मन्दित करने की कोशिश करती है परत b, परत c को मन्दित करने की कोशिश करती है। इस प्रकार प्रत्येक परत इसके ऊपर की परत के वेग को कम करने की कोशिश करती है। इसी प्रकार प्रत्येक परत इसके नीचे की परत के वेग को बढ़ाने की कोशिश करती है। इसका अभिप्राय है कि द्रव की कोई भी दो परतो के मध्य स्पर्श रेखीय बल कार्य करते है जो परतों के मध्य सापेक्ष गति को समाप्त करने की कोशिश करते है। ये बल श्यान बल कहलाते है। यदि द्रव का प्रवाह बनाये रखना है तो एक बाह्य बल श्यान बलों को सन्तुलित करने के लिए आरोपित किया जाना चाहिए। बाह्य बल की अनुपस्थिति में श्यान बल द्रव को जल्दी ही विराम पर ला देते है। द्रव का वह गुण जिसके कारण यह इसकी समीपवर्ती परतों के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करता है, श्यानता कहलाता है।

श्यानता का गुण निम्न उदाहरणों में देखा जा सकता है :



(i) जब एक हिलता हुआ द्रव छोड़ दिया जाता है तो श्यानता के कारण विराम पर आ जाता है। गाढ़े द्रव जैसे शहद, कोलतार, ग्लिसरीन आदि की श्यानता, पतले द्रव जैस पानी से अधिक होती है। यदि हम एक मेज पर कोलतार व जल को डालें तो कोलतार जल्दी ठहर जाएगा जबकि पानी थोड़ी अधिक दूरी तक बहेगा।

(ii) यदि हम जल व शहद को अलग–अलग फनल में डालें तो जल फनल के छिद्र से जल्दी निकल जाता है जबकि शहद इसके लिए पर्याप्त समय लेती है क्योंकि शहद जल की तुलना में बहुत अधिक श्यान है। जब शहद गुरूत्व के प्रभाव में नीचे बहने की कोशिश करती है तो इसकी परतों के मध्य सापेक्ष गति, प्रबलता से अवरोधित होती है।

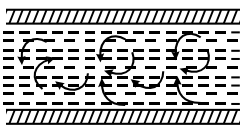
(iii) हम वायु में तेजी से चल सकते है परन्तु जल में नहीं। कारण है श्यानता जो वायु के लिए बहुत कम परन्तु जल के लिए तुलनात्मक रूप से बहुत अधिक है।

(iv) वायु की श्यानता के कारण बादलों के कण बहुत धीरे नीचे गिरते हैं और इस प्रकार आकाश में तैरते हुए प्रतीत होते है। श्यानता केवल तब प्रभाव में आती है जब एक ही पदार्थ की परतों के मध्य सापेक्ष गति हो।

एक नली में द्रव का प्रवाह : क्रांतिक वेग

जब एक द्रव एक नली में बहता है तो श्यान बल द्रव के प्रवाह का विरोध करते है। इस प्रकार एक दाबान्तर नली के सिरों के मध्य आरोपित किया जाता है जो द्रव के प्रवाह को बनाये रखता है। यदि एक विशेष बिन्दु से गुजर रहे द्रव के सभी कण समान पथ के अनुदिश गति करते है तो द्रव का प्रवाह धारा रेखीय प्रवाह कहलाता है।

यह केवल तब होता है जब द्रव के प्रवाह का वेग एक निश्चित सीमान्त मान से कम हो जो क्रांतिक वेग कहलाता है। जब प्रवाह का वेग क्रांतिक वेग से अधिक होता है। प्रवाह धारा रेखीय नहीं रहता बल्कि विक्षुब्ध हो जाता है। इस प्रकार के प्रवाह में द्रव की गति यदृच्छ हो जाती है तथा इसमें भंवर धाराएं उत्पन्न हो जाती है।



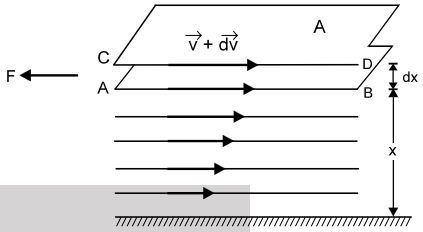
रेनोल्ड ने सिद्ध किया कि एक नली में प्रवाहित द्रव के लिए क्रांतिक वेग $v_c = k\eta/\rho r$ होता है जहाँ ρ द्रव का घनत्व व η श्यानता है, r नली की त्रिज्या व k' रेनॉल्ड संख्या ' (जिसका मान पतली नली व जल के लिए 1000 के लगभग है) है। जब द्रव के प्रवाह का वेग क्रांतिक वेग से कम है तो द्रव का प्रवाह श्यानता द्वारा नियंत्रित किया जाता है। घनत्व का इस पर कोई प्रभाव नहीं होता। परन्तु जब प्रवाह का वेग क्रांतिक वेग से अधिक है तो प्रवाह मुख्य रूप से घनत्व द्वारा नियंत्रित किया जाता है, श्यानता का प्रभाव कम महत्त्वपूर्ण हो जाता है। इसके कारण जब ज्वालामुखी फटता है तो लावा बहुत गाढ़ा (अधिक श्यानता का) होने के बावजूद तेजी से बाहर निकलता है।

वेग प्रवणता व श्यानता गुणांक

द्रव का गुण जिसके कारण एक विरोधी बल (आन्तरिक घर्षण) कार्य करने लगता है (जब द्रव की विभिन्न परतों के मध्य सापेक्ष गति हो), श्यानता कहलाता है। चित्र में प्रदर्शित क्षैतिज ठोस सतह पर द्रव के प्रवाह पर विचार करते है। दो परतें AB तथा CD पर विचार करते है जिनके वेग क्रमशः $\vec{v}$ तथा $\vec{v} + d\vec{v}$ है तथा स्थिर ठोस सतह से क्रमशः x तथा (x + dx) दूरी पर है, न्यूटन के अनुसार इन परतों के मध्य खींचने वाला या पीछे की ओर श्यान बल निम्न पर निर्भर करता है

(i) परत के क्षेत्रफल (A) के सीधे समानुपाती तथा

(ii) परतों के मध्य वेग प्रवणता $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ के सीधे समानुपाती



अर्थात् $F \propto A\frac{dv}{dx}$ या $F = -\eta A\frac{dv}{dx}$ .....(1)

η श्यानता गुणांक कहलाता है। ऋणात्मक चिन्ह प्रदर्शित करता है कि श्यान बल (F) की दिशा द्रव की गति के विपरीत है।

श्यानता तथा ठोस घर्षण के मध्य समानताऐं तथा विभिन्नताऐं

श्यानता तथा ठोस घर्षण निम्न प्रकार से समान है

1. दोनों सापेक्ष गति का विरोध करते है। जहां श्यानता द्रव की दो समीपवर्ती परतों के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करती है, ठोस घर्षण दो ठोस परतों के मध्य सापेक्ष गति का विरोध करता है।

2. जब द्रव की परतों या ठोस सतहों के मध्य सापेक्ष गति होती है तो स्थिति के अनुसार दोनों लगते है।

3. दोनों आणविक आकर्षण के कारण होते है।

उनके मध्य अन्तर →

	श्यानता	**ठोस घर्षण**
(i)	द्रव की परतों के मध्य श्यानता (श्यान बल) द्रव की परतों के क्षेत्रफल के सीधे समानुपाती है।	(i) दो ठोसों के मध्य घर्षण ठोस की सम्पर्क सतहों के क्षेत्रफल से स्वतंत्र है।
(ii)	श्यान बल द्रव की दो परतों के मध्य सापेक्ष वेग के समानुपाती है।	(ii) घर्षण दो सतहों के मध्य सापेक्ष वेग से स्वतंत्र है।
(iii)	श्यान बल द्रव की दो परतों के मध्य अभिलम्ब प्रतिक्रिया से स्वतंत्र है।	(iii) घर्षण दो सम्पर्क सतहों के मध्य अभिलम्ब प्रतिक्रिया के सीधे समानुपाती है।

श्यानता के कुछ अनुप्रयोग

विभिन्न द्रवों तथा गैसों की श्यानता की जानकारी दैनिक जीवन में उपयोगी है। इसकी जानकारी के कुछ अनुप्रयोग नीचे दिये गये है →

1. क्योंकि द्रवों की श्यानता ताप के साथ परिवर्तित होती है, स्नेहक पदार्थ मौसम के अनुसार चुना जाता है।

2. उच्च श्यानता के द्रव रेल्वे स्टेशनों पर शॉक एब्जार्बर व बफर में उपयोग किये जाते है।

3. वायु व द्रव की श्यानता का गुण कुछ उपकरणों की गति अवमंदित करने में उपयोग किया जाता है।

4. कार्बनिक द्रवों के श्यानता गुणांक की जानकारी कार्बनिक अणुओं के अणुभार व आकृति का पता लगाने में प्रयुक्त की जाती है।

5. मानव शरीर की शिराओं व धमनियों में रक्त परिसंचरण में इसका मुख्य उपयोग है।

श्यानता गुणांक की इकाइयाँ

उपरोक्त सूत्र से हम जानते हैं $\eta = \frac{F}{A(\Delta v_x / \Delta z)}$

$\therefore$ η की विमाएं $= \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2][LT^{-1}/L]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2T^{-1}]} = [ML^{-1}T^{-1}]$

इसकी इकाई है kg/(meter-second)*

C.G.S. पद्वति में श्यानता गुणांक की इकाई dyne s cm^{-2} एवं यह पॉइज कहलाती है। SI में श्यानता गुणांक की इकाई N sm^{-2} है तथा डेकापॉइज कहलाती है।

1 डेकापॉइज = 1 N sm^{-2} = (10^5 dyne) × s × (10^2 cm)$^{-2}$ = 10 dyne s cm^{-2} = 10 पॉइज

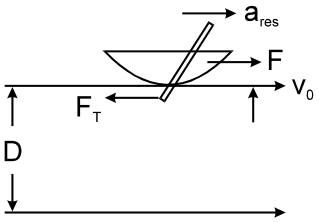
Solved Example

Example 11. एक व्यक्ति एक नदी में एक नाव को 'v_0' नियत वेग से चला रहा है, नाव का सम्पर्क क्षेत्रफल 'A' है व श्यानता गुणांक η है। नदी की गहराई 'D' है। नाव खेने (चलाने) के लिए आवश्यक बल ज्ञात करो।

Solution : $F - F_T = m\, a_{res}$

क्योंकि नाव नियत वेग से चलती है $a_{res} = 0$

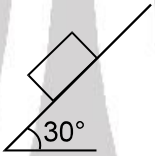
$F = F_T$



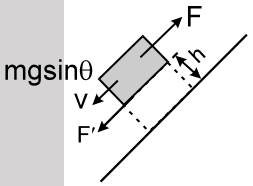
परन्तु $F_T = \eta A \frac{dv}{dz}$, but $\frac{dv}{dz} = \frac{v_0 - 0}{D} = \frac{v_0}{D}$

तब $F = F_T = \frac{\eta A v_0}{D}$

Example 12. 20 kg द्रव्यमान का एक घनाकार गुटका (भुजा 2m), $\eta = 10^{-1}$ पॉइज श्यानता के तेल से स्नेहित नततल पर नियत वेग 10 m/sec. से फिसलता है। ($g = 10\ m/sec^2$)। द्रव की परत की मोटाई ज्ञात करो।



Solution : $F = \eta A \frac{dv}{dz} = mg \sin\theta \quad \frac{dv}{dz} = \frac{v}{h}$

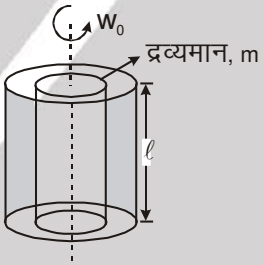


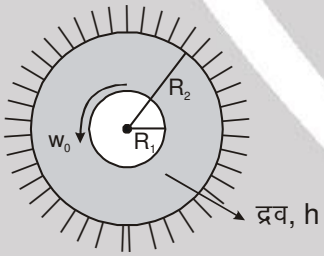
$20 \times 10 \times \sin 30° = \eta \times 4 \times \frac{10}{h}$

$h = \frac{40 \times 10^{-2}}{100}$ [$\eta = 10^{-1}$ poise $= 10^{-2}$ N-sec-m^{-2}]

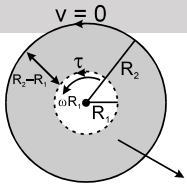
$= 4 \times 10^{-3}$ m $= 4$ mm

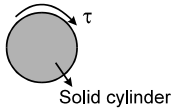
Example 13. प्रदर्शित चित्रानुसार केन्द्रीय ठोस बेलन प्रारम्भिक कोणीय वेग ω_0 से चलना प्रारम्भ करता है। वह समय ज्ञात करो जिसके बाद कोणीय वेग आधा हो जाता है।





Solution : $F = \eta A \frac{dv}{dz}$, जहाँ $\frac{dv}{dz} = \frac{\omega R_1 - 0}{R_2 - R_1}$





$F = \eta \frac{2\pi R_1 \ell \omega R_1}{R_2 - R_1}$ तथा $\tau = FR_1 = \frac{2\pi\eta R_1^3 \omega \ell}{R_2 - R_1}$

$I\alpha = \frac{2\pi\eta R_1^3 \omega \ell}{R_2 - R_1}$

$\Rightarrow \frac{mR_1^2}{2}\left(-\frac{d\omega}{dt}\right) = \frac{2\pi\eta R_1^3 \omega \ell}{R_2 - R_1}$

या $-\int_{\omega_0}^{\omega_0/2} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{4\pi\eta R_1 \ell}{m(R_2 - R_1)} \int_0^t dt$

$\Rightarrow t = \frac{m(R_2 - R_1)\ell n2}{4\pi\eta\ell R_1}$

श्यानता पर ताप का प्रभाव

द्रवों की श्यानता ताप वृद्धि के साथ घटती है और ताप घटने के साथ बढ़ती है अर्थात्, $\eta \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$ दूसरी ओर गैंसो की श्यानता का मान ताप वृद्धि के साथ बढ़ता है और इसका विपरीत भी। अर्थात्, $\eta \propto \sqrt{T}$.

स्टोक का नियम

स्टोक ने सिद्ध किया कि η श्यानता के द्रव में v वेग से गतिशील , r त्रिज्या की एक गोलाकार वस्तु पर श्यान बल (F) $F = 6 \pi \eta r v$ से दिया जाता है। यह स्टॉक का नियम कहलाता है।

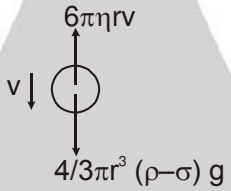
सीमान्त वेग

जब एक वस्तु एक श्यान द्रव में गिराई जाती है, यह पहले त्वरित होती है एवं फिर इसका त्वरण शून्य हो जाता है और यह नियत वेग प्राप्त कर लेती है जो सीमान्त वेग कहलाता है।

सीमान्त वेग की गणना

एक छोटी गेंद पर विचार करते है जिसकी त्रिज्या r एवं घनत्व ρ है एक द्रव (या गैस) में मुक्त रूप से गिर रही है, जिसका घनत्व σ है एवं श्यानता गुणांक η है। जब यह सीमान्त वेग v प्राप्त कर लेती है। इस पर दो बल कार्य करते है।

(i) नीचे की ओर कार्यरत प्रभावी बल = $V(\rho-\sigma)g = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\sigma)g$,



(ii) ऊपर की ओर कार्यरत श्यान बल = $6 \pi \eta rv$.

चूंकि गेंद नियत वेग v से गति कर रही है अर्थात् इसमें कोई त्वरण नहीं है, इस पर कार्यरत कुल बल शून्य होना चाहिए। अर्थात् $6\pi\eta rv = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\sigma)g$ या $v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$

इस प्रकार, गेंद का सीमान्त वेग इसकी त्रिज्या के वर्ग के सीधे समानुपाती है।

मुख्य बिन्दु

वायु का बुलबुला जल में सदैव ऊपर आता है क्योंकि वायु का घनत्व (ρ) जल के घनत्व (σ) से कम है इसलिए वायु के बुलबुले का सीमान्त वेग ऋणात्मक है अर्थात् वायु का बुलबुला ऊपर जाता है। धनात्मक सीमान्त वेग अर्थात् वस्तु नीचे गिरेगी।

Solved Example

Example 14. एक गोलाकार गेंद एक द्रव के अन्दर सीमान्त वेग से गति कर रही है। गेंद की त्रिज्या के साथ ऊष्मा हानि की दर में सम्बन्ध ज्ञात करो।

Solution : ऊष्मा हानि की दर = शक्ति = $F \times v = 6\pi\eta rv \times v = 6\pi\eta rv^2 = 6p\eta r\left[\frac{2}{9}\frac{gr^2(\rho_0-\rho_\ell)}{\eta}\right]^2$

ऊष्मा हानि की दर αr^5

Example 15. त्रिज्या 0.0015 mm की जल की बूंद वायु में गिर रही है। यदि वायु का श्यानता गुणांक 1.8×10^{-5} kg /(m-s) है तो बूंद का सीमान्त वेग क्या होगा ? (जल का घनत्व = 1.0×10^3 kg/m^2 तथा g = 9.8 N/kg) वायु का घनत्व नगण्य है।

Solution : स्टॉक के नियम से, r त्रिज्या की एक जल की बूंद का सीमान्त वेग दिया जाता है

$$v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$$

जहां ρ जल का घनत्व, σ वायु का घनत्व एवं η वायु का श्यानता गुणांक है। यहां σ नगण्य है और r = 0.0015 mm $= 1.5 \times 10^{-3}$ mm $= 1.5 \times 10^{-6}$ m। मान रखने पर :

$$v = \frac{2}{9} \times \frac{(1.5\times10^{-6})^2 \times (1.0\times10^3)\times 9.8}{1.8\times10^{-5}} = \mathbf{2.72 \times 10^{-4}\ m/s}$$

Example 16. त्रिज्या 1.0×10^{-3} m तथा घनत्व 1.0×10^4 kg/m^3 का एक धात्विक गोला पृथ्वी के गुरूत्वीय क्षेत्र में h दूरी तक मुक्त रूप से गिरने के बाद जल की टंकी में प्रवेश करता है। यदि जल में प्रवेश करने के बाद इसका वेग अपरिवर्तित रहता है तो h का मान ज्ञात करो। दिया है : जल का श्यानता गुणांक = 1.0×10^{-3} N-s/m^2, g = 10 m/s^2 तथा जल का घनत्व = 1.0×10^3 kg/m^3.

Solution : h ऊचाँई से मुक्त रूप से गिरने में गोले द्वारा प्राप्त वेग है

$$v = \sqrt{2gh} \qquad ....(i)$$

यह जल में गोले का सीमान्त वेग है। इस प्रकार स्टॉक के नियम से $v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho-\sigma)g}{\eta}$

जहां r गोले की त्रिज्या है, ρ गोले के पदार्थ का घनत्व है।

σ (= 1.0×10^3 kg/m^3) जल का घनत्व है और η जल का श्यानता गुणांक है।

$$\therefore \quad v = \frac{2\times(1.0\times10^{-3})^2(1.0\times10^4 - 1.0\times10^3)\times10}{9\times1.0\times10^{-3}} = 20 \text{ m/s}$$

समीकरण (i) से

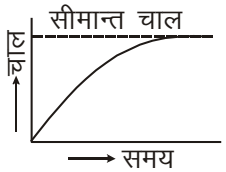
$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{20\times20}{2\times10} = 20 \text{ m}$$

स्टॉक के सूत्र के अनुप्रयोग

(i) मिलीकन के प्रयोग द्वारा इलेक्ट्रॉनिक आवेश ज्ञात करने में : स्टॉक का सूत्र मिलीकन विधि द्वारा इलेक्ट्रॉनिक आवेश का पता लगाने में उपयोग किया जाता है। इस विधि में वायु में छोटी–छोटी तेल की बूंदो का सीमान्त वेग का मापन करके उनकी त्रिज्या ज्ञात करने में सूत्र का उपयोग किया जाता है।

(ii) वर्षा की बूंदो का वेग : वर्षा बूंदे, धूल के कणों पर जलवाष्प के संघनन के द्वारा बनती है। जब वे गुरूत्व के प्रभाव में गिरती है, उनकी गति वायु में श्यान बल के द्वारा अवरोधित होती है। जैसे ही उनके गिरने का वेग बढ़ता है श्यान बल भी बढ़ता है तथा अन्त में गुरूत्व के प्रभावी बल के बराबर हो जाती है। बूंदे तब नियत सीमान्त वेग प्राप्त कर लेती है जो बूंदों की त्रिज्या के वर्ग के समानुपाती है। प्रारम्भ में वर्षा की बूंदे आकार में बहुत छोटी है और इसलिए वे ऐसे अल्प वेग से गिरती है ताकि वे आकाश में बादल के रूप में तैरती हुई प्रतीत होती है। जब ओर संघनन के द्वारा वे आकार में बढ़ती है तो वे पर्याप्त वेग से पृथ्वी तक पहुँचती है।

(iii) पैराशूट : जब कोई सैनिक उड़ते हुए वायुयान से पैराशूट के साथ कूदता है तो वह वायु में बहुत धीरे–धीरे नीचे आता है।



प्रारम्भ में सैनिक गुरूत्वीय त्वरण g से गिरता है, परन्तु जल्द ही त्वरण तेजी से कम होने लगता है। जब पैराशूट पूरी तरह खुल जाता है। इसलिए प्रारम्भ में गिरते हुए सैनिक की चाल तेजी से बढ़ती है फिर धीरे–धीरे बढ़ती है। वायु की श्यानता के कारण सैनिक का त्वरण अन्त में शून्य हो जाता है एवं तब सैनिक नियत सीमान्त चाल से गिरता है। चित्र में गिरते हुए सैनिक की चाल व समय के मध्य ग्राफ प्रदर्शित है।

Exercise-1

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

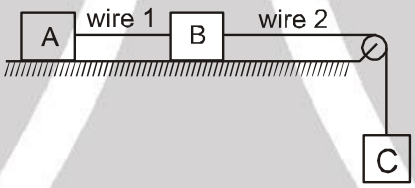
भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

खण्ड़ (A) : प्रत्यास्थ व्यवहार, अनुदैर्ध्य प्रतिबल, यंग गुणांक

A-1. यदि 3.0×10^4 N का सम्पीड़न बल 20 cm लम्बी व 3.6 cm^2 अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की हड्डी के सिरे पर आरोपित है।
(a) क्या हड्डी टूटेगी और (b) यदि नहीं, तो यह कितनी छोटी होगी ?
हड्डी की दबाव सामर्थ्य = $7.7 \times 10^8\ Nm^{-2}$ तथा हड्डी का यंग गुणांक = $1.5 \times 10^{10} Nm^{-2}$

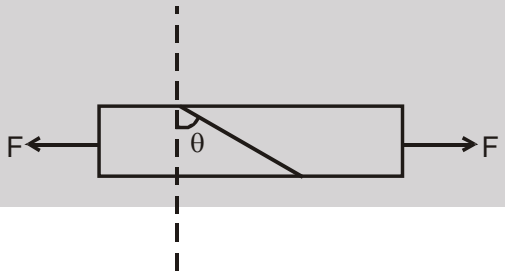
A-2. स्टील व ताँबे के दो एक जैसे तार समान बल से खींचे जाते है। यदि उनके विस्तार में अन्तर 0.5 cm है। ज्ञात करो, प्रत्येक तार में विस्तार कितना है। (दिया गया स्टील के लिये यंग गुणांक = 2×10^{12} dyne cm^{-2} व ताँबे के लिए 12×10^{11} dyne cm^{-2})

A-3. 4 kg द्रव्यमान के तीन ब्लॉक A, B तथा C चित्रानुसार एक दूसरे से जुडे हुये है। दोनो तारो का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल $5 \times 10^{-7}\ m^2$ है। सतह घर्षणरहित है। यदि दोनो तारो का यंग गुणांक $2 \times 10^{11}\ N/m^2$ है तो प्रत्येक तार में अनुदैर्ध्य विकृति ज्ञात करों ($g = 10\ m/s^2$)



खण्ड़ (B) : स्पर्श रेखीय प्रतिबल व विकृति, अपरूपण गुणांक

B-1. अनुप्रस्थ काट A की एक छड़ पर समान व विपरीत तनन बल F इसके सिरों पर लगाया जाता है। छड़ के लम्बवत् तल से θ कोण बनाने वाले तल पर विचार कीजिए।



(a) इस तल पर F, A व θ के पदों में तनन प्रतिबल क्या है ?
(b) इस तल पर F, A व θ के पदों में अपरूपण प्रतिबल क्या है ?
(c) θ के किस मान के लिए तनन प्रतिबल अधिकतम है ?
(d) θ के किस मान के लिए अपरूपण प्रतिबल अधिकतम है ?

खण्ड़ (C) : दाब व आयतन विकृति, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

C-1. एक गोलाकार गेंद आयतन में 0.001% संकुचित होती है जब इस पर 100 वायुमण्डलीय दाब लगाया जाता है। इसका आयतन प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात करो।

खण्ड (D) : प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा

D-1. एक पीतल की छड़ जिसकी लम्बाई 0.2 m व अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 1 cm^2 है, की ऊर्जा में वृद्धि की गणना करो जब यह इसकी लम्बाई के अनुदिश 5 kg-भार से दबायी जाती है।
(पीतल का यंग गुणांक = 1.0×10^{11} N/m^2 तथा g = 9.8 m/s^2).

D-2. जब एक तार पर भार 2 kg भार से 4 kg भार तक धीरे–धीरे बढ़ाया जाता है तब लम्बाई में प्रसार 0.6 mm से 1.00 mm तक बढ़ता है। तार के विस्तार के दौरान कितना कार्य किया जाता है। [g = 9.8 m/s^2]

खण्ड़ (E) : श्यानता

E-1. त्रिज्या 3.0×10^{-4} m व घनत्व 10^4 kg/m^3 की एक गोलाकार गेंद एक पानी की टंकी में प्रवेश करने से पहले गुरूत्व के प्रभाव में h दूरी तक गिरती है। यदि जल में प्रवेश करने के बाद गेंद का वेग नहीं बदलता है तो h ज्ञात करो। जल की श्यानता 9.8×10^{-6} N-s/m^2 है। [g = 9.8 m/s^2]

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

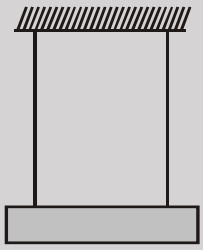
खण्ड़ (A) : प्रत्यास्थ व्यवहार, अनुदैर्ध्य प्रतिबल, यंग गुणांक

A-1. पीतल की किसी छड़ का व्यास 4 मिमी है तथा यंग प्रत्यास्थता गुणांक 9×10^{10} N/m^2 है। छड़ की लम्बाई में 0.1% वृद्धि करने में निम्न बल की आवश्यकता होगी :
(A) $360\,\pi$ N (B) 36 N (C) $144\,\pi \times 10^3$ N (D) $36\,\pi \times 10^5$ N

A-2. एक स्टील का तार दृढ़ आधार से ऊर्ध्वाधर लटकाया जाता है। जब वायु में एक भार से भारित किया जाता है तो यह L_a से प्रसारित होता है और जब भार पूर्णतया जल में डूबा है तो विस्तार घटकर L_w रह जाता है तो भार के पदार्थ का आपेक्षिक घनत्व है

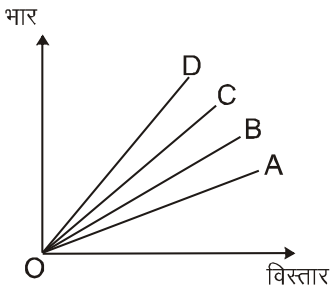
(A) $\frac{L_a}{L_a - L_w}$ (B) $\frac{L_w}{L_a}$ (C) $\frac{L_a}{L_w}$ (D) $\frac{L_w}{L_a - L_w}$

A-3. समान लम्बाई व अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल के दो तार चित्र में प्रदर्शित है। उनके यंग गुणांक क्रमशः Y_1 व Y_2 है। तुल्य यंग गुणांक होगा :



(A) $Y_1 + Y_2$ (B) $\frac{Y_1 + Y_2}{2}$ (C) $\frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}$ (D) $\sqrt{Y_1 Y_2}$

A-4. समान पदार्थ से बने चार तारों के लिए भार–विस्तार ग्राफ चित्र में दिखाये गये है। सबसे पतले तार को किस रेखा से निरूपित किया गया है –



(A) OC (B) OD (C) OA (D) OB

खण्ड़ (B) : स्पर्शरेखीय प्रतिबल व विकृति, अपरूपण गुणांक

B-1. 1.0 m भुजा तथा 0.005 m मोटाई की एक वर्गाकार पीतल की प्लेट पर इसकी प्रत्येक छोटी विपरीत भुजाओं पर बल F लगाया जाता है जिसके कारण 0.02 cm का विस्थापन होता है। यदि पीतल का अपरूपण गुणांक 0.4×10^{11} N/m^2 है तो बल F का मान है :

(A) 4×10^3 N (B) 400 N (C) 4×10^4 N (D) 1000 N

खण्ड़ (C) : दाब व आयतन विकृति, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

C-1. एक धातु का गुटका 1×10^5 N/m^2 का वायुमण्डलीय दाब अनुभव कर रहा है। जब यही गुटका एक निर्वातित कक्ष में रखा जाता है तो इसके आयतन में आपेक्षिक परिवर्तन है। (धातु का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक 1.25×10^{11} N/m^2 है।)

(A) 4×10^{-7} (B) 2×10^{-7} (C) 8×10^{-7} (D) 1×10^{-7}

खण्ड़ (D) : प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा

D-1. यदि किसी स्प्रिंग को 2 सेमी खींचने पर उसकी स्थितिज ऊर्जा V है तो उसे 10 सेमी खींचने पर उसकी स्थितिज ऊर्जा होगी –

(A) V/25 (B) 5 V (C) V/5 (D) 25 V

D-2. एक तार को 1mm खींचने में किया गया कार्य 2J है, समान पदार्थ के परन्तु दुगुनी त्रिज्या व आधी लम्बाई के दूसरे तार को 1mm से खींचने में किया गया कार्य जूल में है –

(A) 1/4 (B) 4 (C) 8 (D) 16

खण्ड़ (E) : श्यानता

E-1. एक तेल की बूँद वायु में 5×10^{-4} m/s सीमान्त वेग से गिरती है

(i) बूँद की त्रिज्या होगी :

(A) 2.5×10^{-6} m (B) 2×10^{-6} m (C) 3×10^{-6} m (D) 4×10^{-6} m

(ii) इसकी आधी त्रिज्या होने पर सीमान्त वेग होगा : (वायु की श्यानता = $\frac{18 \times 10^{-5}}{5}$ N-s/m^2, तेल का घनत्व = 900 Kg/m^3, g = 10 m/s^2, तेल की तुलना में वायु का घनत्व नगण्य है)

(A) 3.25×10^{-4} m/s (B) 2.10×10^{-4} m/s (C) 1.5×10^{-4} m/s (D) 1.25×10^{-4} m/s

E-2. एक श्यान माध्यम से गुजर रहे एक गोले का सीमान्त वेग है –

(A) गोले की त्रिज्या के सीधे समानुपाती। (B) गोले की त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती।

(C) गोले की त्रिज्या के वर्ग के अनुक्रमानुपाती। (D) गोले की त्रिज्या के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती।

E-3. एक गोला एक अनन्त सीमा के माध्यम में धीरे से छोड़ दिया जाता है। जैसे ही गोला गिरता है, इस पर नीचे की ओर कार्यरत बल :

(A) अन्त तक नियत रहता है।

(B) कुछ समय तक बढ़ता है और फिर नियत हो जाता है।

(C) कुछ समय के लिए कम होता है और फिर शून्य हो जाता है।

(D) कुछ समय के लिए बढ़ता है और फिर घटता है।

E-4. एक ठोस गोला वायु में 10 मी/से. सीमान्त वेग से गिरता है। यदि इसको निर्वात में गिराया जाये –

(A) सीमान्त वेग 10 m/s से अधिक होगा (B) सीमान्त वेग 10 m/s से कम होगा

(C) सीमान्त वेग 10 m/s होगा। (D) वहां कोई सीमान्त वेग नहीं होगा

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. लम्बाई L का एक धातु का तार एक दृढ़ आधार से ऊर्ध्वाधर लटका है। जब द्रव्यमान M का एक गोलक तार के निचले सिरे से बांधा जाता है तो तार में विस्तार ℓ है :

स्तम्भ - I	स्तम्भ- II
(A) द्रव्यमान M की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में हानि बराबर है	(p) $Mg\ell$
(B) तार में संग्रहीत प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा बराबर है	(q) $\frac{1}{2}Mg\ell$
(C) तार का प्रत्यास्थता गुणांक है	(r) Mg/ℓ
(D) विस्तार के दौरान उत्पन्न ऊष्मा है	(s) $\frac{1}{4}Mg\ell$

Exercise-2

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. R त्रिज्या के तांबे के तार को तोड़ने के लिए बल F की आवश्यकता होती है। 2R त्रिज्या के तार को तोड़ने के लिए आवश्यक बल होगा –

(A) F/2 (B) 2 F (C) 4 F (D) F/4

2. दो उल्का पिण्ड जिनकी त्रिज्या का अनुपात 1 : 2 है, वायुमण्डल में बहुत अधिक ऊचाँई से गिरते है। जब वे सीमान्त वेग प्राप्त कर लेते है तो उनके संवेग का अनुपात है –

(A) 1 : 1 (B) 1 : 4 (C) 1 : 16 (D) 1 : 32

3. एक 50 kg की मोटर चार बेलनाकार रबर के गुटकों पर रखी है। प्रत्येक गुटके की ऊँचाई 4 cm व अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 16 cm^2 है। रबर का अपरूपण गुणांक 2×10^6 N/m^2 है। एक 500 N का स्पर्श रेखीय बल मोटर पर लगाया जाता है। मोटर कितनी दूरी से एक ओर विस्थापित होगी –

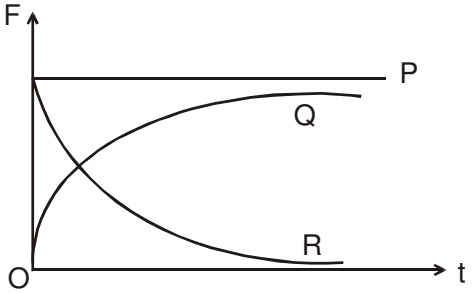
(A) 0.156 cm (B) 1.56 cm (C) 0.312 cm (D) 0.204 cm

4. लम्बाई 2 m व अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 2.0 cm^2 की एक पीतल की छड़ एक सिरे से लम्बाई L व अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 1.0 cm^2 की एक स्टील की छड़ से जुड़ी है। संयुक्त छड़ को परिमाण 5×10^4 N का बल दोनों सिरों पर बराबर एवं विपरीत दिशा में लगाकर खींचा जाता है। यदि दोनों छड़ो का विस्तार समान है तब स्टील की छड़ की लम्बाई (L) है

($Y_{\text{पीतल}} = 1.0 \times 10^{11}$ N/m^2 तथा $Y_{\text{स्टील}} = 2.0 \times 10^{11}$ N/m^2)

(A) 1.5 m (B) 1.8 m (C) 1 m (D) 2 m

5. एक गोलाकार गेंद श्यान द्रव के लम्बे स्तम्भ में गिरती है। कौनसा ग्राफ निम्न के परिवर्तन को प्रदर्शित करता है–



(i) समय के साथ गुरूत्वाकर्षण बल

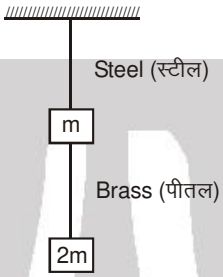
(ii) समय के साथ श्यान बल

(iii) समय के साथ गेंद पर कार्यरत कुल बल

(A) Q, R, P (B) R, Q, P (C) P, Q, R (D) R, P, Q

6. जल की सम्पीड्यिता 46.4×10^{-6}/वायुमण्डलीय है इसका अभिप्राय है कि
(A) जल का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक 46.4×10^6 वायुमण्डलीय है।
(B) दाब में प्रत्येक वायुमण्डलीय वृद्धि के लिए मूल आयतन के 46.4 गुना दस लाखवें भाग से जल के आयतन में कमी आती है।
(C) जब जल पर एक वायुमण्डलीय अतिरिक्त दाब लगता है तो इसका आयतन 46.4% से घटता है।
(D) जब जल पर एक वायुमण्डलीय अतिरिक्त दाब लगता है इसका आयतन मूल आयतन का 10^{-6} गुना कम हो जाता है।

7. यदि स्टील व पीतल के तारों की लम्बाई, त्रिज्या व यंग गुणांको का अनुपात क्रमशः a, b व c है तो इनके संगत उनकी लम्बाई में वृद्धि का अनुपात होगा :



(A) $\frac{2ac}{b^2}$ (B) $\frac{3a}{2b^2c}$ (C) $\frac{3c}{2ab^2}$ (D) $\frac{2a^2c}{b}$

8. यदि रबर की गेंद एक तालाब में 200 m गहराई पर ले जायी जाती है तो आयतन में 0.1% कमी आती है। यदि जल का घनत्व 1×10^3 kg/m^3 व $g = 10$ m/s^2 है तो आयतन प्रत्यास्थता N/m^2 में होगा :
(A) 10^8 (B) 2×10^8 (C) 10^9 (D) 2×10^9

9. समान पदार्थ व लम्बाई के परन्तु व्यास अनुपात 1 : 2 के दो तार समान बल से खींचे जाते है। दोनों तारों के लिए खिचने पर प्रति इकाई आयतन स्थितिज ऊर्जा का अनुपात होगा :
(A) 1 : 1 (B) 2 : 1 (C) 4 : 1 (D) 16 : 1

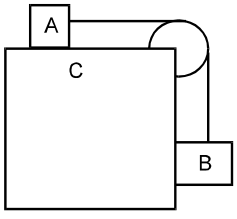
10. एक छोटी स्टील की गेंद एक द्रव में नियत चाल 10 cm/s से गिरती है। यदि स्टील की गेंद इसके प्रभावी भार के दुगुने बल से ऊपर खींची जाये तो यह ऊपर की ओर कितनी तीव्र चाल से गति करेगी ?
(A) 10 cm/s (B) 20 cm/s (C) 5 cm/s (D) – 5 cm/s

भाग - II : एकल या द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

1. 1 m लम्बी छड़ की लम्बाई के एक भाग का क्षेत्रफल 10 cm^2 व शेष भाग का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 5 cm^2 है। इस छड़ की विकृति ऊर्जा, उस छड़ जिसकी लम्बाई 1 m तथा अनुप्रस्थ काट क्षैत्रफल 10 cm^2 है, की विकृति ऊर्जा की 40 % है जबकि दोनों छड़ समान अधिकतम प्रतिबल के प्रभाव में है। 10 cm^2 अनुप्रस्थ काट वाले भाग की लम्बाई क्या है।

2. एक छड़ का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल $\left[1+\frac{x^2}{100}\right]$ cm^2 से दिया जाता है, जहां 'x' एक सिरे से दूरी है। यदि 10 cm की लम्बाई पर '20 kN' भार के कारण विस्तार $\lambda \times 10^{-3}$ cm है तब λ ज्ञात करो। $Y = 2 \times 10^5$ N/mm^2 .

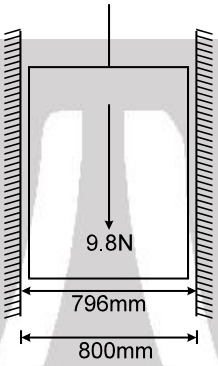
3. दो गुटके A व B एक दूसरे से एक डोरी द्वारा जुड़े हैं। डोरी चित्रानुसार एक घर्षणरहित घिरनी से गुजरती है। गुटका A, एक स्थिर गुटके C के क्षैतिज ऊपरी पृष्ठ पर फिसलता है एवं गुटका B, C के ऊर्ध्वाधर फलक पर फिसलता है। दोंनो एक समान चाल से फिसलते है। गुटकों की सतहों के मध्य घर्षण गुणांक 0.2 है। डोरी का बल नियतांक 2000 N/m है। यदि गुटके B का द्रव्यमान 2 kg है, तो गुटके A का द्रव्यमान व डोरी में संचित ऊर्जा के अनुपात की गणना (kg/J में) करों।



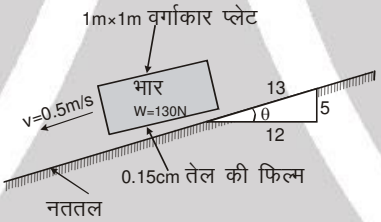
4. R त्रिज्या की एक पतली वलय ρ घनत्व व Y यंग गुणांक के एक पदार्थ से बनी है। यदि वलय इसके केन्द्र के परितः इसके तल में कोणीय वेग ω से घुमाई जाती है तो इसकी त्रिज्या में अल्प वृद्धि $\frac{2\rho\omega^2R^3}{\lambda Y}$ है तब λ ज्ञात करो।

5. घनत्व ρ, लम्बाई L, व अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल S व यंग गुणांक Y की एक समरूप तांबें की छड़ घर्षण रहित क्षैतिज सतह पर नियत त्वरण a_0 से गति कर रही है। यदि छड़ में कुल विस्तार $\frac{\rho a_0 L^2}{\lambda Y}$ है तो λ ज्ञात करो –

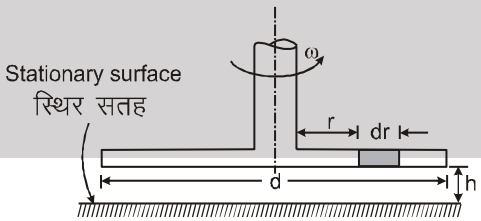
6. चित्र में प्रदर्शित 796 mm व्यास व 200 mm लम्बाई का एक पिस्टन 800 mm व्यास के बेलन में कार्य करता है। यदि वलयाकार रिक्त स्थान 5 सेन्टीपॉइज श्यानता के स्नेहक तेल से भरा जाता है तो पिस्टन के ऊर्ध्वाधर स्थिति में नीचे आने की नियत चाल (नजदीकी पूर्णांक) (m/s में) की गणना करो। पिस्टन का भार व अक्षीय भार कुल 9.8 N है।



7. यदि निम्न स्थिति के लिए तेल की श्यानता (लगभग) $\lambda \times 10^{-2}$ Ns/m² है तब λ ज्ञात करो –

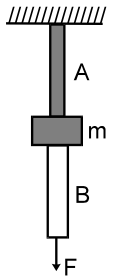


8. चित्र में प्रदर्शित व्यास 'd' की एक वृत्ताकार चकती अधिक श्यानता 'η' के एक द्रव में स्थिर सतह से अल्प दूरी 'h' पर धीरे–धीरे घूम रही है। यदि कोणीय वेग 'ω' बनाये रखने के लिए आवश्यक बलाघूर्ण τ के लिए व्यंजक $\frac{\pi\eta\omega d^4}{\lambda h}$ है, तो λ ज्ञात करो।



भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1. चित्र में प्रदर्शित तार A व B समान पदार्थ के बने है तथा उनकी त्रिज्या r_A व r_B है। m द्रव्यमान का एक गुटका उनके मध्य बंधा है। यदि बल F = mg/3 है, तो तारों के टुटने के लिए सही विकल्प है।



(A) A, B से पहले टूट जायेगा यदि $r_A < 2r_B$ है।
(B) A, B से पहले टूट जायेगा यदि $r_A = r_B$ है।
(C) A या B कोई भी टूट जायेगा यदि $r_A = 2r_B$ है।
(D) कौनसा तार टूटेगा यह निश्चित करने के लिए A व B की लम्बाई पता होनी चाहिए।

2. एक छोटी गेंद को 2h ऊँचाई के ऊर्ध्वाधर ग्लिसरिन द्रव स्तम्भ के शीर्ष पर छोड़ा जाता है। गेंद h गिरने में t_1 समय तथा शेष ऊँचाई को सीमान्त चाल से चलते हुए t_2 समय में पार करती है। माना इन ऊँचाईयों के दौरान श्यान बल द्वारा किया गया कार्य क्रमशः W_1 तथा W_2 हो तो

(A) $t_1 < t_2$ (B) $t_1 > t_2$ (C) $W_1 = W_2$ (D) $W_1 < W_2$

3. लम्बाई L, अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल A व यंग गुणांक Y का एक धातु का तार एक परिवर्ती बल F द्वारा इस प्रकार खींचा जाता है कि F सदैव तार में प्रत्यास्थ प्रतिरोधी बल से थोड़ा अधिक है जबकि तार में विस्तार ℓ है :

(A) F द्वारा किया गया गया कार्य $\frac{YA^2}{L}$ है। (B) F द्वारा किया गया कार्य $\frac{YA\ell^2}{2L}$ है।

(C) तार में संचित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा $\frac{YA\ell^2}{2L}$ है। (D) विस्तार के दौरान ऊष्मा उत्पन्न होती है।

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

अनुच्छेद-1

जब एक छड़ या तार पर सम्पीड़न या तनन बल लगाया जाता है तो लम्बाई में परिवर्तन x होता है, जो एक प्रत्यास्थ पदार्थ के लिए बल के समानुपाती है - (हुक का नियम)

$P \alpha x$ या $P = kx$

उपरोक्त समीकरण स्प्रिंग की समीकरण जैसी है। लम्बाई L, क्षेत्रफल A व यंग गुणांक Y की एक छड़ के लिए विस्तार x बताया जा सकता है जैसे -

$$x = \frac{PL}{AY} \quad \text{या} \quad P = \frac{AY}{L}x, \quad \text{अतः} \quad K = \frac{AY}{L}$$

इस प्रकार लिफ्ट से जुड़ी छड़े या तार स्प्रिंग की तरह मानी जा सकती है। छड़ में संग्रहीत ऊर्जा विकृति ऊर्जा कही जाती है एवं 1/2 Px के बराबर होती है। लिफ्ट के फर्श पर रखे या गिराये गये भार तारों (केबल्स) में प्रतिबल उत्पन्न करते हैं एवं स्प्रिंग विश्लेषण द्वारा ज्ञात किये जा सकते हैं। यदि लिफ्ट के तार (केबल) पहले से ही खींचे हुए हैं एवं भार रखा या गिराया जाता है तो केबल में अधिकतम विस्तार ऊर्जा संरक्षण द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

1. यदि लम्बाई 4 m, क्षेत्रफल $4cm^2$ व यंग गुणांक 2×10^{10} N/m^2 की एक छड़ 200 kg द्रव्यमान से जुड़ी है तो द्रव्यमान की सरल आवर्त गति की कोणीय आवृत्ति (rad/secमे) बराबर है :–

(A) 1000 (B) 10 (C) 100 (D) 10π

2. उपरोक्त प्रश्न में यदि 10 kg द्रव्यमान छड़ से जुड़े द्रव्यमानहीन आधार पर 99cm ऊँचाई से गिरता है तो छड़ में अधिकतम विस्तार बराबर है ($g = 10$ m/sec^2)

(A) 9.9 cm (B) 10 cm (C) 0.99 cm (D) 1 cm

3. उपरोक्त प्रश्न में छड़ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल बराबर है - (N/m^2)

(A) 5×10^7 (B) 5×10^8 (C) 4×10^7 (D) 4×10^8

4. यदि समान लम्बाई (4m) तथा अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल क्रमशः 2 cm^2 व 4 cm^2 तथा समान यंग गुणांक 2×10^{10} N/m^2 की दो छड़े एक के बाद एक 600 kg द्रव्यमान से जुड़ी है तो निकाय की कोणीय आवृत्ति है -

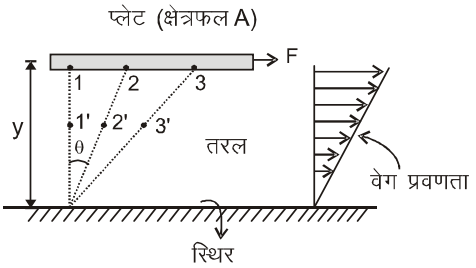
(A) $\frac{1000}{3}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $\frac{100}{3}$ (D) $\frac{10\pi}{3}$

5. प्रश्न (2) में बताये अनुसार चार एक समान छड़ें एक लिफ्ट से जुड़ी है। यदि लिफ्ट के पिंजरे का भार 1000 N है एवं प्रत्येक छड़ की प्रत्यास्थता सीमा 9×10^6N/m^2 है तो यह कितने व्यक्तियों को सुरक्षित ले जा सकती है। ($g = 10$m/sec^2, मानिये कि एक आदमी का औसत द्रव्यमान 50 kg है एवं लिफ्ट एक समान चाल से गति करती है)

(A) 7 (B) 26 (C) 24 (D) 25

अनुच्छेद -2

श्यानता द्रव का वह गुण है जिसके कारण वह स्पर्शरेखीय बल के प्रभाव में विरूपण के लिए प्रतिरोध प्रदान करता है। दिये गये चित्र में जैसे–जैसे प्लेट गति करती है। द्रव के कण स्थिति 1 से स्थिति 2 की ओर आगे गति करते हैं, परन्तु पेंदे पर उपस्थित कण स्थिर रहते हैं। यदि प्लेट व पेंदे के मध्य अन्तराल अल्प है तो प्लेट व पेंदे के मध्य द्रव कण दर्शाये गये रेखीय वेग वितरण वक्र के अनुसार गति करते हैं, नहीं तो वेग वितरण परवलयिक हो सकता है।



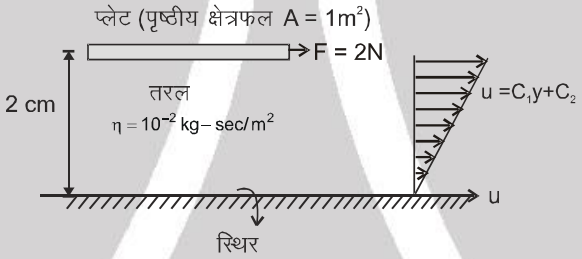
न्यूटन के श्यानता के नियम के अनुसार स्पर्श रेखीय बल, विरूपण की समय के साथ–साथ परिवर्तन की दर से संबंधित है

$\frac{F}{A} \alpha \frac{d\theta}{dt}$ परन्तु $y\frac{d\theta}{dt} = u, \frac{d\theta}{dt} = \frac{u}{y}$

तो $F = \eta A \frac{u}{y}$,η = श्यानता गुणांक

अरैखिक वेग वितरण के लिए $F = \eta A \frac{du}{dy}$ जहाँ $\frac{u}{y}$ या $\frac{du}{dy}$ वेग प्रवणता कही जाती है।

6. दिये गये चित्र में यदि 2N बल प्लेट के वेग को नियत बनाये रखने के लिए आवश्यक है तो नियतांक C_1 व C_2 के मान हैं

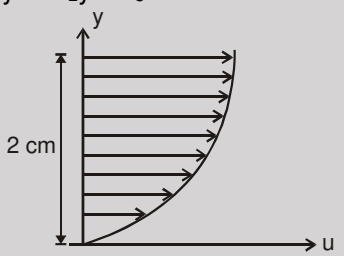


(A) 100, 100 (B) 0, 100 (C) 200, 0 (D) 0, 200

7. उपरोक्त प्रश्न में प्लेट की नियत चाल का मान (m/sec में) है -

(A) 0 (B) 4 (C) 2 (D) 1

8. यदि वेग वितरण परवलयिक है। $u = c_1y^2 + c_2y + c_3$



2N के उसी बल एवं प्लेट की चाल 2 m/sec के लिए, नियतांक C_1, C_2 व C_3 हैं -

(A) 200, 200, 0 (B) 5000, 200, 0 (C) 5000, 0, 0 (D) 500, 200, 0

9. उपरोक्त प्रश्न में प्लेट के ठीक नीचे वेग प्रवणता है - (प्रति सेकण्ड में)

(A) शून्य (B) 100 (C) 500 (D) 200

10. पेंदे के ठीक नजदीक वेग प्रवणता है –

(A) शून्य (B) 100 (C) 500 (D) 200

Exercise-3

✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

* चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1.✍ छोटे गोलाकार कण, श्यान माध्यम में गुरूत्व के प्रभाव में गिर रहे है। घर्षण के कारण ऊष्मा उत्पन्न करती है। सीमान्त वेग प्राप्त करने के बाद ऊष्मा उत्पन्न करने की दर कण की त्रिज्या पर कैसे निर्भर करती है। **[JEE 2004, 2/60]**

2.✍ 0.1kg का एक द्रव्यमान नगण्य द्रव्यमान वाले एक तार से लटका है। इस तार की लम्बाई 1m तथा इसके अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षेत्रफल 4.9×10^{-7} m^2 है। यदि इस द्रव्यमान को थोड़ा सा उर्ध्वाधर नीचे की ओर खींचकर छोडा जाय तो यह 140 rad s^{-1} कोणीय आवृत्ति की सरल आवर्त गति करता है। यदि तार के पदार्थ का यंग गुणांक $n \times 10^9$ Nm^{-2} हो तो n का मान है। **[JEE 2010, 3/252]**

3. कुल आवेश q वाली तेल की एक लघु गोलीय बूंद शांत हवा में, $\frac{81\pi}{7} \times 10^5$ Vm^{-1} तीव्रता वाले एक उर्ध्वाधर एक समान विद्युत क्षेत्र में संतुलित है। जब विद्युत क्षेत्र को शून्य कर दिया जाता है, तो बूंद 2×10^{-3} ms^{-1} के क्रान्तिक वेग से गिरती है। दिया है कि g = 9.8 ms^{-2}, हवा की श्यानता = 1.8×10^{-5} N sm^{-2} तथा तेल का घनत्व = 900 kg m^{-3}, q का परिमाण नीचे दिये विकल्पों में से कौन सा है ? **[JEE 2010, 5/237, –2]**

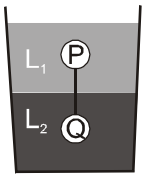
(A) 1.6×10^{-19} C (B) 3.2×10^{-19} C (C) 4.8×10^{-19} C (D) 8.0×10^{-19} C

4.✍ एक 2L लम्बाई व 2R त्रिज्या के मोटे क्षैतिज तार के एक सिरे को L लम्बाई व R त्रिज्या वाले एक पतले क्षैतिज तार से वेल्डिंग के द्वारा जोड़ा गया है। इस व्यवस्था के दोंनो सिरों पर बल लगाकर ताना जाता है। पतले व मोटे तारों में विस्तार का अनुपात निम्न है : **[JEE (Advanced) 2013, 3/60,–1]**

(A) 0.25 (B) 0.50 (C) 2.00 (D) 4.00

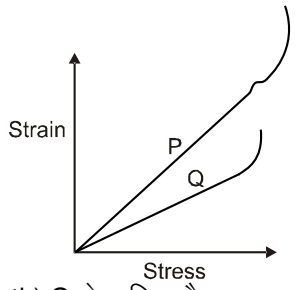
5. सर्ल के प्रयोग में वर्नियर पैमाने का शून्य मुख्य पैमाने पर 3.20×10^{-2} m तथा 3.25×10^{-2} m के बीच है। वर्नियर पैमाने का बीसवाँ भाग (20^{th} division) मुख्य पैमाने के किसी एक भाग के बिलकुल सीध में है। तार पर 2 kg का अतिरिक्त भार लगाने पर, यह देखा गया कि वर्नियर पैमाने का शून्य अभी भी मुख्य पैमाने पर 3.20×10^{-2} m तथा 3.25×10^{-2} m के बीच है, परन्तु अब वर्नियर पैमाने का पैंतालिसवाँ भाग (45^{th} division) मुख्य पैमाने के किसी अन्य भाग के बिलकुल सीध में है। धातु के पतले तार की लम्बाई 2m तथा अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 8×10^{-7} m^2 है। पैमाने का अल्पतमांक (least count) 1.0×10^{-5} m है। तार के यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Young's modulus) में अधिकतम प्रतिशत त्रुटि है।**[JEE (Advanced)-2014,P-1, 3/60]**

6*. बराबर त्रिज्या वाले दो गोलों P तथा Q के घनत्व क्रमशः ρ_1 तथा ρ_2 है। गोलों को एक द्रव्यमान रहित डोरी से जोड़कर σ_1 एव σ_2 घनत्व वाले तथा η_1 एवं η_2 श्यानता गुणाकों वाले द्रवों L_1 एवं L_2 में डाला जाता है। साम्यावस्था में गोला P द्रव L_1 में तथा Q द्रव L_2 में तैरता है तथा डोरी तनी रहती है (चित्र देखें)। यदि गोले P को अलग से L_2 में डालने पर उसका सीमांत वेग $\vec{V}_P$ होता है और गोले Q का L_1 में अलग से डालने पर सीमांत वेग $\vec{V}_Q$ है, तब **[JEE(Advanced) 2015 ; P-2,4/88, –2]**



(A) $\frac{|\vec{V}_P|}{|\vec{V}_Q|} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ (B) $\frac{|\vec{V}_P|}{|\vec{V}_Q|} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ (C) $\vec{V}_P.\vec{V}_Q > 0$ (D) $\vec{V}_P.\vec{V}_Q < 0$

7*. पदार्थो P तथा Q, के प्रतिबल–विकृति (stress-strain) ग्राफ खींचने में एक छात्र गलती से y-अक्ष पर विकृति तथा x अक्ष पर प्रतिबल दर्शाता है। तब सही कथन (हैं) **[JEE (Advanced) 2015 ; P-2,4/88, –2]**



(A) P का तनन–सामर्थ्य (tensile strength) Q से अधिक है।
(B) पदार्थ P पदार्थ Q से अधिक तन्य (ductile) है।
(C) पदार्थ P पदार्थ Q से अधिक भंगुर (brittle) है।
(D) पदार्थ P का यंग प्रत्यास्थता गुणांक पदार्थ Q के यंग प्रत्यास्थता गुणांक से अधिक है।

8. 8 gm cm^{-3} घनत्व वाले दो ठोस गोले P तथा Q का व्यास क्रमशः 1 cm एवं 0.5 cm है। गोले P को 0.8 gm cm^{-3} घनत्व एवं η = 3 poiseulles श्यानत्व (viscosity) वाले एक तरल में गिराया जाता है और गोले Q को 1.6 gm cm^{-3} घनत्व एवसं η = 2 poiseulles श्यानत्व (viscosity) वाले दूसरे तरल में गिराया जाता है। गोले P एवं Q के अंतिम वेगों का अनुपात क्या होगा। **[JEE (Advanced) 2016 ; P-1, 3/62]**

9*. मान लीजिए कि एक श्यान (viscous) द्रव के एक बड़े टैंक (tank) में एक पतली वर्गाकार प्लेट (thin square plate) तैर रही है। टैंक में द्रव की ऊँचाई h, टैंक की चौड़ाई से बहुत कम है। तैरती हुई प्लेट को एक नियत (constant) वेग u_0 से क्षैतिज दिशा में खींचा जाता है। निम्नलिखित कथनों में से कौन सा (से) सही है (हैं) ?
[JEE (Advanced) 2018, P-2, 4/60, –2]

(A) द्रव के द्वारा प्लेट पर लगाया गया प्रतिरोधक बल (resistive force) h के व्युत्क्रमानुपातिक (inversely proportional) है
(B) द्रव के द्वारा प्लेट पर लगाया गया प्रतिराधक बल प्लेट के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है
(C) टैंक की फर्श (floor) पर लगता हुआ स्पर्शरेखीय प्रतिबल (tangential/shear stress) u_0 के साथ बढ़ता है
(D) प्लेट पर लगने वाले स्पर्शरेखीय प्रतिबल द्रव की श्यानता (viscosity) η के साथ रेखीय तरीके से (linearly) बदलती है

10. एक ठोस क्षैतिज तल (solid horizontal surface) तेल की एक पतली परत (thin layer) से ढका (covered) हुआ है। द्रव्यमान (mass) m = 0.4 kg का एक आयताकार गुटका (rectangular block) इस तल पर विरामावस्था में है। 1.0 N s परिमाण का एक आवेग (impulse) गुटके पर t = 0 समय पर लगाया जाता है जिसके फलस्वरूप गुटका x-अक्ष (x-axis) पर $v(t) = v_0e^{-t/\tau}$ वेग से चलने लगता है, जहाँ v_0 एक स्थिर राशि है और τ = 4s है। समय $t = \tau$ पर, गटके का विस्थापन (displacement) _____मीटर है। e^{-1} = 0.37 लें। **[JEE (Advanced) 2018, P-2, 3/60]**

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. R त्रिज्या की गोल गेंद η श्यानता के किसी श्यान तरल में वेग v से गिर रही है। गोल गेंद पर कार्यरत मंदक श्यान बल है।
[AIEEE 2004, 3/225, –1]

(1) R के अनुक्रमानुपाती परन्तु v के व्युत्क्रमानुपाती
(2) R तथा v दोनो के अनुक्रमानुपाती
(3) R तथा v दोनों के व्युत्क्रमानुपाती
(4) R के व्युत्क्रमानुपाती परन्तु v के अनुक्रमानुपाती

2. यदि किसी तार के पदार्थ की प्रतिबल 'S' तथा यंग प्रत्यास्थता गुणांक 'Y' है, तो तार के प्रति एकांक आयतन में संचित ऊर्जा है : **[AIEEE-2005, 3/225, –1]**

(1) $2S^2Y$ (2) $\frac{S^2}{2Y}$ (3) $\frac{2Y}{S^2}$ (4) $\frac{S}{2Y}$

3. यदि एक श्यान द्रव (घनत्व = 1.5 किग्रा/मी^{3}) में सोने के एक गोले (घनत्व = 19.5 किग्रा/मी^{3}) की सीमान्त चाल 0.2 मी/से हो, तब उसी आकार के एक चॉदी के गोले (घनत्व = 10.5 किग्रा/मी^{3}) की उसी श्यान द्रव में सीमान्त चाल की गणना कीजिए। **[AIEEE 2006, 3/165, –1]**

(1) 0.4 मी/से (2) 0.133 मी/से (3) 0.1 मी/से (4) 0.2 मी/से

4. एक तार में ℓ मिमी से वृद्धि होती है जब एक भार W इससे लटकाया जाता है। यदि तार एक घिरनी के ऊपर से गुजरता हो और दोनो सिरों पर दो भार प्रत्येक W के लटकाए जाएँ, तब तार की लम्बाई में वृद्धि होगी (मिमी में) : **[AIEEE 2006, 3/165, –1]**

(1) ℓ (2) 2ℓ (3) शून्य (4) $\ell/2$

5. आयतन V की कोई ठोस गोल गेंद ρ_1 घनत्व के पदार्थ से बनी है। यह ρ_2 घनत्व ($\rho_2 < \rho_1$). के द्रव में गिर रही है। यह मान लीजिए कि द्रव गेंद पर श्यान बल लगाता है जो गेंद की चाल v के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है, अर्थात $F_{\text{श्यान}} = -kv^2$ ($k > 0$) गेंद की सीमान्त चाल है **[AIEEE-2008, 3/105]**

(1) $\frac{Vg\rho_1}{k}$ (2) $\sqrt{\frac{Vg\rho_1}{k}}$ (3) $\frac{Vg(\rho_1-\rho_2)}{k}$ (4) $\sqrt{\frac{Vg(\rho_1-\rho_2)}{k}}$

6. दो तार एक ही पदार्थ के बने हैं और एक समान आयतन रखते हैं। परन्तु तार 1 का अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल A एवं तार 2 का अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल 3A है। यदि बल F लगाने पर तार 1 की लम्बाई में Δx की वृद्धि होती है, तब तार 2 में वही वृद्धि करने के लिए कितने बल की आवश्यकता होगी ? **[AIEEE-2009, 4/144]**

(1) 4F (2) 6F (3) 9F (4) F

7. यदि पानी (श्यानता गुणांक $\eta_{water} = 8.5 \times 10^{-4}$ Pa.s) से भरे टैंक में एक स्टील (घनत्व $p = 7.8$ g cm^{-3}) की गेंद गिरने पर 10 cm s^{-1} के सीमान्त वेग से चलती है, तब ग्लिसरीन ($p = 1.2$ g cm^{-3}, $\eta = 13.2$ Pa.s) में इसका सीमान्त वेग लगभग होगा : **[AIEEE 2011, 11 May; 4/120, –1]**

(1) 6.25×10^{-4} cms^{-1} (2) 6.45×10^{-4}cms^{-1} (3) 1.5×10^{-5} cms^{-1} (4)1.6×10^{-5} cms^{-1}

8. 10 cm लम्बाई के एक स्टील के तार के सिरो पर जब तापमान में वृद्धि 100°C की जाती हैं तब इसकी लम्बाई स्थिर रखने के लिए सिरो पर लगाया गया दाब है : (स्टील का यंग प्रत्यास्थता गुणांक 2×10^{11} N m^{-2} और रेखिक प्रसार गुणांक 1.1×10^{-5} K^{-1} हैं) **[JEE (Main) 2014 ; 4/120, –1]**

(1) 2.2×10^8 Pa (2) 2.2×10^9 Pa (3) 2.2×10^7 Pa (4) 2.2×10^6 Pa

9. किसी एक समान तार का अनुप्रस्थकाट का क्षेत्रफल A हैं। इससे बनाये गये एक लोलक का आवर्तकाल T है। इस लोलक के गोलक से एक अतिरिक्त M द्रव्यमान जोड़ देने से लोलक का आवर्तकाल परिवर्तित होकर T_M हो जाता है। यदि इस तार के पदार्थ का यंग गुणांक Y हो तो 1/Y का मान होगा : (g = गुरूत्वीय त्वरण) **[JEE (Main) 2015; 4/120, –1]**

(1) $\left[\left(\frac{T_M}{T}\right)^2-1\right]\frac{A}{Mg}$ (2) $\left[\left(\frac{T_M}{T}\right)^2-1\right]\frac{Mg}{A}$ (3) $\left[1-\left(\frac{T_M}{T}\right)^2\right]\frac{A}{Mg}$ (4) $\left[1-\left(\frac{T}{T_M}\right)^2\right]\frac{A}{Mg}$

10. किसी मुलायम पदार्थ द्वारा बने हुए r त्रिज्या का एक ठोस गोला जिसका आयतन प्रत्यास्थता गुणांक K है, एक बेलनाकार बर्तन में किसी द्रव द्वारा घिरा हुआ है। a क्षैत्रफल का एक द्रव्यमानविहीन पिस्टन बेलानाकार बर्तन के संपूर्ण अनुप्रस्थकाट को ढ़कते हुए द्रव के सतह पर तैरता है। द्रव के संपीडन हेतु जब पिस्टन के सतह पर एक द्रव्यमान m रखा जाता है, तो गोले की त्रिज्या में होने वाला आंशिक परिवर्तन $\left(\frac{dr}{r}\right)$ होगा– **[JEE (Main) 2018; 4/120, –1]**

(1) $\frac{mg}{3Ka}$ (2) $\frac{mg}{Ka}$ (3) $\frac{Ka}{mg}$ (4) $\frac{Ka}{3mg}$

Answers

EXERCISE-1

भाग – I

खण्ड (A)

A-1. No, $\frac{10}{9}$ x 10^{-3} m = 1.11 mm.

A-2. 0.75 cm, 1.25 cm

A-3. $\frac{4}{3}\times10^{-4}, \frac{8}{3}\times10^{-4}$

खण्ड (B) :

B-1. (a) $\frac{F\cos^2\theta}{A}$ (b) $\frac{F\sin2\theta}{2A}$

(c) $\theta = 0^\circ$ (d) $\theta = 45^\circ$

खण्ड (C) :

C-1. 10^7 वायुमण्डलीय

खण्ड (D) :

D-1. 2.4×10^{-5} J. **D-2.** 13.72×10^{-3} J

खण्ड (E) :

E-1. $\frac{81}{49} \times 10^3$ m

भाग - II

खण्ड (A) :

A-1. (A) **A-2.** (A) **A-3.** (B)

A-4. (C)

खण्ड (B) :

B-1. (C)

खण्ड (C) :

C-1. (C)

खण्ड (D) :

D-1. (D) **D-2.** (D)

खण्ड (E) :

E-1. (i) (C) ; (ii) (D) **E-2.** (C)

E-3. (C) **E-4.** (D)

भाग - III

1. (A) $\rightarrow$ p ; (B) $\rightarrow$ q ; (C) $\rightarrow$ r ; (D) $\rightarrow$ q

EXERCISE-2

भाग - I

1.	(C)	**2.**	(D)	**3.**	(A)
4.	(D)	**5.**	(C)	**6.**	(B)
7.	(C)	**8.**	(D)	**9.**	(D)
10.	(A)				

भाग - II

1.	40	**2.**	8	**3.**	100
4.	2	**5.**	2	**6.**	8
7.	15	**8.**	32		

भाग - III

1.	(ABC)	**2.**	(BD)	**3.**	(BC)

भाग – IV

1.	(C)	**2.**	(D)	**3.**	(A)
4.	(C)	**5.**	(B)	**6.**	(C)
7.	(B)	**8.**	(C)	**9.**	(D)
10.	(A)				

EXERCISE-3

भाग - I

1.	$\frac{dQ}{dt} \propto r^5$			**2.**	4
3.	(D)	**4.**	(C)	**5.**	8
6.	(AD)	**7.**	(AB)	**8.**	3
9.	(ACD)	**10.**	6.30		

भाग - II

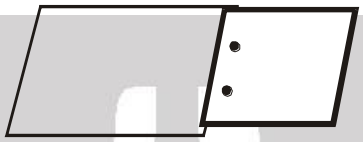
1.	(2)	**2.**	(2)	**3.**	(3)
4.	(1)	**5.**	(4)	**6.**	(3)
7.	(1)	**8.**	(1)	**9.**	(1)
10.	(1)				

High Level Problems (HLP)

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. 7.6 g cm^{-3} घनत्व के भार से भारित एक तार की लम्बाई 90 cm है। भार को पानी में डुबोने पर लम्बाई 0.18 cm कम होती है। तार की प्रारम्भिक लम्बाई ज्ञात करो।

2. दो लम्बी धात्विक पत्तियाँ एक दूसरे से दो रिवेट प्रत्येक की त्रिज्या 2.0 mm (चित्रानुसार) है, द्वारा जुड़ी है। प्रत्येक रिवेट अधिकतम 1.5×10^9 Pa का अपरूपण प्रतिबल सहन कर सकती है। पत्ती पर अधिकतम कितना तनन बल आरोपित किया जा सकता है, यह मानिये कि प्रत्येक रिवेट पर समान खिंचाव भार है ?



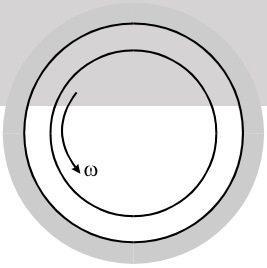
3. एक मिमी० त्रिज्या की आठ वर्षा की बूंदे सीमान्त वेग 5 cm s^{-1} से नीचे गिर रही है तथा एक बड़ी बूंद बनाने के लिए आपस में मिल जाती है। बड़ी बूंद का सीमान्त वेग ज्ञात करो।

4. त्रिज्या 1 cm का एक वायु का बुलबुला स्थायी दर 0.5 cm s^{-1} से 0.8 g cm^{-3} घनत्व के द्रव में ऊपर उठ रहा है। द्रव का श्यानता गुणांक ज्ञात करो। वायु का घनत्व नगण्य है।

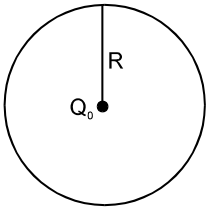
5. दो छड़ 'A' व 'B' जिनकी मुक्त लम्बाई समान है, 60 cm दूरी पर ऊर्ध्वाधर लटकी है तथा एक क्षैतिज दृढ़ छड़ को सहारा देती है। छड़ क्षैतिज रहती है, जब A से 20 cm दूर 5000 kg का भार लटका है। यदि B में प्रतिबल 50 N/mm^2 है तो 'A' में प्रतिबल व 'A' व 'B' का क्षेत्रफल ज्ञात करो। दिया है $Y_B = 9 \times 10^4$ N/mm^2, $Y_A = 2 \times 10^5$ N/mm^2, g = 10 m/sec^2

6. एक 2 m लम्बी ऊर्ध्वाधर छड़ ऊपरी सिरे पर जड़वत् है। '1 m' के लिए क्षेत्रफल 13 cm^2 व दूसरे 1 m के लिए क्षेत्रफल 20 cm^2 है। मुक्त सिरे पर एक पलड़ा जुड़ा है। अधिकतम 50 N/mm^2 का अधिकतम प्रतिबल उत्पन्न करने के लिए 100 kg भार को पलड़े पर कितनी ऊचाँई से गिराना चाहिए। Y = 200000 N/mm^2. (g = 9.8 m/s^2)

7. 150 mm त्रिज्या का एक बेलन 155 mm त्रिज्या के संकेन्द्री स्थिर बेलन के अन्दर घूमता है। दोनों बेलन 300 mm लम्बे हैं। द्रव की श्यानता ज्ञात कीजिये जो बेलनों के मध्य रिक्त स्थान में भरा है यदि 60 rpm का कोणीय वेग बनाये रखने के लिए 0.98 N-m के बलाघूर्ण की आवश्यकता है।



8. एक वलय जो कि रेखीय आवेश घनत्व 'λ', अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 'A', यंग गुणांक y, के तार की बनी है। इस वलय में एक आवेश Q_0 इसके केन्द्र पर रखा जाता है। यदि प्रारम्भिक त्रिज्या 'R' है, तो त्रिज्या में परिवर्तन ज्ञात करो।



9. नगण्य द्रव्यमान व अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल $4 \times 10^{-6}\ m^2$, की एक पतली छड़ एक सिरे से ऊर्ध्वाधर लटकी है। 10º C पर इसकी लम्बाई 0.5 m है। यह छड़ 0°C तक ठण्डी की जाती है। परन्तु निचले सिरे पर एक द्रव्यमान जोड़कर सिकुड़ने से रोकी जाती है। ज्ञात करो – **[JEE - 1997]**

(i) यह द्रव्यमान व

(ii) छड़ में संचित ऊर्जा

इस छड़ के लिए दिया है $Y = 10^{11}\ Nm^{-2}$, रेखीय प्रसार गुणांक $= 10^{-5}\ K^{-1}$ व $g = 10 ms^{-2}$

10. R_1 त्रिज्या का एक लम्बा बेलन R_2 त्रिज्या के एक स्थिर समाक्षीय बेलन के अंदर नियत वेग V_0 से इसके अक्ष के अनुदिश विस्थापित किया जाता है। बेलनों के मध्य अन्तराल श्यान द्रव से भरा है। बेलनों के अक्ष से r दूरी के फलन के रूप में द्रव को वेग ज्ञात कीजियें। प्रवाह परतनुमा है।

11. R_1 व R_2 त्रिज्या ($R_1 < R_2$) के दो लम्बे समाक्षीय बेलनों के मध्य अंतराल में η श्यानता का द्रव भरा हुआ है। आंतरिक बेलन स्थिर है तथा बाह्य बेलन कोणीय वेग ω_2 से घूर्णन करता है। द्रव प्रवाह परतनुमा है। r त्रिज्या के बेलनाकार पृष्ठ के एक एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत् घर्षण बल को निम्न सूत्र $\sigma = \eta\, r\, (\partial\omega/\partial\, r)$, द्वारा परिभाषित किया गया है। ज्ञात कीजिऐं :

(a) r त्रिज्या के फलन के रूप में घूर्णन करने वाले द्रव का कोणीय वेग ;

(b) बाह्य बेलन के एकांक लम्बाई पर कार्यरत् घर्षण बलों का आघूर्ण।

12. ℓ लम्बाई एवं R त्रिज्या की एक नलिका स्थायी द्रव प्रवाह रखती है जिसका घनत्व ρ व श्यानता η है। द्रव प्रवाह वेग नलिका के अक्ष से r दूरी पर $v = v_0 (1 - r^2/ R)$ के अनुसार निर्भर करता हैं।

ज्ञात कीजिऐं :

(a) प्रति एकांक समय नलिका के भाग से प्रवाहित द्रव का आयतन

(b) नलिका के आयतन में स्थित द्रव की गतिज ऊर्जा

(c) द्रव द्वारा नलिका पर लगाया गया घर्षण बल

(d) नलिका के सिरों पर दाबान्तर

HLP Answers

1. 88.632cm **2.** 3.77×10^4 N **3.** 20 cm/s **4.** 35.55 poise

5. $\frac{1000}{9}$ N/mm², 300 mm², $\frac{1000}{3}$ mm² **6.** 1.33 cm **7.** $\eta = 0.77$ N-sec/m².

8. $\Delta R = \frac{k\lambda Q_0}{AY}$ **9.** (i) 4.0kg (ii) 0.001 J **10.** $v = v_0 \frac{\ell n(r/R_2)}{\ell n(R_1/R_2)}$

11. (a) $\omega = \omega_2 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2}\right)$; (b) $N = 4\pi\eta\omega_2 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$

12. (a) $Q = 1/2\pi v_0 R^2$; (b) $T = 1/6\ \pi\ell R^2 \rho\, v_0^2$; (c) $F_{fr} = 4\pi\eta\ell v_0$; (d) $\Delta p = 4\pi\eta\ell v_0/R^2$