Exercise-1

✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

खण्ड (A) : व्यापक पद एवं $(ax+b)^n$ में x^k का गुणांक

A-1. निम्न का प्रसार करो :

(i) $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)^5, (x \neq 0)$ (ii) $\left(y^2+\frac{2}{y}\right)^4, (y \neq 0)$

A-2. $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ के प्रसार में प्रारम्भ से 7 वें पद और अंत से 7 वें पद का अनुपात 1 : 6 है, तब n का मान ज्ञात करो।

A-3. बहुपद $\left(x+(x^3-1)^{½}\right)^5+\left(x-(x^3-1)^{½}\right)^5$. की घात ज्ञात कीजिए।

A-4. गुणांक का मान ज्ञात करो–

(i) $(x+y)^9$ में x^6y^3 का (ii) $(a-2b)^{12}$ में $a^5\,b^7$ का

A-5. $\left(ax^2+\frac{1}{b\ x}\right)^{11}$ के प्रसार में x^7 का गुणांक और $\left(ax-\frac{1}{b\ x^2}\right)^{11}$ के प्रसार में x^{-7} का गुणांक ज्ञात करो। यदि ये गुणांक परस्पर बराबर हो, तो 'a' एवं 'b' के बीच सम्बन्ध ज्ञात करो(जहाँ $a, b \neq 0$)

A-6. $(1+x+2x^3)\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3\ x}\right)^9$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

A-7. (i) $(1+2x)^6(1-x)^7$ में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

(ii) $(1+2x)^4(2-x)^5$ में x^4 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

A-8.✍ यदि $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^n$, $n \in N$ के प्रसार में x^5 और x^{10} के गुणांको का योग शून्य हो, तो n है–

खण्ड (B) : मध्य पद, शेषफल और संख्यात्मक/बीजगणितीय महत्तम पद

B-1. निम्न के प्रसार में मध्य पद ज्ञात करो–

(i) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^7$ (ii) $(1-2x+x^2)^n$

B-2.✍ सिद्ध करो कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में मध्य पद का गुणांक, $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसार में मध्य पदों के गुणांकों के योगफल के बराबर है।

B-3. (i) यदि 7^{98} को 5 से विभाजित किया जाए, तो शेषफल ज्ञात करो।

(ii) द्विपद प्रमेय का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि 6^n-5n को 25 से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल सदैव 1 होता है।

(iii) $(27)^{27}$ का अन्तिम अंक, अन्तिम दो अंक व अन्तिम तीन अंक ज्ञात करो।

B-4.✍ $(99^{50}+100^{50})$ तथा $(101)^{50}$ में से कौनसा बड़ा है ?

B-5. (i) यदि $x=\frac{1}{5}$ तब $(3-5x)^{15}$ के प्रसार में महत्तम संख्यात्मक मान वाला(वाले) पद ज्ञात करो।

(ii) $(2x+5y)^{34}$के विस्तार में संख्यात्मक महत्तम पद होगा जब $x = 3$ तथा $y = 2$?

B-6. $(2x-5)^6$ के प्रसार में वह पद ज्ञात करो जो रखता है

(i) महत्तम द्विपद गुणांक (ii) महत्तम संख्यात्मक गुणांक

(iii) महत्तम बीजगणितीय गुणांक (iv) न्यूनतम बीजगणितीय गुणांक

खण्ड (C) : श्रेणी का योग, चर ऊपरी सूचकांक एवं द्विपद गुणांको का गुणन

C-1. यदि $(1+x)^n$, $n \in N$ के प्रसार में $C_0, C_1, C_2,.., C_n$ द्विपद गुणांक है, तो सिद्ध करो :

(i) $C_0-\frac{C_1}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2}-\frac{C_3}{2\sqrt{2}}$ …….. upto (n + 1) terms equal to $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

(ii) $-C_1(3)^{n-1}(\sqrt{5})^1+C_2(3)^{n-2}5-C_3 3^{n-3}(5\sqrt{5})$ …..upto (n) terms equal to $(3-\sqrt{5})^n-3^n$

(iii) $\frac{(3.2-1)}{2}C_1+\frac{3^2.2^2-1}{2^2}C_2+\frac{3^3.2^3-1}{2^3}C_3+\ldots\ldots+\frac{3^n.2^n-1}{2^n}C_n=\frac{2^{3n}-3^n}{2^n}$

C-2. यदि $(1+x)^n$, $n \in N$ के प्रसार में $C_0, C_1, C_2,.., C_n$ द्विपद गुणांक है, तो सिद्ध करो :

(i) $\frac{C_1}{C_0}+2\frac{C_2}{C_1}+3\frac{C_3}{C_2}+\ldots\ldots+n\frac{C_n}{C_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$

(ii) $(C_0+C_1)(C_1+C_2)(C_2+C_3)(C_3+C_4)\ldots\ldots(C_{n-1}+C_n)=\frac{C_0C_1C_2\ldots\ldots C_{n-1}(n+1)^n}{n!}$.

(iii) $C_0-2C_1+3C_2-4C_3+\ldots.+(-1)^n(n+1)C_n=0$

(iv) $4C_0+\frac{4^2}{2}.C_1+\frac{4^3}{3}C_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{4^{n+1}}{n+1}C_n=\frac{5^{n+1}-1}{n+1}$

(v) $\frac{2^2.C_0}{1.2}+\frac{2^3.C_1}{2.3}+\frac{2^4.C_2}{3.4}+\ldots\ldots+\frac{2^{n+2}.C_n}{(n+1)(n+2)}=\frac{3^{n+2}-2n-5}{(n+1)(n+2)}$

(vi) $2.C_0+\frac{2^2.C_1}{2}+\frac{2^3.C_2}{3}+\frac{2^4.C_3}{4}+\ldots\ldots\frac{2^{n+1}.C_n}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$

C-3. सिद्ध करो

(i) ${}^nC_r+{}^{n-1}C_r+{}^{n-2}C_r+\ldots\ldots\ldots\ldots+{}^rC_r={}^{n+1}C_{r+1}$

(ii) ${}^{10}C_2+{}^{11}C_2+{}^{12}C_2+\ldots..+{}^{19}C_2=1020$

C-4. यदि $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots\ldots\ldots+C_nx^n$, सिद्ध करो

(i) $C_0C_3+C_1C_4+\ldots\ldots\ldots+C_{n-3}C_n=\frac{(2n)!}{(n+3)!(n-3)!}$

(ii) $C_0C_r+C_1C_{r+1}+\ldots\ldots\ldots.+C_{n-r}C_n=\frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}$

(iii) $C_0^2-C_1^2+C_2^2-C_3^2+\ldots\ldots+(-1)^nC_n^2=0$ या $(-1)^{n/2}C_{n/2}$ यदि n विषम या सम है।

खण्ड (D) : ऋणात्मक व भिन्न घातांक, बहुपदीय प्रमेय

D-1. $(1-2x)^{-5/2}$ के प्रसार में x^6 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

D-2. (i) $\dfrac{4+2x-x^2}{(1+x)^3}$ में x^{12} का गुणांक ज्ञात कीजिए। (ii) $\dfrac{3-5x}{(1-x)^2}$ में x^{100} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

D-3. यदि 'x' का मान इतना अल्प है कि x^2 और 'x' की उच्च घातों को नगण्य माना जा सकता है तो प्रदर्शित कीजिए कि $\dfrac{\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{-4}(16-3x)^{1/2}}{(8+x)^{2/3}}$ का मान लगभग $1-\dfrac{305}{96}x$ है।

D-4. (i) $(bc+ca+ab)^8$ के प्रसार में $a^5\,b^4\,c^7$ का गुणांक ज्ञात करो।
(ii) $(9x^2+x-8)^6$ के प्रसार में x की विषम घातों के गुणांको का योगफल है।

D-5. $(1-2x+x^3)^5$ में x^7 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

खण्ड (A) : व्यापक पद एवं $(ax+b)^n$ में x^k का गुणांक

A-1. $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^{2m+1}$ का (m + 1)वाँ पद

(A) x पर निर्भर नहीं है। (B) अचर है।
(C) अनुपात x/y और m पर निर्भर है। (D) इनमें से कोई नहीं

A-2. $(x+a)^{100}+(x-a)^{100}$ के प्रसार में सरल करने के बाद भिन्न–भिन्न पदों की कुल संख्या है :
(A) 50 (B) 202 (C) 51 (D) इनमें से कोई नहीं

A-3. $\dfrac{18^3+7^3+3\,.\,18\,.\,7\,.\,25}{3^6+6.\,243.\,2+15\,.\,81\,.\,4+20.\,27.\,8+15.\,9\,.\,16+6.3.\,32+64}$ का मान है –
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं

A-4. $\left(3-\sqrt{\dfrac{17}{4}+3\sqrt{2}}\right)^{15}$ के प्रसार में 11वाँ पद है –
(A) धनात्मक पूर्णांक (B) धनात्मक अपरिमेय संख्या
(C) ऋणात्मक पूर्णांक (D) ऋणात्मक अपरिमेय संख्या

A-5. यदि $\left[a^{1/13}+\dfrac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right]^n$ के प्रसार में द्वितीय पद $14a^{5/2}$ है, तो $\dfrac{{}^nC_3}{{}^nC_2}$ का मान है–
(A) 4 (B) 3 (C) 12 (D) 6

A-6. $(7^{1/3}+11^{1/9})^{6561}$ के प्रसार में करणी चिन्ह (radical sign) से रहित पदों की संख्या है –
(A) 730 (B) 729 (C) 725 (D) 750

A-7. $(1+x)^{10}$ के प्रसार में (2m + 1)वें एवं (4m + 5)वें पदों के गुणांक समान हैं, तो m का मान है–
(A) 3 (B) 1 (C) 5 (D) 8

A-8. $(1 - 2x^3 + 3x^5)\left(1+\frac{1}{x}\right)^8$ के प्रसार में x का गुणांक है–

(A) 56 (B) 65 (C) 154 (D) 62

A-9. यदि $(x^{1/3} - x^{-1/2})^{15}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद 5m के बराबर है, जहाँ $m \in N$, तो m =

(A) 1100 (B) 1010 (C) 1001 (D) 1002

A-10. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद हैं–

(A) – 3 (B) 0 (C) 1 (D) 3

खण्ड (B) : मध्य पद, शेषफल और संख्यात्मक/बीजगणितीय महत्तम पद

B-1. यदि $k \in R^+$ और $\left(\frac{k}{2}+2\right)^8$ का मध्य पद 1120 है, तो k का मान होगा :

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 4

B-2. यदि 2^{2003} को 17 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल होगा –

(A) 1 (B) 2 (C) 8 (D) 7

B-3. संख्या 3^{400} के अन्तिम दो अंक है :

(A) 81 (B) 43 (C) 29 (D) 01

B-4. 10 ! के मान में अन्तिम तीन अंक है –

(A) 800 (B) 700 (C) 500 (D) 600

B-5. $\sum_{r=1}^{10} r \cdot \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}$ का मान बराबर है–

(A) 5 (2n – 9) (B) 10 n (C) 9 (n – 4) (D) n –2

B-6. $\sum_{r=0}^{n-1} \frac{{}^nC_r}{{}^nC_r + {}^nC_{r+1}} =$

(A) $\frac{n}{2}$ (B) $\frac{n+1}{2}$ (C) $(n+1)\ \frac{n}{2}$ (D) $\frac{n\ (n-1)}{2\ (n+1)}$

B-7. $(2 + 3x)^9$ के प्रसार में x = 3/2 के लिए महत्तम संख्यात्मक मान वाला पद है –

(A) ${}^9C_6 . 2^9 . (3/2)^{12}$ (B) ${}^9C_3 . 2^9 . (3/2)^6$ (C) ${}^9C_5 . 2^9 . (3/2)^{10}$ (D) ${}^9C_4 . 2^9 . (3/2)^8$

B-8. $(\sqrt{2} + 1)^6$ से कम या बराबर महत्तम पूर्णांक है–

(A) 196 (B) 197 (C) 198 (D) 199

खण्ड (C) : श्रेणी का योग, चर ऊपरी सूचकांक एवं द्विपद गुणांको का गुणन

C-1. $\frac{{}^{11}C_0}{1} + \frac{{}^{11}C_1}{2} + \frac{{}^{11}C_2}{3} + ... + \frac{{}^{11}C_{10}}{11} =$

(A) $\frac{2^{11}-1}{11}$ (B) $\frac{2^{11}-1}{6}$ (C) $\frac{3^{11}-1}{11}$ (D) $\frac{3^{11}-1}{6}$

C-2. $\frac{C_0}{1.3} - \frac{C_1}{2.3} + \frac{C_2}{3.3} - \frac{C_3}{4.3} + ... + (-1)^n \frac{C_n}{(n+1)\ .\ 3}$ का मान होगा–

(A) $\frac{3}{n+1}$ (B) $\frac{n+1}{3}$ (C) $\frac{1}{3(n+1)}$ (D) इनमें से कोई नहीं

C-3. व्यंजक $^{47}C_4 + \sum_{j=1}^{5} {}^{52-j}C_3$ का मान बराबर है–

(A) $^{47}C_5$ (B) $^{52}C_5$ (C) $^{52}C_4$ (D) $^{49}C_4$

C-4. $\binom{50}{0}\binom{50}{1} + \binom{50}{1}\binom{50}{2} + ... + \binom{50}{49}\binom{50}{50}$ का मान होगा, जहाँ $^nC_r = \binom{n}{r}$

(A) $\binom{100}{50}$ (B) $\binom{100}{51}$ (C) $\binom{50}{25}$ (D) $\binom{50}{25}^2$

खण्ड (D) : ऋणात्मक व भिन्न घातांक, बहुपदीय प्रमेय

D-1. यदि $|x| < 1$, तो $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^2$ के प्रसार में x^n का गुणांक है –

(A) n (B) n – 1 (C) n + 2 (D) n + 1

D-2. $(1 - x + 2x^2)^{12}$ के प्रसार में x^4 का गुणांक है –

(A) $^{12}C_3$ (B) $^{13}C_3$ (C) $^{14}C_4$ (D) $^{12}C_3 + 3\ ^{13}C_3 + {}^{14}C_4$

D-3. यदि $(1 + x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...+ a_{10}x^{10}$ हो, तो $(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - a_{10})^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9)^2$ का मान है–

(A) 2^{10} (B) 2 (C) 2^{20} (D) इनमें से कोई नहीं

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1.

	स्तम्भ – I		स्तम्भ – II
(A)	यदि $(1 + x)^{7/2}$ के प्रसार में $(r + 1)$वाँ पद प्रथम ऋणात्मक पद है, तो r का मान है – (जहाँ $0 < x < 1$)	(p)	2 से विभाजित है
(B)	यदि $(1 + 2x)^n$ के प्रसार में गुणांको का योगफल 6561, और $x = 1/2$ के लिए T_r अधिकतम पद है तब r है।	(q)	5 से विभाजित है
(C)	^nC_r, $(1 < r < n)$, n से विभाजित होगा यदि n है,	(r)	10 से विभाजित है
(D)	व्यंजक $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$ अनन्त पदों तक$)^{1/2}$ में x^4 का गुणांक c, $(c \in N)$ है, तो c + 1 है – (जहाँ $|x| < 1$)	(s)	एक अभाज्य संख्या

Exercise-2

✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार

1. $\left(3\sqrt{\frac{a}{b}}+3\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}\right)^{21}$, के विस्तार में a और b की समान घातों का पद है –

(A) 11^{th} वां पद (B) 13^{th} वां पद (C) 12^{th} वां पद (D) 6^{th} वां पद

2. माना कि निम्न कथन है –

S_1 : $(1 + x + x^2 + x^3)^n$ के प्रसार में असमान पदों की संख्या $3n + 1$ है।

S_2 : $(1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3)......(1 + x + x^2 +...... + x^{100})$ को यदि x की बढ़ती हुई घातों के क्रम में लिखा जाता है, तो x की अधिकतम घात 5000 होगी –

S_3 : $\sum\limits_{k=1}^{n-r} {}^{n-k}C_r = {}^nC_{r+1}$

S_4 : यदि $(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$, तो $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n} = \frac{3^n-1}{2}$

S_1, S_2, S_3, S_4 के सत्य (T) या असत्य (F) होने का सही क्रम है –

(A) TFTF (B) TTTT (C) FFFF (D) FTFT

3. यदि $\frac{{}^nC_r+4\,{}^nC_{r+1}+6\,{}^nC_{r+2}+4\,{}^nC_{r+3}+{}^nC_{r+4}}{{}^nC_r+3\,{}^nC_{r+1}+3\,{}^nC_{r+2}+{}^nC_{r+3}}=\frac{n+k}{r+k}$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5

4.✍ $(1 + x)^{21} + (1 + x)^{22} +....... + (1 + x)^{30}$ के प्रसार में x^5 का गुणांक है :

(A) ${}^{51}C_5$ (B) ${}^9C_5$ (C) ${}^{31}C_6 - {}^{21}C_6$ (D) ${}^{30}C_5 + {}^{20}C_5$

5.✍ $\sum\limits_{m=0}^{100} {}^{100}C_m\,(x-3)^{100-m}.\,2^m$ के प्रसार में x^{52} का गुणांक है –

(A) ${}^{100}C_{47}$ (B) ${}^{100}C_{48}$ (C) $-{}^{100}C_{52}$ (D) $-{}^{100}C_{100}$

6. $\left(1+2\sqrt{x}\right)^{40}$ के प्रसार में x की सभी पूर्णांक घातों के गुणांकों का योगफल है –

(A) $3^{40} + 1$ (B) $3^{40} - 1$ (C) $\frac{1}{2}(3^{40} - 1)$ (D) $\frac{1}{2}(3^{40} + 1)$

7. $\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r\,{}^nC_r.\frac{(1+r\ell n10)}{(1+\ell n10^n)^r}$ का मान है–

(A) 0 (B) 1/2 (C) 1 (D) इनमें से कोई

8. $\left(\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{x-1}{x-x^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद का गुणांक है –

(A) 70 (B) 112 (C) 105 (D) 210

9.✍ $(x + 3)^n + (x + 3)^{n-1}(x + 2) + (x + 3)^{n-2}(x + 2)^2 +..... + (x + 2)^n$ के प्रसार में x^{n-1} का गुणांक है –

(A) ${}^{n+1}C_2(3)$ (B) ${}^{n-1}C_2(5)$ (C) ${}^{n+1}C_2(5)$ (D) ${}^nC_2(5)$

10. माना $f(n) = 10^n + 3.4^{n+2} + 5$, $n \in N$ तब वह अधिकतम पूर्णांक जो $f(n)$ को n के प्रत्येक मान के लिए विभाजित करता है–

(A) 27 (B) 9 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r$ और $b_r = 1 + \frac{a_r}{a_{r-1}}$ और $\prod_{r=1}^{n} b_r = \frac{(101)^{100}}{100!}$, तो n बराबर है :

(A) 99 (B) 100 (C) 101 (D) 102

12. $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^6$ के विस्तार में परिमेय पदों की संख्या है –

(A) 7 (B) 10 (C) 6 (D) 8

13. यदि $S = {}^{404}C_4 - {}^4C_1.{}^{303}C_4 + {}^4C_2.{}^{202}C_4 - {}^4C_3.{}^{101}C_4 = (101)^k$ तब k का मान है–

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6

14. ${}^{10}C_0^{\,2} - {}^{10}C_1^{\,2} + {}^{10}C_2^{\,2} - .... - \left({}^{10}C_9\right)^2 + \left({}^{10}C_{10}\right)^2 =$

(A) 0 (B) $\left({}^{10}C_5\right)^2$ (C) $-{}^{10}C_5$ (D) $2\,{}^9C_5$

15. योगफल $\sum_{r=0}^{n} (r+1)\, C_r^2$ बराबर है –

(A) $\frac{(n+2)(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}$ (B) $\frac{(n+2)(2n+1)!}{n!\,(n-1)!}$ (C) $\frac{(n+2)(2n+1)!}{n!\,(n+1)!}$ (D) $\frac{(n+2)(2n-1)!}{n!\,(n+1)!}$

16. यदि $(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{15}x^{15}$ हो, तो $a_{10} =$

(A) 99 (B) 101 (C) 100 (D) 110

17. यदि $a_n = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{{}^nC_r}$ हो, तो $\sum_{r=0}^{n} \frac{n-2r}{{}^nC_r}$ का मान होगा –

(A) $\frac{n}{2}a_n$ (B) $\frac{1}{4}a_n$ (C) na_n (D) 0

18. $3.{}^nC_0 - 8.{}^nC_1 + 13.{}^nC_2 - 18.{}^nC_3 + ...$ के (n+1) पदों का योगफल है $(n \geq 2)$:

(A) शून्य (B) 1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं

19. यदि $\sum_{r=0}^{n-1}\left(\frac{{}^nC_r}{{}^nC_r + {}^nC_{r+1}}\right)^3 = \frac{4}{5}$ तब $n =$

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) इनमें से कोइ नहीं

20. $\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)^n$, $n \in N$ के प्रसार में पदों की संख्या है –

(A) 2n (B) 3n (C) 2n + 1 (D) 3n + 1

21. मानाकि किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए

$$\det\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n} k & \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k k^2 \\ \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k k & \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k 3^k \end{bmatrix} = 0$$, तो $\sum_{k=0}^{n} \frac{{}^nC_k}{k+1}$ का मान है–

[JEE(Advanced) 2019, Paper-2 ,(4, –1)/62]

भाग-II : संख्यात्मक प्रश्न (NUMERICAL VALUE QUESTIONS)

INSTRUCTION :

निर्देश :

- इस खण्ड में प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **संख्यात्मक मान** के रूप में है जिसमें दो पूर्णांक अंक तथा दो अंक दशमलव के बाद में है।
- यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के **दो** स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।

1. यदि $\frac{1}{1!10!}+\frac{1}{2!9!}+\frac{1}{3!8!}+......+\frac{1}{10!1!}=\frac{(2^{10}-1)}{k\ 10!}$ तब k का मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\left[\frac{1}{x^{8/3}}+x^2\log_{10}x\right]^8$ के प्रसार में छठवां पद 5600 है, तो x =

3. 'x' के मानों की संख्या होगी जिसके लिए व्यंजक $\left(5^{\frac{2}{5}\log_5\sqrt{4^x+44}}+\frac{1}{5^{\log_5\sqrt[3]{2^{x-1}+7}}}\right)^8$ में चौथा पद 336 है –

4. यदि $(x + a)^n$ के विस्तार में दुसरा, तीसरा और चौथा पद क्रमशः 240, 720 तथा 1080 है तब अन्तिम पद तथा प्रथम पद का अनुपात होगा–

5. मानाकि $(1 + x)^{2n}$ एवं $(1 + x)^{2n-1}$ के प्रसार में x^n के गुणांक क्रमशः P एवं Q है, तो $\left(\frac{P+Q}{P}\right)^4=$

6. $\left(3^{\frac{-x}{4}}+3^{\frac{5x}{4}}\right)^n$ के विस्तार में द्विपद गुणाकों का योग 256 है और अधिकतम द्विपद गुणांक का चार गुना, तीसरे पद के वर्ग से 21n, अधिक है तब x का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि $\sum_{k=1}^{19}\frac{(-2)^k}{k!(19-k)!}=\frac{1}{k\ 18!}$ हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

8. व्यंजक $(1 + x)^{1000} + 2x (1 + x)^{999} + 3x^2 (1 + x)^{998} +..... + 1001\, x^{1000}$ में x^{50} का गुणांक ${}^{1002}C_p$ है, तो p का मान है।

9. यदि {x} , 'x' के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है, तथा $\left\{\frac{3^{1001}}{82}\right\}=\frac{1}{\lambda}$ हो तो λ का मान होगा –

10. यदि $\left(\frac{x}{5}+\frac{2}{5}\right)^n$, $(n \in N)$ के प्रसार में केवल 9वाँ पद संख्यात्मक रूप से महत्तम गुणांक वाला पद हो, तो $\frac{T_9}{T_8}$ का मान ज्ञात कीजिए (जहाँ T_r प्रसार में प्रारम्भ से rवें पद के गुणांक को प्रदर्शित करता है)

11. समीकरण ${}^{39}C_{3r-1}-{}^{39}C_{r^2}={}^{39}C_{r^2-1}-{}^{39}C_{3r}$ को संतुष्ट करने वाले 'r' के सभी संभावित मानों के वर्गो का योग होगा –

12. ${}^6C_0 . {}^{12}C_6 - {}^6C_1\, {}^{11}C_6 + {}^6C_2\, {}^{10}C_6 - {}^6C_3 . {}^9C_6 + {}^6C_4 . {}^8C_6 - {}^6C_5 . {}^7C_6 + {}^6C_6 . {}^6C_6$ का मान ज्ञात कीजिए

13. यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है तथा $C_k = {}^nC_k$ तब $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n(n+1)^2.(n+2)}\left(\frac{C_k}{C_{k-1}}\right)^2\right)$ का मान है–

14. व्यंजक $\left(\sum_{r=0}^{10}{}^{10}C_r\right)\left(\sum_{K=0}^{10}(-1)^K\frac{{}^{10}C_K}{2^K}\right)$ का मान है–

15. λ का मान होगा यदि $\sum_{m=97}^{100}{}^{100}C_m\,.\,{}^mC_{97} = \lambda\,{}^{99}C_{96}$ है।

16. यदि $(1 + x + x^2 + ... + x^p)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{np}\,x^{np}$, हो, तो $\frac{1}{p(p+1)^7}\,[a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + 7p\,a_{7p}]$ का मान है–

17. यदि $({}^{2n}C_1)^2 + 2.\,({}^{2n}C_2)^2 + 3.\,({}^{2n}C_3)^2 + ... + 2n.\,({}^{2n}C_{2n})^2 = 18\,.\,{}^{4n-1}C_{2n-1}$, तब n है –

18. यदि $\sum_{r=0}^{n}\frac{2r+3}{r+1}.{}^nC_r = \frac{(2n+3k)2^n-1}{n+1}$ है तब 'k' का मान है।

19. यदि $\sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r.C_r}{(r+1)(r+2)(r+3)} = \frac{a}{(n+b)}$ है, तब a + b का मान है।

20 $\sum_{k=1}^{3n}{}^{6n}C_{2k-1}(-3)^k$ बराबर है।

21. यदि x, y की तुलना में बहुत बड़ा हो, तो $\sqrt{\frac{x}{x+y}}\sqrt{\frac{x}{x-y}} = 1 + \frac{ky^2}{x^2}$ में k का मान है।

भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1. $\left(\sqrt[3]{4}+\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)^{20}$ के प्रसार में

(A) अपरिमेय पदों की संख्या 19 है। (B) मध्य पद अपरिमेय है।
(C) परिमेय पदों की संख्या 2 है। (D) 9वाँ पद परिमेय है।

2. $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$, $|x| < 1$ में x^4 का गुणांक है–

(A) 4 (B) –4 (C) $10 + {}^4C_2$ (D) 16

3. $7^9 + 9^7$ विभाजित हैं –

(A) 16 से (B) 24 से (C) 64 से (D) 72 से

4. श्रेणी $\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}.\ {}^nC_r(a-r)$ का योगफल बराबर है

(A) 5 यदि a = 5 (B) –5 यदि a = 5 (C) –5 यदि a = –5 (D) 5 यदि a = –5

5. मानाकि $n \in N$ के लिए $a_n = \dfrac{1000^n}{n!}$ हो, तो a_n महत्तम होगा, यदि

(A) n = 997 (B) n = 998 (C) n = 999 (D) n = 1000

6. $^nC_0 - 2.3\ ^nC_1 + 3.3^2\ ^nC_2 - 4.3^3\ ^nC_3 + \dots\dots\dots + (-1)^n (n+1)\ ^nC_n 3^n$ का मान बराबर है

(A) $2^n\left(\dfrac{3n}{2}+1\right)$ यदि n सम है। (B) $2^n\left(n+\dfrac{3}{2}\right)$ यदि n सम है।

(C) $-\ 2^n\left(\dfrac{3n}{2}+1\right)$ यदि n विषम है। (D) $2^n\left(n+\dfrac{3}{2}\right)$ यदि n विषम है।

7. r के मानों की संख्या होगी जिसके लिए $^{18}C_{r-2} + 2.\ ^{18}C_{r-1} + {}^{18}C_r \geq {}^{20}C_{13}$ है

(A) 9 (B) 5 (C) 7 (D) 10

8. $(3x + 2)^{-1/2}$ का प्रसार x की बढ़ती हुई घातों के लिए वैध है यदि x अन्तराल में स्थित होगा।

(A) (0, 2/3) (B) (–3/2, 3/2) (C) (–2/3, 2/3) (D) $(-\infty, -3/2)\ (3/2, \infty)$

9. यदि $(1 + 2x + 3x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$ हो, तो

(A) $a_1 = 20$ (B) $a_2 = 210$ (C) $a_4 = 8085$ (D) $a_{20} = 2^2.\ 3^7.\ 7$

10. $(x + y + z)^{25}$ के प्रसार में

(A) प्रत्येक पद $^{25}C_r.\ ^rC_k.\ x^{25-r}.\ y^{r-k}.\ z^k$ रूप में होगा।

(B) $x^8\ y^9\ z^9$ का गुणांक 0 है।

(C) पदों की संख्या 325 है।

(D) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $(1 + x + 2x^2)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots\dots\dots + a_{40}x^{40}$ हो, तो $a_0 + a_2 + a_4 \dots\dots + a_{38}$ बराबर है –

(A) $2^{19}(2^{30} + 1)$ (B) $2^{19}(2^{20} - 1)$ (C) $2^{39} - 2^{19}$ (D) $2^{39} + 2^{19}$

12. $n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$ है– $(n \in N)$

(A) $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^3$ से छोटा (B) $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^3$ से बड़ा या बराबर

(C) $(n!)^3$ से छोटा (D) $(n!)^3$ से बड़ा या बराबर

13. यदि व्यंजक $P_k(x)$ इस तरह से परिभाषित है कि $P_1(x) = (x-2)^2$, $P_2(x) = ((x-2)^2 - 2)^2$
$P_3(x) = ((x-2)^2 - 2)^2 - 2)^2$ (व्यापक रूप से $P_k(x) = (P_{k-1}(x) - 2)^2$), तो $P_k(x)$ में अचर पद है–

(A) 4 (B) 2 (C) 16 (D) एक पूर्ण वर्ग

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

अनुच्छेद # 1 (Q. No. 1 to 3)

माना कि श्रेणियों का योगफल $\sum\sum_{0 \le i < j \le n}$ f(i) f(j) सूत्र से दिया जाता है जहाँ i तथा j स्वतंत्र नहीं है।

श्रेणियों के योगफल $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i) \quad f(j) = \sum_{i=1}^{n}\left(f(i)\left(\sum_{j=1}^{n} f(j)\right)\right)$ में i व j स्वतंत्र है। इस योगफल में तीन प्रकार के पद होते है। जिनमें i < j, i > j तथा i = j तथा जब i < j के लिए पदो का योगफल, i > j के लिए पदों के योगफल के बराबर है। यदि f(i) तथा f(j) सममित है। इस स्थिति में

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(i)f(j) = \sum\sum_{0\le i<j\le n} f(i)f(j)$$

$$+ \sum\sum_{0\le i<j\le n} f(i)f(j) + \sum\sum_{i=j} f(i)f(j)$$

$$= 2\sum\sum_{0\le i<j\le n} f(i)f(j) + \sum\sum_{i=j} f(i)f(j)$$

$$\Rightarrow \quad \sum\sum_{0\le i<j\le n} f(i)f(j) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f(i)f(j) - \sum\sum_{i=j} f(i)f(j)}{2}$$

जब f(i) तथा f(j) सममित नहीं है। तब हम सभी पदों का योगफल ज्ञात करते है।

1. $\sum\sum_{0\le i<j\le n} {}^{n}C_i \;\; {}^{n}C_j$ का मान बराबर है–

(A) $\frac{2^{2n} - {}^{2n}C_n}{2}$ (B) $\frac{2^{2n} + {}^{2n}C_n}{2}$ (C) $\frac{2^{2n} - {}^{n}C_n}{2}$ (D) $\frac{2^{2n} + {}^{n}C_n}{2}$

2. माना ${}^{0}C_0 = 1$, तब $\sum_{m=0}^{n} \sum_{p=0}^{m} {}^{n}C_m \;.\; {}^{m}C_p$ का मान बराबर है–

(A) 2^n-1 (B) 3^n (C) 3^n-1 (D) 2^n

3. $\sum\sum_{0\le i\le j\le n}\left({}^{n}C_i + {}^{n}C_j\right)$

(A) $(n + 2)2^n$ (B) $(n + 1)2^n$ (C) $(n - 1)2^n$ (D) $(n + 1)2^n-1$

अनुच्छेद # 2 (प्रश्न सं. 4 से 6)

यदि एक गुणनफल P इस प्रकार है, $P = (x + a_1)(x + a_2) \ldots\ldots\ldots (x + a_n)$

तथा माना ० $S_1 = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $S_2 = \sum\sum_{i<j} a_i.a_j$, $S_3 = \sum\sum_{i<j<k}\sum a_i.a_j.a_k$ इसी प्रकार आगे, तो

निम्न को सिद्ध किया जा सकता है –

$$P = x^n + S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + S_n.$$

4. व्यंजक $(2 + x)^2 (3 + x)^3 (4 + x)^4$ में x^8 का गुणांक है–

(A) 26 (B) 27 (C) 28 (D) 29

5. व्यंजक $(x - 1)(x^2 - 2)(x^3 - 3) \ldots\ldots\ldots\ldots (x^{20} - 20)$ में x^{203} का गुणांक है–

(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 15

6. व्यंजक $(x-1)(x-2)\,.........\,(x-100)$ में x^{98} का गुणांक है–
(A) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$
(B) $(1 + 2 + 3 + ... + 100)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2)$
(C) $\frac{1}{2}[(1 + 2 + 3 + ... + 100)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2)]$
(D) इनमें से कोई नहीं

अनुच्छेद # 3 (प्रश्न सं. 7 से 9)

मान $(7 + 4\sqrt{3})^n = I + f = {}^nC_0.7^n + {}^nC_1.7^{n-1}.(4\sqrt{3})^1 + ...$ ....(i)
जहाँ I तथा f इसके पूर्णांक व भिन्नात्मक भाग है
अर्थात् $0 < f < 1$
अब, $0 < 7 - 4\sqrt{3} < 1 \Rightarrow 0 < (7 - 4\sqrt{3})^n < 1$
मानाकि $(7 - 4\sqrt{3})^n = f' = {}^nC_0.7^n - {}^nC_1.7^{n-1}.(4\sqrt{3})^1 + ...$ ....(ii)
$\Rightarrow \quad 0 < f' < 1$
(i) व (ii) का योग करने पर इससे अपरिमेय पद निरस्त हो जायेगें
$I + f + f' = (7 + 4\sqrt{3})^n + (7 - 4\sqrt{3})^n$
$= 2\,[{}^nC_0\,7^n + {}^nC_2\,7^{n-2}\,(4\sqrt{3})^2 + ...]$
$I + f + f'$ = समपूर्णांक $\Rightarrow$ ($f + f'$ एक पूर्णांक होना चाहिए)
$0 < f + f' < 2 \quad \Rightarrow \quad f + f' = 1$
उपरोक्त विश्लेषण के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

7. यदि $\left(3\sqrt{3}+5\right)^n = p + f$, जहाँ p पूर्णांक है और f भिन्नात्मक भाग है, तो $\left(3\sqrt{3}-5\right)^n$, $n \in N$ का मान है।
(A) $1 - f$, यदि n सम है। (B) f, यदि n सम है।
(C) $1 - f$, यदि n विषम है। (D) f, यदि n विषम है।

8. यदि $\left(9+\sqrt{80}\right)^n = I + f$ जहाँ I, n पूर्णांक हैं और $0 < f < 1$, तो –
(A) I एक विषम पूर्णांक हैं। (B) I एक सम पूर्णांक है।
(C) $(I + f)(1 - f) = 1$ (D) $1 - f = \left(9-\sqrt{80}\right)^n$

9. $(\sqrt{3} + 1)^{2n}$ से ठीक 1 अधिक पूर्णांक हो, समीकरण $n \in N$ के लिए
(A) 2^n का भाग देने पर (B) 2^{n+1} का भाग देने पर
(C) 8 का भाग देने पर (D) 16 का भाग देने पर

Exercise-3

✎ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -**

1. $(1 + t^2)^{12}(1 + t^{12})(1 + t^{24})$ में t^{24} का गुणांक है : **[IIT-JEE-2003, Scr, (3, – 1), 84]**
(A) ${}^{12}C_6 + 3$ (B) ${}^{12}C_6 + 1$ (C) ${}^{12}C_6$ (D) ${}^{12}C_6 + 2$

2.✎ सिद्ध कीजिए कि $2^k\binom{n}{0}\binom{n}{k} - 2^{k-1}\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} + 2^{k-2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} - ...... + (-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{0} = \binom{n}{k}$.
[IIT-JEE-2003, Main, (2, 0), 60]

3. यदि $^{(n-1)}C_r = (k^2 - 3)\ ^nC_{r+1}$ हो, तो k के मान का अन्तराल है – **[IIT-JEE-2004, Scr, (3, – 1), 84]**
(A) $(2, \infty)$ (B) $(-\infty, -2)$ (C) $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ (D) $\left(\sqrt{3}, 2\right]$

4. $\binom{30}{0}\binom{30}{10} - \binom{30}{1}\binom{30}{11} + \binom{30}{2}\binom{30}{12} - \ldots\ldots\ldots + \binom{30}{20}\binom{30}{30}$ का मान है–**[IIT-JEE-2005, Scr, (3, – 1), 84]**
(A) $\binom{60}{20}$ (B) $\binom{30}{10}$ (C) $\binom{30}{15}$ (D) इनमें से कोई नहीं

5. मानाकि r = 0, 1, ..., 10 के लिए A_r, B_r तथा C_r क्रमशः $(1 + x)^{10}$, $(1 + x)^{20}$ तथा $(1 + x)^{30}$ के प्रसार में x^r के गुणांक हैं।
तो $\sum_{r=1}^{10} A_r(B_{10}B_r - C_{10}A_r)$ का मान निम्न है **[IIT-JEE 2010, Paper-2, (5, –2)/79]**
(A) $B_{10} - C_{10}$ (B) $A_{10}\ (B^2_{10} - C_{10}\ A_{10})$ (C) 0 (D) $C_{10} - B_{10}$

6. $(1 + x)^{n+5}$ के तीन क्रमागत पदों के गुणांक 5 : 10 : 14 के अनुपात में है, तब n =
[JEE (Advanced) 2013, Paper-1, (4, – 1)/60]

7. $(1 + x^2)^4\ (1 + x^3)^7\ (1 + x^4)^{12}$ विस्तार में (expansion) x^{11} का गुणांक (coefficient) है–
[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, –1)/60]
(A) 1051 (B) 1106 (C) 1113 (D) 1120

8. $(1 + x)\ (1 + x^2)\ (1 + x^3)\ \ldots\ldots(1 + x^{100})$ के विस्तार में x^9 के गुणांक का मान है
[JEE (Advanced) 2015, P-2 (4, 0) / 80]

9. माना कि m ऐसा न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक (smallest positive integer) है कि
$(1 + x)^2 + (1 + x)^3 + \ldots\ldots\ldots + (1 + x)^{49} + (1 + mx)^{50}$ के विस्तार में x^2 का गुणांक $(3n + 1)\ ^{51}C_3$ किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए है। तब n का मान है– **[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (3, 0)/62]**

10. माना कि $X = (^{10}C_1)^2 + 2(^{10}C_2)^2 + 3(^{10}C_3)^2 + \ldots\ldots. + 10(^{10}C_{10})^2$, जहाँ $^{10}C_r$, $r \in \{1, 2, \ldots\ldots., 10\}$, द्विपद गुणांकों (binomial coefficients) को दर्शाते हैं। तब $\frac{1}{1430}$ X का मान है _______ ।
[JEE (Advanced) 2018, Paper-1, (3, 0)/60]

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. माना $S_1 = \sum_{j=1}^{10} j\ (j-1)\ ^{10}C_j$, $S_2 = \sum_{j=1}^{10} j\ \ ^{10}C_j$ तथा $S_3 = \sum_{j=1}^{10} j^2\ \ ^{10}C_j$. **[AIEEE 2009, (4, –1), 144]**
प्रकथन -1 : $S_3 = 55 \times 2^9$.
प्रकथन -2 : $S_1 = 90 \times 2^8$ तथा $S_2 = 10 \times 2^8$.
(1) प्रकथन-1 सत्य है, प्रकथन-2 सत्य है ; प्रकथन-2, प्रकथन-1 की सही व्याख्या नहीं है।
(2) प्रकथन-1 सत्य है, प्रकथन-2 मिथ्या है।
(3) प्रकथन-1 मिथ्या है, प्रकथन-2 सत्य है।
(4) प्रकथन-1 सत्य है, प्रकथन-2 सत्य है ; प्रकथन-2, प्रकथन-1 की सही व्याख्या है।

2. $(1 - x - x^2 + x^3)^6$ के प्रसार में x^7 का गुणांक है : **[AIEEE 2011, (4, –1), 120]**
(1) 144 (2) –132 (3) –144 (4) 132

3. यदि n एक धनपूर्णांक है, तो $\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n}-\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n}$ – : **[AIEEE 2012, (4, –1), 120]**

(1) एक अपरिमेय संख्या है। (2) एक विषम धनपूर्णांक है।
(3) एक सम धनपूर्णांक है। (4) धनपूर्णांकों को छोड़ कर एक परिमेय संख्या है।

4. $\left(\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1}-\frac{x-1}{x-x^{1/2}}\right)^{10}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद है : **[AIEEE - 2013, (4, –1),120]**

(1) 4 (2) 120 (3) 210 (4) 310

5. यदि $(1 + ax + bx^2)(1 - 2x)^{18}$ के x की घातों में प्रसार में x^3 तथा x^4 दोनों के गुणांक शून्य हैं, तो (a, b) बराबर है–
[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]

(1) $\left(14,\frac{272}{3}\right)$ (2) $\left(16,\frac{272}{3}\right)$ (3) $\left(16,\frac{251}{3}\right)$ (4) $\left(14,\frac{251}{3}\right)$

6. $(1 - 2\sqrt{x})^{50}$ के द्विपद प्रसार में x की पूर्णांकीय घातो के गुणांकों का योग है :**[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) $\frac{1}{2}(3^{50}+1)$ (2) $\frac{1}{2}(3^{50})$ (3) $\frac{1}{2}(3^{50}-1)$ (4) $\frac{1}{2}(2^{50}+1)$

7. यदि $\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)^n$, $x \neq 0$ के प्रसार में पदों की संख्या 28 है, तो इस प्रसार में आने वाले सभी पदों के गुणांकों का योग है– **[JEE(Main) 2016, (4, – 1), 120]**

(1) 2187 (2) 243 (3) 729 (4) 64

8. $({}^{21}C_1 - {}^{10}C_1) + ({}^{21}C_2 - {}^{10}C_2) + ({}^{21}C_3 - {}^{10}C_3) + ({}^{21}C_4 - {}^{10}C_4) + \ldots\ldots + ({}^{21}C_{10} - {}^{10}C_{10})$ का मान है–
[JEE(Main) 2017, (4, – 1), 120]

(1) $2^{21} - 2^{11}$ (2) $2^{21} - 2^{10}$ (3) $2^{20} - 2^{9}$ (4) $2^{20} - 2^{10}$

9. $\left(x+\sqrt{x^3-1}\right)^5+\left(x-\sqrt{x^3-1}\right)^5$, (x > 1) के प्रसार में सभी विषम घातों वाले पदों के गुणांको का योग है :
[JEE(Main) 2018, (4, – 1), 120]

(1) 1 (2) 2 (3) –1 (4) 0

10. यदि संख्या $\frac{2^{403}}{15}$ का भिन्नात्मक भाग (fractional part) $\frac{k}{15}$ है तो k बराबर है–
[JEE(Main) 2019, Online (09-01-19),P-1 (4, – 1), 120]

(1) 14 (2) 8 (3) 6 (4) 4

11. यदि $\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{{}^{20}C_{i-1}}{{}^{20}C_i+{}^{20}C_{i-1}}\right)^3=\frac{k}{21}$, तो k बराबर है : **[JEE(Main) 2019, Online (10-01-19),P-1 (4, – 1), 120]**

(1) 50 (2) 400 (3) 200 (4) 100

12. यदि $\sum_{r=0}^{25}\left\{{}^{50}C_r.{}^{50-r}C_{25-r}\right\}=K\left({}^{50}C_{25}\right)$ है, तो K बराबर है :
[JEE(Main) 2019, Online (10-01-19),P-2 (4, – 1), 120]

(1) 2^{25} (2) $2^{25} - 1$ (3) $(25)^2$ (4) 2^{24}

13. माना $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ तथा $T_n = 1 + \left(\frac{q+1}{2}\right)+\left(\frac{q+1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{q+1}{2}\right)^n$. जहाँ q एक वास्तविक संख्या है तथा $q \neq 1$ यदि ${}^{101}C_1 + {}^{101}C_2 . S_1 + \ldots + {}^{101}C_{101} . S_{100} = \alpha T_{100}$ तो α बराबर है –
[JEE(Main) 2019, Online (11-01-19),P-2 (4, – 1), 120]

(1) 200 (2) 2^{99} (3) 2^{100} (4) 202

Answers

EXERCISE - 1

PART -I

Section (A) :

A-1. (i) $\left(\frac{2}{x}\right)^5 - 5\left(\frac{2}{x}\right)^3 + 10\left(\frac{2}{x}\right) - 10\left(\frac{x}{2}\right) + 5\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \left(\frac{x}{2}\right)^5$

(ii) $y^8 + 8y^5 + 24y^2 + \frac{32}{y} + \frac{16}{y^4}$

A-2. n = 9 **A-3.** 7 **A-4.** (i) ${}^9C_3$ (ii) $-2^7 \cdot {}^{12}C_7$

A-5. ${}^{11}C_5 \frac{a^6}{b^5}$, ${}^{11}C_6 \frac{a^5}{b^6}$, a b = 1 **A-6.** $\frac{17}{54}$. **A-7.** (i) 171 (ii) –438

A-8. 15

Section (B) :

B-1. (i) $-\frac{35x}{y}, \frac{35y}{x}$ (ii) $(-1)^n \frac{(2n)!}{n!\ n!} x^n$

B-3. (i) 4 (iii) 3, 03, 803

B-4. 101^{50}

B-5. (i) $T_4 = -455 \times 3^{12}$ and $T_5 = 455 \times 3^{12}$ (ii) 22

B-6. (i) T_4 (ii) T_5, T_6 (iii) T_5 (iv) T_6

Section (D) :

D-1. $\frac{15015}{16}$ **D-2.** (i) 142 (ii) – 197 **D-4.** (i) 280 (ii) 2^5

D-5. 20

PART -II

Section (A) :

A-1. (C) **A-2.** (C) **A-3.** (A) **A-4.** (B) **A-5.** (A) **A-6.** (A) **A-7.** (B)
A -8. (C) **A-9.** (C) **A-10.** (B)

Section (B) :

B-1. (B) **B-2.** (C) **B-3.** (D) **B-4.** (A) **B-5.** (A) **B-6.** (A) **B-7.** (A)
B-8. (B)

Section (C) :

C-1. (B) **C-2.** (C) **C-3.** (C) **C-4.** (B)

Section (D) :

D-1. (D) **D-2.** (D) **D-3.** (A)

PART -III

1. (A) → (q, s), (B) → (q,s), (C) → (s), (D) → (p, s)

EXERCISE - 2

PART -I

1.	(B)	**2.**	(A)	**3.**	(C)	**4.**	(C)	**5.**	(B)	**6.**	(D)	**7.**	(A)
8.	(D)	**9.**	(C)	**10.**	(B)	**11.**	(B)	**12.**	(B)	**13.**	(C)	**14.**	(C)
15.	(A)	**16.**	(B)	**17.**	(D)	**18.**	(A)	**19.**	(A)	**20.**	(C)		
21.	(6.20)												

PART -II

1.	05.50	**2.**	10.00	**3.**	02.00	**4.**	07.59	**5.**	05.06	**6.**	00.50	**7.**	09.50
8.	50.00	**9.**	27.33	**10.**	01.25	**11.**	34.00	**12.**	01.00	**13.**	00.08	**14.**	01.00
15.	08.24 or 08.25			**16.**	03.50	**17.**	09.00	**18.**	01.33	**19.**	03.50	**20.**	00.00
21.	00.50												

PART -III

1.	(ABCD)	**2.**	(CD	**3.**	(AC)	**4.**	(AC)	**5.**	(CD)	**6.**	(AC)	**7.**	(ACD)
8.	(AC)	**9.**	(ABC)	**10.**	(AB)	**11.**	(BC)	**12.**	(BD)	**13.**	(AD)		

PART -IV

1.	(A)	**2.**	(B)	**3.**	(A)	**4.**	(D)	**5.**	(C)	**6.**	(C)	**7.**	(AD)
8.	(ACD)	**9.**	(ABC)										

EXERCISE - 3

PART -I

1.	(D)	**3.**	(D)	**4.**	(B)	**5.**	(D)	**6.**	6	**7.**	(C)	**8.**	8
9.	5	**10.**	(646)										

PART -II

1.	(2)	**2.**	(3)	**3.**	(1)	**4.**	(3)	**5.**	(2)	**6.**	(1)	**7.**	(3)
8.	(4)	**9.**	(2)	**10.**	(2)	**11.**	(4)	**12.**	(1)	**13.**	(3)		

High Level Problems (HLP)

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. $\left(x+\frac{C_1}{C_0}\right)\left(x+2^2\frac{C_2}{C_1}\right)\left(x+3^2\frac{C_3}{C_2}\right)........\left(x+50^2\frac{C_{50}}{C_{49}}\right)$ में x^{49} का गुणांक ज्ञात कीजिए। (जहाँ $C_r = {}^{50}C_r$)

2. व्यंजक $\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-1}\right)^6+\left(\frac{2}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-1}}\right)^6$ किस घात का एक बहुपद है–

3. $(1 + x^2)^5 (1 + x)^4$ के विस्तार में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

4. सिद्ध कीजिए कि $(1 + x + x^3 + x^4)^n$ के विस्तार में x^{15} का गुणांक $\sum_{r=0}^{5} {}^nC_{15-3r}\,{}^nC_r$ है।

5. यदि n सम प्राकृत संख्या है तथा $\frac{(1+x)^n}{1-x}$ के विस्तार में x^r का गुणांक 2^n $(|x| < 1)$ है तब सिद्ध कीजिए $r \geq n$

6. बहुपद $(x + {}^{2n+1}C_0)(x + {}^{2n+1}C_1)........(x + {}^{2n+1}C_n)$ में x^n का गुणांक ज्ञात कीजिए।

7. $\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{r-1} {}^nC_r\,{}^rC_p\,2^p\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

अनुच्छेद (प्रश्न सं. 8 से 10)

$k, n \in N$ के लिए परिभाषित किया जाता है कि

$B(k, n) = 1.2.3......... k + 2.3.4........(k+1) + ...+ n(n + 1).......(n + k - 1)$, $S_0(n) = n$ एवं $S_k(n) = 1^k + 2^k + ... + n^k$.

$B(k, n)$ का मान ज्ञात करने के लिए $B(k, n)$ को निम्न प्रकार पुनः लिखने पर

$$B(k,n) = k!\left[{}^kC_k + {}^{k+1}C_k + {}^{k+2}C_k + ... + {}^{n+k-1}C_k\right] = k!\left({}^{n+k}C_{k+1}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)........(n+k)}{k+1} \text{ जहाँ } {}^nC_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

8. सिद्ध कीजिए $S_2(n) + S_1(n) = B(2, n)$

9. सिद्ध कीजिए $S_3(n) + 3S_2(n) = B(3, n) - 2B(1, n)$

10. यदि $(1 + x)^p = 1 + {}^pC_1 x + {}^pC_2 x^2 + ... + {}^pC_p x^p$, $p \in N$ तब दर्शाइये कि

${}^{k+1}C_1 S_k(n) + {}^{k+1}C_2 S_{k-1}(n) + ... + {}^{k+1}C_k S_1(n) + {}^{k+1}C_{k+1} S_0(n) = (n + 1)^{k+1} - 1$

11. प्रदर्शित कीजिए कि $25^n - 20^n - 8^n + 3^n$, $n \in I^+$, 85 से भाज्य है।

12. सिद्ध कीजिए कि ${}^nC_1\,({}^nC_2)^2\,({}^nC_3)^3........({}^nC_n)^n \le \left(\frac{2^n}{n+1}\right)^{{}^{n+1}C_2}$.

13. यदि p, q के लगभग बराबर है तथा n > 1, प्रदर्शित कीजिए कि $\frac{(n+1)\;\;p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/n}$. इसकी सहायता से $\left(\frac{99}{101}\right)^{1/6}$ का निकटतम मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $(18x^2 + 12x + 4)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}\,x^{2n}$, तब सिद्ध कीजिए
$a_r = 2^n\,3^r\;\left({}^{2n}C_r + {}^nC_1\;{}^{2n-2}C_r + {}^nC_2\;{}^{2n-4}C_r + ...\right)$

15. सिद्ध कीजिए कि $1^2.\,C_0 + 2^2.\,C_1 + 3^2.\,C_2 + 4^2.\,C_3 +.... + (n+1)^2\,C_n = 2^{n-2}\,(n+1)\,(n+4)$.

16. $(1-x)^{-n} = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 +........$, $a_0 + a_1 + a_2 +....... + a_n$ का मान ज्ञात करो।

17. $32^{32^{32}}$ को 7 से भाग देने पर शेषफल ज्ञात करो।

18. यदि n (> 1) एक पूर्णांक है तब प्रदर्शित कीजिए : $a - {}^nC_1(a-1) + {}^nC_2(a-2) -..... + (-1)^n\,(a-n) = 0$.

19. यदि $(1+x)^n = p_0 + p_1\,x + p_2\,x^2 + p_3\,x^3 +.......$, तब सिद्ध करो कि

(a) $p_0 - p_2 + p_4 -....... = 2^{n/2}\cos\frac{n\,\pi}{4}$ (b) $p_1 - p_3 + p_5 -....... = 2^{n/2}\sin\frac{n\,\pi}{4}$

20. प्रदर्शित करो कि यदि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में अधिकतम पद का गुणांक भी अधिकतम है, तो ' x ' का मान $\frac{n}{n+1}$ और $\frac{n+1}{n}$ के बीच में है।

21. सिद्ध करो कि यदि ' p ', 2 से बड़ी एक अभाज्य संख्या है, तो $\left[(2+\sqrt{5})^p\right] - 2^{p+1}$, p से विभाजित होगा, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है।

22. यदि $\sum_{r=0}^{n} (-1)^r.\,{}^nC_r\left[\frac{1}{2^r} + \frac{3^r}{2^{2r}} + \frac{7^r}{2^{3r}} +........\ m\text{ पदों तक}\right] = k\left(1 - \frac{1}{2^{mn}}\right)$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

23. यदि $s_n = 1 + q + q^2 +..... + q^n$ तथा $S_n = 1 + \frac{q+1}{2} + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 +.... + \left(\frac{q+1}{2}\right)^n$, $q \ne 1$ हो, तो
सिद्ध करो कि ${}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2.s_1 + {}^{n+1}C_3.s_2 +....+ {}^{n+1}C_{n+1}.s_n = 2^n.\,S_n$.

24. यदि $(1+x)^{15} = C_0 + C_1.\,x + C_2.\,x^2 +.... + C_{15}.\,x^{15}$ हो, तो $C_2 + 2C_3 + 3C_4 +.... + 14C_{15}$ का मान ज्ञात करो।

25. सिद्ध कीजिए कि : $\frac{1}{2}\,{}^nC_1 - \frac{2}{3}\,{}^nC_2 + \frac{3}{4}\,{}^nC_3 - \frac{4}{5}\,{}^nC_4 +..... + \frac{(-1)^{n+1}\,n}{n+1}.\,{}^nC_n = \frac{1}{n+1}$

26. सिद्ध करो कि $\sum_{r=0}^{n} r^2\ {}^nC_r\ p^r\ q^{n-r} = npq + n^2p^2$ होगा, जबकि $p + q = 1$ हो।

27. सिद्ध कीजिए कि : $(n-1)^2 . C_1 + (n-3)^2 . C_3 + (n-5)^2 . C_5 + ... = n(n+1)2^{n-3}$

28. सिद्ध करो ${}^nC_r + 2\ {}^{n+1}C_r + 3\ {}^{n+2}C_r + ... + (n+1)\ {}^{2n}C_r = {}^nC_{r+2} + (n+1)\ {}^{2n+1}C_{r+1} - {}^{2n+1}C_{r+2}$

29. प्रदर्शित कीजिए $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{3}{6} + \frac{1}{3}.\frac{3}{6}.\frac{5}{9} + \frac{1}{3}.\frac{3}{6}.\frac{5}{9}.\frac{7}{12} + ...$

30. यदि $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $m \geq 2$ के लिए
$C_0 - C_1 + C_2 - .... + (-1)^{m-1}C_{m-1} = (-1)^{m-1}\ {}^{n-1}C_{m-1}$.

31. यदि $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_n x^n$, तब दर्शाओं कि दो C_i's को एक साथ लेने पर उनके गुणनफलनों का योग जोकि $\underset{0 \leq i < j \leq n}{\sum\sum} C_i C_j$ द्वारा प्रदर्शित होता है $2^{2n-1} - \frac{2n!}{2(n!)^2}$ के बराबर है।

32. यदि $a_0, a_1, a_2, ...$, $(1 + x + x^2)^n$ के प्रसार में x की बढ़ती हुई घातों के गुणांक हैं, तो सिद्ध करो कि :

(i) $a_0 a_1 - a_1 a_2 + a_2 a_3 - .... = 0$

(ii) $a_0a_2 - a_1a_3 + a_2a_4 - ..... + a_{2n-2}\ a_{2n} = a_{n+1}$

(iii) $E_1 = E_2 = E_3 = 3^{n-1}$; जहाँ $E_1 = a_0 + a_3 + a_6 + ...$; $E_2 = a_1 + a_4 + a_7 + ...$ एवं $E_3 = a_2 + a_5 + a_8 + ...$

Answers

1.	22100	**2.**	6	**3.**	60	**6.**	2^{2n}	**7.**	$4^n - 3^n$
13.	$\frac{1198}{1202}$	**16.**	$\frac{(2n)!}{(n!)^2}$	**17.**	4	**22.**	$\frac{1}{2^n - 1}$	**24.**	212993