

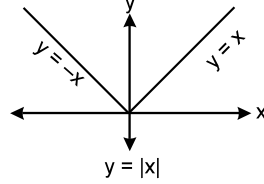


## गणित के मूलभूत सिद्धान्त-II (Fundamentals of Mathematics-II)

He is unworthy of the name of man who is ignorant of the fact that the diagonal of square is incommensurable with its side .....Plato

**निरपेक्ष मान फलन/मापांक फलन (Absolute Value Function / Modulus Function) :**

मापांक फलन का प्रतीक  $f(x) = |x|$  है तथा इसे  $y = |x| = \begin{cases} x & \text{यदि } x \geq 0 \\ -x & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$  द्वारा परिभाषित करते हैं।



**मापांक फलन के गुणधर्म (Properties of modulus) :**  $a, b \in \mathbb{R}$  के लिए

- (i)  $|a| \geq 0$  (ii)  $|a| = |-a|$   
 (iii)  $|a| \geq a, |a| \geq -a$  (iv)  $|ab| = |a| |b|$   
 (v)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$   
 (vi)  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ; समता सम्भव होगी यदि  $ab \geq 0$   
 (vii)  $|a - b| \geq ||a| - |b||$ ; समता सम्भव होगी यदि  $ab \geq 0$

**उदाहरण # 1 :**

निम्नलिखित रेखिक समीकरणों को हल कीजिए।

(i)  $x|x| = 4$  (ii)  $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$

**हल :**

(i)  $x|x| = 4$

If  $x > 0$

$\therefore x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$  लेकिन  $x = 2$  ( $\because x \geq 0$ )

यदि  $x < 0 \Rightarrow -x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = -4$  जो कि संभव नहीं है।

(ii)  $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$

**case I :** If  $x \leq -1$

$\therefore -(x - 3) - 2(x + 1) = 4$   
 $\Rightarrow -x + 3 - 2x - 2 = 4$   
 $\Rightarrow -3x + 1 = 4 \Rightarrow -3x = 3$   
 $\Rightarrow x = -1$

**case II :** If  $-1 < x \leq 3$

$\therefore -(x - 3) + 2(x + 1) = 4$   
 $\Rightarrow -x + 3 + 2x + 2 = 4$   
 $\Rightarrow x = -1$  जो कि संभव नहीं है।

**case III :** If  $x > 3$

$x - 3 + 2(x + 1) = 4$   
 $3x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5/3$  जो कि संभव नहीं है।

$\therefore x = -1$  Ans.

**परिमेय फलन (Rational Function) :**

$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ , रूप का फलन परिमेय फलन होता है, जहाँ  $g(x)$  एवं  $h(x)$  बहुपद फलन हैं तथा  $h(x) \neq 0$  है।





### अपरिमेय फलन (Irrational Function) :

वह फलन  $y = f(x)$  जिसमें योग, अन्तर, गुणन, विभाजक एवं भिन्नात्मक घात की संक्रियाओं का उपयोग होता है। अपरिमेय फलन कहलाता है।

**उदाहरण:**  $y = \frac{x^3 + x^{1/3}}{2x + \sqrt{x}}$  एक अपरिमेय फलन है।

- (a) समीकरण  $\sqrt{f(x)} = g(x)$  निम्न निकाय के बराबर है।  
 $f(x) = g^2(x)$  तथा  $g(x) \geq 0$
- (b) असमिका  $\sqrt{f(x)} < g(x)$  निम्न निकाय के बराबर है।  
 $f(x) < g^2(x)$  तथा  $f(x) \geq 0$  तथा  $g(x) \geq 0$
- (c) असमिका  $\sqrt{f(x)} > g(x)$  निम्न निकाय के बराबर है।  
 $g(x) \leq 0$  तथा  $f(x) \geq 0$  या  $g(x) \geq 0$  तथा  $f(x) > g^2(x)$

**उदाहरण # 3 :** हल कीजिए  $x + 2 > 2\sqrt{1-x^2}$

**हल :**  $4(1-x^2) < (x+2)^2$  और  $x+2 \geq 0$  और  $1-x^2 \geq 0$

$$x \in \left(-\infty, \frac{-4}{5}\right) \cup (0, \infty) \quad \dots(1)$$

$$x \in [-2, \infty) \quad \dots(2)$$

$$x \in [-1, 1] \quad \dots(3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3)$$

$$\left[-1, -\frac{4}{5}\right) \cup (0, 1]$$

**अभ्यास कार्य :**

(1)  $\sqrt{2x^2 + x - 6} < x$

(2)  $\sqrt{5-x} > x+1$

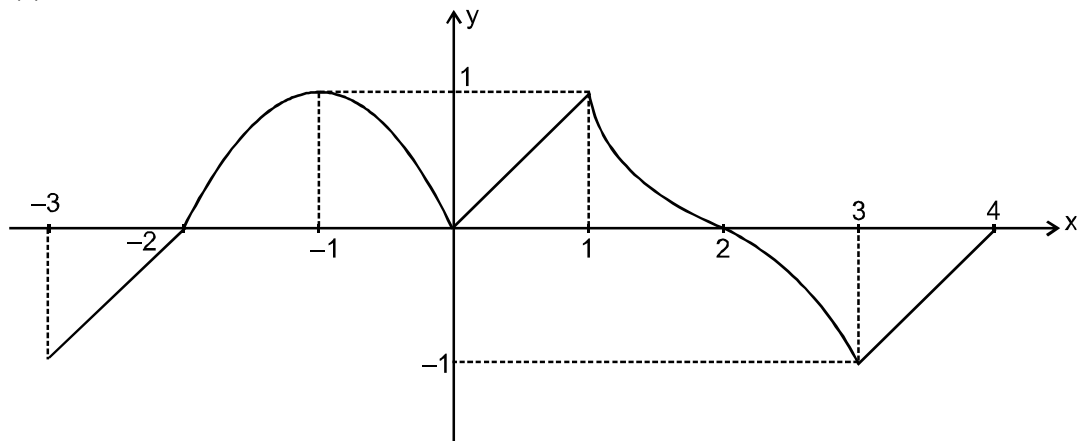
(3)  $x+3 + \sqrt{x^2+4x-5} > 0$

(4)  $\sqrt{x} - \sqrt{4-x} \geq 1$

**Ans.** (1)  $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$  (2)  $(-\infty, 1)$  (3)  $(-\infty, -1] \cup [5, \infty)$  (4)  $\left[\frac{4+\sqrt{7}}{2}, 4\right]$

**मापांक से सम्बन्धित आरेख :**

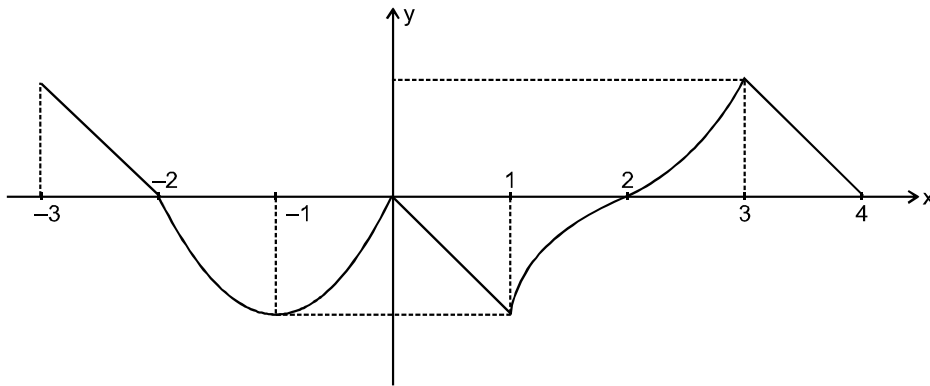
यदि  $y = f(x)$  का आरेख है-



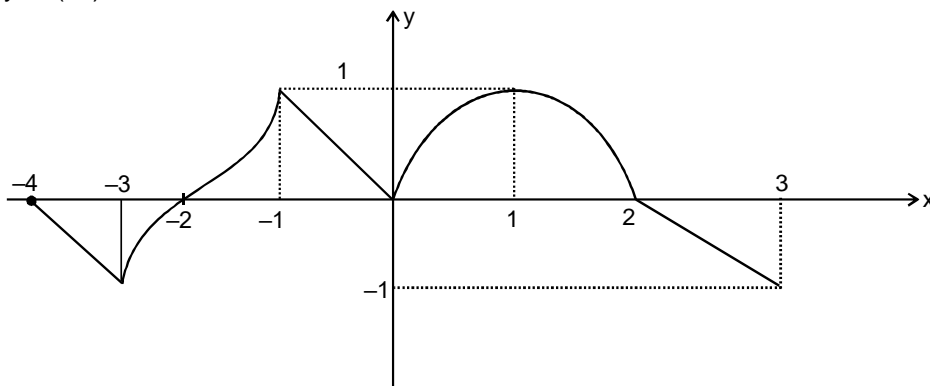


तब निम्न के आरेख है-

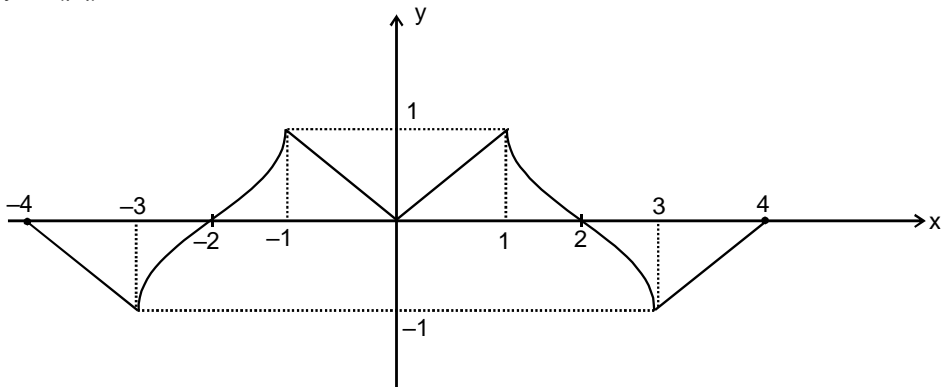
(a)  $y = -f(x)$  है-



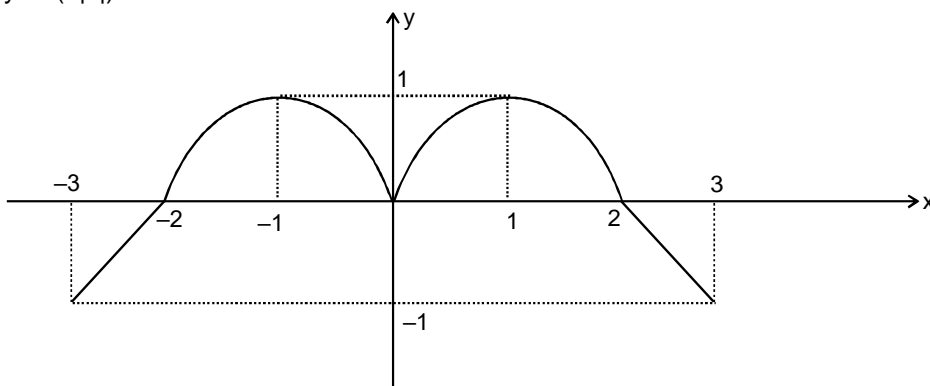
(b)  $y = f(-x)$  है-



(c)  $y = f(|x|)$  है-

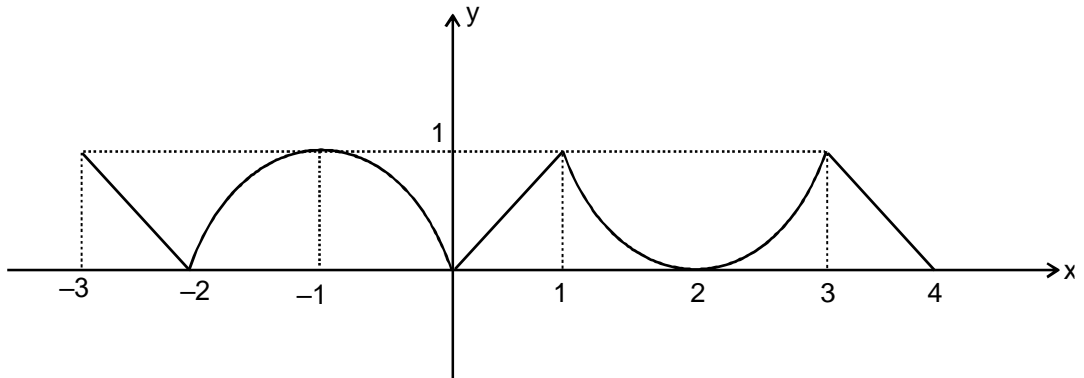


(d)  $y = f(-|x|)$  है-

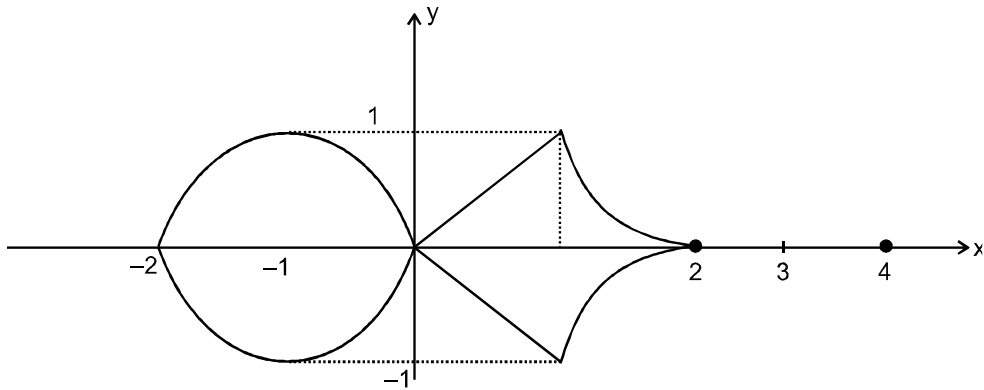




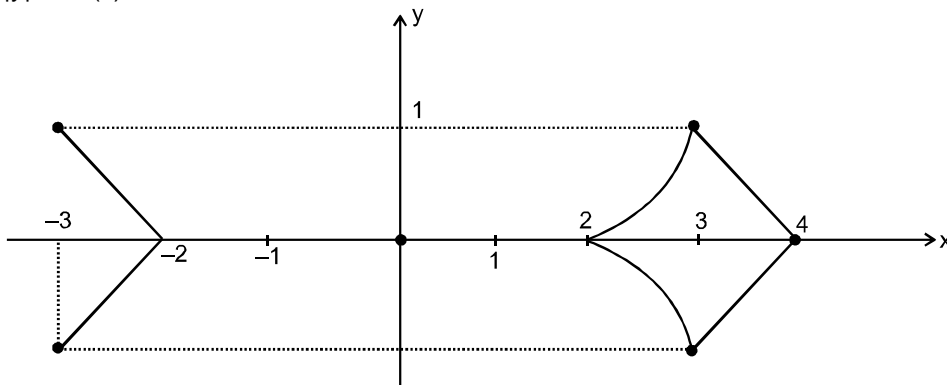
(e)  $y = |f(x)|$  है—



(f)  $|y| = f(x)$  है—

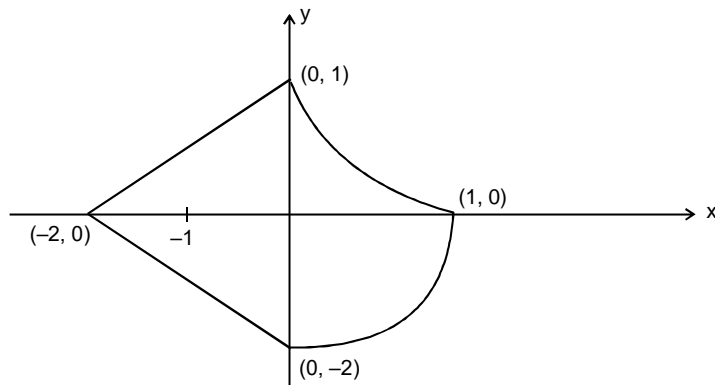


(g)  $|y| = -f(x)$  है—



ग्राफीय रूपान्तरण :

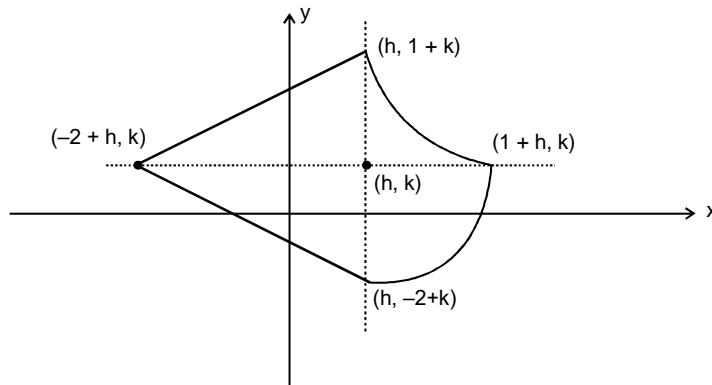
यदि  $y = f(x)$  का आरेख है—



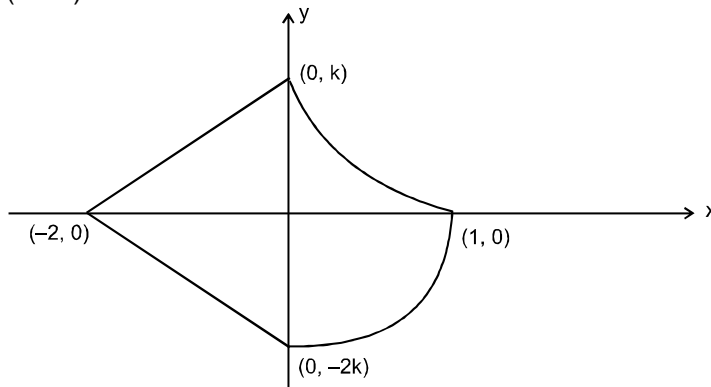


तब निम्न के आरेख है-

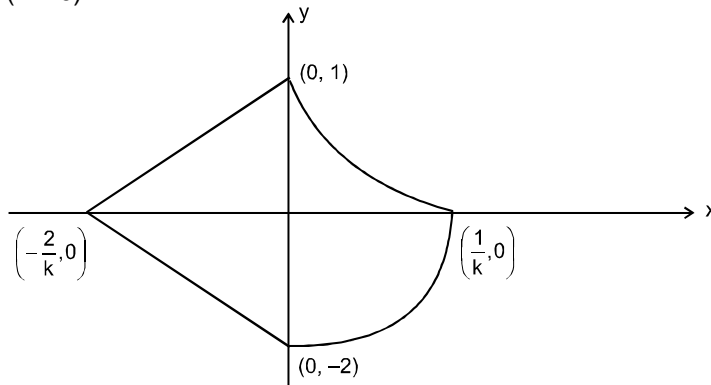
(a)  $y - k = f(x - h)$  है-



(b)  $y = kf(x)$  है-  
( $k > 0$ )

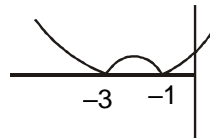


(c)  $y = f(kx)$  है-  
( $k > 0$ )



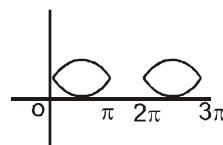
उदाहरण # 4 :  $y = |x^2 + 4x + 3|$

हल :



उदाहरण # 5 :  $|y - 1| = \sin x$

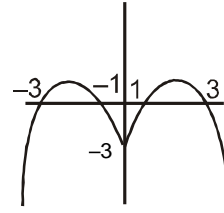
हल :





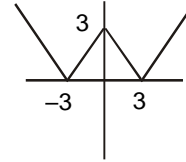
उदाहरण # 6 :  $y = -x^2 + 4|x| - 3$

हल :



उदाहरण # 7 :  $y = ||x| - 3|$

हल :

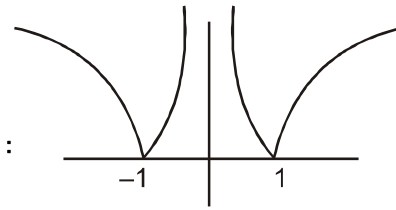


उदाहरण # 8 :  $y = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

हल : आवर्त  $4\pi$  पर

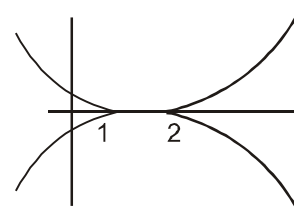
उदाहरण # 9 :  $y = |\sin x - 3|$

हल : ग्राफीय रूपान्तरण



उदाहरण # 10 :  $y = |-\ln|-x||$

हल :



उदाहरण # 11 :  $|y| = x^2 - 3x + 2$

हल :

