गणित के मूलभूत सिद्धान्त - I (Fundamentals of Mathematics - I)

समुच्चय (SET) :

एक दूसरे से भिन्न–भिन्न वस्तुओं के सुपरिभाषित (well defined) संग्रह को समुच्चय कहते है ।

समुच्चय को प्रायः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों A, B, C, ... आदि से निरूपित करते है तथा समुच्चय के अवयवों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर a, b, c .... आदि द्वारा प्रदर्शित करते है।

यदि a, समुच्चय A का अवयव है, तब इसे $a \in A$ से व्यक्त किया जाता है तथा हम कहते है कि 'a समुच्चय A में है' । यदि a, समुच्चय A का अवयव नहीं है, तब इसे $a \notin A$ से व्यक्त किया जाता है तथा इसे 'a समुच्चय A में नहीं है' पढ़ते है।

उदाहरण : प्रथम पाँच अभाज्य प्राकृत्त संख्याओं का संग्रह एक समुच्चय होगा। जिसके अवयव 2, 3, 5, 7, 11 होगें।

समुच्चय को निरूपित करने की विधियाँ (METHODS TO WRITE A SET) :

(i) रोस्टर रूप या सारणीबद्ध रूप (Roster or Tabular form) : इस विधि में, समुच्चय के सभी अवयवों को सूचीवद्ध किया जाता है, अवयवों को एक दूसरे से, अर्धविराम (commas) द्वारा पृथक किया जाता है तथा उन सभी को एक मझले (धनु) कोष्ठक { } के भीतर लिखते है। यह ध्यान रखना चाहिए कि समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखते समय किसी भी अवयव की सामान्यतः पुनरावृत्ति नहीं करते है।

उदाहरण : शब्द 'SCHOOL' के अक्षरों का समुच्चय {S, C, H, O, L} लिखा जा सकता है।

(ii) समुच्चय निर्माण रूप या गुणधर्म रूप (Set builder form or property form) : इस विधि में, किसी समुच्चय के सभी अवयवों का वर्णन करने के लिए हम एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म या नियम लिखते है।

$A = \{x : P(x)\}$ जहाँ P(x) एक गुणधर्म है जिसके लिए $x \in A$ तथा कोलन (:) का चिन्ह का मतलब 'इस प्रकार है कि' है।

उदाहरण # 1 : समुच्चय $A = \{x : x \in N$ तथा $x = 2^n$ जहाँ $n \in N\}$ को रोस्टर रूप में लिखिये।

हल : $A = \{2, 4, 8, 16, ...\}$

उदाहरण # 2 : समुच्चय $B = \{x^3 : x < 5, x \in W\}$ को रोस्टर रूप में लिखिये

हल : $B = \{0, 1, 8, 27, 64\}$

उदाहरण # 3 : समुच्चय A = {0, 7, 26, 63, 124} को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिये।

हल : $A = \{x : x = n^3 - 1, n \in N, 1 \le n \le 5\}$

समुच्चयों के प्रकार (TYPES OF SETS)

रिक्त समुच्चय (Null set or empty set) : एक समुच्चय जिसमें एक भी अवयव विद्यमान नहीं हो, रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहलाता है इसे ϕ या { } से प्रदर्शित करते है। यदि किसी समुच्चय में कम से कम एक अवयव विद्यमान हो तो वह समुच्चय अरिक्त समुच्चय कहलाता है।

एकल समुच्चय (Singleton set) : यदि किसी समुच्चय में केवल एक ही अवयव विद्यमान हो, उसे एकल समुच्चय कहते है।

परिमित समुच्चय (Finite set) : एक समुच्चय जिसमें विद्यमान अवयवों की संख्या निश्चित हो, परिमित समुच्चय कहलाता है।

परिमित समुच्चय की कोटि (Order of a finite set) : किसी परिमित समुच्चय A में विद्यमान विभिन्न अवयवों की संख्या को परिमित समुच्चय की कोटि कहते है तथा इसे O(A) या n(A) द्वारा प्रदर्शित करते है। इसे समुच्चय की क्रमसूचक संख्या (Cardinal number) भी कहते है।

उदाहरण $A = \{a, b, c, d\} \Rightarrow n(A) = 4$

अपरिमित समुच्चय (Infinite set) : एक समुच्चय जिसमें विद्यमान अवयवों की संख्या अनिश्चित (अनन्त) हो अपरिमित समुच्चय कहलाता है।

समान समुच्चय (Equal set) : यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव B का अवयव हो तथा समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का अवयव हो, तो दो समुच्चय A और B समान समुच्चय कहलाते है। यदि समुच्चय A तथा B समान है तो इसे A = B से लिखते है। यदि समुच्चय A तथा B समान समुच्चय नहीं हो तब $A \neq B$ लिखते है।

तुल्य समुच्चय (Equivalent set) : दो परिमित समुच्चय A तथा B तुल्य समुच्चय कहलाते है यदि इनकी क्रमसूचक संख्या समान हो अर्थात् n(A) = n(B)

उदाहरण : A = {1, 3, 5, 7}, B = {a, b, c, d}

$\Rightarrow$ n(A) = 4 तथा n(B) = 4 $\Rightarrow$ A तथा B तुल्य समुच्चय है।

टिप्पणी : समान समुच्चय सदैव तुल्य समुच्चय होते है जबकि तुल्य समुच्चय समान समुच्चय नहीं हो सकते है।

उदाहरण # 4 : निम्नलिखित समुच्चयों का प्रकार बताइये।

(i) $A = \{x \in W : 3 \leq x < 10\}$ (ii) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

(iii) A = {1, 0, –1, –2, –3,.......} (iv) A = {1, 8, –2, 6, 5} तथा B = {1, 8, –2, 6, 5}

(v) A = {x : x कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या है}

हल : (i) परिमित समुच्चय (ii) परिमित समुच्चय

(iii) अपरिमित समुच्चय (iv) समान समुच्चय

(v) एकल समुच्चय

अभ्यास कार्य प्रश्न :

(1) उन सभी पूर्णांकों 'x' का समुच्चय लिखिये ताकि $-2 < x - 4 < 5$.

(2) समुच्चय {1, 2, 5, 10} को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिये।

(3) यदि $A = \{x : x^2 < 9, x \in Z\}$ तथा B = {–2, –1, 1, 2} तो ज्ञात करो कि समुच्चय A तथा B समान समुच्चय है या नहीं।

उत्तर (1) {3, 4, 5, 6, 7, 8}

(2) {x : x एक प्राकृत संख्या है तथा 10 का भाजक है}

(3) समान समुच्चय नहीं है।

उपसमुच्चय तथा अधिसमुच्चय (SUBSET AND SUPERSET) :

माना दो समुच्चय A और B इस प्रकार है कि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का भी अवयव है तो समुच्चय A को समुच्चय B का उपसमुच्चय कहा जाता है तथा समुच्चय B को समुच्चय A का अधिसमुच्चय कहा जाता है। इसे $A \subseteq B$ द्वारा प्रदर्शित करते है।

उदाहरण : A = {1, 2, 3, 4} तथा B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} $\Rightarrow$ $A \subseteq B$

यदि A, B का उपसमुच्चय नहीं है तो हम लिखते है कि $A \not\subset B$

उचित उपसमुच्चय (PROPER SUBSET) :

यदि समुच्चय A, समुच्चय B का उपसमुच्चय हो तथा $A \neq B$ तब समुच्चय A समुच्चय B का उचित उपसमुच्चय कहलाता है। समुच्चय A, समुच्चय A का उचित उपसमुच्चय नहीं होता है इसलिए यह A का अनुचित उपसमुच्चय (Improper subset) कहलाता है।

टिप्पणी : (i) प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है।

(ii) रिक्त समुच्चय ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

(iii) $A \subset B$ तथा $B \subset A \Leftrightarrow A = B$

(iv) यदि किसी परिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या n हो, तो उसके उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होगी ।

(v) यदि किसी समुच्चय में अवयवों की संख्या n हो, तो उसके उचित उपसमुच्चयों की संख्या $2^n - 1$ होगी।

(vi) रिक्त समुच्चय ϕ, स्वयं को छोड़कर प्रत्येक समुच्चय का उचित उपसमुच्चय होता है।

घात समुच्चय (POWER SET) :

माना A एक समुच्चय हैं। समुच्चय A के सभी संभावित उपसमुच्चयों के समुच्चय को समुच्चय A का घात समुच्चय कहते है तथा इसे P(A) द्वारा व्यक्त करते है।

उदाहरण # 5 : निम्न कथन सत्य है या असत्य, की जाँच कीजिए

(i) $\{a\} \not\subset \{b, c, a\}$ (ii) $\{x, p\} \not\subset$ {x : x अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है।}

(iii) $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \{\alpha, \beta, \phi, \psi\}$ (iv) $\{a, b\} \in \{a, \{a\}, b, c\}$

हल : (i) असत्य क्योंकि {a}, {b, c, a} का एक उपसमुच्चय है। (ii) असत्य क्योंकि x, p स्वर है।

(iii) असत्य क्योंकि अवयव γ, δ समुच्चय $\{\alpha, \beta, \phi, \psi\}$ में स्थित नहीं है।

(iv) असत्य क्योकिं $a, b \in \{a, \{a\}, b, c\}$ तथा $\{a, b\} \subset \{a, \{a\}, b, c\}$

उदाहरण # 6 : समुच्चय A = {1, 2, 3} का घात समुच्चय ज्ञात कीजिए।

हल : $P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

उदाहरण # 7 : यदि ϕ रिक्त समुच्चय को निरूपित करता है तो ज्ञात कीजिए।

(a) $P(\phi)$

(b) $P(P(\phi))$

(c) $n(P(P(P(\phi))))$

(d) $n(P(P(P(P(\phi)))))$

हल : (a) $P(\phi) = \{\phi\}$ (b) $P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$

(c) $n(P(P(P(\phi)))) = 2^2 = 4$ (d) $n(P(P(P(P(\phi))))) = 2^4 = 16$

अभ्यास कार्य प्रश्न :

(4) सत्य/असत्य की विवेचना कीजिए : A = {p, q, r, s}, B = {p, q, r, p, t} तो $A \subset B$.

(5) सत्य/असत्य की विवेचना कीजिए : A = {p, q, r, s}, B = {s, r, q, p} तो $A \subset B$.

(6) सत्य/असत्य की विवेचना कीजिए : $[4, 15) \subset [-15, 15]$

उत्तर (4) असत्य (5) सत्य (6) सत्य

<u>सार्वत्रिक (समष्टीय) समुच्चय</u> (UNIVERSAL SET) :

वह समुच्चय जिसमें एक विशेष संदर्भ के सभी संभव अवयव स्थित हो, सार्वत्रिक समुच्चय कहलाता है तथा इसे सामान्यतः U से निरूपित करते है।

उदाहरण यदि A = {1, 2, 3}, B = {2, 4, 5, 6}, C = {1, 3, 5, 7} तो U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} इसका सार्वत्रिक समुच्चय लिया जा सकता है।

<u>समुच्चयों पर कुछ संक्रियायें</u> (SOME OPERATION ON SETS) :

(i) **दो समुच्चयों का संघ (सम्मिलन) :** $A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

उदाहरण A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4} तो $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) **दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ :** $A \cap B$ = {x : x ∈ A तथा x ∈ B}

उदाहरण A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4} तो $A \cap B = \{2, 3\}$

(iii) **दो समुच्चयों का अन्तर :** A – B = {x : x ∈ A तथा x ∉ B}. इसे $A \cap B'$ भी लिखा जा सकता है।

इसी प्रकार $B - A = B \cap A'$ उदाहरण A = {1, 2, 3}, B = {2, 3, 4} ; A – B = {1}

(iv) **समुच्चयों का सममित अंतर :** इसे $A \Delta B$ द्वारा निरूपित किया जाता है तथा $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

(v) **समुच्चयों का पूरक :** A' = {x : x ∉ A किन्तु x ∈ U} = U – A

उदाहरण U = {1, 2,........, 10}, A = {1, 2, 3, 4, 5} तो A' = {6, 7, 8, 9, 10}

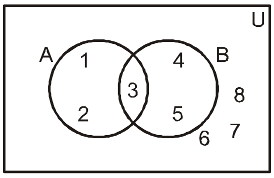
(vi) **विसंघित समुच्चय :** यदि $A \cap B = \phi$ तो A, B विसंघित समुच्चय होंगे।

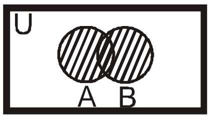
उदाहरण यदि A = {1, 2, 3}, B = {7, 8, 9} तो $A \cap B = \phi$

वेन आरेख (VENN DIAGRAM) :

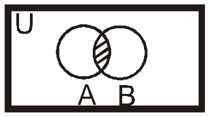
समुच्चयों के मध्य अधिकांश संबंधों को आरेखों द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जिन्हें वेन आरेख कहते है। इन आरेखों में सार्वत्रिक समुच्चय को एक आयत द्वारा तथा सार्वत्रिक समुच्चय के उपसमुच्चयों को आयत के अन्दर वृत्तों द्वारा प्रदर्शित करते है। समुच्चयों के अवयवों को उनके संगत वृत्तों के अन्दर लिखा जाता है।

उदाहरण के लिए यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ तो इनका वेन आरेख निम्न होगा

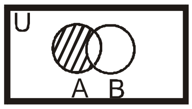




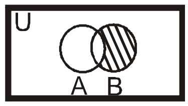
$A \cup B$



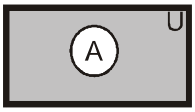
$A \cap B$



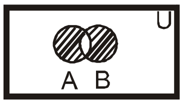
$A - B$



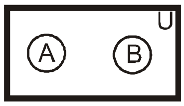
$B - A$



A'



$(A \Delta B) = (A - B) \cup (B - A)$



विसंधित समुच्चय

समुच्चयों के बीजगणित के नियम (समुच्चयों के गुणधर्म)
(LAWS OF ALGEBRA OF SETS (PROPERTIES OF SETS)) :

(i) **क्रमविनिमेय नियम :** $(A \cup B) = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

(ii) **साहचर्य नियम :** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) **बंटन (वितरण) नियम :** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iv) **डी-मोर्गन नियम :** $(A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(v) **तत्समक नियम :** $A \cap U = A$; $A \cup \phi = A$

(vi) **पूरक नियम :** $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \phi$, $(A')' = A$

(vii) **वर्गसम नियम :** $A \cap A = A$, $A \cup A = A$

NOTE : (i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$; $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(ii) $A \cap \phi = \phi$, $A \cup U = U$

उदाहरण # 8 : माना $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

उदाहरण # 9 : माना $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. तो $A - B$ तथा $B - A$ ज्ञात कीजिए।

हल : $A - B = \{x : x \in A$ तथा $x \notin B\} = \{1, 2, 3\}$ इसी प्रकार $B - A = \{7, 8, 9\}$

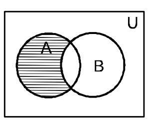
उदाहरण # 10 : सत्य या असत्य की विवेचना कीजिए :

(i) $A \cup A' = A$ (ii) $U \cap A = A$

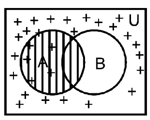
हल : (i) असत्य क्योंकि $A \cup A' = U$ (ii) सत्य क्योंकि $U \cap A = A$

उदाहरण # 11 : वेन आरेख की सहायता से सिद्ध कीजिए कि $A - B = A \cap B'$.

हल :



≣ $A - B$



|||| = A, ++ = B'

= $A \cap B'$

वेन आरेख से हम निष्कर्ष निकाल सकते है कि $A - B = A \cap B'$.

अभ्यास कार्य प्रश्न :

(7) यदि $A = \{x : x = 2n + 1, n \le 5, n \in N\}$ तथा $B = \{x : x = 3n - 2, n \le 4, n \in N\}$ तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

(8) यदि $A = \{5, 9, 13, 17, 21\}$ तथा $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$ तो $A - (A - B)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर (7) $\{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11\}$ (8) $\{9, 21\}$

समुच्चय में अवयवों की संख्या पर आधारित कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम
(SOME IMPORTANT RESULTS ON NUMBER OF ELEMENTS IN SETS) :

यदि A, B, C परिमित समुच्चय है तथा U परिमित सर्वनिष्ठ समुच्चय है, तो

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(ii) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

(iii) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(iv) समुच्चयों A, B, C में से ठीक दो समुच्चयों में स्थित अवयवों की संख्या

$$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C)$$

(v) समुच्चयों A, B, C में से ठीक एक समुच्चय में स्थित अवयवों की संख्या

$$= n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - 2n(B \cap C) - 2n(A \cap C) + 3n(A \cap B \cap C)$$

उदाहरण # 12 : 60 विद्यार्थियों के एक समूह में, 36 अंग्रेजी अखबार पढ़ते है, 22 हिन्दी अखबार पढ़ते है तथा 12 दोनों में से कोई भी अखबार नहीं पढ़ते है, तो कितने विद्यार्थी अंग्रेजी तथा हिन्दी दोनों अखबार पढ़ते है ?

हल $n(U) = 60,\ n(E) = 36,\quad n(H) = 22$

$n(E' \cap H') = 12 \Rightarrow n(E \cup H)' = 12$

$\Rightarrow\quad n(U) - n(E \cup H) = 12 \qquad \Rightarrow\quad n(E \cup H) = 48$

$\Rightarrow\quad n(E) + n(H) - n(E \cap H) = 48 \qquad \Rightarrow\quad n(E \cap H) = 58 - 48 = 10$

उदाहरण # 13 : 50 व्यक्तियों के एक समूह में, 14 व्यक्ति चाय पीते है लेकिन कॉफी नहीं पीते है तथा 30 व्यक्ति चाय पीते है तो ज्ञात कीजिए

(i) कितने व्यक्ति चाय तथा कॉफी दोनों पीते है ?

(ii) कितने व्यक्ति कॉफी पीते है लेकिन चाय नहीं पीते है।

हल T : चाय पीने वाले व्यक्ति

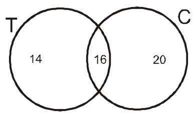
C : कॉफी पीने वाले व्यक्ति

C : कॉफी पीने वाले व्यक्ति

(i) $n(T) = n(T - C) + n(T \cap C)$

$\Rightarrow\quad 30 = 14 + n(T \cap C)$

$\Rightarrow\quad n(T \cap C) = 16$



(ii) $n(C - T) = n(T \cup C) - n(T) = 50 - 30 = 20$

अभ्यास कार्य प्रश्न :

(9) माना A तथा B दो परिमित समुच्चय इस प्रकार है कि $n(A - B) = 15$, $n(A \cup B) = 90$, $n(A \cap B) = 30$ तो n(B) ज्ञात कीजिए।

(10) एक बाजार अनुसंधान समुह 1000 उपभोक्ताओं का सर्वेक्षण किया तथा सूचित किया कि 720 उपभोक्ताओं ने उत्पाद A तथा 450 उपभोक्ताओं ने उत्पाद B पसंद किया। दोनों उत्पादों को पसंद करने वाले उपभोक्ताओं की न्यूनतम संख्या क्या होगी ?

उत्तर (9) 75 (10) 170

अन्तराल (Intervals) :

अन्तराल मूलतः R के उपसमुच्चय होते है और सामान्यतया इनका उपयोग असमिकाओं को हल करने या प्रान्त ज्ञात करने में किया जाता है। यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार है कि a < b, है तो हम चार प्रकार के अन्तराल निम्नानुसार परिभाषित कर सकते है :

नाम	प्रदर्शन	व्याख्या
खुला (विवृत्त) अन्तराल	(a, b)	{x : a < x < b} अर्थात् सीमान्त बिन्दु सम्मिलित नहीं है।
बन्द (संवृत्त) अन्तराल	[a, b]	{x : a ≤ x ≤ b} अर्थात् सीमान्त बिन्दु भी सम्मिलित है। यह तभी संभव है जब a और b दोनों परिमित हैं।
खुला–बन्द अन्तराल	(a, b]	{x : a < x ≤ b} अर्थात a सम्मिलित नहीं है और b सम्मिलित है।
बन्द . खुला अन्तराल	[a, b)	{x : a ≤ x < b} अर्थात a सम्मिलित है और b सम्मिलित नहीं है।

नोट : (1) अनन्त अन्तराल निम्नानुसार परिभाषित किये जाते है :

(i) $(a, \infty) = \{x : x > a\}$ (ii) $[a, \infty) = \{x : x \geq a\}$

(iii) $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$ (iv) $(-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$

(v) $(-\infty, \infty) = \{x : x \in R\}$

(2) x के कुछ विशेष मानों के लिए हम { } चिन्ह का उपयोग करते है। उदाहरणार्थः यदि x = 1, 2 हो तो हम $x \in \{1, 2\}$ लिखते हैं।

(3) यदि x का कोई मान नहीं हो तो इसे $x \in \phi$ (रिक्त समुच्चय) कहते है।

असमिकाओं को हल करने की व्यापक विधि (General Method to solve Inequalities):

माना कि $$g(x) = \left(\frac{(x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2} ---(x-b_n)^{k_n}}{(x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2} ---(x-a_n)^{r_n}}\right) \quad ... (i)$$

(अन्तराल विधि **(**तरंगित वक्र विधि**))**

जहाँ k_1, k_2 .....k_n तथा r_1, r_2 ....r_n $\in N$ और b_1, b_2.....b_n तथा a_1, a_2 ......a_n कोई भी वास्तविक संख्या है। तब असमिका हल करने के लिए निम्न पद काम में लेते है।

पद : -

वे बिन्दु जहाँ अंश शून्य होता है, फलन के शून्य या मूल कहलाते है तथा जहाँ हर शून्य होता है, फलन के ध्रुव कहलाते है।

(i) सर्वप्रथम हम फलन के शून्य तथा ध्रुव ज्ञात करते है।

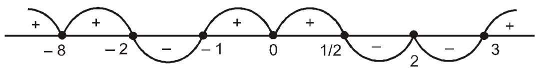
(ii) तब हम वास्तविक रेखा पर सभी शून्य तथा ध्रुवों को चिन्हित करते है तथा ऊर्ध्वाधर स्तम्भों से वास्तविक रेखा को कई अन्तरालों में बाँट देते है।

(iii) किसी भी अन्तराल में फलन का चिन्ह ज्ञात करते है तथा सभी अन्तरालों को एकान्तर से चिन्हित कर देते है यदि दो अन्तरालों को बाँटने वाले शून्य अथवा ध्रुव विषम बार आते है अन्यथा चिन्ह नहीं बदलते है।

(iv) इस प्रकार हम सभी अन्तराल ज्ञात करते है। g(x) > 0 का हल उन अन्तरालों का संघ होता है जिसमें धनात्मक चिन्ह होता है तथा g(x) < 0 का हल उन अन्तरालों का संघ होता है जिसमें ऋणात्मक चिन्ह होता है।

उदाहरण # 14 : असमिका को हल कीजिए, यदि $f(x) = \dfrac{(x-2)^{10}(x+1)^3\left(x-\frac{1}{2}\right)^5(x+8)^2}{x^{24}(x-3)^3(x+2)^5} > 0$ अथवा < 0.

हल : माना $f(x) = \dfrac{(x-2)^{10}(x+1)^3\left(x-\frac{1}{2}\right)^5(x+8)^2}{x^{24}(x-3)^3(x+2)^5}$ फलन के ध्रुव तथा शून्य $0, 3, -2, -1, \frac{1}{2}, -8$, है। 2



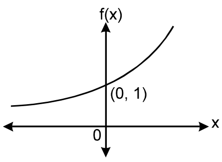
यदि $f(x) > 0$, तब $x \in (-\infty, -8) \cup (-8, -2) \cup (-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (3, \infty)$

तथा यदि $f(x) < 0$, तब $x \in (-2, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, 3)$ **Ans.**

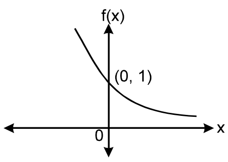
चरघातांकीय फलन (Exponential Function) :

फलन $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x \in R)$ चरघातांकीय फलन कहलाता है, चरघातांकीय फलनों के आलेख निम्न प्रकार हो सकते है –

स्थिति - I
a > 1 के लिए



स्थिति - II
0 < a < 1 के लिए



एक संख्या का लघुगणक (Logarithm of a Number) :

किसी संख्या N का आधार a पर लघुगणक, उस घातांक को निरूपित करता है, जिसको a पर लगाने से संख्या N प्राप्त होती है, इस संख्या को $\log_a N$ से प्रदर्शित करते हैं।

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N\ ,\ a > 0,\ a \neq 1\ \&\ N > 0$$

यदि a = 10 हो, तो $\log_{10} b$ की बजाय log b लिखते हैं।
यदि a = e हो, तो $\log_e b$ की बजाय $\ell n\, b$ लिखते हैं, यहाँ e नेपियर आधार हैं, जिसका संख्यात्मक मान 2.7182 होता है।

याद रखें :

$\log_{10}2 \simeq 0.3010$; $\log_{10}3 \simeq 0.4771$
$\ell n\, 2 \simeq 0.693$; $\ell n\, 10 \simeq 2.303$

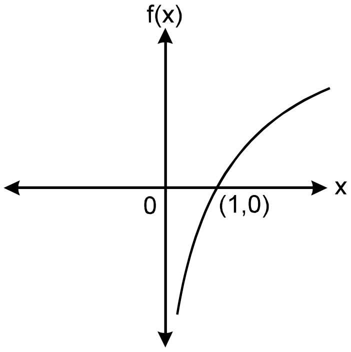
प्रान्त : (Domain of Definition) :

संख्या $\log_a N$ के अस्तित्व एवं अद्वितीयता को प्रतिबन्धों $a > 0$, $a \neq 1$ एवं $N > 0$ की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है।
लघुगणक का आधार 'a', इकाई के बराबर नहीं होना चाहिए अन्यथा इकाई के अलावा अन्य संख्याओं के लघुगणक नहीं होगें तथा प्रत्येक संख्या इकाई का लघुगणक होगी।

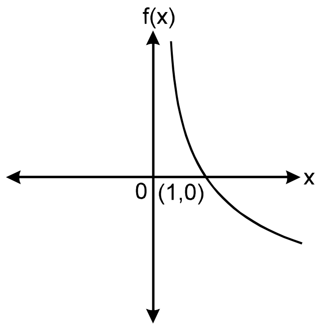
लघुगणकीय फलन (Graph of Logarithmic function) :

$f(x) = \log_a x$ लघुगणकीय फलन कहलाता है जहाँ $a > 0$ एवं $a \neq 1$ तथा $x > 0$ है। इनके आलेख निम्न प्रकार हो सकते है–

Case- I
For a > 1



Case- II
For 0 < a < 1



आधारभूत लघुगणकीय सर्वसमिका (Fundamental Logarithmic Identity) :

$a^{\log_a N} = N$, $a > 0$, $a \neq 1$ एवं $N > 0$

लघुगणक के मुख्य गुणधर्म (The Principal Properties of Logarithm) :

मानाकि M और N स्वेच्छ धनात्मक संख्याएँ है, $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$ तथा α, β कोई वास्तविक संख्याएँ है, तो–

(i) $\log_a (M.N) = \log_a M + \log_a N$;
व्यापक रूप में $\log_a (x_1 x_2 ......x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + ...+ \log_a x_n$

(ii) $\log_a (M/N) = \log_a M - \log_a N$ (iii) $\log_a M^\alpha = \alpha. \log_a M$

(iv) $\log_{a^\beta} M = \dfrac{1}{\beta} \log_a M$ (v) $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b}$ (आधार परिवर्तन प्रमेय)

नोट :

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_{1/a} a = -1$
- $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$
- $a^x = e^{x \ell n\, a}$
- $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

नोट : (i) यदि संख्या और आधार इकाई के एक ही ओर स्थित हो, तो लघुगणक का मान धनात्मक होता है।
(ii) यदि संख्या और आधार इकाई के विपरीत ओर स्थित हो, तो लघुगणक का मान ऋणात्मक होता है।

उदाहरण # 15 : निम्न के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\log_2 72 + \log_2\left(\dfrac{32}{81}\right) + \log_2\left(\dfrac{9}{64}\right)$ **Ans.** 2

(ii) $7^{\frac{1}{\log_{25} 49}}$ **Ans.** 5

हल : (i) $\log_2 72 + ...$

$= \log_2\left\{2^3.3^2.\dfrac{2^5}{3^4}.\dfrac{3^2}{2^6}\right\} = \log_2 4 = 2$

(ii) $7^{\frac{1}{\log_{25} 49}} = 7^{\log_{49} 25} = 7^{\frac{2}{2}\log_7 5} = 5^{\log_7 7} = 5$

अभ्यास कार्य :

(11) निम्न के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\log_{49}343$ (ii) $4\log_{27}243$

(iii) $\log_{(1/100)}1000$ (iv) $\log_{(7-4\sqrt{3})}(7+4\sqrt{3})$

(v) $\log_{125}625$

(12) $\log_8 9.\log_9 10$ .... $\log_{63}64$

(13) log cot1° + log cot2° + log cot3° + ... + log cot89° का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. (11) (i) 3/2 (ii) 20/3 (iii) – 3/2 (iv) –1 (v) 4/3

(12) 2 (13) 0

लघुगणकीय समीकरण (Logarithmic Equation) :

समीकरण $\log_a x = \log_a y$ संभव है यदि और केवल यदि $x = y$ अर्थात

$\mathbf{\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y}$

सदैव दी गई समीकरण की वैधता ज्ञात करनी चाहिए अर्थात $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$ होने चाहिए।

उदाहरण # 16 : $\log_x(4x - 3) = 2$

Ans. $x = 3$

हल : प्रान्त : $x > 0, 4x - 3 > 0, x \neq 1$

अतः $4x - 3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 3$ या $x = 1$ (अस्वीकार्य क्योंकि प्रान्त में नहीं है।)

उदाहरण # 17 : $\log_2 (\log_3\{\log_5 (x^2 + 4)\} = 0$

Ans. $x = \pm 11$

हल : $\log_3(\log_5(x^2 + 4)\} = 2° = 1$

$\Rightarrow \log_5(x^2 + 4) = 3^1 = 3$

$\Rightarrow (x^2 + 4) = 5^3 = 125 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \pm 11$

उदाहरण # 18 : $\log_2(x^2) + \log_2 (x + 2) = 4$

Ans. $x = 2$

हल : $\log_2 (x^2(x + 2) = 4 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x - 2)\underbrace{(x^2+4x+8)}_{D<0} = 0$

$x = 2$

अभ्यास कार्य :

(14) $3^{3\log_3 x} = 27$

(15) $(\log_{10}x)^2 - (\log_{10}x) - 6 = 0$

(16) $3(\log_7 x + \log_x 7) = 10$

(17) $(x+2)^{\log_2(x+2)} = 8(x+2)^2$

Ans. (14) $x = 3$ (15) $x = 10^3, \dfrac{1}{10^2}$ (16) $x = 343, \sqrt[3]{7}$ (17) $x = 6$ or $-3/2$

लघुगणकीय असमिका (Logarithmic Inequality) :

माना a एक वास्तविक संख्या इस प्रकार है कि

(i) यदि $a > 1$, तब $\log_a x > \log_a y \Rightarrow x > y$

(ii) यदि $a > 1$, तब $\log_a x < \alpha \Rightarrow 0 < x < a^\alpha$

(iii) यदि $a > 1$, तब $\log_a x > \alpha \Rightarrow x > a^\alpha$

(iv) यदि $0 < a < 1$, तब $\log_a x > \log_a y \Rightarrow 0 < x < y$

(v) यदि $0 < a < 1$, तब $\log_a x < \alpha \Rightarrow x > a^\alpha$

रूप - I : $f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1$

रूप		निकायों का समूह
(a) $\log_{g(x)} f(x) \ge 0$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) \ge 1 \quad , \quad g(x) > 1 \\ 0 < f(x) \le 1 \quad , \quad 0 < g(x) < 1 \end{cases}$
(b) $\log_{g(x)} f(x) \le 0$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) \ge 1 \quad , \quad 0 < g(x) < 1 \\ 0 < f(x) \le 1 \quad , \quad g(x) > 1 \end{cases}$
(c) $\log_{g(x)} f(x) \ge a$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) \ge (g(x))^a \quad , \quad g(x) > 1 \\ 0 < f(x) \le (g(x))^a \quad , \quad 0 < g(x) < 1 \end{cases}$
(d) $\log_{g(x)} f(x) \le a$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} 0 < f(x) \le (g(x))^a \quad , \quad g(x) > 1 \\ f(x) \ge (g(x))^a \quad , \quad 0 < g(x) < 1 \end{cases}$

रूप - II : जब असमिका का रूप

रूप		निकायों का समूह
(a) $\log_{\phi(x)} f(x) \ge \log_{\phi(x)} g(x)$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x), \phi(x) > 1, \\ 0 < f(x) \le g(x); 0 < \phi(x) < 1 \end{cases}$
(b) $\log_{\phi(x)} f(x) \le \log_{\phi(x)} g(x)$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} 0 < f(x) \le g(x), \phi(x) > 1, \\ f(x) \ge g(x) > 0, 0 < \phi(x) < 1 \end{cases}$

उदाहरण # 19 : लघुगणकीय असमिका $\log_{1/5} (2x^2 + 7x + 7) \ge 0$ को हल कीजिए।

हल : चूँकि $\log_{1/5} 1 = 0$, दी गई असमिका को लिखा जा सकता है

$\log_{1/5} (2x^2 + 7x + 7) \ge \log_{1/5} 1$

जब फलन के प्रान्त को ध्यान में रखा जाता है तो असमिका निम्न असमिकाओं के निकाय के समतुल्य होगी $\begin{cases} 2x^2 + 7x + 7 > 0 \\ 2x^2 + 7x + 7 \le 1 \end{cases}$ अन्तराल विधि का प्रयोग करके असमिकाओं को हल करते है

$x \in \left[-2, \frac{-3}{2}\right]$

उदाहरण # 20 : असमिका $\log_{1/3} (5x - 1) > 0$ को हल कीजिए।

हल : लघुगणक के मूलभूत गुणधर्म के प्रयोग से

$\begin{cases} 5x - 1 < 1 \\ 5x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x < 2 \\ \\ 5x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x < \frac{2}{5} \\ \\ x > \frac{1}{5} \end{matrix} \Rightarrow$ असमिका का हल $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$ से दिया जाता है।

उदाहरण # 21 : असमिका $\log_{(2x+3)} x^2 < \log_{(2x+3)} (2x + 3)$ को हल कीजिए।

हल : दी गई असमिका निम्न निकायों के समूह के समतुल्य है

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 0 < 2x + 3 < 1 \\ x^2 > 2x + 3 \end{cases} & \text{(i)} \\ \begin{cases} 2x + 3 > 1 \\ 0 < x^2 < 2x + 3 \end{cases} & \text{(ii)} \end{array}\right.$$

निकाय (i) को हल करने पर हमें मिलता है

$$\begin{cases} \frac{-3}{2} < x < -1 \\ (x - 3)(x + 1) > 0 \qquad \text{(iii)} \end{cases}$$

निकाय (iii) निम्न दो निकाय समूहों के समतुल्य है

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{-3}{2} < x < -1, \quad x > 3; & \text{(iv)} \\ \frac{-3}{2} < x < -1, \quad x < -1 & \text{(v)} \end{array}\right.$$

निकाय (iv) का कोई हल नहीं है। निकाय (v) का हल है $x \in \left(\frac{-3}{2}, -1\right)$,

निकाय (iv) का कोई हल नहीं है। निकाय (v) का हल है

$$\begin{cases} x > -1 \\ (x-3)(x+1) < 0 \end{cases} \quad \text{अथवा} \quad \begin{cases} x > -1 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in (-1, 3)$$

$$x \in \left(\frac{-3}{2}, -1\right) \cup (-1, 3)$$

उदाहरण # 22 : असमिका $\log_{\left(\frac{x^2-12x+30}{10}\right)}\left(\log_2 \frac{2x}{5}\right) > 0$. को हल कीजिए।

हल. यह असमिका निम्न निकाय समूहों के समतुल्य है

$$\begin{cases} \frac{x^2-12x+30}{10} > 1, \\ \log_2\left(\frac{2x}{5}\right) > 1, \end{cases} \quad \text{और} \quad \begin{cases} 0 < \frac{x^2-12x+30}{10} < 1, \\ 0 < \log_2\left(\frac{2x}{5}\right) < 1 \end{cases}$$

प्रथम निकाय को हल करने पर हमें मिलता है

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 20 > 0 \\ \frac{2x}{5} > 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-10)(x-2) > 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \text{ or } x > 10 \\ x > 5 \end{cases}$$

इसलिए निकाय का हल $x > 10$

द्वितीय निकाय को हल करने पर हमें मिलता है

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x^2 - 12x + 30 < 10 \\ 1 < \frac{2x}{5} < 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 12x + 30 > 0 \quad \text{तथा} \quad x^2 - 12x + 20 < 0 \\ \frac{5}{2} < x < 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 6 - \sqrt{6} \text{ या } x > 6 + \sqrt{6} \quad \text{तथा} \quad 2 < x < 10 \\ \frac{5}{2} < x < 5 \end{cases}$$

$\therefore$ दोनों निकायों का सम्मिलित हल $\frac{5}{2} < x < 6 - \sqrt{6}$ है, तो मूल असमिका का हल है

$x \in \left(\frac{5}{2}, 6 - \sqrt{6}\right) \cup (10, \infty)$ **Ans.**

अभ्यास कार्य :

(18) निम्न असमिकाओं को हल कीजिए–

(i) $\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8) > 2$

(ii) $\log_{0.2}(x^2 - x - 2) > \log_{0.2}(-x^2 + 2x + 3)$

(iii) $\log_x(x^3 - x^2 - 2x) < 3$

Answers : (18) (i) $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{22}\right)$ (ii) $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ (iii) $(2, \infty)$

पूर्णांश एवं भिन्नांश (Characteristic & Mantissa) :

$[\log_a N]$ आधार a पर N के लघुगणक का पूर्णांश कहलाता है। यह सदैव पूर्णांक होता है।
$\{\log_a N\}$ आधर a पर N के लघुगणक का भिन्नांश कहलाता है। भिन्नांश अन्तराल [0, 1) में होता है।
आधार 10 पर 1 के लघुगणक का पूर्णांश = 0
आधार 10 पर 10 के लघुगणक का पूर्णांश = 1
आधार 10 पर 100 के लघुगणक का पूर्णांश = 2
आधार 10 पर 1000 के लघुगणक का पूर्णांश = 3
आधार 10 पर 83.5609 के लघुगणक का पूर्णांश = 1
आधार 10 पर 613.0965 के लघुगणक का पूर्णांश = 2

अन्तराल,	**पूर्णांश (आधार 10 पर))**	**संख्या में अंकों की संख्या**	**अन्तराल में पूर्णांकों की संख्या**
[1, 10)	0	1	$9 = 9 \times 10^0$
[10, 100)	1	2	$90 = 9 \times 10^1$
[100, 1000)	2	3	$900 = 9 \times 10^2$
[100, 10000)	3	4	$9000 = 9 \times 10^3$
	|		
	|		
	|		
	n	(n + 1)	9×10^n

नोट :

यदि संख्या का पूर्णांश (आधार 10 पर) n प्राप्त हो, तो उस संख्या में (n + 1) अंक होंगे।

* आधार 10 पर $\frac{1}{10}$ के लघुगणक का पूर्णांश = – 1

आधार 10 पर $\frac{1}{100}$ के लघुगणक का पूर्णांश = – 1

आधार 10 पर $\frac{1}{1000}$ के लघुगणक का पूर्णांश = – 1

आधार 10 पर $\frac{3}{100}$ के लघुगणक का पूर्णांश = – 3

आधार 10 पर $\frac{3}{1000}$ के लघुगणक का पूर्णांश = – 3

अन्तराल	**पूर्णांश (आधर 10)**	**दशमलव के तुरन्त बाद शून्यों की संख्या**	**अन्तराल में स्थित संख्या के व्युत्क्रम में पूर्णांकों की संख्या**
[1/10, 1)	–1	0	$9 = 9\times10^{1-1}$
[1/100, 1/10) ≡ [0.01, 0.1)	–2	1	$90 = 9\times10^{2-1}$
$[1/10^3, 1/10^2)$ ≡ [0.0001, 0.01)	–3	2	$900 = 9\times10^{3-1}$
[0.0001, 0.001)	–4	3	$9000 = 9\times10^{4-1}$
	|		
	|		
	|		
	|		
	– n	(n – 1)	$= 9 \times 10^{n-1}$

नोट:

यदि संख्या का पूर्णांश (आधार 10 पर) –n प्राप्त हो, तो दशमलव के बाद अशून्य अंक से पहले शून्यों की संख्या (n –1) होगी।

उदाहरण # 23 संख्या 18^{50} में अंको की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

(दिया गया है $\log_{10}2 = 0.3010$; $\log_{10}3 = 0.4771$)

हल $N = 18^{50}$

$\log_{10}N = 50 \log_{10}18 = 50\ (0.3010 + 0.9542) = 50(1.2552) = 62.76$

पूर्णांश = $[\log_{10}N] = 62$

अंको की संख्या = $62 + 1 = 63$

अभ्यास कार्य :

(19) 6^{-200} में दशमलव के ठीक बाद शून्यों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

Answers : (19) 155