Exercise-1

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**
✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

Section (A) : Representation of sets, Types of sets, subset and power set
खण्ड (A) : समुच्चयों का निरूपण, समुच्चयों के प्रकार, उपसमुच्चय तथा घात समुच्चय

A-1. State wether the following collections is a set or not ?
(i) The collection of natural numbers between 2 and 20
(ii) The collection of numbers which satisfy the equation $x^2 - 5x + 6 = 0$
(iii) The collection of prime numbers between 1 and 100.
(iv) The collection of all intelligent women in Jalandhar.
निम्न में से कौनसा संग्रह समुच्चय है या नहीं है?
(i) 2 और 20 के मध्य प्राकृत संख्याओं का संग्रह
(ii) समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ को संतुष्ट करने वाली संख्याओं का संग्रह
(iii) 1 और 100 के मध्य अभाज्य संख्याओं का संग्रह
(iv) जालधंर में सभी बुद्धिमान महिलाओं का संग्रह

Ans. (i) Yes (ii) Yes (iii) Yes (iv) No
Ans. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) नहीं

Sol. Collection of all intelligent women in Jalandhar is not a set as it is not a well defined collection. It is not possible to decide logically which woman is to be included in the collection and which is not to be included.
जालधंर में सभी सुन्दर महिलाओं का संग्रह समुच्चय नहीं क्योंकि यह सुपरिभाषित संग्रह नहीं है। यह तार्किक रूप से निश्चित करना संभव नहीं है कि महिलाऐं संग्रह में शामिल है या नहीं है

A-2. Write the following set in tabular form
निम्न समुच्चय को सारणीबद्ध रूप में लिखे–
(i) A = {x : x is a positive prime < 10}
A = {x : x एक अभाज्य संख्या < 10} है
(ii) $B = \{x : x = 3\lambda,\ x \in I,\ 1 \le \lambda \le 3\}$

Ans. (i) {2,3,5,7} (ii) {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Sol. 2,3,5 and 7 are the only positive primes less than 10.
2,3,5 और 7,केवल धनात्मक अभाज्य संख्याऐं 10 से छोटी है

A-3. Write the following set in builder form
निम्न समुच्चय को समुच्चय निर्माण विधि के रूप में लिखें–
(i) set of all rational number
सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय
(ii) {2, 5, 10, 17, 26, 37, ...}

Ans. (i) $\{x : x = \frac{p}{q},\ p \in I,\ q \in N\}$ (ii) $\{x : x = \lambda^2 + 1,\ \lambda \in N\}$

Sol. Obvious स्पष्टतया

A-4. Identifiy type of set in terms of empty/singleton/finite/infinite
(i) {x : x is a real number and $x^2 - 1 = 0$}
(ii) {x : x is a real number and $x^2 + 1 = 0$}
(iii) {x : x is positive real number and $x^2 - 9 = 0$}

(iv) {x : x is a real number and $x^2 + 2x + 2 \geq 0$}
निम्न में से रिक्त/एकल/परिमित/अपरिमित समुच्चय को पहचानिए।
(i) {x : x एक वास्तविक संख्या है तथा $x^2 - 1 = 0$} (ii) {x : x एक वास्तविक संख्या है तथा $x^2 + 1 = 0$}
(iii) {x : x एक वास्तविक संख्या है तथा $x^2 - 9 = 0$} (iv) {x : x एक वास्तविक संख्या है तथा $x^2 + 2x + 2 \geq 0$}

Ans. (i) Finite (ii) Finite and empty
(iii) Singleton & finite (iv) Infinite
(i) परिमित (ii) परिमित और रिक्त
(iii) एकल और परिमित (iv) अपरिमित

Sol. (i) $x^2 - 1 = 0$ $x = \pm 1$
(ii) $x^2 + 1 = 0$ $x = \pm i$ $x \in \phi$
(iii) $x^2 - 9 = 0$ $x = \pm 3$
(iv) $x^2 - x - 2 = 0$, $x = 2, -1$

A-5. Write power set of the set A = {ϕ, {ϕ}}.
समुच्चय A = {ϕ, {ϕ}} का घात समुच्चय है–
Ans. {ϕ, {ϕ}, {{ϕ}}, A}
Sol. P(A) = {ϕ, {ϕ}, {{ϕ}}, {ϕ, {ϕ}}} = {ϕ, {ϕ}, {{ϕ}}, A}

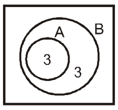
Section (B) : Operations on sets, Law of Algebra of sets
खण्ड (B) : समुच्चयों की संक्रियायें, बीजगणित के नियम

B-1. Given the sets A = {1, 2, 3}, B = {3, 4}, C = {4, 5, 6}, then find the following
समुच्चय A = {1, 2, 3}, B = {3, 4}, C = {4, 5, 6}, दिया है तब निम्न को ज्ञात कीजिए।
(i) $A \cup (B \cap C)$ (ii) $A - (B \cap C)$ (iii) $(B \cup C) - A$
Ans. **(i)** {1, 2, 3, 4} (ii) {1, 2, 3} (iii) {4, 5, 6}
Sol. A = {1, 2, 3}
B = {3, 4}
C = {4, 5, 6}
$B \cap C$ = { 4 }
$B \cup C$ = {3, 4, 5, 6}
$A \cup (B \cap C)$ = {1, 2, 3, 4}
$A - (B \cap C)$ = {1, 2, 3}
$(B \cup C) - A$ = {4, 5, 6}

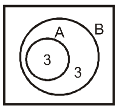
B-2. Find the smallest set A such that $A \cup$ {1, 2} = {1, 2, 3, 5, 9}
Ans. {3, 5, 9}
समुच्चय A इस प्रकार है कि $A \cup$ {1, 2} = {1, 2, 3, 5, 9} तो न्यूनतम समुच्चय A ज्ञात कीजिए–
Sol. Obvious स्पष्टतया

B-3. If aN = {ax : $x \in N$} and $bN \cap cN = dN$, where $b, c \in N$, $b \geq 2$, $c \geq 2$ are relatively prime, then write 'd' in terms of b and c.
Ans. d = bc
यदि aN = {ax : $x \in N$} और $bN \cap cN = dN$, जहाँ $b, c \in N$, $b \geq 2$, $c \geq 2$ सह अभाज्य है, तब d को b और c के पदों में लिखिए।
Ans. d = bc
Sol. $bN \cap . cN$
(+ve integral multiple of b) $\cap$ (+ve integral multiple of c)
since b & c are relatively primes :
= b c N $\therefore$ d = bc
Hindi. $bN \cap . cN$
(b का धनात्मक पूर्णांक गुणज) $\cap$ (c का धनात्मक पूर्णांक गुणज)
चूंकि b और c सह अभाज्य संख्याऐं हैं।
= b c N $\therefore$ d = bc

B-4. Sets A and B have 3 and 6 elements respectively. What can be the minimum and maximum number of elements in
(i) $A \cap B$ (ii) $A \cup B$
समुच्चय A तथा B में अवयवों की संख्या क्रमशः 3 तथा 6 हो, तब (i)$A \cap B$ (ii) $A \cup B$ में न्यूनतम और अधिकतम अवयवों की संख्या हो सकती है।
Ans. (i) minimum न्यूनतम $n(A \cap B) = 0$, maximum अधिकतम $n(A \cap B) = 3$
(ii) minimum न्यूनतम $n(A \cup B) = 6$, maximum अधिकतम $n(A \cup B) = 9$

Sol. 

for minimum $n(A \cup B)$, the set A is subset of B and for maximum $n(A \cup B)$, the sets A and B are disjoint set.
also $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$\Rightarrow$ minimum $n(A \cap B) = 0$, maximum $n(A \cap B) = 3$
$\Rightarrow$ minimum value of $n(A \cup B) = 3 + 6 - 3 = 6$ or maximum value of $n(A \cup B) = 3 + 6 - 0 = 9$

Hindi. 

$n(A \cup B)$, के न्यूनतम के लिए समुच्चय A, B का उपसमुच्चय है तथा अधिकतम $n(A \cup B)$, के लिए A और B विसंघित समुच्चय है।
तथा $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$\Rightarrow$ न्यूनतम $n(A \cap B) = 0$, अधिकतम $n(A \cap B) = 3$
$\Rightarrow$ $n(A \cup B)$ का न्यूनतम मान $= 3 + 6 - 3 = 6$ या $n(A \cup B)$ का अधिकतम मान $= 3 + 6 - 0 = 9$

Section (C) : Cardinal number Problems
खण्ड (C) : कार्डिनल संख्या समस्या

C-1. Let $n(U) = 700$, $n(A) = 200$, $n(B) = 300$ and $n(A \cap B) = 100$, then find $n(A' \cap B')$
माना $n(U) = 700$, $n(A) = 200$, $n(B) = 300$ तथा $n(A \cap B) = 100$, तब $n(A' \cap B') =$
Ans. 300
Sol. $n(A^c \cap B^c) = n[(\{A \cup B)^c] = n(U) - n(A \cup B)$
$= n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] = 700 - [200 + 300 - 100] = 300.$

C-2. In a college of 300 students, every student reads 5 newspapers and every newspaper is read by 60 students. Find the number of newspaper.
Ans. 25
एक कॉलेज में छात्रों की संख्या 300 है, प्रत्येक छात्र 5 अखबार पढता है तथा प्रत्येक अखबार को 60 छात्रों द्वारा पढ़ा जाता है। तब अखबारों की संख्या ज्ञात कीजिए।
Ans. 25

Sol. Let number of newspapers is x.
As every newspaper is read by 60 students
Since, every students reads 5 newspapers
$\therefore 60x = 300(5) \Rightarrow x = 25.$
Hindi. माना अखबारों की संख्या x है।
$\because$ प्रत्येक अखबार को 60 छात्रों द्वारा पढ़ा जाता है
तथा प्रत्येक छात्र 5 अखबार पढ़ता है
$\therefore 60x = 300(5) \Rightarrow x = 25.$

C-3. In a town of 10,000 families it was found that 40% families buy newspaper A, 20% families buy newspaper B and 10% families buy newspaper C, 5% families buy A and B, 3 % buy B and C and 4% buy A and C. If 2% families buy all the three news papers, then find number of families which buy newspaper A only.

यदि किसी शहर के 10,000 परिवारों में से 40% परिवार समाचार पत्र A, 20% परिवार समाचार पत्र B, 10% परिवार समाचार पत्र C तथा 5% परिवार A और B, 3 % परिवार B और C तथा 4% परिवार A और C को खरीदते हैं व 2% परिवार सभी तीन समाचार पत्र खरीदते है, तो उन परिवारों की संख्या क्या होगी जो केवल समाचार पत्र A खरीदतें हैं–

Ans. 3300

Sol. $n(A) = 40\%$ of $10,000 = 4,000$

$n(B) = 20\%$ of $10,000 = 2,000$

$n(C) = 10\%$ of $10,000 = 1,000$

$n(A \cap B) = 5\%$ of $10,000 = 500$

$n(B \cap C) = 3\%$ of $10,000 = 300$

$n(C \cap A) = 4\%$ of $10,000 = 400$

$n(A \cap B \cap C) = 2\%$ of $10,000 = 200$

$n(A \cap B^c \cap C^c) = n[A \cap (B \cup C)^c]$

$= n(A) - n[A \cap (B \cup C)] = n(A) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

$= n(A) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$

$= 4000 - [500 + 400 - 200] = 4000 - 700 = 3300.$

Sol. $n(A) = 10,000$ का $40\% = 4,000$

$n(B) = 10,000$ का $20\% = 2,000$

$n(C) = 10,000$ का $10\% = 1,000$

$n(A \cap B) = 10,000$ का $5\% = 500$

$n(B \cap C) = 10,000$ का $3\% = 300$

$n(C \cap A) = 10,000$ का $4\% = 400$

$n(A \cap B \cap C) = 10,000$ का $2\% = 200$

$n(A \cap B^c \cap C^c) = n[A \cap (B \cup C)^c]$

$= n(A) - n[A \cap (B \cup C)] = n(A) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

$= n(A) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$

$= 4000 - [500 + 400 - 200] = 4000 - 700 = 3300.$

C-4. In a survery, it was found that 21 persons liked product A, 26 liked product B and 29 liked product C. If 14 persons liked products A and B, 12 liked products C and A, 13 persons liked products B and C and 8 liked all the three products then

(i) Find the number of persons who liked atleast one product

(ii) The number of persons who like the products A and B but not C

Ans (i) 45 (ii) 6

एक सर्वे यह पाया जाता है कि 21 व्यक्ति उत्पाद A को, 26 व्यक्ति उत्पाद B को और 29 व्यक्ति उत्पाद C को पंसद करते है। यदि 14 व्यक्ति उत्पाद A और B को पंसद करते है, 12 व्यक्ति उत्पाद C और A को पंसद करते है, 13 व्यक्ति उत्पाद B और C को, 8 व्यक्ति सभी तीनों उत्पादों को पंसद करते है तब निम्न में से कौनसा सही है ?

(i) व्यक्तियों की संख्या जो कम से कम एक उत्पाद पंसद करते है

(ii) व्यक्तियों की संख्या जो उत्पाद A और B को पंसद करते है परन्तु C को नहीं

Ans (i) 45 (ii) 6

Sol. $n(A) = 21, n(B) = 26, n(C) = 29$

$n(A \cap B) = 14,\ n(A \cap C) = 12,\ m(B \cap C) = 13,\ n(A \cap B \cap C) = 8$

$n(C \cap A' \cap B') = n(C \cap \overline{A \cup B}) = n(C) - n((C \cap A) \cup (C \cap B))$

$n(C) - [n(C \cap A) + n(C \cap B) - n(A \cap B \cap C)]$

$29 - [12 + 13 - 8] = 12$

$n(A \cap B \cap C') = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 14 - 8 = 6$

Section (D) : Rational Inequalities
खण्ड (D) : परिमेय असमिकाऐं

D-1. Solve the following rational in equalities
परिमेय असमिकाओं को हल कीजिए –

(i) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+3)} < 0$ (ii) $\frac{(1-x)^3(x+2)^4}{(x+9)^2(x-8)} \geq 0$

(iii) $\frac{x^2+4x+4}{2x^2-x-1} > 0$ (iv) $\frac{(2-x^2)(x-3)^3}{(x+1)(x^2-3x-4)} \geq 0$

(v) $\frac{(x+2)(x^2-2x+1)}{4+3x-x^2} \geq 0$

Ans. (i) (–3,–2) ∪ (1,3)
(ii) {–2} ∪ [1, 8)
(iii) (–∞, –2)∪(–2, –1/2)∪(1, ∞)
(iv). $[-\sqrt{2},-1) \cup (-1, \sqrt{2}] \cup [3,\ 4)$
(v) (– ∞, – 2] ∪ (–1, 4)

Sol.

(i) + – + – + on number line with points –3, –2, 1, 3

⇒ x ∈ (–3,–2) ∪ (1,3)

(ii) – ND – 0 – 0 + ND – on number line with points –9, –2, 1, 8

x ∈ {–2} ∪ [1,8)

(iii) $\frac{(x+2)^2}{(2x+1)(x-1)} > 0$ + + – + on number line with points –2, –1/2, 1

(iv) $\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-3)^3}{(x+1)^2(x-4)} \leq 0$

+ – – + – + on number line with points $-\sqrt{2}$, –1, $\sqrt{2}$, 3, 4

(v) $\frac{(x+2)(x-1)^2}{(x+1)(x-4)} \leq 0$ ⇒ + – – + on number line with points –2, –1, 1, 4

D-2. Solve the following Inequalities
निम्न असमिकाओं को हल कीजिए।

(i) $\frac{7x-5}{8x+3} > 4$ (ii) $\frac{14x}{x+1} < \frac{9x-30}{x-4}$ (iii) $\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \leq 1$ (iv) $\frac{x^2+2}{x^2-1} < -2$

Ans. **(i)**(–17/25, –3/8) (ii) **x ∈ (–6, –1) ∪ (1, 4)** (iii) (–3,–2) ∪ (–1,∞) (iv) x ∈ (–1,0) ∪ (0,1)

Sol. (i) $\frac{7x-5}{8x+3} - 4 > 0$

(ii) $\frac{14x}{x+1} - \left(\frac{9x-30}{x-4}\right) < 0 \Rightarrow \frac{14x^2-56x-9x^2-9x+30x+30}{(x+1)(x-4)} < 0$

$\Rightarrow \frac{5x^2-35x+30}{(x+1)(x+4)} < 0 \Rightarrow \frac{(x-6)(x-1)}{(x+1)(x+4)} < 0$

⇒ **x ∈ (–6, –1) ∪ (1, 4)**

(iii) $\dfrac{-12x^2-12}{(x+1)(x+2)(x+3)} \le 0$

+ ND – ND + ND –
–3 –2 –1

$x \in (-3,-2) \cup (-1,\infty)$

(iv) $\dfrac{x^2+2+2x^2-2}{x^2-1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3x^2}{(x-1)(x+1)} < 0$

+ – – +
–1 0 1

$\Rightarrow \quad x \in (-1,0) \cup (0,1)$

D-3. Solve the following rational in equalities
परिमेय असमिकाओं को हल कीजिए –

(i) $\dfrac{(x^2-3x+1)^3}{(x-1)(x+2)} \le 0$ (ii) $\dfrac{2x^2-3x-459}{x^2+1} > 1$

(iii) $\dfrac{x^2-5x+12}{x^2-4x+5} > 3$ (iv) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} > 0$

Ans. (i) $\left(-2,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ (ii) $(-\infty,-20)\cup(23,\infty)$ (iii) $\left(\dfrac{1}{2},3\right)$ (iv) $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$

Sol. (i)
+ ND – 0 + ND –0 +
$-2 \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad 1 \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$x \in \left(-2,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

(ii) $2x^2 - 3x - 459 > x^2 + 1$

$\Rightarrow \quad x^2 - 3x - 460 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, -20) \cup (23, \infty)$

(iii) $x^2 - 5x + 12 > 3(x^2 - 4x + 5)$ (since चूंकि $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 > 0$)

$\Rightarrow \quad 2x^2 - 7x + 3 < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 6x - x + 3 < 0$

$\Rightarrow \quad 2x(x-3) - 1(x-3) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$

(iv) $x^4 + x^2 + 1$ is always positive सदैव धनात्मक

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{(x-5)(x+1)} > 0 \quad \Rightarrow$

D-4. Solve the following rational in equalities
परिमेय असमिकाओं को हल कीजिए –

(i) $x^4 - 5x^2 + 4 \le 0$
(ii) $x^4 - 2x^2 - 63 \le 0$
(iii) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3) \ge 5$

Ans. (i) $x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$ (ii) $x \in [-3, 3]$ (iii) $x \in (-\infty, -4] \cup [-2, -1) \cup [1,\infty)$

Sol. (i) $(x^2-1)(x^2-4) \le 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x+1)(x+2)(x-2) \le 0$

+ – + – +
–2 –1 1 2

$x \in [-2, -1] \cup [1, 2]$

(ii) $(x^2-9)(x^2+7) \le 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+3) \le 0$

$x \in [-3, 3]$

D-5. If $1 < \frac{x-1}{x+2} < 7$ then find the range of

यदि $1 < \frac{x-1}{x+2} < 7$ तब निम्न के परिसर ज्ञात कीजिए –

(i) x (ii) x^2 (iii) $\frac{1}{x}$

Ans. (i) $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$ (ii) $\left(\frac{25}{4},\infty\right)$ (iii) $\left(-\frac{2}{5},0\right)$

Sol. $\frac{x-1-7x-14}{x+2} < 0$ and और $\frac{x-1-x-2}{x+2} > 0$

$x \in (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-2,\infty)$ and और $x \in (-\infty, -2) \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$

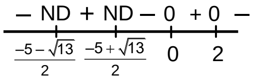
(i) $x \in (-\infty, -\frac{5}{2})$ (ii) $x^2 \in (\frac{25}{4}, \infty)$ (iii) $\frac{1}{x} \in \left(-\frac{2}{5},0\right)$

D-6. Find the number of positive integral value of x satisfying the inequality $\frac{(3^x-5^x)(x-2)}{(x^2+5x+2)} \geq 0$

असमिका $\frac{(3^x-5^x)(x-2)}{(x^2+5x+2)} \geq 0$ को संतुष्ट करने वाले x के धनात्मक पूर्णांक मानों की संख्या है –

Ans. **2**

Sol.



Number of positive integer satisfying the inequality equal to 2 (which are 1 and 2)
असमिका को संतुष्ट करने वाले धनात्मक पूर्णांक की संख्या 2 है। (जो कि 1 और 2) है।

Section (E) : Logarithmic Properties
खण्ड (E) : लघुगणकीय गुणधर्म

E-1. Find the value of
मान ज्ञात कीजिए

(i) $\log_{10}5.\log_{10}20 + (\log_{10}2)^2$

(ii) $5^{\log_{\sqrt{5}} 2} + 9^{\log_3 7} - 8^{\log_2 5}$

(iii) $\sqrt[3]{5^{\frac{1}{\log_7 5}} + \frac{1}{(-\log_{10} 0.1)}}$

(iv) $\log_{0.75} \log_2 \sqrt{\sqrt{\frac{1}{0.125}}}$

(v) $\left(\frac{1}{49}\right)^{1+\log_7 2} + 5^{-\log_{1/5} 7}$

(vi) $7^{\log_3 5} + 3^{\log_5 7} - 5^{\log_3 7} - 7^{\log_5 3}$

Ans. (i) 1 (ii) –72 (iii) 2 (iv) 1 (v) $7+\frac{1}{196}$ (vi) 0

Sol. (i) $\log_{10}(\log_{10}5 + 2\log_{10}2) + (\log_{10}2)^2 = (\log_{10}5 + \log_{10}2)^2 = (\log_{10}10)^2 = 1$

(ii) $2^{\log_{\sqrt{5}} 5} + 7^{\log_3 9} + -5^{\log_2 8}$ = = $2^2 + 7^2 - 5^3 = 53 - 125 = -72$

(iii) $\left(5^{\log_5 7} + \dfrac{1}{\left(\log_{10}\left(\dfrac{1}{0.1}\right)\right)}\right)^{1/3} = (7 + 1)^{1/3} = 2$

(iv) $\log_{3/4} \log_2 \left((8)^{1/2}\right)^{1/2} = \log_{3/4} \log_2 (2)^{3/4} = 1$

(v) $\left(\dfrac{1}{49}\right)^{1+\log_7^2} = (7^{-2})^{\log_7 7 + \log_7 2} = (7^{-2})^{\log_7^{14}} = 7^{\log_7 (14)^{-2}} = \dfrac{1}{196}$ & $5^{-\log_{1/5} 7} = 5^{\log_5 7} = 7$

$\therefore\ 7 + \dfrac{1}{196}$

(vi) $7^{\log_3 5} + 3^{\log_5 7} - 5^{\log_3 7} - 7^{\log_5 3} = 7^{\log_3 5} + 3^{\log_5 7} - 7^{\log_3 5} - 3^{\log_5 7}$

{using property $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ } {गुणधर्म $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ का प्रयोग करनें पर}= 0

E-2. Which of the following numbers are positive/negative
निम्न में से कौनसी संख्या धनात्मक है और कौनसी ऋणात्मक है?

(i) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{2}$ (ii) $\log_{1/7}(2)$ (iii) $\log_{1/3}(1/5)$ (iv) $\log_3(4)$

(v) $\log_7(2.11)$ (vi) $\log_3 (\sqrt{7} - 2)$ (vii) $\log_4 \left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$ (viii) $\log_3 \left(\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{3}}{3}\right)$

(ix) $\log_{10} (\log_{10} 9)$

Ans. (i) +ve (ii) – ve (iii) +ve (iv) +ve
(v) +ve (vi) – ve (vii) +ve (viii) – ve (ix) – ve

Sol. (i) $\sqrt{2} > 1$ & $\sqrt{3} > 1$, hence positive
(ii) Number & base on oppsite sides of unity, hence negative
(iii) Number & base on same sides of unity, hence positive
(iv) Number & base on same sides of unity, hence positive
(v) Number & base on same sides of unity, hence positive
(vi) Number & base on oppsite sides of unity, hence negative
(vii) Number & base on same sides of unity, hence positive
(viii) Number & base on oppsite sides of unity, hence negative
(ix) Number & base on oppsite sides of unity, hence negative

Hindi. (i) $\sqrt{2} > 1$ & $\sqrt{3} > 1$, अतः धनात्मक
(ii) संख्या और आधार इकाई के विपरीत ओर स्थित है अतः ऋणात्मक है।
(iii) संख्या और आधार इकाई के एक ही ओर स्थित है अतः धनात्मक है।
(iv) संख्या और आधार इकाई के एक ही ओर स्थित है अतः धनात्मक है।
(v) संख्या और आधार इकाई के एक ही ओर स्थित है अतः धनात्मक है।
(vi) संख्या और आधार इकाई के विपरीत ओर स्थित है अतः ऋणात्मक है।
(vii) संख्या और आधार इकाई के एक ही ओर स्थित है अतः धनात्मक है।
(viii) संख्या और आधार इकाई के विपरीत ओर स्थित है अतः ऋणात्मक है।
(ix) संख्या और आधार इकाई के विपरीत ओर स्थित है अतः ऋणात्मक है।

E-3. Let $\log_{10}2 = a$ and $\log_{10}3 = b$ then determine the following logarithms in terms of a and b.
माना $\log_{10}2 = a$ तथा $\log_{10}3 = b$ तब निम्न लघुगणक का मान a व b के पदों में ज्ञात कीजिए।

(i) $\log_{10}\left(\sin^2 \dfrac{\pi}{3}\right)$ **Ans.** b – 2a

(ii) $\log_{100}4 + 2 \log_{100}27$ **Ans.** a + 3b

(iii) $\log_2 9 + \log_3 8$ **Ans.** $\dfrac{2b^2+3a^2}{ab}$

(iv) $\log_{\sqrt{45}} 144$ **Ans.** $\dfrac{4(2a+b)}{1-a+2b}$

Sol. (i) $\log_{10}\left(\dfrac{3}{4}\right) = \log_{10}3 - 2\log_{10}2 = b - 2a$

(ii) $\log_{10}2 + 3\log_{10}3 = a + 3b$

(iii) $\dfrac{2\log_{10}3}{\log_{10}2} + \dfrac{3\log_{10}2}{\log_{10}3} = \dfrac{2b}{a} + \dfrac{3a}{b} = \dfrac{2b^2+a^2}{ab}$

(iv) $2\left(\dfrac{4\log_{10}2 + 2\log_{10}3}{2\log_{10}3 + \log_{10}5}\right) = \dfrac{4(2a+b)}{1-a+2b}$

E-4. (i) Let n = 75600, then find the value of $\dfrac{4}{\log_2 n} + \dfrac{3}{\log_3 n} + \dfrac{2}{\log_5 n} + \dfrac{1}{\log_7 n}$

माना n = 75600 तब $\dfrac{4}{\log_2 n} + \dfrac{3}{\log_3 n} + \dfrac{2}{\log_5 n} + \dfrac{1}{\log_7 n}$ ज्ञात कीजिए।

(ii) If $\log_2(\log_3(\log_4(x))) = 0$ and $\log_3(\log_4(\log_2(y))) = 0$ and $\log_4(\log_2(\log_3(z))) = 0$ then find the sum of x, y and z is

यदि If $\log_2(\log_3(\log_4(x))) = 0$ और $\log_3(\log_4(\log_2(y))) = 0$ और $\log_4(\log_2(\log_3(z))) = 0$ तब x, y तथा z के योगफल को ज्ञात कीजिए।

(iii) Suppose n be an integer greater than 1. let $a_n = \dfrac{1}{\log_n 2002}$. Suppose $b = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ and $c = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$. Then find the value of (b – c)

माना कि n, 1 से बड़ा पूर्णांक है। माना $a_n = \dfrac{1}{\log_n 2002}$ और $b = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ तथा $c = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$ तब (b – c) का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. (i) 1 (ii) 89 (iii) –1

Sol. (i) n = 75600

Now अब $4\log_n 2 + 3\log_n 3 + 2\log_n 5 + \log_n 7 = \log_n(2^4.3^3.5^2.7^1) = \log_n(75600) = 1$

(ii) $x = 4^{3^2} = 4^3 = 64$

$y = (2^4)^1 = 16, \quad z = 3^{2^1} = 9$

sum योगफल = 64 + 16 + 9 = 89

(iii) $a_n = \dfrac{1}{\log_n 2002} = \log_{2002} n$

$b = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \log_{2002} 2 + \log_{2002} 3 + \log_{2002} 4 + \log_{2002} 5 = \log_{2002}(2.3.4.5) = \log_{2002} 120$

$c = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = \log_{2002}10 + \log_{2002}11 + \log_{2002}12 + \log_{2002}13 + \log_{2002}14$

$= \log_{2002}(10.11.12.13.14) = \log_{2002}240240$

Now अब $b - c = \log_{2002}120 - \log_{2002}240240 = \log_{2002}10 + =$

E-5. Show that the number $\log_2 7$ is an irrational number.

दर्शाइये कि संख्या $\log_2 7$ अपरिमेय है।

Sol. Let $\log_2 7 = \dfrac{p}{q}$, where p & q are coprime numbers.

$\Rightarrow$ $7 = 2^{p/q}$ $\Rightarrow$ $7^q = 2^p$

$\because$ 7^q is an odd number

while 2^p is an even number

$\therefore$ this is not possible & $\log_2 7$ is an irrational number.

Hindi माना $\log_2 7 = \frac{p}{q}$, जहाँ p और q सह–अभाज्य संख्याएँ है।

$\Rightarrow$ $7 = 2^{p/q}$ $\Rightarrow$ $7^q = 2^p$

$\because$ 7^q एक विषम संख्या है।

जबकि 2^p एक सम संख्या है। अतः यह सम्भव नहीं है। अतः $\log_2 7$ एक अपरिमेय संख्या है।

E-6. If $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$, show that $a^a . b^b . c^c = 1$.

यदि $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $a^a . b^b . c^c = 1$.

Sol. $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = k$ (let)

$\log_a = k(b - c)$ $\Rightarrow$ $a \log a = ka (b - c)$

$\log_b = k(c - a)$ $\Rightarrow$ $b \log b = kb (c - a)$

$\log_c = k(a - b)$ $\Rightarrow$ $c \log c = kc (a - b)$

$\therefore$ $\log a^a + \log b^b + \log c^c = k (ab - ac + bc - ab + ca - bc)$

$\Rightarrow$ $\log a^a b^b c^c = 0$ $\Rightarrow$ $a^a b^b c^c = 1$

Hindi $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$ k (माना)

$\Rightarrow$ $\log_a = k(b - c)$ $\Rightarrow$ $a \log a = ka (b - c)$

एवं $\log_b = k(c - a)$ $\Rightarrow$ $b \log b = kb (c - a)$

एवं $\log_c = k(a - b)$ $\Rightarrow$ $c \log c = kc (a - b)$

$\therefore$ $\log a^a + \log b^b + \log c^c = k (ab - ac + bc - ab + ca - bc)$

$\Rightarrow$ $\log a^a b^b c^c = 0$ $\Rightarrow$ $a^a b^b c^c = 1$

Section (F) : Logarithmic Equation
Section (F) : लघुगणकीय समीकरण

F-1. Solve the following equations :

समीकरणों को हल कीजिए

(i) $\log_x(4x - 3) = 2$ Ans. 3

(ii) $\log_2(\log_3(x^2 - 1)) = 0$ Ans. ± 2

(iii) $4^{\log_2 x} - 2x - 3 = 0$ Ans. 3

(iv) $\log_4 (\log_2 x) + \log_2 (\log_4 x) = 2$. **Ans.** 16

(v) $\log_3 \left(\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x\right) = 2x$. **Ans.** {1/3}

(vi) $2\log_4 (4 - x) = 4 - \log_2 (- 2 - x)$. **Ans.** {– 4}

(vii) $x^{(\log_{\sqrt{x}} 2x)} = 4$ **Ans.** no root कोई मूल नहीं

(viii) $x^{0.5\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = 3^{\log_9 4}$.

Ans. (2)

Sol. (i) $\log_x(4x - 3) = 2 \Rightarrow 4x - 3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

But $4x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{4}$ and $x > 0, x \neq 1$

Ans. $x = 3$

(ii) $\log_2\log_3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \log_3(x^2 - 1) = 2^0 = 1 \Rightarrow (x^2 - 1) = 3^1$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

both are satisfied

(iii) $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \quad x = 3, x = -1$

but $x > 0$

Ans. $x = 3$

(iv) $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2[\frac{1}{2}\log_2 x] = 2$

$\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2(\log_2 x) = 2 \Rightarrow \frac{3}{2}\log_2(\log_2 x) = 3$

$\log_2(\log_2 x) = 2 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$

(v) $\log_3\left(\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x\right) = 2x \Rightarrow \log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x = 3^{2x} \Rightarrow \log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x = 9^x$

$\Rightarrow \log_9 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 9^{-1/2} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

(vi) $2\log_4(4 - x) = 4 - \log_2(-2 - x)$

(i) $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$

(ii) $-2 - x > 0 \Rightarrow x < -2$

(iii) $\log_2(4 - x) = 4 - \log_2(-2 - x) \Rightarrow \log_2(4 - x)(-2 - x) = 4$

$\Rightarrow (4 - x)(-2 - x) = 16 \Rightarrow -8 - 2x + x^2 = 16$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 4) = 0$

$x = 6$ (not possible) , $x = -4$. $x = 6$ जो सम्भव नहीं है अतः $x = -4$.

(viii) $x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)} = 3\log_{3^2}(2^2) = 2$

$\Rightarrow (\sqrt{x})^{\log_{\sqrt{x}}(x^2 - x)} = 2$

$\Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 2, x = -1$ but लेकिन $x > 0$ and तथा $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) > 0$

$x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Hindi. (i) $\log_x(4x - 3) = 2 \Rightarrow 4x - 3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

लेकिन $4x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{4}$ और $x > 0, x \neq 1$

Ans. $x = 3$

(ii) $\log_2\log_3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \log_3(x^2 - 1) = 2^0 = 1 \Rightarrow (x^2 - 1) = 3^1$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

समीकरण सन्तुष्ट है

(iii) $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \quad x = 3, x = -1$

लेकिन $x > 0$

Ans. $x = 3$

(iv) $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2[\frac{1}{2}\log_2 x] = 2$

$\frac{1}{2}\log_2(\log_2 x) + \log_2(\log_2 x) = 2 \Rightarrow \frac{3}{2}\log_2(\log_2 x) = 3$

$\log_2(\log_2 x) = 2 \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16$

(v) $\log_3\left(\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x\right) = 2x$ $\Rightarrow$ $\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x = 3^{2x}$ $\Rightarrow$ $\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x = 9^x$

$\Rightarrow$ $\log_9 x = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x = 9^{-1/2}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{3}$

(vi) $2 \log_4 (4 - x) = 4 - \log_2 (-2 - x)$

(i) $4 - x > 0$ $\Rightarrow$ $x < 4$

(ii) $-2 - x > 0$ $\Rightarrow$ $x < -2$

(iii) $\log_2 (4 - x) = 4 - \log_2 (-2 - x)$ $\Rightarrow$ $\log_2 (4 - x)(-2 - x) = 4$

$\Rightarrow$ $(4 - x)(-2 - x) = 16$ $\Rightarrow$ $-8 - 2x + x^2 = 16$

$\Rightarrow$ $x^2 - 2x - 24 = 0$ $\Rightarrow$ $(x - 6)(x + 4) = 0$

$x = 6$ (not possible संभव नहीं) , $x = -4$. $x = 6$ जो सम्भव नहीं है अतः $x = -4$.

(viii) $x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2 - x)} = 3\log_{3^2}(2^2) = 2$

$\Rightarrow$ $(\sqrt{x})^{\log_{\sqrt{x}}}(x^2 - x) = 2$

$\Rightarrow$ $x^2 - x = 2$ $\Rightarrow$ $x^2 - x - 2 = 0$ $\Rightarrow$ $(x - 2)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 2, x = -1$ but लेकिन $x > 0$ and तथा $x^2 - x = 0$ $\Rightarrow$ $x(x - 1) > 0$

$x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

F-2. (i) Find the product of roots of the equation
$(\log_3 x)^2 - 2(\log_3 x) - 5 = 0$ **Ans.** 9

(ii) Find sum of roots of the equation $4^x - 7.2^x + 6 = 0$ **Ans.** $\log_2 6$

(iii) Solve for x : $x^{\log_{10} x + 2} = 10^{\log_{10} x + 2}$ **Ans.** 10 or $\frac{1}{100}$

(iv)✍ Solve for x : $x^{\frac{\log_{10} x + 5}{3}} = 10^{5 + \log_{10} x}$ **Ans.** $\{10^{-5}, 10^3\}$

(i) समीकरण $(\log_3 x)^2 - 2(\log_3 x) - 5 = 0$ के मूलों का गुणनफल ज्ञात कीजिए। **Ans.** 9

(ii) समीकरण $4^x - 7.2^x + 6 = 0$ के मूलों का योग ज्ञात कीजिए। **Ans.** $\log_2 6$

(iii) x के लिए हल कीजिए $x^{\log_{10} x + 2} = 10^{\log_{10} x + 2}$ **Ans.** 10 या $\frac{1}{100}$

(iv) समीकरण $x^{\frac{\log_{10} x + 5}{3}} = 10^{5 + \log_{10} x}$ को हल कीजिए। **Ans.** $\{10^{-5}, 10^3\}$

Sol. (i) $t^2 - 2t - 5 = 0$

sum of roots मूलों का योग = 2

$\log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 2$ $\Rightarrow$ $\log_3(x_1 x_2) = 2$ $\Rightarrow$ $x_1 x_2 = 3^2 = 9$

(ii) $(2^x)^2 - 7(2^x) + 6 = 0$

$\Rightarrow$ $t^2 - 7t + 6 = 0$

$t = 1, t = 6$

Roots मूल $2^x = 1, 2^x = 6$

$\Rightarrow$ $x = 1, x = \log_2 6$

Product of roots मूलों का गणन = $(1)(\log_2 6) = \log_2 6$

(iii) $x^{\log_{10} x + 2} = 10^{\log_{10} x + 2}$

$x = 10$ or $\log_{10} x + 2 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

(iv) $x^{\frac{\log x + 5}{3}} = 10^{5 + \log x}$; $\left(\frac{\log x + 5}{3}\right) \log x = 5 + \log x$

$\log^2 x + 2 \log x - 15 = 0$; $(\log x + 5)(\log x - 3) = 0$

$\log x = -5, \log x = 3$; $x = 10^{-5}$, $x = 10^3$.

Section (G) : Logarithmic inequalities
खण्ड (G) : लघुगणकीय असमिकाऐं

G-1. Solve the following inequalities
निम्न असमिकाओं को हल कीजिए।

(i) $\log_{\frac{5}{8}}\left(2x^2 - x - \frac{3}{8}\right) \geq 1$ **Ans.** $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right]$

(ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$ **Ans.** $(1, 2) \cup (3, 4)$

(iii) $\log_7 \frac{2x-6}{2x-1} > 0$ **Ans.** $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

(iv) $\log_{1/4}(2 - x) > \log_{1/4}\left(\frac{2}{x+1}\right)$ **Ans.** $(-1, 0) \cup (1, 2)$

(v) $\log_{1/3}(2^{x+2} - 4^x) \geq -2$ **Ans.** $(-\infty, 2)$

Sol. (i) $\log_{\frac{5}{8}}\left(2x^2 - x - \frac{3}{8}\right) \geq 1 \Rightarrow 2x^2 - x - \frac{3}{8} \leq \frac{5}{8} \Rightarrow 16x^2 - 8x - 8 \leq 0$

$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 \leq 0 \Rightarrow (2x + 1)(x - 1) \leq 0$

$x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ ......(i)

also तथा $2x^2 - x - \frac{3}{8} > 0 \Rightarrow 16x^2 - 8x - 3 > 0$

$\Rightarrow 16x^2 - 12x + 4x - 3 > 0 \Rightarrow (4x - 3)(4x + 1) > 0$

$\Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right]$ ....(ii)

(i) $\cap$ (ii) $\Rightarrow x \in \left[\frac{-1}{2}, -\frac{-1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right]$

(ii) $x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 2) > 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ ......(i)

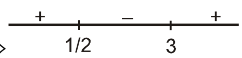
and $x^2 - 5x + 6 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 4) < 0 \Rightarrow x \in (1, 4)$ .....(ii)

(i) $\cap$ (ii) $\Rightarrow x \in (1, 2) \cup (3, 4)$

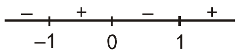
(iii) $\log_7\left(\frac{2x-6}{2x-1}\right) > 0 \Rightarrow \frac{2x-6}{2x-1} > 7^0 \Rightarrow \frac{2x-6}{2x-1} - 1 > 0$

$\Rightarrow \frac{-5}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x-1} < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

and और $\frac{2x-6}{2x-1} > 0 \Rightarrow$ 

Ans. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

(iv) $2 - x < \dfrac{2}{x+1} \Rightarrow \dfrac{2}{x+1} + x - 2 > 0 \Rightarrow \dfrac{2 + x^2 - x - 2}{x+1} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{x(x-1)}{x+1} > 0 \Rightarrow$ 

and और $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$ and और $\dfrac{2}{x+1} > 0 \Rightarrow x > -1$

Ans. $(-1, 0) \cup (1, 2)$

(v) $2^2.2^x - 4^x \le \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow 4.2^x - (2^x)^2 \le 9$

Let माना $2^x = t \Rightarrow t^2 - 4t + 9 \ge 0$ always true सदैव सत्य है।

$2^{x+2} - 4^x > 0 \Rightarrow 2^x.(4 - 2^x) > 0$

$4 - 2^x > 0 \Rightarrow 2^x < 2^x$

$\Rightarrow x < 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2)$

(vi) $\log_x(4x - 3) \ge 2$

Caseस्थिति-**I** $0 < x < 1$ and और $4x - 3 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{4}$

then तब $4x - 3 \le x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \ge 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 1) \ge 0$

$\Rightarrow x \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$

Case स्थिति-**II** $x > 1, 4x - 3 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{3}{4}$

then तब $4x - 3 \ge x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \le 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x - 1) \le 0 \Rightarrow x \in (1,3]$

Ans. $x \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right) \cup (1, 3]$

G-2. Find the number of integers satisfying $\log_{1/5} \dfrac{4x+6}{x} \ge 0$

असमिका $\log_{1/5} \dfrac{4x+6}{x} \ge 0$ को सन्तुष्ट करने वाले पूर्णांकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. 1

Sol. $\log_{\frac{1}{5}} \dfrac{4x+6}{x} \ge 0$

$\dfrac{4x+6}{x} > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (0, \infty)$ ....(i)

& और $\dfrac{4x+6}{x} \le 1 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x} \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup (0, \infty)$ ....(ii)

(i) ∩ (ii) से $\Rightarrow x \in \left[-2, \dfrac{-3}{2}\right)$

G-3 Solve the inequalities (असमिकाओं को हल कीजिए)

(i) $(\log_{.5}x)^2 + \log_{.5}x - 2 \le 0$

(ii) $15^x - 25.3^x - 9.5^x + 225 \ge 0$

(iii) $8.\left(\dfrac{3^{x-2}}{3^x - 2^x}\right) > 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

Ans. (i) $\left[\frac{1}{2},4\right]$ (ii) R (iii) $(0, \log_{\frac{3}{2}} 3)$

Sol. (i) $-2 \le \log_{.5}x \le 1$

$x \in [(0.5)^1, (0.5)^{-2}] \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2},4\right]$

(ii) $15^x - 25\ 3^x - 9.5^x + 225 > 0$

$(5^x - 25)(3^x - 9) \ge 0$

$\Rightarrow x \in R$

(iii) $8\left(\frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x}\right) > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x \Rightarrow \frac{8}{9}\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}\right) > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Let माना $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ then तब

$\frac{8t}{9(t-1)} > \frac{t+1}{t} \Rightarrow \frac{8t^2 - 9(t^2-1)}{9t(t-1)} > 0$

$\Rightarrow \frac{(t-3)(t+3)}{t(t-1)} < 0 \Rightarrow t \in (-3,0) \cup (1, 3)$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \in (1,3) \Rightarrow x \in (0, \log_{\frac{3}{2}} 3)$

G-4. Solve the following inequalities :
निम्नलिखित असमिकाओं को हल कीजिए –

(i) $\log_x(4x - 3) \ge 2$ **Ans.** $\left(\frac{3}{4},1\right) \cup (1, 3]$

(ii) $\log_{(3x^2+1)} 2 < \frac{1}{2}$ **Ans.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(iii) $\log_{x^2}(2+x) < 1$ **Ans.** $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$

Sol. (i) $\log_x(4x - 3) \ge 2$

Case स्थिति-I : When जब $x > 1 \Rightarrow 4x - 3 \ge x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \le 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x - 3) \le 0$

$x \in (1, 3]$ ....(i)

Caseस्थिति-II : When जब $0 < x < 1 \Rightarrow 4x - 3 \le x^2$

and और $4x - 3 > 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) \ge 0$

$x > 3/4$ $x \in \left(\frac{3}{4},1\right)$ ......(ii)

Ans. (i) ∪ (ii)

(ii) $\log_{3x^2+1} 2 < \frac{1}{2}$

$3x^2 + 1 > 1 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \in R - \{0\}$

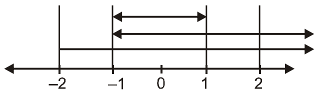
$2 < (3x^2 + 1)^{1/2} \Rightarrow 3x^2 + 1 > 4 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) > 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(iii) $\log_{x^2}(x + 2) < 1$ $x + 2 > 0$ $x > -2$

Case -I : when $0 < x^2 < 1$ $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

then $x + 2 > x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0$

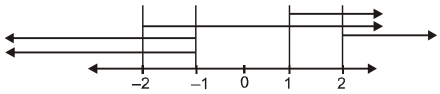


$x \in (-1, 1) - \{0\}$

Case -II : $x^2 > 1$ $|x| > 1$

$x + 2 < x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0$

$x \in (-2, -1) \cup (2, \infty)$



Hence, $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$

Hindi. **(i)** $\log_{3x^2+1} 2 < \frac{1}{2}$

$3x^2 + 1 > 1 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \in R - \{0\}$

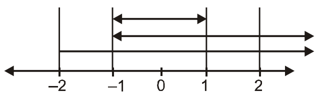
$2 < (3x^2 + 1)^{1/2} \Rightarrow 3x^2 + 1 > 4 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) > 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

(ii) $\log_{x^2} (x + 2) < 1$ $x + 2 > 0$ $x > -2$

स्थिति-**I :** यदि $0 < x^2 < 1$ $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

तब $x + 2 > x^2$ $x^2 - x - 2 < 0$

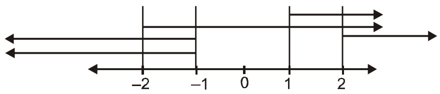


$x \in (-1, 1) - \{0\}$

स्थिति-**II :** यदि $x^2 > 1$ $|x| > 1$

तब $x + 2 < x^2$ $x^2 - x - 2 > 0$

$x \in (-2, -1) \cup (2, \infty)$



अतः, $x \in (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

Section (A) : Representation of sets, Types of sets, subset and power set
खण्ड (A) : समुच्चयों का निरूपण, समुच्चयों के प्रकार, उपसमुच्चय तथा घात समुच्चय

A-1. The set of intelligent students in a class is-

(A) a null set (B) a singleton set

(C) a finite set (D*) not a well defined collection

एक कक्षा के बुद्धिमान छात्रों का समुच्चय है –

(A) रिक्त समुच्चय (B) एकल समुच्चय (C) परिमित समुच्चय (D) एक सुपरिभाषित संग्रह नहीं है।

Sol. Since, intelligency is not defined for students in a class so set of intelligent students in a class is not well defined collection.

Hindi चूँकि कक्षा में छात्रों की बुद्धिमता को परिभाषित नहीं किया जा सकता है। अतः कक्षा के बुद्धिमान छात्रों का समुच्चय सुपरिभाषित संग्रह नहीं है।

A-2. The set $A = \{x : x \in R, x^2 = 16 \text{ and } 2x = 6\}$ is

(A*) Null set (B) Singleton set

(C) Infinite set (D) not a well defined collection

समुच्चय $A = \{x : x \in R, x^2 = 16$ तथा $2x = 6\}$ है–

(A*) रिक्त समुच्चय (B) एकल समुच्चय (C) अपरिमित समुच्चय (D) एक सुपरिभाषित संग्रह नहीं है।

Sol. $x^2 = 16 \Rightarrow \quad x = \pm 4$

$2x = 6 \quad x = 3$

No common value of x (x का कोई उभयनिष्ट मान नहीं है)

A-3. If $A = \{x : -3 < x < 3, x \in Z\}$ then the number of subsets of A is –

यदि समुच्चय $A = \{x : -3 < x < 3, x \in Z\}$ है तब A के उपसमुच्चयों की संख्या होगी –

(A) 120 (B) 30 (C) 31 (D*) 32

Sol. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

No. of subsets $= 2^n = 2^5 = 32$

Hindi. उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^n = 2^5 = 32$

A-4. Which of the following are true ?

निम्न में से कौनसा सत्य है ?

(A*) $[3, 7] \subset (2, 10)$ (B) $(0, \infty) \subset (4, \infty)$ (C) $(5, 7] \subset [5, 7)$ (D) $[2, 7] \subset (2.9, 8)$

Sol. Obvious स्पष्टतया

A-5. The number of subsets of the power set of set $A = \{7, 10, 11\}$ is

समुच्चय $A = \{7, 10, 11\}$ के घात समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या है–

(A) 32 (B) 16 (C) 64 (D*) 256

Sol. $P(A) = \{\phi, \{7\}, \{10\}, \{11\}, \{7, 10\}, \{7, 11\}, \{10, 11\}, \{7, 10, 11\}\}$

Number of subsets उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^n = 2^8 = 256$

A-6. Which of the folowing sets is an infinite set ?

निम्न में से कौनसा समुच्चय अपरिमित समुच्चय है ?

(A) Set of divisors of 24 (24 के भाजकों का समुच्चय)

(B*) Set of all real number which lie between 1 and 2 (1 से 2 के मध्य सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय)

(C) Set of all humman beings living in India. (भारत में रहने वाले सभी मनुष्यों का समुच्चय)

(D) Set of all three digit natural numbers (तीन अंक की सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय)

Sol. Between any two real numbers there lie infinitely many real numbers.

दो वास्तविक संख्याओं के मध्य अन्नत वास्तविक संख्याऐं होती है।

Section (B) : Operations on sets, Law of Algebra of sets
खण्ड (B) : समुच्चयों की संक्रियायें, बीजगणित के नियम

B-1. Let $A = \{x : x \in R, -1 < x < 1\}$, $B = \{x : x \in R, x \le 0$ or $x \ge 2\}$ and $A \cup B = R - D$, then the set D is

(A) $\{x : 1 < x \le 2\}$ (B*) $\{x : 1 \le x < 2\}$ (C) $\{x : 1 \le x \le 2\}$ (D) $\{x : 1 < x < 2\}$

माना $A = \{x : x \in R, -1 < x < 1\}$, $B = \{x : x \in R, x \le 0$ या $x \ge 2\}$ तथा $A \cup B = R - D$, तब समुच्चय D है–

(A) $\{x : 1 < x \le 2\}$ (B*) $\{x : 1 \le x < 2\}$ (C) $\{x : 1 \le x \le 2\}$ (D) $\{x : 1 < x < 2\}$

Sol. $A = [x : x \in R, -1 < x < 1]$

$B = [x : x \in R : x \le 0$ or $x \ge 2]$

$\therefore \quad A \cup B = R - D$, where $D = [x : x \in R, 1 \le x < 2]$

Hindi. $A = [x : x \in R, -1 < x < 1]$

$B = [x : x \in R : x \le 0$ या $x \ge 2]$ $\therefore$ $A \cup B = R - D$, जहाँ $D = [x : x \in R, 1 \le x < 2]$

B-2. If $A = \{2, 3, 4, 8, 10\}$, $B = \{3, 4, 5, 10, 12\}$, $C = \{4, 5, 6, 12, 14\}$ then $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ is equal to

यदि $A = \{2, 3, 4, 8, 10\}$, $B = \{3, 4, 5, 10, 12\}$, $C = \{4, 5, 6, 12, 14\}$ तब $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ बराबर है–

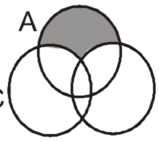
(A*) $\{3, 4, 10\}$ (B) $\{2, 8, 10\}$ (C) $\{4, 5, 6\}$ (D) $\{3, 5, 14\}$

Sol. $A \cap B = \{3, 4, 10\}$

$A \cap C = \{4\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 4, 10\}$

B-3. The shaded region in the given figure is
दिये गये चित्र में छांयाकित भाग दर्शाता है –



(A) $A \cap (B \cup C)$ (B) $A \cup (B \cap C)$ (C) $A \cap (B - C)$ (D*) $A - (B \cup C)$

Sol. Obviously (स्वतः) $A - (B \cup C)$

B-4. Let $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{6, 7\}$, then $A \cap B'$ is
माना $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{6, 7\}$, तब $A \cap B'$ है–
(A) B' (B*) A (C) A' (D) B

Sol. $B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10\}$
$A \cap B' = \{1,2,5\} = A$

B-5. If $A = \{x : x = 4n + 1, n \le 5, n \in N\}$ and $B = \{3n : n \le 8, n \in N\}$, then $A - (A - B)$ is :
यदि $A = \{x : x = 4n + 1, n \le 5, n \in N\}$ तथा $B = \{3n : n \le 8, n \in N\}$, तब $A - (A - B)$ बराबर है :

(A*) $\{9, 21\}$ (B) $\{9, 12\}$ (C) $\{6, 12\}$ (D) $\{6, 21\}$

Sol. $A = \{5, 9, 13, 17, 21\}$ and तथा $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$
$A - B = \{5, 13, 17\}$
$A - (A - B) = \{9, 21\}$

B-6. $A \cup B = A \cap B$ iff :
$A \cup B = A \cap B$ यदि और केवल यदि
(A) $A \subset B$ (B*) $A = B$ (C) $A \supset B$ (D) $A \not\subset B$

Sol. Let $A \cup B = A \cap B$
Now, $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ $(\because A \subset A \cup B)$
$\Rightarrow x \in A \cap B$ $(\because A \cup B = A \cap B)$
$\Rightarrow x \in B$
Similarly, $x \in B$ implies $x \in A$ $\therefore A = B$
Conversly, let $A = B$
$\therefore A \cup B = A \cup A = A = A \cap A = A \cap B$
$\therefore A \cup B = A \cap B$

Hindi. माना $A \cup B = A \cap B$
अब $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ $(\because A \subset A \cup B)$
$\Rightarrow x \in A \cap B$ $(\because A \cup B = A \cap B)$
$\Rightarrow x \in B$
इसी प्रकार, $x \in B \Rightarrow x \in A$ $\therefore A = B$
विलोमतः, माना $A = B$
$\therefore A \cup B = A \cup A = A = A \cap A = A \cap B$
$\therefore A \cup B = A \cap B$

B-7. Consider the following statements :
1. $N \cup (B \cap Z) = (N \cup B) \cap Z$ for any subset B of R, where N is the set of positive integers, Z is the set of integers, R is the set of real numbers.
2. Let $A = \{n \in N : 1 \le n \le 24$, n is a multiple of $3\}$. There exists no subset B of N such that the number of elemets in A is equal to the number of elements in B.

Which of the above statements is/are correct ?
(A*) 1 only (B) 2 only (C) Both 1 and 2 (D) Neither 1 nor 2

माना कि कथन :

1. R के किसी उपसमुच्चय B के लिए $N \cup (B \cap Z) = (N \cup B) \cap Z$ जहाँ N धनात्मक पूर्णाकों का समुच्चय है और Z पूर्णाको का समुच्चय है, R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।
2. माना $A = \{n \in N : 1 \le n \le 24$, n,3 का गुणज है।$\}$ N का इस प्रकार का कोई उपसमुच्चय B नहीं है जिसमें A में अवयवों की संख्या, B में अवयवों की संख्या के बराबर है।

तब निम्न में से कौनसा कथन सही है?

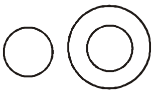
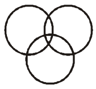
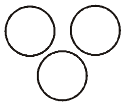
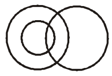
(A*) केवल 1 (B) केवल 2 (C) 1 और 2 दोनों (D) न तो 1 और न ही 2

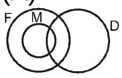
Sol. 1. $(N \cup B) \cap Z = (N \cap Z) \cup (B \cap Z) = N \cup (B \cap Z)$

2. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$

B-8. Which of the following venn-diagrams best represents the sets of females, mothers and doctors ?

निम्न में कौनसा वेन–आरेख समुच्चय महिलाएं, माताएं, चिकित्सकों के लिए सबसे अधिक उपयुक्त है–

(A)  (B)  (C)  (D*) 

Sol. 

$M \equiv$ Mother माता ; $F \equiv$ Female महिला ; D = Doctor डॉक्टर

Section (C) : Cardinal number Problems

C-1. Let A and B be two sets. Then

(A) $n(A \cup B) \le n(A \cap B)$ (B*) $n(A \cap B) \le n(A \cup B)$ (C) $n(A \cap B) = n(A \cup B)$ (D) can't be say

माना A और B दो समुच्चय हैं, तब

(A) $n(A \cup B) \le n(A \cap B)$ (B*) $n(A \cap B) \le n(A \cup B)$ (C) $n(A \cap B) = n(A \cup B)$ (D) कुछ कहा नहीं जा सकता

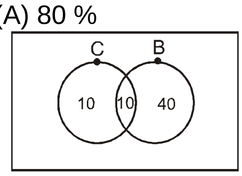
Sol. (i) $A \cup B \geq A \cup B$ (ii) $A \cap B \leq A \cup B$ (iii) $A \cap B = A \cup B$ not always (सदैव नहीं)

C-2. In a city 20 percent of the population travels by car, 50 percent travels by bus and 10 percent travels by both car and bus. Then persons travelling by car or bus is

(A) 80 percent (B) 40 percent (C*) 60 percent (D) 70 percent

किसी नगर की जनसंख्या के 20 % कार से यात्रा करते हैं, 50 % बस से तथा 10 % कार और बस दोनों से यात्रा करतें हैं, तो कार अथवा बस से यात्रा करने वाले व्यक्तियों की संख्या होगी–

(A) 80 % (B) 40 % (C*) 60 % (D) 70 %

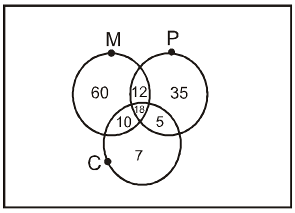
Sol. 

P = 10 + 10 + 40 = 60 %

C-3. A class has 175 students. The following data shows the number of students obtaining one or more subjects : Mathematics 100, Physics 70, Chemistry 40, Mathematics and Physics 30, Mathematics and Chemistry 28, Physics and Chemistry 23, Mathematics & Physics & Chemistry 18. How many students have offered Mathematics alone ?

एक कक्षा में 175 विद्यार्थी हैं। निम्न आँकड़े यह प्रदर्शित करतें हैं कि कितने विद्यार्थी एक या एक से अधिक विषय का चयन करते है : गणित 100, भौतिकी 70, रसायन 40, गणित और भौतिक 30, गणित और रसायन 28, भौतिक और रसायन 23, गणित और भौतिक और रसायन 18, तब कितने विद्यार्थियों के पास केवल गणित विषय है–

(A) 35 (B) 48 (C*) 60 (D) 22



Sol. Number of students offered maths alone = 60

n (M) = 100

n(P) = 70

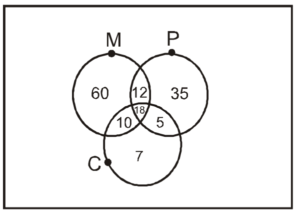
n (C) = 40

n (M $\cap$ P) = 30

n (M $\cap$ P) = 28

n (P $\cap$ C) = 23

n (M $\cap$ P $\cap$ C) = 18



Hindi. केवल गणित लेने वाले छात्रों की संख्या = 60

n (M) = 100

n(P) = 70

n (C) = 40

n (M $\cap$ P) = 30

n (M $\cap$ P) = 28

n (P $\cap$ C) = 23

n (M $\cap$ P $\cap$ C) = 18

C-4. 31 candidates appeared for an examination, 15 candidates passed in English, 15 candidates passed in Hindi, 20 candidates passed in Sanskrit. 3 candidates passed only in English. 4. candidates passed only in Hindi, 7 candidates passed only in Sanskrit. 2 candidates passed in all the three subjects How many candidates passed only in two subjects ?

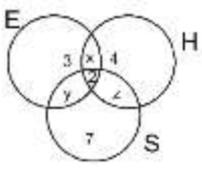
एक परीक्षा में 31 विद्यार्थी बैठते है जिनमें 15 विद्यार्थी अंग्रेजी में, 15 विद्यार्थी हिन्दी में, 20 विद्यार्थी संस्कृत में, 3 विद्यार्थी केवल अंग्रेजी में पास होते है, 4 विद्यार्थी केवल हिन्दी में पास होते है, 7 विद्यार्थी केवल संस्कृत में पास होते है और 2 विद्यार्थी सभी तीन विषय में पास हो जाते है तब केवल दो विषय कितने विद्यार्थी पास होते है?

(A) 17 (B*) 15

(C) 22 (D) 14

Sol. x+ y = 10 ; x + z = 9 ; y + z = 11 $\Rightarrow$ x + y + z = 15

x = 4, y = 6, z = 5



Section (D) : Rational Inequalities
खण्ड (D) : परिमेय असमिकाऐं

D-1. The complete solution set of the inequality $\dfrac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} \geq 0$ is:

(A) $(-\infty, -5) \cup (1, 2) \cup (6, \infty) \cup \{0\}$ (B*) $(-\infty, -5) \cup [1, 2] \cup (6, \infty) \cup \{0\}$

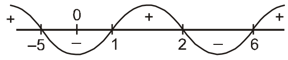
(C) $(-\infty, -5] \cup [1, 2] \cup [6, \infty) \cup \{0\}$ (D) $(-\infty, -5] \cup [1, 2] \cup [6, \infty)$

असमिका $\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^2 - x - 30} \geq 0$ के सम्पूर्ण हलों का समुच्चय है –

(A) $(-\infty, -5) \cup (1, 2) \cup (6, \infty) \cup \{0\}$ (B) $(-\infty, -5) \cup [1, 2] \cup (6, \infty) \cup \{0\}$

(C) $(-\infty, -5] \cup [1, 2] \cup [6, \infty) \cup \{0\}$ (D) $(-\infty, -5] \cup [1, 2] \cup [6, \infty)$

Sol. $\frac{x^2(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - x - 30} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-1)(x-2)}{(x+5)(x-6)} \geq 0$



$x \neq -5, 6$

$x \in (-\infty, -5) \cup [1, 2] \cup (6, \infty) \cup \{0\}$

D-2. Number of positive integral values of x satisfying the inequality

$$\frac{(x-4)^{2017}.\ (x+8)^{2016}\ (x+1)}{x^{2016}(x-2)^3\ .\ (x+3)^5\ .\ (x-6)\ (x+9)^{2018}} \leq 0 \text{ is}$$

असमिका $\frac{(x-4)^{2017}.\ (x+8)^{2016}\ (x+1)}{x^{2016}(x-2)^3\ .\ (x+3)^5\ .\ (x-6)\ (x+9)^{2018}} \leq 0$ को संतुष्ट करने वाले x के धनात्मक पूर्णांक मानों की संख्या है–

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D*) 3

Sol. $x \in (-\infty, -9) \cup (-9, -3) \cup [-1, 0) \cup (0, 2)\ [4, 6)$

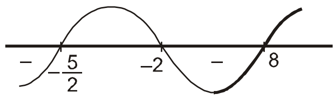
so +ve integral solution इसलिए धनात्मक पूर्णांक हल

D-3. The number of prime numbers satisfying the inequality $\frac{x^2 - 1}{2x + 5} < 3$ is

असमिका $\frac{x^2 - 1}{2x + 5} < 3$ को सन्तुष्ट करने वाले अभाज्य संख्याओं की संख्या है–

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D*) 4

Sol. $\frac{x^2 - 1}{2x + 5} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1 - 6x - 15}{2x + 5} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 6x - 16}{2x + 5} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 8x + 2x - 16}{\left(x + \frac{5}{2}\right)} < 0$



$\Rightarrow \frac{x(x-8) + 2(x-8)}{x + \frac{5}{2}} < 0 \Rightarrow \frac{(x-8)(x-2)}{x + \frac{5}{2}} < 0$

$x \in (-\infty, -5/2) \cup (-2, 8)$

D-4. The complete solution of $\frac{x^2 - 1}{x + 3} \geq 0$ & $x^2 - 5x + 2 \leq 0$ is :

$\frac{x^2 - 1}{x + 3} \geq 0$ और $x^2 - 5x + 2 \leq 0$ का सम्पूर्ण हल है–

(A) $x \in \left[\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right]$ (B*) $x \in \left[1, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right]$

(C) $x \in (-3, -1]$ (D) $x \in (-3, -1] \cup [1, \infty)$

Sol. $\frac{x^2 - 1}{x + 3} \geq 0$ $x^2 - 5x + 2 \leq 0.$

$\Rightarrow x \in (-3, -1] \cup [1, \infty)$ $\Rightarrow x \in \left[\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right]$

so the common solution is $x \in \left[1, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$

इसलिए उभयनिष्ठ हल $x \in \left[1, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$ है

D-5 The solution of the inequality $2x - 1 \le x^2 + 3 \le x - 1$ is
असमिका $2x - 1 \le x^2 + 3 \le x - 1$ का हल है–
(A) $x \in R$ (B) $[-2, 2]$ (C) $(-2, 2)$ (D*) $x \in \phi$

Sol. $2x - 1 \le x^2 + 3 \le x - 1$
$x^2 + 3 \le x - 1 \Rightarrow$ $x^2 - x + 4 \le 0$ which is not true for $x \in R$
$x^2 - x + 4 \le 0$ जो कि सत्य नहीं है सभी $x \in R$ के लिए।.

D-6. The number of the integral solutions of $x^2 + 9 < (x + 3)^2 < 8x + 25$ is :
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D*) 5
$x^2 + 9 < (x + 3)^2 < 8x + 25$ के पूर्णांक हलों की संख्या है–
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D*) 5

Sol. $x^2 + 9 < (x + 3)^2 < 8x + 25$
$\Rightarrow \quad (x + 3)^2 > x^2 + 9 \Rightarrow \quad x > 0$ ....(i)
and और $(x + 3)^2 < 8x + 25$
$\Rightarrow \quad x^2 - 2x - 16 < 0$
$\Rightarrow \quad x \in (1 - \sqrt{17}, 1 + \sqrt{17})$ .....(ii)
(i) $\cap$ (ii) से $\Rightarrow x \in (0, 1 + \sqrt{17})$
Noumber of integers = 5 अतः पूर्णांक हलों की संख्या = 5

D-7. Number of non-negative integral values of x satisfying the inequality $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{x^3+1} \ge 0$ is
असमिका $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{x^3+1} \ge 0$ को सन्तुष्ट करने वाले x के अऋणात्मक पूर्णांक मानों की संख्या है
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D*) 3

Sol. $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{x^3+1} \ge 0$

$\frac{2x + 2 - x^2 + x - 1}{x^3 + 1} - \frac{(2x-1)}{x^2+1} \ge 0 = \frac{3x + 1 - x^2 - 2x + 1}{x^3+1} \ge 0 = \frac{-x^2 + x + 2}{x^3 + 1} \ge 0 \;= \frac{x^2 - x - 2}{x^3+1} \le 0$

$= \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \le 0 \quad \Rightarrow \frac{(x-2)}{(x^2 - x + 1)} \le 0$ $(-\infty, -1) \cup (-1, 2]$ (– | + about 2)

required value of x, {0, 1, 2} x के अभीष्ट मान {0, 1, 2}

Section (E) : Logarithmic Properties
खण्ड (E) : लघुगणकीय गुणधर्म

E-1. If $a^4 \cdot b^5 = 1$ then the value of $\log_a(a^5b^4)$ equals
यदि $a^4 \cdot b^5 = 1$ है, तो $\log_a(a^5b^4)$ का मान बराबर है–
(A*) 9/5 (B) 4 (C) 5 (D) 8/5

Sol. $a^4 b^5 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ log w.r.t. a $\rightarrow 4 + 5\log_a b = \log_a 1 \Rightarrow \quad \log_a b = -\frac{4}{5}$

Now अब $\log_a(a^5b^4) = 5 + 4\log_a b = 5 + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{25 - 16}{5} = \frac{9}{5}$

E-2. $\frac{1}{1+\log_b a+\log_b c}+\frac{1}{1+\log_c a+\log_c b}+\frac{1}{1+\log_a b+\log_a c}$ has the value equal to

$\frac{1}{1+\log_b a+\log_b c}+\frac{1}{1+\log_c a+\log_c b}+\frac{1}{1+\log_a b+\log_a c}$ का मान है –

(A) abc (B) $\frac{1}{abc}$ (C) 0 (D*) 1

Sol. $\frac{1}{1+\log_b a+\log_b c}+\frac{1}{1+\log_c a+\log_c b}+\frac{1}{1+\log_a b+\log_a c}=\frac{1}{\log_b abc}+\frac{1}{\log_c abc}+\frac{1}{\log_a abc}$

$= \log_{abc} b + \log_{abc} c + \log_{abc} a = \log_{abc} abc = 1$

E-3. $\frac{1}{\log_{\sqrt{bc}} abc}+\frac{1}{\log_{\sqrt{ca}} abc}+\frac{1}{\log_{\sqrt{ab}} abc}$ has the value equal to :

$\frac{1}{\log_{\sqrt{bc}} abc}+\frac{1}{\log_{\sqrt{ca}} abc}+\frac{1}{\log_{\sqrt{ab}} abc}$ का मान है –

(A) 1/2 (B*) 1 (C) 2 (D) 4

Sol. $\frac{1}{\log_{\sqrt{bc}} abc}+\frac{1}{\log_{\sqrt{ca}} abc}+\frac{1}{\log_{\sqrt{ab}} abc} = \log_{abc}\sqrt{bc}+\log_{abc}\sqrt{ca}+\log_{abc}\sqrt{ab} = \log_{abc} abc = 1$

E-4. $(\log_2 10) . (\log_2 80) – (\log_2 5) . (\log_2 160)$ is equal to :

$(\log_2 10) . (\log_2 80) – (\log_2 5) . (\log_2 160)$ का मान है –

(A) $\log_2 5$ (B) $\log_2 20$ (C) $\log_2 10$ (D*) $\log_2 16$

E-5. The ratio $\frac{2^{\log_{2^{1/4}} a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a}{7^{4\log_{49} a}-a-1}$ simplifies to :

अनुपात $\frac{2^{\log_{2^{1/4}} a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a}{7^{4\log_{49} a}-a-1}$ के सरलीकरण से प्राप्त होता है –

(A) $a^2 – a – 1$ (B) $a^2 + a – 1$ (C) $a^2 – a + 1$ (D*) $a^2 + a + 1$

Sol. $y = \frac{2^{\log_{2^{1/4}} a}-3^{\log_{27}(a^2+1)^3}-2a}{7^{4\log_{49} a}-a-1}$ $\Rightarrow$ $2^{\log_{2^{1/4}} a} = 2^{4\log_2 a} = a^4$

$3^{\log_{27}(a^2+1)^3} = 3^{\log_3(a^2+1)} = a^2 + 1$ $\Rightarrow$ $7^{4\log_{49} a} = 7^{2\log_7 a} = a^2$

$\therefore$ $y = \frac{a^4-(a^2+1+2a)}{a^2-a-1} = \frac{a^4-(a+1)^2}{a^2-a-1} = a^2 + a + 1$

E-6. If $\log_a(ab) = x$, then $\log_b(ab)$ is equal to

यदि $\log_a(ab) = x$ तब $\log_b(ab)$ बराबर है

(A) $\frac{1}{x}$ (B) $\frac{x}{1+x}$ (C) $\frac{x}{1-x}$ (D*) $\frac{x}{x-1}$

Sol. $\log_a(ab) = x$ $\Rightarrow$ $1 + \log_a b = x$ $\Rightarrow$ $\log_a b = x – 1$ $\Rightarrow$ $\log_b a = \frac{1}{x-1}$

Now अब $\log_b(ab) = 1 + \log_b a = 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

E-7. $10^{\log_p(\log_q(\log_r x))} = 1$ and $\log_q(\log_r(\log_p x)) = 0$ then 'p' equals

$10^{\log_p(\log_q(\log_r x))} = 1$ तथा $\log_q(\log_r(\log_p x)) = 0$ तब 'p' बराबर है

(A*) $r^{q/r}$ (B) rq (C) 1 (D) $r^{r/q}$

Sol. $\log_p(\log_q(\log_r x)) = 0 \Rightarrow \log_q(\log_r x) = b \Rightarrow \log_r x = q \Rightarrow x = r^q$ ......(i)

and तथा $\log_q(\log_r(\log_p x)) = 0$

$\Rightarrow \log_r(\log_p x) = 1 \Rightarrow \log_p x = r \Rightarrow x = p^r$ ......(ii)

from (i) and (ii) $p^r = r^q$

(i) तथा (ii) $p^r = r^q$

$\Rightarrow p = r^{q/r}$

E-8. Which one of the following is the smallest?
निम्न में से कौनसा सबसे छोटा है ?

(A*) $\log_{10}\pi$ (B) $\sqrt{\log_{10}\pi^2}$ (C) $\left(\frac{1}{\log_{10}\pi}\right)^3$ (D) $\left(\frac{1}{\log_{10}\sqrt{\pi}}\right)$

Sol. $\log_{10}\pi$ is quantity lie between 0 to 1.

Hindi. $\log_{10}\pi$,0 से 1 के मध्य स्थित है।

E-9. $\log_{10}(\log_2 3) + \log_{10}(\log_3 4) + \log_{10}(\log_4 5) + \ldots\ldots + \log_{10}(\log_{1023}1024)$ simplifies to

(A) a composite (B) a prime number
(C) rational which is not an integer (D*) an integer

$\log_{10}(\log_2 3) + \log_{10}(\log_3 4) + \log_{10}(\log_4 5) + \ldots\ldots + \log_{10}(\log_{1023}1024)$ सरल करने पर

(A) एक संयुक्त संख्या (B) एक अभाज्य संख्या
(C) परिमेय जो कि पूर्णाक नहीं है। (D*) एक पूर्णाक

Sol. $\log_{10}(\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots\ldots \log_{1023}{}^{1024}) = \log_{10}(\log_2 1024) = \log_{10}(\log_2 2^{10}) = \log_{10}(10) = 1$

Section (F) : Logarithmic Equation
Section (F) : लघुगणकीय समीकरण

F-1. The sum of all the solutions to the equation $2\log_{10} x - \log_{10}(2x - 75) = 2$

समीकरण $2\log_{10} x - \log_{10}(2x - 75) = 2$ के सभी हलों का योगफल है।

(A) 30 (B) 350 (C) 75 (D*) 200

Sol. $2\log_{10}x - \log_{10}(2x - 75) = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2x-75} = 10^2 = 100$

$\Rightarrow x^2 - 200x + 7500 = 0 \Rightarrow x = 50, x = 150$

sum योगफल = 200

F-2. If the solution of the equation $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$ are α and β ($\alpha < \beta$). Then the value of $1/\alpha\beta$ is :

यदि समीकरण $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$ के हल α और β है ($\alpha < \beta$). तब $1/\alpha\beta$ का मान है :

(A) 5 (B) 25 (C*) 125 (D) 625

Sol. Take $\log_5 x = t$

on solving we get x = 1/625 & x = 5.

$\log_5 x = t$ लेने पर

हल करने पर x = 1/625 & x = 5.

F-3. The positive integral solution of the equation $\log_x\sqrt{5} + \log_x 5x = \frac{9}{4} + \log_x^2\sqrt{5}$ is :

(A) Composite number (B*) Prime number
(C) Even number (D) Divisible by 3

समीकरण $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = \frac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}$ के धनात्मक पूर्णांक हल है–

(A) संयुक्त संख्या (B*) अभाज्य संख्या
(C) सम संख्या (D) 3 से विभाजित

Sol. Take $\log_x 5 = t$

on solving we get $x = \sqrt[3]{5}$ and 5.

$\log_x 5 = t$ लेने पर

हल करने पर $x = \sqrt[3]{5}$ और 5

F-4. The expression $\log_p \underbrace{\log_p \sqrt[p]{\sqrt[p]{\sqrt[p]{\ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt[p]{p}}}}}_{\text{n radical sign}}$, where $p \geq 2$, $p \in N$; $n \in N$ when simplified is

(A*) independent of p (B) independent of p and of n
(C) dependent on both p and n (D) positive

व्यंजक $\log_p \underbrace{\log_p \sqrt[p]{\sqrt[p]{\sqrt[p]{\ldots\ldots\ldots\ldots \sqrt[p]{p}}}}}_{\text{n radical sign}}$, जहाँ $p \geq 2$, $p \in N$; $n \in N$ को सरलीकृत करने पर प्राप्त व्यंजक होगा–

(A*) p से स्वतंत्र (B) p एवं n से स्वतंत्र
(C) p एवं n दोनों पर निर्भर (D) धनात्मक

Sol. $\log_p \log_p (p)^{\frac{1}{p^n}} = \log_p \left(\frac{1}{p}\right)^n = -\log_p p^n = -n$ independent of p. (p से स्वतंत्र)

F-5. If $\log_x \log_{18}\left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right) = \frac{1}{3}$. Then the value of 1000 x is equal to

यदि $\log_x \log_{18}\left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right) = \frac{1}{3}$ हो, तो 1000 x का मान है –

(A) 8 (B) 1/8 (C) 1/125 (D*) 125

Sol. $\log_x \log_{18} \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\log_x \log_{18}\left(\sqrt{18}\right) = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\log_x \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ $x^{1/3} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ 1000 x = 125.

F-6. Number of real solutions of the equation $\sqrt{\log_{10}(-x)} = \log_{10}\sqrt{x^2}$ is :

(A) zero (B) exactly 1 (C*) exactly 2 (D) 4

समीकरण $\sqrt{\log_{10}(-x)} = \log_{10}\sqrt{x^2}$ के वास्तविक हलों की संख्या है –

(A) शून्य (B) केवल एक (C) केवल दो (D) 4

Sol. $\sqrt{\log_{10}(-x)} = \log_{10}|x|$ $\Rightarrow$ $-x > 0$ $\Rightarrow$ $x < 0$

$\therefore$ $|x| = -x$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\log_{10}(-x)} = \log_{10}(-x)$

$\log_{10}(-x) \left(\log_{10}(-x) - 1\right) = 0$

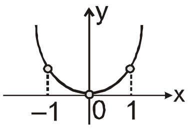
$\log_{10}(-x) = 0$ $\qquad$ $\log_{10}(-x) = 1$

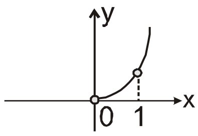
$\Rightarrow$ $-x = 1$ $\qquad$ $-x = 10$

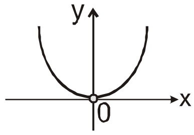
$x = -1$ $\qquad$ $x = -10$.

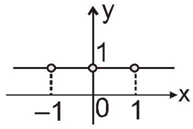
F-7. The correct graph of $y = x^{\log_x x^2}$ is

$y = x^{\log_x x^2}$ का सही आलेख है –

(A) 

(B*) 

(C) 

(D) 

Sol. Clearly Domain is $x > 0$ and $x \neq 1$
स्पष्टतया प्रान्त $x > 0$ तथा $x \neq 1$

Section (G) : Logarithmic inequalities
खण्ड (G) : लघुगणकीय असमिकाऐं

G-1. The solution set of the inequality $\log_{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}(x^2 - 3x + 2) \geq 2$ is

असमिका $\log_{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}(x^2 - 3x + 2) \geq 2$ का हल समुच्चय है–

(A) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ (B) $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ (C*) $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right]$ (D) $(1, 2)$

Sol. $\log_{\sin\frac{\pi}{3}}(x^2 - 3x + 2) \geq 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 8 \leq 3$

$\Rightarrow 4x^2 - 12x + 5 \leq 0 \Rightarrow (2x - 5)(2x - 1) \leq 0 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$

But domain परन्तु प्रान्त $x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

Hence अतः $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right]$

G-2. If $\log_{0.3}(x - 1) < \log_{0.09}(x - 1)$, then x lies in the interval

(A*) $(2, \infty)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(-2, -1)$ (D) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

यदि $\log_{0.3}(x - 1) < \log_{0.09}(x - 1)$ हो, तो x जिस अन्तराल में स्थित है, वह हैं–

(A) $(2, \infty)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(-2, -1)$ (D) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

Sol. $\log_{0.3}(x - 1) < \log_{0.09}(x - 1)$; $\log_{0.3}(x - 1) < \frac{\log_{0.3}(x - 1)}{2}$

$\Rightarrow \log_{0.3}(x - 1) < 0 \Rightarrow x - 1 > 1 \Rightarrow x > 2$

G-3. Solution set of the inequality $2 - \log_2(x^2 + 3x) \geq 0$ is :
असमिका $2 - \log_2(x^2 + 3x) \geq 0$ के हलों का समुच्चय हैं –
(A) $[-4, 1]$ (B*) $[-4, -3) \cup (0, 1]$
(C) $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ (D) $(-\infty, -4) \cup [1, \infty)$

Sol. $2 - \log_2(x^2 + 3x) \geq 0 \Rightarrow \log_2(x^2 + 3x) \leq 2$
$x^2 + 3x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$ .....(i)
and और $x^2 + 3x \leq 4$
$\Rightarrow (x - 1)(x + 4) \leq 0 \Rightarrow x \in [-4, 1]$ .....(ii)
(i) $\cap$ (ii) से $\Rightarrow x \in [-4, -3) \cup (0, 1]$

G-4. If $\log_{0.5} \log_5 (x^2 - 4) > \log_{0.5} 1$, then 'x' lies in the interval
यदि $\log_{0.5} \log_5 (x^2 - 4) > \log_{0.5} 1$ हो, तो x जिस अन्तराल में स्थित है, वह हैं –
(A*) $(-3, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 3)$ (B) $(-3, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 2)$

(C) $(\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ (D) ϕ

Sol. $\log_{0.5} \log_5 (x^2 - 4) > \log_{0.5} 1$; $\log_{0.5} \log_5 (x^2 - 4) > 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 4 > 0$ $\Rightarrow$ $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ ....(i)

एवं $\log_5 (x^2 - 4) > 0$ $\Rightarrow$ $x^2 - 5 > 0$

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$ ....(ii)

एवं $\log_5 (x^2 - 4) < 1$

$\Rightarrow$ $x^2 - 9 < 0$ $\Rightarrow$ $x \in (-3, 3)$ ....(iii)

(i) $\cap$ (ii) $\cap$ (iii) से $\Rightarrow$ $x \in (-3, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 3)$

G-5. The set of all solutions of the inequality $(1/2)^{x^2-2x} < 1/4$ contains the set

असमिका $(1/2)^{x^2-2x} < 1/4$ के सभी हलों का समुच्चय निम्न में से जिस समुच्चय को समाहित करता हैं, वह है–

(A) $(-\infty, 0)$ (B) $(-\infty, 1)$ (C) $(1, \infty)$ (D*) $(3, \infty)$

Sol. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2x > 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, \infty)$

G-6. The number of positive integers not satisfying the inequality $\log_2(4^x - 2.2^x + 17) > 5$.

असमिका $\log_2(4^x - 2.2^x + 17) > 5$ को सन्तुष्ट नहीं करने वाले धनात्मक पूर्णाको की संख्या ज्ञात कीजिए।

(A*) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

Sol. $\log_2 (4^x - 2.2^x + 17) > 5$

$4^x - 2.2^x + 17 > 0$

$(2^x)^2 - 2.2^x + 17 > 0$ $\Rightarrow$ $\forall x \in R$ and और $4^x - 2.2^x + 17 > 32$

$\Rightarrow$ $(2^x)^2 - 2.2^x - 15 > 0$ $\Rightarrow$ $(2^x + 3)(2^x - 5) > 0$ $\Rightarrow$ $2^x < -3$ or या $2^x > 5$

$\Rightarrow$ $x \in \phi$ or या $x > \log_2 5$ $\Rightarrow$ $x \in (\log_2 5, \infty)$

G-7. The set of all the solutions of the inequality $\log_{1-x}(x - 2) \geq -1$ is

असमिका $\log_{1-x}(x - 2) \geq -1$ के सभी हलों का समुच्चय है–

(A) $(-\infty, 0)$ (B) $(2, \infty)$ (C) $(-\infty, 1)$ (D*) ϕ

Sol. $\log_{1-x}(x - 2) \geq -1$

$x > 2$ ....(1)

(i) When $0 < 1 - x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$. So no common range comes out.

(ii) When $1 - x > 1 \Rightarrow x < 0$ but $x > 2$

here, also no common range comes out. , hence no solution. Finally, no solution

Hindi. $\log_{1-x}(x - 2) \geq -1$

$x > 2$ ....(1)

(i) यदि $0 < 1 - x < 1$ हो, तो $\Rightarrow 0 < x < 1$ अतः कोई उभयनिष्ठ अन्तराल नहीं होगा।

(ii) यदि $1 - x > 1$ हो, तो $x < 0$ लेकिन $x > 2$ अतः यहाँ भी कोई उभयनिष्ठ अन्तराल प्राप्त नहीं होता अतः कोई हल नहीं होगा।

PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. Match the set P in column one with its super set Q in column II

स्तम्भ I के समुच्चय P को स्तम्भ II में उसके अधिसमुच्चय Q से सुमेलित कीजिए –

Column (स्तम्भ) – I (set P)		**Column** (स्तम्भ) – II (set Q)	
(A)	$[3^{2n} - 8n - 1 : n \in N\}$	(p)	$\{49 (n - 1) : n \in N\}$
(B)	$\{2^{3n} - 1 : n \in N\}$	(q)	$\{64 (n - 1) : n \in N\}$
(C)	$\{3^{2n} - 1 : n \in N\}$	(r)	$\{7n : n \in N\}$

(D) $\{2^{3n} - 7n - 1 : n \in N\}$ (s) $\{8n : n \in N\}$

Ans. (A) $\rightarrow$ (q), (B) $\rightarrow$ (r), (C) $\rightarrow$ (s), (D) $\rightarrow$ (p)

Sol. (A) The set $\{3^{2n} - 8n - 1 : n \in N\}$ contains 0 and every element of this set is a multiple of 64.
(B) $2^{3n} - 1$ is always divisible by 7.
(C) $3^{2n} - 1$ is always divisible by 8.
(D) $2^{2n} - 7n - 1$ is always divisible by 49 and $2^{3n} - 7n - 1 = 0$ for n = 1.

Hindi (A) समुच्चय $\{3^{2n} - 8n - 1 : n \in N\}$ अवयव 0 और इस समुच्चय का प्रत्येक अवयव 64 का गुणन है।
(B) $2^{3n} - 1$ सदैव 7 से विभाजित है।
(C) $3^{2n} - 1$ सदैव 8 से विभाजित है।
(D) $2^{2n} - 7n - 1$ सदैव 49 से विभाजित है तथा $2^{3n} - 7n - 1 = 0$, n = 1 के लिए

2. **Column-I** **Column-II**

(A) If $a = 3\left(\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)$, $b = \sqrt{(42)(30)+36}$ then the value of $\log_a b$ is equal to — (p) -1

(B) If $a = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$, then the value of $\log_a b$ is equal to — (q) 1

(C) If $a = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ then the value of $\log_a b$ is equal to — (r) 2

(D) If $a = \sqrt{7+\sqrt{7^2-1}}$, $b = \sqrt{7-\sqrt{7^2-1}}$, then the value of $\log_a b$ is equal to — (s) $\frac{3}{2}$

(E) The number of zeroes at the end of the product of first 20 prime numbers, is — (t) None

(F) The number of solutions of $2^{2x} - 3^{2y} = 55$, in which x and y are integers, is

Column-I **Column-II**

(A) यदि $a = 3\left(\sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)$, $b = \sqrt{(42)(30)+36}$ तब $\log_a b$ का मान बराबर है — (p) -1

(B) यदि $a = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$, हो, तो $\log_a b$ का मान बराबर है — (q) 1

(C) यदि $a = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ हो, तो $\log_a b$ का मान बराबर है — (r) 2

(D) यदि $a = \sqrt{7+\sqrt{7^2-1}}$, $b = \sqrt{7-\sqrt{7^2-1}}$, हो, तो $\log_a b$ का मान बराबर है — (s) $\frac{3}{2}$

(E) प्रथम 20 अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के अन्त में शून्यों की संख्या है — (t) कोई नहीं

(F) समीकरण $2^{2x} - 3^{2y} = 55$ के हलों की संख्या है जिसमें x और y पूर्णांक है

Ans. (A) $\rightarrow$ r, (B) $\rightarrow$ s, (C) $\rightarrow$ p, (D) $\rightarrow$ p, (E) $\rightarrow$ q, (F) $\rightarrow$ q

Sol. (A) $a = 3\ ((\sqrt{7} + 1) - (\sqrt{7} - 1))$
$a = 3(2) = 6$
$b = \sqrt{(42)(30)+36} = 6\sqrt{7\times5+1} = 6 \times 6 = 36$
$\log_a b = \log_6 36 = 2$

(B) $a = (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1) = 2$
$b = (3+\sqrt{2}) - (3-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
$\log_a b = \log_2(2\sqrt{2}) = \log_2(2^{3/2}) = 3/2$

(C) $a\sqrt{3+2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)$ = , b = $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$\log_a b = \log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}+1)^{-1} = -1$

(D) a = $\sqrt{7+\sqrt{7^2-1}} = \sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{7+4\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})$

b = $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{-1}$ Now $\log_a b = \log_{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{-1}$

$\log_{2+\sqrt{3}} = -1$

(E) First 20 prime numbers are 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
zero are formed by multiple of 2 and 5 that is one times 2 and one times 5 there fore one zero at end of product of first 20 prime numbers.

(F) $2^{2x} - 3^{2y} = 55$, x, y $\in$ I $\Rightarrow$ $4^x - 9^y = 55$
only x = 3, y = 1 satisfy
There fore number of solution is one set (x, y) g.e. (3, 1)

Hindi: (A) a = 3 $((\sqrt{7}+1)-(\sqrt{7}-1))$
a = 3(2) = 6

b = $\sqrt{(42)(30)+36}$ = $6\sqrt{7\times5+1}$ = 6 × 6 = 36

$\log_a b = \log_6 36 = 2$

(B) a = $(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1) = 2$

b = $(3+\sqrt{2})-(3-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

$\log_a b = \log_2(2\sqrt{2}) = \log_2(2^{3/2}) = 3/2$

(C) $a\sqrt{3+2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)$ = , b = $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$\log_a b = \log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}+1)^{-1} = -1$

(D) a = $\sqrt{7+\sqrt{7^2-1}} = \sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{7+4\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})$

b = $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})^{-1}$ Now $\log_a b = \log_{2+\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{-1}$

$\log_{2+\sqrt{3}} = -1$

(E) प्रथम 20 अभाज्य संख्याऐं हैं 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
2 और 5 के गुणन से शून्य बनता है।इसलिए प्रथम 20 अभाज्य संख्याओं के गुणन अन्त में एक शून्य होगा क्योकिं एक बार 2 और एक बार 5 आता है।

(F) $2^{2x} - 3^{2y} = 55$, x, y $\in$ I $\Rightarrow$ $4^x - 9^y = 55$
केवल x = 3, y = 1 संतुष्ठ करता है
इसलिए हलों की संख्या का एक समुच्चय है (x, y) अर्थात(3, 1)

3. **Column-I** **Column-II**

	Column-I		Column-II
(A)	When the repeating decimal 0.363636............ is written as a rational fraction in the simplest form, the sum of the numerator and denominator is	(p)	4
(B)	Given positive integer p, q and r with p = $3^q \cdot 2^r$ and 100 < p < 1000. The difference between maximum and minimum values of (q + r), is	(q)	0
(C)	If $\log_8 a + \log_8 b = (\log_8 a)(\log_8 b)$ and $\log_a b = 3$, then the value of 'a' is	(r)	15
(D)	If P = $3^{\sqrt{\log_3 2}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}}$ then value of P is	(s)	16

	स्तम्भ-I		स्तम्भ-II
(A)	जब पुनरावृत्ति दशमलव संख्या 0.363636............को परिमेय भिन्न के सरलतम रूप मे लिखा जा सकता है तब अंश व हर का योग है–	(p)	4
(B)	दिये गये धनात्मक पूर्णांक p, q और r इस प्रकार हैं कि $p = 3^q \cdot 2^r$ और $100 < p < 1000$. (q + r), के अधिकतम और न्यूनतम मान का अन्तर है–	(q)	0
(C)	यदि $\log_8 a + \log_8 b = (\log_8 a)(\log_8 b)$ और $\log_a b = 3$ तब 'a' का मान है	(r)	15
(D)	यदि $P = 3^{\sqrt{\log_3 2}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}}$ हो तो P का मान है	(s)	16

Ans. (A) → r, (B) → p, (C) → s, (D) → q

Sol. (A) $x = 0.363636......$

$100x = 36.363636.......$

$99x = 36$

$\Rightarrow \quad x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

sum of numerator and denominator is 4 + 11 = 15

अंश व हर का योगफल 4 + 11 = 15 है।

(C) $\frac{1}{\log_a 8} + \frac{1}{\log_b 8} = \frac{1}{\log_a 8.\log_b 8}$

$\Rightarrow \quad \log_b 8 + \log_a 8 = 1$ (given दिया गया है $\log_a b = 3$)

$\Rightarrow \quad 4\log_b 8 = 1 \quad \log_b 8 = 3\log_8 a$ ....(1)

$\Rightarrow \quad \log_b 8 = 1/4 \quad \log_a 8 = 3\log_b 8$

$8 = b^{1/4} \quad \Rightarrow \quad b = 8^4$

$\log_8(8^4) = 3\log_8 a$

$\Rightarrow \quad \log_8 a = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad a = (8^{4/3}) = (2^3) = 2^4 = 16$

4.

	Column-I		Column-II
(A)	Anti logarithm of $(0.\bar{6})$ to the base 27 has the value equal to	(p)	5
(B)	Characteristic of the logarithm of 2008 to the base 2 is		
(C)	The value of b satisfying the equation, $\log_e 2 \cdot \log_b 625 = \log_{10} 16 \cdot \log_e 10$ is	(q)	7
(D)	Number of naughts after decimal before a significant figure	(r)	9
	comes in the number $\left(\frac{5}{6}\right)^{100}$, is (Given $\log_{10} 2 = 0.3010$ and $\log_{10} 3 = 0.4771$)	(s)	10

	स्तम्भ-I		स्तम्भ-II
(A)	$(0.\bar{6})$ का आधार 27 पर प्रति लघुगणक का मान है।	(p)	5
(B)	आधार 2 पर 2008 के लघुगणक का पूर्णांश है		
(C)	समीकरण $\log_e 2 \cdot \log_b 625 = \log_{10} 16 \cdot \log_e 10$ को सन्तुष्ट करने वाले b के मान है	(q)	7

(D) संख्या $\left(\frac{5}{6}\right)^{100}$ में दशमलव के बाद सार्थक अंक से पहले शून्यों की संख्या है (r) 9

(s) 10

(दिया गया है $\log_{10}2 = 0.3010$ तथा $\log_{10}3 = 0.4771$)

Ans. (A) → r, (B) → s, (C) → p, (D) → q

Sol. (A) $\text{Antilog}_{27}(0.\bar{6}) = x \Rightarrow 0.\bar{6} = \log_{27}x = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x = (27)^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 9$

(B) Since चूंकि $2^{10} < 2008 < 2^{11} \Rightarrow \log_2(2^{10}) < \log_2 2008 < \log_2(2^{11})$

$\Rightarrow 10 < \log_2 2008 < 11$

पूर्णाश 10 है।

(C) $\log_e 2.\log_b 625 = \log_{10}16.\log_e 10 \Rightarrow \log_e 2.\log_b 265 = \log_e 16 \Rightarrow \log_b 625 = \log_2 16 = 4$

$\Rightarrow 625 = b^4$

(D) $x = \left(\frac{5}{6}\right)^{100} = \left(\frac{10}{2\times 6}\right)^{100} = \left(\frac{10}{2^2.3}\right)^{100}$

$\log_{10}x = 10(1 - 2\log 2 - \log 3) = 100(1 - 2(0.3010) - 0.4771) = 100(-0.0791) = 7.91$

Exercise-2

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**

✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

* **Marked Questions may have more than one correct option.**

* **चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -**

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1.✍ Let A_1, A_2 and A_3 be subsets of a set X. Which one of the following is correct ?

(A*) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ is the smallest subset of X containing elements of each of A_1, A_2 and A_3

(B) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ is the smallest subset of X containing either A_1 or $A_2 \cup A_3$ but not both

(C) The smallest subset of X containing $A_1 \cup A_2$ and A_3 equals the smallest subset of X containing both A_1 and $A_2 \cup A_3$ only if $A_2 = A_3$

(D) None of these

माना A_1, A_2 और A_3 समुच्चय X के उपसमुच्चय हैं । निम्न में से कौनसा सही है?

(A*) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, समुच्चय X का सबसे छोटा उपसमुच्चय है जो A_1, A_2 और A_3 प्रत्येक के अवयवों को रखता है।

(B) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, समुच्चय X का सबसे छोटा उपसमुच्चय है जो या तो A_1 या $A_2 \cup A_3$ को रखता है परन्तु दोनों को नहीं।

(C) X का सबसे छोटा उपसमुच्चय जो $A_1 \cup A_2$ तथा A_3 तथा X का सबसे छोटा उपसमुच्चय है जो A_1 और $A_2 \cup A_3$ दोनों को रखता है, समान होंगें केवल यदि $A_2 = A_3$

(D) इनमें से कोई नहीं

Sol. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ is the smallest element containing subset of all we set A_1, A_2 and A_3

Hindi. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ सबसे छोटा समुच्चय है जो A_1, A_2 और A_3 के सभी के उपसमुच्चय को रखता है।

2. Let A, B, C be distinct subsets of a universal set U. For a subset X of U, let X ' denote the complement of X in U.

Consider the following sets :

1. $(((A \cap B) \cup C)' \cap B')' = B \cap C$

2. $(A' \cap B') \cap (A \cup B \cup C') = (A \cup (B \cup C))'$

Which of the above statements is/are correct ?

(A) 1 only (B*) 2 only (C) Both 1 and 2 (D) Neither 1 nor 2

माना कि सार्वनिष्ठ समुच्चय U के भिन्न–भिन्न उपसमुच्चय A, B, C है। U के उपसमुच्चय X के लिए, माना X', U मे X के पूरक समुच्चय को व्यक्त करता है।

माना कि निम्न समुच्चय :

1. $(((A \cap B) \cup C)' \cap B')' = B \cap C$
2. $(A' \cap B') \cap (A \cup B \cup C') = (A \cup (B \cup C))'$

निम्न मे से कौनसे कथन सही है ?

(A) केवल 1 (B*) केवल 2 (C) 1 और 2 दोनों (D) न तो 1 और न ही 2

Sol. 1. $(((A \cap B) \cup C)' \cap B')'$

$= (A \cap B) \cup C) \cup B$

$= (A \cap B) \cup B \cup C$

$= B \cup C \neq B \cap C$

2. $(A' \cap B') \cap (A \cup B \cup C')$

$= (A \cup B)' \cap ((A \cup B) \cup C')$

$= \phi \cup ((A \cup B)' \cap C')$

$= ((A \cup B) \cup C)'$

$= (A \cup (B \cup C))'$

3. In an examination of a certain class, at least 70% of the students failed in Physics, at least 72% failed in Chemistry, at least 80% failed in Mathematics and at least 85% failed in English. How many at least must have failed in all the four subjects ?

(A) 9% (B*) 7%

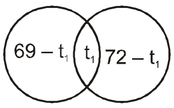
(C) 15% (D) Cannot be determined due to insufficient data

एक कक्षा की परीक्षा में भौतिकी में कम से कम 70% विद्यार्थी फेल होते है, कम से कम 72% विद्यार्थी रसायन में फेल होते है, कम से कम 80% विद्यार्थी गणित में फेल होते है और कम से कम 85% विद्यार्थी अग्रेंजी में फेल होते है तब कम से कम इन सभी चारो विषयों में कितने विद्यार्थी फेल होते है?

(A) 9% (B*) 7%

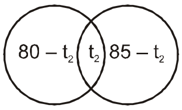
(C) 15% (D) अपर्याप्त आकड़ों के आधार पर ज्ञात नहीं किया जा सकता है।

Sol.

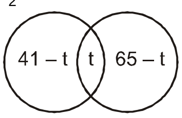


$70 + 72 - t_1 = 100$

$t_1 = 42\%$ $\Rightarrow$ min. in $P \cap C = 42\%$



$t_2 = 85\% - 20\% = 65\%$ $\Rightarrow$ min. $M \cap E = 65\%$



$t = 42 - 35 = 7\%$

min. in $((P \cap C) \cap (M \cap E)) = 7\%$

4. Let X and Y be two sets.

Statement-1 $X \cap (Y \cup X)' = \phi$

Statement-2 If $X \cup Y$ has m elements and $X \cap Y$ has n elements then symmetric difference $X \Delta Y$ has m – n elements.

(A*) Both the statements are true.

(B) Statement-I is true, but Statement-II is false.

(C) Statement-I is false, but Statement-II is true.

(D) Both the statements are false.

माना X और Y दो समुच्चय है।
वक्तव्य-1 $X \cap (Y \cup X)' = \phi$
वक्तव्य-2 यदि $X \cup Y$ में m अवयव है तथा $X \cap Y$ में n अवयव है तब सममित अन्तर $X \Delta Y$ में $m - n$ अवयव है।
(A*) दोनो कथन सत्य है।
(B) कथन-I सत्य है, परन्तु कथन-II असत्य है।
(C) कथन-I असत्य है, परन्तु कथन-II सत्य है।
(D) दोनो कथन असत्य है।

Ans. (A)

Sol. $X \cap (Y \cup X)' = X \cap (Y' \cap X') = X \cap X' \cap Y' = \phi$
$\Rightarrow$ Statement – 1 true.
$X \Delta Y = (X \sim Y) \cup (Y \sim X) = (X \cup Y) \sim (X \cap Y) \Rightarrow$ number of element in $X \Delta Y = m - n$.
$\Rightarrow$ Statement-2 is true but does explain statement-1

Hindi $X \cap (Y \cup X)' = X \cap (Y' \cap X') = X \cap X' \cap Y' = \phi \Rightarrow$ कथन– 1 सत्य है।.
$X \Delta Y = (X \sim Y) \cup (Y \sim X) = (X \cup Y) \sim (X \cap Y)$
$\Rightarrow X \Delta Y$ में अवयवों की संख्या $= m - n$.
$\Rightarrow$ कथन -2 सत्य है, परन्तु कथन-1 की सही व्याख्या नहीं है।

5. If $\frac{6x^2 - 5x - 3}{x^2 - 2x + 6} \le 4$, then the least and the highest values of $4x^2$ are:
(A) 36 & 81 (B) 9 & 81 (C*) 0 & 81 (D) 9 & 36

यदि $\frac{6x^2 - 5x - 3}{x^2 - 2x + 6} \le 4$ हो, तो $4x^2$ का न्यूनतम एवं अधिकतम मान है–
(A) 36 & 81 (B) 9 & 81 (C*) 0 & 81 (D) 9 & 36

Sol. $\frac{6x^2 - 5x - 3}{x^2 - 2x + 6} - 4 \le 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 3x - 27}{x^2 - 2x + 6} \le 0$
denominator $x^2 - 2x + 6 > 0 \quad \forall \; x \in R \; (\because D < 0)$
then $2x^2 + 3x - 27 \le 0 \Rightarrow (2x + 9)(x - 3) \le 0$
$-\frac{9}{2} \le x \le 3 \Rightarrow 0 \le x^2 \le \frac{81}{4}$
$(4x^2)_{max} = 4\left(-\frac{9}{2}\right)^2 = 81 \Rightarrow (4x^2)_{min} = 4(0) = 0$

Hindi. $\frac{6x^2 - 5x - 3}{x^2 - 2x + 6} - 4 \le 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 3x - 27}{x^2 - 2x + 6} \le 0$
हर $x^2 - 2x + 6 > 0 \quad \forall \; x \in R \; (\because D < 0)$
तब $2x^2 + 3x - 27 \le 0 \Rightarrow (2x + 9)(x - 3) \le 0$
$-\frac{9}{2} \le x \le 3 \Rightarrow 0 \le x^2 \le \frac{81}{4}$
$(4x^2)_{\text{अधिकतम}} = 4\left(-\frac{9}{2}\right)^2 = 81 \Rightarrow (4x^2)_{\text{न्यूनतम}} = 4(0) = 0$

6. Sum of all the real solutions of the inequality $\frac{(x^2 + 2)(\sqrt{x^2 - 16})}{(x^4 + 2)(x^2 - 9)} \le 0$ is

असमिका $\frac{(x^2 + 2)(\sqrt{x^2 - 16})}{(x^4 + 2)(x^2 - 9)} \le 0$ के सभी वास्तविक हलों का योगफल है–
(A) 5 (B) 4 (C) 8 (D*) 0

Sol. $x^2 - 16 \ge 0$
$\therefore \; (x - 4)(x + 4) \ge 0$
$\therefore \; x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ ....(1)

Now अब $\dfrac{(x^2+2)(\sqrt{x^2-16})}{(x^4+2)(x-3)(x+3)} \le 0$

$x \in (-3, 3)$ ....(2)

By (1) and (2) $x \in \{-4, 4\}$

(1) व (2) से $x \in \{-4, 4\}$

7. If $\log_a b = 2$; $\log_b c = 2$ and $\log_3 c = 3 + \log_3 a$ then $(a + b + c)$ equals

यदि $\log_a b = 2$; $\log_b c = 2$ तथा $\log_3 c = 3 + \log_3 a$ तब $(a + b + c)$ बराबर है–

(A) 90 (B*) 93 (C) 102 (D) 243

Sol. $b = a^2$, $c = b^2$, $\dfrac{c}{a} = 3^3 \Rightarrow$ $c = 27a \Rightarrow$ $b^2 = 27a$ $\Rightarrow$ $a^4 = 27a$

$\Rightarrow$ $a = 3, a > 0$

$c = 81, b = 9$

$\therefore$ $a + b + c = 3 + 9 + 81 = 93$

8. Let $x = \left(\log_{1/3} 5\right)\left(\log_{125} 343\right)\left(\log_{49} 729\right)$ and $y = 25^{3\log_{289} 11 \, \log_{28} \sqrt{17} \, \log_{1331} 784}$, then value of $\dfrac{y}{x}$ is

माना $x = \left(\log_{1/3} 5\right)\left(\log_{125} 343\right)\left(\log_{49} 729\right)$ तथा $y = 25^{3\log_{289} 11 \, \log_{28} \sqrt{17} \, \log_{1331} 784}$ तब $\dfrac{y}{x}$ का मान होगा–

(A) $\dfrac{5}{3}$ (B*) $-\dfrac{5}{3}$ (C) $-\dfrac{4}{5}$ (D) $\dfrac{3}{7}$

Sol. $x = \left(-\log_3 5\right)\left(\log_{5^3}(7^3)\right)\left(\log_{7^2}(3^6)\right)$

$x = -\dfrac{3}{3}.\dfrac{6}{2}\log_3 5 \,.\, \log_5 7 \,.\, \log_7 3$ and और $y = 25^{\left(3\log_{17^2} 11\right)\left(\log_{28} 17^{1/2}\right)\left(\log_{(11)^3}(28)^2\right)}$

$y = 25^{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}(\log_{17} 11).(\log_{28} 17)(\log_{11} 28)}$

$y = 5$

$\therefore x^2 + y^2 = (-3)^2 + 5^2 = 34$

9. The expression: $\dfrac{\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}\right)+3x-\dfrac{x(x^3+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\log_2 8}{(x-1)(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 2)}$ reduces to

व्यंजक : $\dfrac{\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}\right)+3x-\dfrac{x(x^3+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\log_2 8}{(x-1)(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 2)}$ को सरल करने पर प्राप्त होता है

(A*) $\dfrac{x+1}{x-1}$ (B) $\dfrac{x^2+3x+2}{(\log_2 5)x-1}$ (C) $\dfrac{3x}{x-1}$ (D) x

Sol. $\dfrac{(x+1)+3x-x\log_2 8}{(x-1)(1)} = \dfrac{(x+2)+3x-3x}{(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

10. If a, b, c are positive real numbers such that $a^{\log_3 7} = 27$; $b^{\log_7 11} = 49$ and $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. The value of $\left(a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}\right)$ equals

यदि a, b, c धनात्मक वास्तविक संख्याऐं इस प्रकार है कि $a^{\log_3 7} = 27$; $b^{\log_7 11} = 49$ तथा $c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$ $\left(a^{(\log_3 7)^2} + b^{(\log_7 11)^2} + c^{(\log_{11} 25)^2}\right)$ का मान बराबर है

(A) 489 (B*) 469 (C) 464 (D) 400

Sol. $a^{(\log_3 7)^2} = \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} = 27^{\log_3 7} = 27^{\log_3 7} = 7^3 = 343$

$b^{(\log_7 11)^2} = \left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11} = 49^{\log_7 11} = 11^{\log_7 49} = 121$

$c^{(\log_{11} 25)^2} = \left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25} = \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25} = 25^{\log_{11}\sqrt{11}} = 5$

hence the sum is अतः योगफल 343 + 121 + 5 = 469 है।

11. Consider the statement : $x(\alpha - x) < y(\alpha - y)$ for all x, y with $0 < x < y < 1$. The statement is true
(A*) if and only if $\alpha \geq 2$
(B) if and only if $\alpha > 2$
(C) if and only if $\alpha < -1$ (D) for no values of α
माना कि कथन : $x(\alpha - x) < y(\alpha - y)$ सभी x और y के लिए $0 < x < y < 1$ कथन सही है
(A*) यदि और केवल यदि $\alpha \geq 2$ (B) यदि और केवल यदि $\alpha > 2$
(C) यदि और केवल यदि $\alpha < -1$ (D) α के किसी मान के लिए नहीं।

Sol. For $0 < x < y < 1$ $f(x) = x(\alpha - x) = -x^2 + x$

$f(x) < f(1)$

so f(x) should be increasing in (0, 1) and one root is 0 so vertex should be ≥ 1

$\Rightarrow \quad \frac{-\alpha}{-2} \geq 1, \alpha \geq 2$

$0 < x < y < 1$ के लिए $f(x) = x(\alpha - x) = -x^2 + x$

$f(x) < f(1)$

इसलिए f(x) अन्तराल (0, 1) मे वर्धमान होना चाहिए और एक मूल 0 है इसलिए शीर्ष ≥ 1 होना चाहिए।

$\Rightarrow \quad \frac{-\alpha}{-2} \geq 1, \alpha \geq 2$

12. The set of values of x satisfying simultaneously the inequalities $\frac{\sqrt{(x-8)\ (2-x)}}{\log_{0.3}\left(\frac{10}{7}\ (\log_2 5 - 1)\right)} \geq 0$ and

$2^{x-3} - 31 > 0$ is :
(A*) a unit set (B) an empty set
(C) an infinite set (D) a set consisting of exactly two elements.

असमिकाओं $\frac{\sqrt{(x-8)\ (2-x)}}{\log_{0.3}\left(\frac{10}{7}\ (\log_2 5 - 1)\right)} \geq 0$ और $2^{x-3} - 31 > 0$ को एक साथ संतुष्ट करने वाले 'x' के मानों का समुच्चय हैं–
(A)एकल समुच्चय (B) रिक्त समुच्चय
(C) एक अनन्त समुच्चय (D) एक ऐसा समुच्चय जिसमें ठीक 2 अवयव है।

Sol. $\frac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0.3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5 - 1)\right)} \geq 0$

For $\sqrt{(x-8)(2-x)}$ to be defined

(i) $(x - 8)(2 - x) \geq 0$
$(x - 2)(x - 8) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq x \leq 8$

Now Let say $y = \log_{0.3}\frac{10}{7}\ (\log_2 5 - \log_2 2) = \log_{0.3}\frac{10}{7}\ (\log_2 5/2)$

Let $y < 0$ (assume) then $\log_{0.3}\frac{10}{7}$ $(\log_2 5/2) < 0$

$\Rightarrow$ $\frac{10}{7}\log_2 5/2 > 1$ $\Rightarrow$ $\log_2 5/2 > \frac{7}{10}$ $\Rightarrow$ $\frac{5}{2} > 2^{(7/10)}$ which is true

So $y < 0$

so denominator is – ve and numerator is +ve, so inequality is not satisfied,

thus $\sqrt{(x-8)(2-x)} = 0$

$x = 2, 8$ .....(i)

Now $2^{x-3} > 31$

$\Rightarrow$ $(x - 3) > \log_2 31 \Rightarrow$ $x > 3 + \log_2 2^{4.9}$ (approx)

$\Rightarrow$ $x > 7.9$ $\Rightarrow$ $x = 8$

Hindi. $\dfrac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0.3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)} \geq 0$

$\sqrt{(x-8)(2-x)}$ को परिभाषित होने के लिये –

(i) $(x - 8)(2 - x) \geq 0$

$(x - 2)(x - 8) \leq 0$ $\Rightarrow$ $2 \leq x \leq 8$

माना Let say $y = \log_{0.3}\frac{10}{7}$ $(\log_2 5 - \log_2 2) = \log_{0.3}\frac{10}{7}$ $(\log_2 5/2)$

माना $y < 0$ (assume) then $\log_{0.3}\frac{10}{7}$ $(\log_2 5/2) < 0$

$\Rightarrow$ $\frac{10}{7}\log_2 5/2 > 1$ $\Rightarrow$ $\log_2 5/2 > \frac{7}{10}$ $\Rightarrow$ $\frac{5}{2} > 2^{(7/10)}$ जोकि सत्य है। अतः $y < 0$

अतः हर तो ऋणात्मक होगा एवं अंश धनात्मक होगा अतः असमिका संतुष्ट नहीं होगी।

अतः $\sqrt{(x-8)(2-x)} = 0$

$x = 2, 8$ .....(i)

लेकिन $2^{x-3} > 31$

$\Rightarrow$ $(x - 3) > \log_2 31 \Rightarrow$ $x > 3 + \log_2 2^{4.9}$ (लगभग)

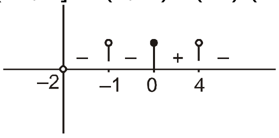
$\Rightarrow$ $x > 7.9$ $\Rightarrow$ $x = 8$

13. The solution set of the inequality $\dfrac{(3^x - 4^x)\cdot \ell n(x+2)}{x^2 - 3x - 4} \leq 0$ is

असमिका $\dfrac{(3^x - 4^x)\cdot \ell n(x+2)}{x^2 - 3x - 4} \leq 0$ के हलों का समुच्चय है –

(A) $(-\infty, 0] \cup (4, \infty)$ (B) $(-2, 0] \cup (4, \infty)$ (C) $(-1, 0] \cup (4, \infty)$ (D*) $(-2, -1) \cup (-1, 0] \cup (4, \infty)$

Sol. $\dfrac{4^x\left(\left(\frac{3}{4}\right)^x - 1\right)\ell n\,(x+2)}{(x-4)\,(x+1)} \leq 0$



14. If $\sqrt{\log_4\{\log_3\{\log_2(x^2-2x+a)\}\}}$ is defined $\forall x \in R$, then the set of values of 'a' is

यदि $\sqrt{\log_4\{\log_3\{\log_2(x^2-2x+a)\}\}}$, $\forall x \in R$ के लिए परिभाषित है तब 'a' के मानों का समुच्चय है

(A*) $[9, \infty)$ (B) $[10, \infty)$ (C) $[15, \infty)$ (D) $[2, \infty)$

Sol. $\sqrt{\log_4\{\log_3\{\log_2(x^2-2x+a)\}\}}$

for defined परिभाषित होने के लिए $\log_4\log_3\log_2(x^2 - 2x + a) \geq 0$

$\Rightarrow \quad \log_3\log_2(x^2 - 2x + a) \geq 1 \Rightarrow \quad \log_2(x^2 - 2x + a) \geq 3$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + a \geq 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + (a - 8) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D \leq 0$

$4 - 4(a - 8) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - a + 8 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \geq 9$

15. If $\log_{(2x+3)}(6x^2 + 23x + 21) = 4 - \log_{(3x+7)}(4x^2 + 12x + 9)$ then value of x is equal to

यदि $\log_{(2x+3)}(6x^2 + 23x + 21) = 4 - \log_{(3x+7)}(4x^2 + 12x + 9)$ हो, तो x का मान बराबर होगा–

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C*) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$

Sol. domain $x > -\frac{3}{2}$

$\log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4 - \log_{(3x+7)}(4x^2 + 12x + 9)$

$\log_{(2x+3)}(2x + 3)(3x + 7) = 4 - \log_{3x+7}(2x + 3)^2$

$1 + \log_{2x+3}(3x + 7) = 4 - 2\log_{3x+7}(2x + 3)$

माना $\log_{2x+3}(3x + 7) = y$

$y + \frac{2}{y} - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \text{or } y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -2, , \frac{-1}{4} - 4$

$x \neq -2, -4 \quad$ so $\quad x = -\frac{1}{4}$

Hindi. प्रान्त $x > -\frac{3}{2}$

$\log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4 - \log_{(3x+7)}(4x^2 + 12x + 9)$

$\log_{(2x+3)}(2x + 3)(3x + 7) = 4 - \log_{3x+7}(2x + 3)^2$

$1 + \log_{2x+3}(3x + 7) = 4 - 2\log_{3x+7}(2x + 3)$

माना $\log_{2x+3}(3x + 7) = y$

$y + \frac{2}{y} - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \text{or } y = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -2, , \frac{-1}{4} - 4$

$x \neq -2, -4 \quad$ इसलिए $\quad x = -\frac{1}{4}$

PART-II: NUMERICAL VALUE QUESTIONS

भाग-II : संख्यात्मक प्रश्न (NUMERICAL VALUE QUESTIONS)

INSTRUCTION :

- The answer to each question is **NUMERICAL VALUE** with two digit integer and decimal upto two digit.
- If the numerical value has more than two decimal places **truncate/round-off** the value to **TWO** decimal placed.

निर्देश :

- इस खण्ड में प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **संख्यात्मक मान** के रूप में है जिसमें दो पूर्णांक अंक तथा दो अंक दशमलव के बाद में है।
- यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के **दो** स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।

1. Let U be set with number of elements in it is 2009 and A, B are subsets of U with n (A ∪ B) = 280. If $n(A' \cap B') = x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3$ for some positive integers $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$, then find value of $\frac{x_2 + y_2}{x_1 + y_1}$

माना अवयवों की संख्या का समुच्चय U है जिसमें 2009 अवयव है तथा A और B, U के उपसमुच्चय है जिसमें n (A ∪ B) = 280. यदि $n(A' \cap B') = x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3$ किसी धनात्मक पूर्णांक $x_1 < y_1 < y_2 < x_2$ के लिए तब $\frac{x_2 + y_2}{x_1 + y_1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **02.20**

Sol. n(A ∪ B) = 280

Now अब $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = 2009 - n(A \cup B) = 2009 - 280 = 1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$

2. Let U be set with number of elements in it is 2009. A is a subset of U with n (A) = 1681 and out of these 1681 elements, exactly 1075 elements belong to a subset B of U. If $n(A - B) = m^2 + p_1 p_2 p_3$ for some positive integer m and distinct primes $p_1 < p_2 < p_3$ then for least m find $\frac{p_1 p_3}{p_2}$

माना अवयवों की संख्या का समुच्चय U है जिसमें 2009 अवयव है। A, U का उपसमुच्चय है जिसमें n (A) = 1681 तथा 1681 अवयव में से ठीक 1075 अवयव को U का उपसमुच्चय B रखता है। $n(A - B) = m^2 + p_1 p_2 p_3$ किसी धनात्मक पूर्णांक m तथा अभाज्य संख्या $p_1 < p_2 < p_3$ भिन्न–भिन्न अभाज्य संख्याएं तब न्यूनतम m के लिए $\frac{p_1 p_3}{p_2}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. **12.28 or 12.29**

Sol. $n(A - B) = 1681 - 1075 = 606 = 4 + 2 \times 301 = 4 + 2 \times 7 \times 43 = (2)\ 2 + 2 \times 7 \times 43$

3. Let $A = \{(x, y) : x \in R, y \in R, x^3 + y^3 = 1]$, $B = \{(x, y) : x \in R, y \in R, x - y = 1\}$ and $C = \{(x, y) : x \in R, y \in R, x + y = 1\}$. If A ∩ B contains 'p' elements and A ∩ C contains 'q' elements then find (q – p).

Ans. **01.00**

माना $A = \{(x, y) : x \in R, y \in R, x^3 + y^3 = 1]$, $B = \{(x, y) : x \in R, y \in R, x - y = 1\}$ और $C = \{(x, y) : x \in R, y \in R, x + y = 1\}$ यदि A ∩ B, 'p' अवयव रखता है और A ∩ C, 'q' अवयव रखता है। तब (q – p) ज्ञात कीजिए।

Sol. For A ∩ B

$x^3 + (x-1)^3 = 1 \Rightarrow x^3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 1 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(2x^2 - x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, 0)$

For A ∩ C

$x^3 + (1 - x)^3 = 1 \Rightarrow x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = 1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, 1 \Rightarrow (x, y) = (0, 1)\ (1, 0)$

4. In a class of 42 students, the number of students studying different subjects are 23 in Mathematics, 24 in Physics, 19 in Chemistry, 12 in Mathematics and Physics 9 in Mathematics and Chemistry, 7 in Physics and Chemistry and 4 in all the three subjects. Then find number of students who have taken exactly one subject.

Ans. **22.00**

किसी कक्षा के 42 छात्रों में से भिन्न–भिन्न विषयों मे से 23 छात्र गणित, 24 भौतिकी, 19 रसायन, 12 गणित और भौतिकी, 9 गणित और रसायन, 7 भौतिकी और रसायन तथा 4 सभी तीनों विषय पढ़ते हैं, तो ठीक एक विषय पढ़ने वाले छात्रों की संख्या है–

Sol. n(M) = 23, n(P) = 24, n(C) = 19

$n(M \cap P) = 12,\ n(M \cap C) = 9,\ n(P \cap C) = 7$

$n(M \cap P \cap C) = 4$

$n(M \cap P' \cap C') = n[M \cap (P \cup C)'] = n(M) - n(M \cap (P \cup C)) = n(M) - n[(M \cap P) \cup (M \cap C)]$

$= n(M) - n(M \cap P) - n(M \cap C) + n(M \cap P \cap C) = 23 - 12 - 9 + 4 = 27 - 21 = 6$

$n(P \cap M' \cap C) = n[P \cap (M \cup C)']$

$= n(P) - n[P \cap (M \cup C) = n(P) - n\,[P \cap M) \cup (P \cap C)] = n(P) - n(P \cap M) - n(P \cap C) + n(P \cap M \cap C)$
$= 24 - 12 - 7 + 4 = 9$
$n(C \cap M' \cap P') = n(C) - n(C \cap P) - n(C \cap M) + n(C \cap P \cap M)$
$= 19 - 7 - 9 + 4 = 23 - 16 = 7$

Hindi. $n(M) = 23, n(P) = 24, n(C) = 19$
$n(M \cap P) = 12, n(M \cap C) = 9, n(P \cap C) = 7$
$n(M \cap P \cap C) = 4$
$n(M \cap P' \cap C') = n[M \cap (P \cup C)']$
$= n(M) - n(M \cap (P \cup C))$
$= n(M) - n[(M \cap P) \cup (M \cap C)]$
$= n(M) - n(M \cap P) - n(M \cap C) + n(M \cap P \cap C)$
$= 23 - 12 - 9 + 4 = 27 - 21 = 6$
$n(P \cap M' \cap C) = n[P \cap (M \cup C)']$
$= n(P) - n[P \cap (M \cup C) = n(P) - n\,[P \cap M) \cup (P \cap C)]$
$= n(P) - n(P \cap M) - n(P \cap C) + n(P \cap M \cap C)$
$= 24 - 12 - 7 + 4 = 9$
$n(C \cap M' \cap P') = n(C) - n(C \cap P) - n(C \cap M) + n(C \cap P \cap M)$
$= 19 - 7 - 9 + 4 = 23 - 16 = 7$

5. If $c(a - b) = a(b - c)$ then find the value of $\dfrac{\log(a+c)+\log(a-2b+c)}{\log(a-c)}$

(Assume all terms are defined)

यदि $c(a - b) = a(b - c)$ तब $\dfrac{\log(a+c)+\log(a-2b+c)}{\log(a-c)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(मानाकि सभी पद परिभाषित है।)

Ans. **02.00**

Sol. $c(a - b) = a(b - c) \Rightarrow ac - bc = ab - ac \Rightarrow 2ac = ab + bc$

$\Rightarrow \dfrac{2ac}{b} = a + c \Rightarrow \dfrac{2ac}{a+c} = b$

Now अब $\dfrac{\log(a+c)+\log(a+c-2b)}{\log(a-c)} = \dfrac{\log(a+c)+\log\left(a+c-\dfrac{4ac}{a+c}\right)}{\log(a-c)}$

$= \dfrac{\log(a+c)+2\log(a-c)-\log(a+c)}{\log(a-c)} = 2$

6. If $\log_b a.\log_c a + \log_a b.\log_c b + \log_a c.\log_b c = 3$ (where a, b, c are different positive real numbers $\neq 1$), then find the value of a b c.

यदि $\log_b a.\log_c a + \log_a b.\log_c b + \log_a c.\log_b c = 3$ (जहां a, b, c भिन्न–भिन्न धनात्मक वास्तविक संख्याएं $\neq 1$ है), हो, तो a b c का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **01.00**

Sol. $\log_b a.\log_c a + \log_a b.\log_c b + \log_a c.\log_b c = 3$

$\Rightarrow \dfrac{(\log a)^2}{\log b.\log c} + \dfrac{(\log b)^2}{\log a.\log c} + \dfrac{(\log c)^2}{\log a.\log b} = 3$

$\Rightarrow (\log a)^3 + (\log b)^3 + (\log c)^3 = 3\log a.\log b.\log c$

$\Rightarrow \log a + \log b + \log c = 0$ ($\because$ a, b, c are distinct) ($\because$ a, b, c तीनों भिन्न–भिन्न है।)

$\Rightarrow \log abc = 0 \Rightarrow abc = 1$

7. If $4^A + 9^B = 10^C$, where $A = \log_{16}4$, $B = \log_3 9$ & $C = \log_x 83$, then find x.

यदि $4^A + 9^B = 10^C$, जहां $A = \log_{16}4$, $B = \log_3 9$ & $C = \log_x 83$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **10.00**

Sol. $A = \log_{16}4 = \frac{1}{2}$

$B = \log_3 9 = 2$

$\therefore \quad 4^{1/2} + 9^2 = 10^{\log_x 83} \quad \Rightarrow \quad 83 = 83^{\log_x 10} \quad \Rightarrow \quad x = 10$

8. Let a, b, c, d are positive integers such that $\log_a b = \frac{3}{2}$ and $\log_c d = \frac{5}{4}$. If (a – c) = 9, find the value of $\frac{b+d}{a+c}$.

माना कि a, b, c, d धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार है कि $\log_a b = \frac{3}{2}$ तथा $\log_c d = \frac{5}{4}$ यदि (a – c) = 9 हो तब $\frac{b+d}{a+c}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **03.82 or 03.83**

Sol. $b^2 = a^3 = k \quad \Rightarrow \quad b = k^{1/2}, a = k^{1/3}$ and और $d^4 = c^5 = \lambda \quad \Rightarrow \quad c = \lambda^{1/5}, d = \lambda^{1/4}$

Now अब $a - c = 9 \quad \Rightarrow \quad k^{1/3} - \lambda^{1/5} = 9$

Let माना $k^{1/3} = 25, \quad \lambda^{1/5} = 16 \quad \Rightarrow \quad k = 25^3 = 5^6$ and और $\lambda = 16^5 = 2^{20}$

$\Rightarrow \quad b = (5^6)^{1/2} = 125, d = (2^{20})^{1/4} = 32$

Now अब $a - c = 9 \quad \Rightarrow \quad k^{1/3} - \lambda^{1/5} = 9$

let माना $k^{1/3} = 25, \lambda^{1/5} = 16$

$\Rightarrow \quad b = (5^6)^{1/2} = 125, d = (2^{20})^{1/4} = 32$

Now अब b – d = 125 – 32 = 93

$\frac{b+d}{a+c} = \frac{157}{41}$ = **03.829**

9. Find the positive number, x , which satisfies the equation $\log_{10}(2x^2 - 21x + 50) = 2$

धनात्मक संख्या x का मान ज्ञात कीजिए जो समीकरण $\log_{10}(2x^2 - 21x + 50) = 2$ को संतुष्ट करता है।

Ans. **12.50**

Sol. $\log_{10}(2x^2 - 21x + 50) = 2$

(i) $2x^2 - 21x + 50 = 100$

$\Rightarrow 2x^2 - 21x - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2, \frac{25}{2}$

10. Find the value of x satisfying the equation $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1$

समीकरण $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x) = 1$ को सन्तुष्ट करने वाले x के मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **03.00**

Sol. Domain प्रान्त x – 1 > 0 and और x + 1 > 0 and और y – x > 0

x > 1 x > – 1 x < 7

$\Rightarrow \quad x \in (1, 7)$ ....(i)

$-\log_2(x-1) - \log_2(x+1) = 1 + \log_{2^{-\frac{1}{2}}}(7-x)$

$-\log_2(x^2-1) + \log_2(7-x)^2 = 1$; $\log_2 \frac{(7-x)^2}{x^2-1} = 1 \Rightarrow \frac{(7-x)^2}{x^2-1} = 2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 14x - 51 = 0$; $(x + 17)(x - 3) = 0$

x = 3 or या x = – 17 (rejected अस्वीकार्य) ; x = 3

11. Find sum of roots of equation $\log^2_{10} x + \log_{10}x^2 = \log^2_{10} 2 - 1$

समीकण $\log^2_{10} x + \log_{10}x^2 = \log^2_{10} 2 - 1$ के मूलों का योग ज्ञात कीजिए।

Ans. **00.25**

Sol. $\log_{10}^{2} x + \log_{10}x^2 = \log_{10}^{2} 2 - 1$; $\log_{10}^{2} x + 2\log_{10}x + 1 = \log_{10}^{2} 2$

$\Rightarrow$ $(\log_{10} x + 1)^2 = \log_{10}^{2} 2$

$\log_{10}x + 1 = \pm \log_{10} 2$; $x = \frac{1}{20}$ and (और) $\frac{1}{5}$

12. If the product of all solutions of the equation $\frac{(2009)x}{2010} = (2009)^{\log_x(2010)}$ can be expressed in the lowest form as $\frac{m}{n}$ then the value of (m – n) is

यदि समीकरण $\frac{(2009)x}{2010} = (2009)^{\log_x(2010)}$ के वास्तविक हलों के गुणनफल को $\frac{m}{n}$ के सरलतम रूप में लिख सकते है तब (m – n) का मान है

Ans **01.00**

Sol. $\frac{2009}{2010}x = (2009)^{\log_x(2010)}$

$\Rightarrow$ Taking log both sides w.r.t. x $\Rightarrow$ x के सापेक्ष दोनों तरफ log लेने पर

$\log_x 2009 + 1 - \log_x 2010 = \log_x 2010 . \log_x 2009$ $\Rightarrow$ $\frac{\ell n 2009}{\ell n x} + 1 - \frac{\ell n 2010}{\ell n x} = \frac{\ell n 2009 \ell n 2010}{(\ell n x)^2}$

$\Rightarrow$ $\ell n\left(\frac{2009}{2010}\right).\ell n x + (\ell n x)^2 = \ell n 2009\ \ell n 2010$

Let माना $\ell n x = t$, $t^2 + \ell n\left(\frac{2009}{2010}\right)x - \ell n 2009\ \ell n 2010 = 0$

sum of roots मूलों का योग $= -\ell n\left(\frac{2009}{2010}\right)$ $\Rightarrow$ $\ell n x_1 + \ell n x_2 = -\ell n\left(\frac{2009}{2010}\right) = \ell n\left(\frac{2010}{2009}\right)$

$\Rightarrow$ $x_1 x_2 = \frac{2010}{2009}$

m = 2010, n = 2009 $\Rightarrow$ m – n = 1

13. If the complete solution set of the inequality $(\log_{10} x)^2 \geq \log_{10} x + 2$ is $(0, a] \cup [100, \infty)$ then find the value of a.

यदि असमिका $(\log_{10} x)^2 \geq \log_{10} x + 2$ के सम्पूर्ण हल समुच्चय $(0, a] \cup [100, \infty)$ है, तब a का मान ज्ञात कीजिये।

Ans. **00.01**

Sol. $(\log x)^2 - \log x - 2 \geq 0$

$x > 0$ ....(i)

$(\log x - 2)(\log x + 1) \geq 0$

$\Rightarrow$ $\log x \leq -1$ or या $\log x \geq 2$

$\Rightarrow$ $x \leq \frac{1}{10}$ or या $x \geq 100$ ....(ii)

(i) $\cap$ (ii) से $\Rightarrow$ $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right] \cup [100, \infty)$.

14. The complete solution set of the inequality $\frac{1}{\log_4 \frac{x+1}{x+2}} < \frac{1}{\log_4(x+3)}$, is (–a, ∞), then determine 'a'.

असमिका $\frac{1}{\log_4 \frac{x+1}{x+2}} < \frac{1}{\log_4(x+3)}$ का सम्पूर्ण हल समुच्चय (–a, ∞) है, तो 'a' का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. **01.00**

Sol. $\frac{x+1}{x+2}$ $\Rightarrow$ $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$
and और $x + 3 > 0$ $\Rightarrow$ $x > -3$
If यदि $\log_4\left(\frac{x+1}{x+2}\right) > \log_4(x + 3)$
$\Rightarrow$ $\frac{x+1}{x+2} > x - 3$ $\Rightarrow$ $\frac{x+1-(x+3)(x+2)}{(x+1)} > 0$
$\Rightarrow$ $\frac{x+1-x^2-5x-6}{x+1} > 0$ $\Rightarrow$ $\frac{x^2+4x+5}{x+1} < 0$
$\Rightarrow$ $x > -1$
ans. $(-1, \infty)$ $\Rightarrow$ $-a = -1$ $\Rightarrow$ $a = -1$
If यदि $\log_4\left(\frac{x+1}{x+2}\right) < \log_4(x + 3)$
$\frac{x+1}{x+2} < x + 3$ then solution is $(-3, -1)$ $\frac{x+1}{x+2} < x + 3$ तब हल $(-3, -1)$ है।

15. If complete solution set of inequality $\log_{1/2}(x + 5)^2 > \log_{1/2}(3x - 1)^2$ is $(-\infty,p) \cup (q,r) \cup (s,\infty)$ then find $\frac{p^2+q^2+r^2}{s^2}$

यदि असमिका $\log_{1/2}(x + 5)^2 > \log_{1/2}(3x - 1)^2$ का पूर्ण हल समुच्चय $(-\infty,p) \cup (q,r) \cup (s,\infty)$ हो तो $\frac{p^2+q^2+r^2}{s^2}$ का मान ज्ञात कीजिए –

Ans. **05.66 or 05.67**

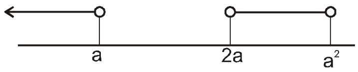
Sol. $\log_{1/2}(x + 5)^2 > \log_{1/2}(3x - 1)^2$
$(x + 5)^2 > 0$ $\Rightarrow$ $x \in R - \{-5\}$ ....(i)
$(3x - 1)^2 > 0$ $\Rightarrow$ $x \in R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ ....(ii)
$(x + 5)^2 < (3x - 1)^2$
$\Rightarrow$ $8x^2 - 16x - 24 > 0$
$\Rightarrow$ $x^2 - 2x - 3 > 0$
$\Rightarrow$ $(x - 3)(x + 1) > 0$
$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ ....(iii)
(i) $\cap$ (ii) $\cap$ (iii) gives से
$(-\infty, -5) \cup (-5, -1) \cup (3, \infty)$
$p = -5, q = -5, r = -1, s = 3$

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

भाग - III:एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार (ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE)

1. Let $a > 2$, $a \in N$ be a constant. If there are just 18 positive integers satisfying the inequality $(x - a)(x - 2a)(x - a^2) < 0$ then which of the option(s) is/are correct?
(A) 'a' is composite (B*) 'a' is odd
(C) 'a' is greater than 8 (D*) 'a' lies in the interval (3, 11)
माना कि $a > 2$, $a \in N$ अचर है। यदि केवल 18 धनात्मक पूर्णांक असमिका $(x - a)(x - 2a)(x - a^2) < 0$ को सन्तुष्ट करते है तब निम्न में से कौनसा विकल्प सही है ?
(A) 'a' संयुक्त है। (B*) 'a' विषम है। (C) 'a', 8 से बड़ा है। (D*) 'a' अन्तराल (3, 11) में स्थित है।

Sol.



so इसलिए $a - 1 + a^2 - 2a - 1 = 18$

$a = 5, -4 \quad \therefore \quad a = 5$

2. Let N = $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$. Then N is :

(A*) a natural number (B*) a prime number (C*) a rational number (D*) an integer

माना N = $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$ हो, तो N है –

(A) एक प्राकृत संख्या (B) एक अभाज्य संख्या (C) एक परिमेय संख्या (D) एक पूर्णांक संख्या

Sol. N = $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$ = $(\log_3 27 + \log_3 5) - (\log_3 15)\ \log_3 5.\log_3 405$

= $(3 + \log_3 5)\ (1 + \log_3 5) - \log_3 5\ \log_3(81 \times 5) = (3 + \log_3 5)\ (1 + \log_3 5) - \log_3 5(4 + \log_3 5) = 3$

3. Values of x satisfying the equation $\log_5^2 x + \log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right) = 1$ are

समीकरण $\log_5^2 x + \log_{5x}\left(\frac{5}{x}\right) = 1$ को संतुष्ट करने वाले x के मान है–

(A*) 1 (B*) 5 (C*) $\frac{1}{25}$ (D) 3

Sol. $(\log_5 x)^2 + \log_{5x}\frac{5}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\log_5 x)^2 + \log_{5x}5 - \log_{5x}x = 1$

$\Rightarrow \quad (\log_5 x)^2 + \frac{\log_5 5}{\log_5 5 + \log_5 x} - \frac{\log_5 x}{\log_5 5 + \log_5 x} = 1$

$\Rightarrow \quad (\log_5 x)^2 + \frac{1}{1 + \log_5 x} - \frac{\log_5 x}{1 + \log_5 x} = 1$

Let $\log_5 x = t$

$\therefore \quad t^2 + \frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2(1+t) + 1 - t}{1+t} = 1 \quad \Rightarrow \quad t^3 + t^2 + 1 - t = 1 + t$

$t^3 + t^2 - 2t = 0 \quad ; \quad t(t^2 + t - 2) = 0 \quad ; \quad t(t - 1)(t + 2) = 0$

$t = 0, 1, -2$

$\therefore \quad \log_5 x = 0, 1, -2 \quad \therefore \quad x = 1, 5, \frac{1}{25}$

Hindi. $(\log_5 x)^2 + \log_{5x}\frac{5}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\log_5 x)^2 + \log_{5x}5 - \log_{5x}x = 1$

$\Rightarrow \quad (\log_5 x)^2 + \frac{\log_5 5}{\log_5 5 + \log_5 x} - \frac{\log_5 x}{\log_5 5 + \log_5 x} = 1$

$\Rightarrow \quad (\log_5 x)^2 + \frac{1}{1 + \log_5 x} - \frac{\log_5 x}{1 + \log_5 x} = 1$

माना $\log_5 x = t$

$\therefore \quad t^2 + \frac{1}{1+t} - \frac{t}{1+t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^2(1+t) + 1 - t}{1+t} = 1 \quad \Rightarrow \quad t^3 + t^2 + 1 - t = 1 + t$

$t^3 + t^2 - 2t = 0 \quad ; \quad t(t^2 + t - 2) = 0 \quad ; \quad t(t - 1)(t + 2) = 0$

$t = 0, 1, -2$

$\therefore \quad \log_5 x = 0, 1, -2 \quad \therefore \quad x = 1, 5, \frac{1}{25}$

4. The equation $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$ has :

(A*) one irrational solution (B*) no prime solution
(C*) two real solutions (D*) one integral solution

समीकरण $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$ के लिये –

(A) एक अपरिमेय हल विद्यमान हैं। (B) कोई अभाज्य हल विद्यमान नहीं।
(C) दो वास्तविक हल विद्यमान हैं। (D) एक पूर्णांक हल विद्यमान हैं।

Sol. $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3 \Rightarrow 4 \log_{x^2} 2 + 6 \log_{2x} 2 = 3$

$\Rightarrow \dfrac{4}{\log_2 x^2} + \dfrac{6}{\log_2 2x} = 3 \Rightarrow \dfrac{2}{\log_2 x} + \dfrac{6}{1+\log_2 x} = 3$

but लेकिन $\log_2 x = t$

$\therefore \dfrac{2}{t} + \dfrac{6}{1+t} = 3 \Rightarrow 2 + 2t + 6t = 3t + 3t^2$

$\Rightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0$

$\Rightarrow (3t + 1)(t - 2) = 0$

$\Rightarrow t = -\dfrac{1}{3}$, $t = 2$

$\Rightarrow \log_2 x = -\dfrac{1}{3}$, $\log_2 x = 2$

$\Rightarrow x = 2^{-1/3}$, $x = 4$

$= \dfrac{1}{2^{1/3}}$.

5. The equation $x^{\left[(\log_3 x)^2 - \frac{9}{2}\log_3 x + 5\right]} = 3\sqrt{3}$ has

(A*) exactly three real solution (B*) at least one real solution
(C*) exactly one irrational solution (D*) complex roots.

समीकरण $x^{\left[(\log_3 x)^2 - \frac{9}{2}\log_3 x + 5\right]} = 3\sqrt{3}$ के लिये –

(A) ठीक तीन वास्तविक हल विद्यमान है। (B) कम से कम एक वास्तविक हल विद्यमान है।
(C) ठीक एक अपरिमेय हल विद्यमान है। (D) सम्मिश्र मूल विद्यमान है।

Sol. $x^{\left[(\log_3 x)^2 - \frac{9}{2}\log_3 x + 5\right]} = 3\sqrt{3} \Rightarrow (\log_3 x)^3 - \dfrac{9}{2}\log_3 x + 5 = \log_x 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - \dfrac{9}{2}\log_3 x + 5 = \dfrac{3}{2}\log_x 3$

Let माना $\log_3 x = t \Rightarrow t^2 - \dfrac{9}{2}t + 5 = \dfrac{3}{2t} \Rightarrow 2t^3 - 9t^2 + 10t - 3 = 0$

t = 1 satisfies it t = 1 इसे संतुष्ट करता है।

अतः $2t^3 - 9t^2 + 10t - 3 = 2t^2(t-1) - 7t(t-1) + 3(t-1) = (t-1)\left(2t^2 - 7t + 3\right) = (t-1)(2t-1)(t-3)$

$\Rightarrow t = 1$, $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 3$

$\Rightarrow \log_3 x = 1$, $\log_3 x = \dfrac{1}{2}$, $\log_3 x = 3$

$\Rightarrow x = 3$, $x = 3^{1/2}$, $x = 27$.

6. The solution set of the system of equations $\log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2$ and $\log_{27}(x + y) = \dfrac{2}{3}$ is :

समीकरण निकाय $\log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2$ एवं $\log_{27}(x + y) = \dfrac{2}{3}$ के हलों का समुच्चय है–

(A*) {6, 3} (B*) {3, 6} (C) {6, 12} (D) {12, 6}

Sol. $\log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2$, $\log_{27}(x + y) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ $\log_3 xy = \log_3 9 + \log_3 2$, $\Rightarrow$ $x + y = (27)^{2/3}$

$\Rightarrow$ $xy = 18$, $\Rightarrow$ $x + y = 9$

$\Rightarrow$ $x = 6$ or $x = 3$

$y = 3$, $y = 6$

as $x > 0$, $y > 0$. (जैसाकि $x > 0$ एवं $y > 0$)

7. Consider the quadratic equation, $(\log_{10}8)x^2 - (\log_{10}5)x = 2(\log_2 10)^{-1} - x$. Which of the following quantities are irrational.

(A) sum of the roots (B) product of the roots

(C*) sum of the coefficients (D*) discriminant

माना कि द्विघात समीकरण $(\log_{10}8)x^2 - (\log_{10}5)x = 2(\log_2 10)^{-1} - x$ है। निम्न में से कौनसा अपरिमेय है।

(A) मूलों का योग (B) मूलों का गुणनफल

(C*) गुणाकों का योग (D*) विवेचक

Sol. $(\log_{10}8)x^2 - (\log_{10}5)x + x - 2\log_{10}2 = 0$

(A) sum of roots मूलों का योगफल = $\frac{-(1-\log_{10}5)}{\log_{10}8} = \frac{-\log_{10}\left(\frac{10}{5}\right)}{\log_{10}8} = \frac{-\log_{10}2}{3\log_{10}2} = \frac{-1}{3}$ rational परिमेय

(B) Product of roots मूलों का गुणन = $\frac{-2\log_{10}2}{\log_{10}8} = \frac{-2}{3}$

(C) sum of cofficient गुणाकों का योगफल = $\log_{10}8 - \log_{10}5 + 1 - \log_{10}4 = \log_{10}\left(\frac{8\times10}{5\times4}\right)$

= $\log_{10}4$ = irrational परिमेय

(D) Dirscriminant विवेचक = $(\log_{10}2)^2 - 4\log_{10}8(-2\log_{10}2) = (\log_{10}2)^2 + 24(\log_{10}2)^2$

$= 25(\log_{10}2)^2 = (5\log_{10}2)^2$

irrational अपरिमेय.

8. If $\log_a x = b$ for permissible values of a and x then identify the statement(s) which can be correct?

(A*) If a and b are two irrational numbers then x can be rational.

(B*) If a rational and b irrational then x can be rational.

(C*) If a irrational and b rational then x can be rational.

(D*) If a rational and b rational then x can be rational.

यदि $\log_a x = b$, a और x के स्वीकार्य मानों के लिए है, तब निम्न में से कौनसा कथन सही हो सकता है

(A*) यदि a तथा b दो अपरिमेय संख्याएं तब x परिमेय हो सकता है।

(B*) यदि a परिमेय तथा b अपरिमेय तब x परिमेय हो सकता है।

(C*) यदि a अपरिमेय है, b परिमेय है तब x परिमेय हो सकता है।

(D*) यदि a परिमेय और b परिमेय है तब x परिमेय हो सकता है।

Sol. $x = a^b$

(D) If a is rational & b is rational then x may be rational

(यदि a परिमेय है और b परिमेय है तब x परिमेय हो सकता है)

e.g. $= 2^2$

(C) $(\sqrt{2})^4$

(B) $(2)^{\log_2 3}$

(A) $(\sqrt{2})^{\log_2 9}$

9. Which of the following statements are true
निम्नलिखित में से कौनसे कथन सत्य हैं –
(A) $\log_2 3 < \log_{12} 10$ (B*) $\log_6 5 < \log_7 8$
(C*) $\log_3 26 < \log_2 9$ (D) $\log_{16} 15 > \log_{10} 11 > \log_7 6$

Sol. $\log_2 3 > 1,\ \log_{12} 10 < 1 \Rightarrow \log_2 3 > \log_{12} 10$
$\log_6 5 < 1,\ \log_7 8 > 1 \Rightarrow \log_6 5 < \log_7 8$
$\log_3 26 < 3,\ \log_2 9 > 3 \Rightarrow \log_3 26 < \log_2 9$
$\log_{16} 15 < 1,\ \log_{10} 11 > 1 \Rightarrow \log_{16} 15 < \log_{10} 11$

10. If $\frac{1}{2} \le \log_{0.1} x \le 2$, then
(A*) maximum value of x is $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B*) x lies between $\frac{1}{100}$ and $\frac{1}{\sqrt{10}}$
(C) minimum value of x is $\frac{1}{10}$ (D*) minimum value of x is $\frac{1}{100}$

यदि $\frac{1}{2} \le \log_{0.1} x \le 2$ हो, तो
(A) x का अधिकतम मान $\frac{1}{\sqrt{10}}$ है। (B) x का मान $\frac{1}{100}$ और $\frac{1}{\sqrt{10}}$ के बीच में है।
(C) x का न्यूनतम मान $\frac{1}{10}$ है। (D) x का न्यूनतम मान $\frac{1}{100}$ है।

Sol. $\frac{1}{2} \le \log_{1/10} x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{100} \le x \le \frac{1}{\sqrt{10}}$

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

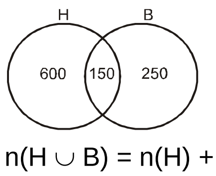
Comprehension # 1 (1 to 3)
अनुच्छेद # 1 (1 to 3)

In a group of 1000 people, there are 750 people, who can speak Hindi and 400 people, who can speak Bengali.
1000 व्यक्तियों के समूह में से 750 व्यक्ति हिन्दी और 400 व्यक्ति बंगाली बोल सकते हैं।

1. Number of people who can speak Hindi only is
केवल हिन्दी बोलने वाले व्यक्तियों की संख्या है–
(A) 300 (B) 400 (C) 500 (D*) 600

2. Number of people who can speak Bengali only is
केवल बंगाली बोलने वाले व्यक्तियों की संख्या है–
(A) 150 (B*) 250 (C) 50 (D) 100

3. Number of people who can speak both Hindi and Bengali is
हिन्दी और बंगाली दोनों भाषाएं बोलने वाले व्यक्तियों की संख्या है–
(A) 50 (B) 100 (C*) 150 (D) 200

Sol.


$n(H \cup B) = n(H) + n(B) - n(H \cap B)$

$1000 = 750 + 400 - n(H \cap B)$ *= 150*

Now $n(\text{only hindi}) = n(H) - n(H \cap B) = 750 - 150 = 600$

$n(\text{only bengali}) = n(B) - n(H \cap B)$

$400 - 150 = 250$

Comprehension # 2 (4 to 6)

Let A denotes the sum of the roots of the equation $\frac{1}{5-4\log_4 x} + \frac{4}{1+\log_4 x} = 3$.

B denotes the value of the product of m and n, if $2^m = 3$ and $3^n = 4$.

C denotes the sum of the integral roots of the equation $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3 x)^2 = 1$.

4. The value of A + B equals
(A) 10 (B) 6 (C*) 8 (D) 4

5. The value of B + C equals
(A*) 6 (B) 2 (C) 4 (D) 8

6. The value of A + C ÷ B equals
(A) 5 (B*) 8 (C) 7 (D) 4

अनुच्छेद # 2 (4 to 6)

माना समीकरण $\frac{1}{5-4\log_4 x} + \frac{4}{1+\log_4 x} + = 3$ के मूलों का योगफल A को व्यक्त करता है।

यदि $2^m = 3$ और $3^n = 4$ हो, तो m और n के गुणनफल का मान B है

समीकरण $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3 x)^2 = 1$ के पूर्णांक मूलों का योगफल C है।

4. A + B बराबर है
(A) 10 (B) 6 (C*) 8 (D) 4

5. B + C बराबर है
(A*) 6 (B) 2 (C) 4 (D) 8

6. A + C ÷ B बराबर है
(A) 5 (B*) 8 (C) 7 (D) 4

Sol. Let माना $\log_4 x = t$ $\Rightarrow$ $1 + t + 4(5 - 4t) = 3(5 - 4t)(1 + t)$

$21 - 15t = 15 + 3t - 12t^2$

$\Rightarrow$ $12t^2 - 18t + 6 = 0$ $\Rightarrow$ $2t^2 - 3t + 1 = 0$

$t = 1, t = 1/2$ $\Rightarrow$ $x = 4'$ or $x = 4^{1/2} = 2$

A = sum of roots मूलों का योग = 4 + 2 = 6

for B के लिए : $2^m = 3, 3^n = 4$ $\Rightarrow$ $m = \log_2 3,$ $\Rightarrow$ $n = \log_3 4$

$\Rightarrow$ Now अब $mn = \log_2 3.(\log_3 2^2) = 2$

B = 2

for C के लिए : $\frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x} + (\log_3 x)^2 = 1$ $\Rightarrow$ $1 - t + t^2(1 + t) = 1 + t$

$\Rightarrow$ $t^2 + t^3 - t = t$

$t^3 + t^2 - 2t = 0$ $\Rightarrow$ $t(t^2 + t - 2) = 0$ $\Rightarrow$ $t = 0, t = -2, t = 1$

$x = 3^t$ $\Rightarrow$ $x = 3^\circ = 1, x = 3' = 3$

$x = 3^{-2} = 1/9$

sum of integral root पूर्णांक मूलों का योगफल = C = 1 + 3 = 4

(4) A + B = 6 + 2 = 8

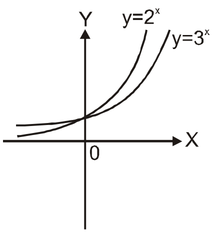
(5) B + C = 2 + 4 = 6

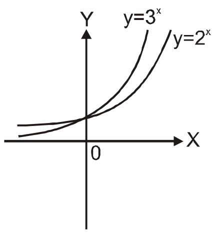
(6) A + C ÷ B = 6 + 4 ÷ 2 = 6 + 2 = 8

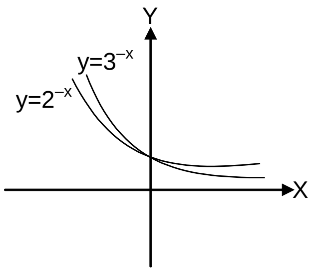
Comprehension # 3 (Q.7- to Q.9)

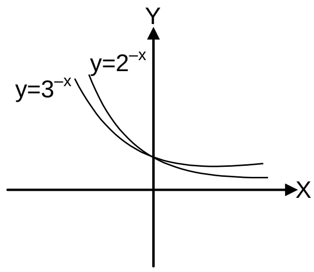
A function $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1, x \in R)$ is called an exponential function. Graph of exponential function can be as follows :
फलन $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1, x \in R)$ एक चरघातांकी फलन है। घातांकी फलनों के आरेख निम्न है।

7. Which of the following is correct :
निम्न में से कौनसा सही है?

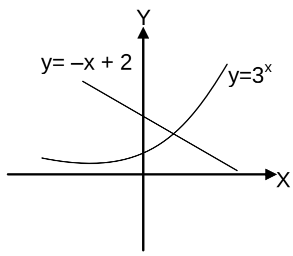
(A)


(B*)


(C*)


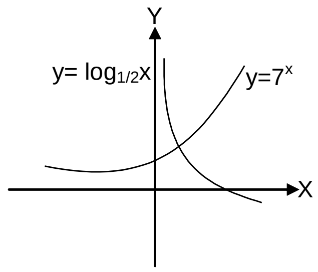
(D)


8. Number of solutions of $3^x + x - 2 = 0$ is/are :
समीकरण $3^x + x - 2 = 0$ के हलों की संख्या है :
(A*) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Sol.


9. The number of positive solutions of $\log_{1/2}x = 7^x$ is/are :
समीकरण $\log_{1/2}x = 7^x$ के धनात्मक हलों की संख्या है :
(A) 0 (B*) 1 (C) 2 (D) 3

Sol.



Exercise-3

✍ **Marked questions are recommended for Revision.**

✍ **चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।**

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

*** Marked Questions may have more than one correct option.**
*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -**

1. Indicate all correct alternatives, where base of the log is 2. **[JEE '89]**
The equation $x^{(3/4)(\log x)^2 + \log x - (5/4)} = \sqrt{2}$ has :
(A*) at least one real solution (B*) exactly three real solutions
(C*) exactly one irrational solution (D*) complex roots
सभी सही वैकल्कि हलों को पहचानिए जिसका log का आधार 2 है। समीकरण
$x^{(3/4)(\log x)^2 + \log x - (5/4)} = \sqrt{2}$ रखती है। **[JEE '89]**

(A*) कम से कम एक वास्तविक हल (B*) ठीक तीन वास्तविक हल
(C*) ठीक एक अपरिमेय हल (D*) सम्मिश्र मूल

2. The number $\log_2 7$ is :
(A) an integer (B) a rational number
(C*) an irrational number (D) a prime number **[JEE '90]**
संख्या $\log_2 7$ है : **[JEE '89]**
(A) एक पूर्णांक (B) एक परिमेय संख्या
(C*) एक अपरिमेय संख्या (D) एक अभाज्य संख्या

3.✍ Find all real numbers x which satisfy the equation
$2 \log_2 \log_2 x + \log_{1/2} \log_2 (2\sqrt{2}\ x) = 1$. **[REE – 1999, 6]**
x के वे सभी वास्तविक मान ज्ञात कीजिए जो समीकरण $2 \log_2 \log_2 x + \log_{1/2} \log_2 (2\sqrt{2}\ x) = 1$ को सन्तुष्ट करते है।

Ans. x = 8

Sol. $2 \log_2 \log_2 x + \log_{1/2} \log_2 \left(2\sqrt{2}\,x\right) = 1 \Rightarrow \log_2 (\log_2 x)^2 - \log_2 \log_2 \left(2\sqrt{2}\,x\right) = 1$

$\Rightarrow \log_2 \dfrac{(\log_2 x)^2}{\log_2\left(2\sqrt{2}\,x\right)} = 1 \Rightarrow \dfrac{(\log_2 x)^2}{\frac{3}{2} + \log_2 x} = 2$

let माना $\log_2 x = y$

$\therefore$ $y^2 - 2y - 3 = 0$ $\Rightarrow$ $(y - 3)(y + 1) = 0$

$\therefore$ $y = 3, -1$ $\Rightarrow$ $\log_2 x = 3, -1,$

but लेकिन $\log_2 x > 0$

$\therefore$ $\log_2 x = -1$ is not possible सम्भव नहीं है।

$\Rightarrow$ $x = 8$

4. Solve the equation $\log_{3/4} \log_8 (x^2 + 7) + \log_{1/2} \log_{1/4} (x^2 + 7)^{-1} = -2$. **[REE–2000, 5]**

समीकरण $\log_{3/4} \log_8 (x^2 + 7) + \log_{1/2} \log_{1/4} (x^2 + 7)^{-1} = -2$ को हल कीजिए।

Ans. x = 3 or या – 3

Sol. $\log_{3/4} \log_8 (x^2 + 7) + \log_{1/2} \log_{1/4} (x^2 + 7)^{-1} = -2$

$\Rightarrow$ $\log_{3/4} \frac{1}{3} \log_2 (x^2 + 7) - \log_2 \frac{\log_2(x^2+7)}{2} = -2$

let (माना) $\log_2 (x^2 + 7) = t$

$\Rightarrow$ $\log_{3/4} \frac{t}{3} - \log_2 \frac{t}{2} + 2 = 0$ $\Rightarrow$ $\log_{3/4} \frac{t}{3} + 1 - \left(\log_2 \frac{t}{2} - 1\right) = 0$

$\Rightarrow$ $\log_{3/4} \frac{t}{4} = \log_2 \frac{t}{4}$ $\Rightarrow$ $\frac{t}{4} = 1 \Rightarrow$ $t = 4$

$\therefore$ $\log_2 (x^2 + 7) = 4$

this gives अतः $x = \pm 3$

5. The number of solution(s) of $\log_4(x - 1) = \log_2(x - 3)$ is/are **[IIT-JEE-2002, Scr., (1, 0)/35]**

$\log_4(x - 1) = \log_2(x - 3)$ के हलों की संख्या है–

(A) 3 (B*) 1 (C) 2 (D) 0

Sol. $\frac{1}{2}\log_2(x - 1) = \log_2 (x - 3) \Rightarrow$ $\sqrt{x-1} = x - 3$

$(x - 1) = x^2 - 6x + 9$ $\Rightarrow$ $x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 5)(x - 2) = 0$ but (लेकिन) $x \neq 2$

$\therefore$ $x = 5$

6. Let $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 6}$ **[IIT-JEE 2007, Paper-2, (6, 0), 81]**

Column – I		**Column – II**	
(A)	If $-1 < x < 1$, then f(x) satisfies	(p)	$0 < f(x) < 1$
(B)	If $1 < x < 2$, then f(x) satisfies	(q)	$f(x) < 0$
(C)	If $3 < x < 5$, then f(x) satisfies	(r)	$f(x) > 0$
(D)	If $x > 5$, then f(x) satisfies	(s)	$f(x) < 1$

माना कि $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 6}$

स्तम्भ– I		**स्तम्भ – II**	
(A)	यदि $-1 < x < 1$, तब f(x) संतुष्ट करता है	(p)	$0 < f(x) < 1$
(B)	यदि $1 < x < 2$, तब f(x) संतुष्ट करता है	(q)	$f(x) < 0$
(C)	यदि $3 < x < 5$, तब f(x) संतुष्ट करता है	(r)	$f(x) > 0$

(D) यदि $x > 5$, तब $f(x)$ संतुष्ट करता है (s) $f(x) < 1$

Ans. (A) $\rightarrow$ (p), (r), (s) ; (B) $\rightarrow$ (q), (s) ; (C) $\rightarrow$ (q), (s) ; (D) $\rightarrow$ (p), (r), (s)

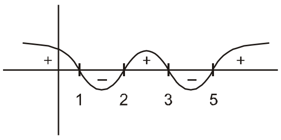
Sol. Given दिया गया है $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 6}$

(i) when यदि $0 < f(x) < 1$ then तो $0 < \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x^2 - 5x + 6)} < 1$

So अतः $\dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-2)(x-3)} > 0$ and और $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 6} - 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)}{(x-2)(x-3)} > 0$

$\Rightarrow$ $x \in (-1, 1) \cup (5, 0)$

(ii) when यदि $f(x) < 0$

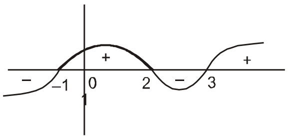


तो $\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-3)} < 0$

$\Rightarrow$ $x \in (1, 2) \cup (3, 5)$

(iii) $f(x) > 0, x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (5, \infty)$

(iv) $f(x) < 1 \Rightarrow \dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)} > 0$



$x \in (-1, 2) \cup (3, \infty)$

(A) $-1 < x < 1$, $f(x)$ satisfies p, q, s

(B) $1 < x < 2$, $f(x)$ satisfies q, s

(C) $3 < x < 5$, $f(x)$ satisfies q, s

(D) $x > 5$, $f(x)$ satisfies p, r, s

(A) $-1 < x < 1$ होने पर $f(x)$, विकल्पों p, q एवं s को संतुष्ट करता है।

(B) $1 < x < 2$ होने पर $f(x)$, विकल्पों q एवं s को संतुष्ट करता है।

(C) $3 < x < 5$ होने पर $f(x)$, विकल्पों q एवं s को संतुष्ट करता है।

(D) $x > 5$ होने पर $f(x)$, विकल्पों p, r एवं s को संतुष्ट करता है।

7. Let (x_0, y_0) be the solution of the following equations

$$(2x)^{\ell n2} = (3y)^{\ell n3}$$
$$3^{\ell nx} = 2^{\ell ny}.$$

Then x_0 is

यदि (x_0, y_0) समीकरणों

$$(2x)^{\ell n2} = (3y)^{\ell n3}$$
$$3^{\ell nx} = 2^{\ell ny}.$$

का हल है, तो x_0 का मान है– **[IIT-JEE 2011, Paper-1, (3, –1), 80]**

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C*) $\dfrac{1}{2}$ (D) 6

Ans. (C)

Sol. $(2x)^{\ell n2} = (3y)^{\ell n3}$

$\Rightarrow \ell n2\ \ell n(2x) = \ell n3\ \ell n(3y) = \ell n3\ (\ell n3 + \ell ny)$ .... (1)

also $3^{\ell nx} = 2^{\ell ny}$

$\Rightarrow \ell nx\ \ell n3 = \ell ny\ \ell n2$ .... (2)

by (1) $\Rightarrow \ell n2\ \ell n(2x) = \ell n3\ (\ell n3 + \ell ny) \Rightarrow \ell n\,2\,.\,\ell n\,(2x) = \ell n3\left\{\ell n3 + \frac{\ell nx\ell n3}{\ell n2}\right\}$

$\Rightarrow \ell n^2 2\ \ell n2x = \ell n^2 3\ (\ell n2 + \ell nx) \Rightarrow \left(\ell n^2 2 - \ell n^2 3\right)(\ell n2x) = 0 \Rightarrow \ell n2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Hindi $(2x)^{\ell n2} = (3y)^{\ell n3}$

$\Rightarrow \ell n2\ \ell n(2x) = \ell n3\ \ell n(3y) = \ell n3\ (\ell n3 + \ell ny)$ .... (1)

तथा also $3^{\ell nx} = 2^{\ell ny}$

$\Rightarrow \ell nx\ \ell n3 = \ell ny\ \ell n2$ .... (2)

(1) से $\Rightarrow \ell n2\ \ell n(2x) = \ell n3\ (\ell n3 + \ell ny) \Rightarrow \ell n\,2\,.\,\ell n\,(2x) = \ell n3\left\{\ell n3 + \frac{\ell nx\ell n3}{\ell n2}\right\}$

$\Rightarrow \ell n^2 2\ \ell n2x = \ell n^2 3\ (\ell n2 + \ell nx) \Rightarrow \left(\ell n^2 2 - \ell n^2 3\right)(\ell n2x) = 0 \Rightarrow \ell n2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

8. The value of $6+\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}....}}}\right)$ is **[IIT-JEE 2012, Paper-1, (4, 0), 70]**

पद $6+\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}....}}}\right)$ का मान है। **[Revision Plannar_15]**

Sol. Ans (4)

Let $\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}}}\,....... = t \Rightarrow \sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}t} = t \Rightarrow 4-\frac{1}{3\sqrt{2}}\ t = t^2 \Rightarrow$

$t^2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\ t - 4 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2}\,t^2 + t - 12\sqrt{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\times3\sqrt{2}\times12\sqrt{2}}}{2\times3\sqrt{2}} = \frac{-1\pm17}{2\times3\sqrt{2}}$

$t = \frac{16}{6\sqrt{2}}, \frac{-18}{6\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{8}{3\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}$ and $\frac{-3}{\sqrt{2}}$ is rejected

so $6 + \log_{3/2}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\times\frac{8}{3\sqrt{2}}\right) = 6 + \log_{3/2}\left(\frac{4}{9}\right) = 6 + \log_{3/2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 6 - 2 = 4$

Hindi. माना $\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}}}\,....... = t \Rightarrow \sqrt{4-\frac{1}{3\sqrt{2}}t} = t \Rightarrow 4-\frac{1}{3\sqrt{2}}\ t = t^2 \Rightarrow$

$t^2 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\ t - 4 = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2}\,t^2 + t - 12\sqrt{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\times3\sqrt{2}\times12\sqrt{2}}}{2\times3\sqrt{2}} = \frac{-1\pm17}{2\times3\sqrt{2}}$

$t = \frac{16}{6\sqrt{2}}, \frac{-18}{6\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{8}{3\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}$ और $\frac{-3}{\sqrt{2}}$ निरस्त होगा

अतः $6 + \log_{3/2}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\times\frac{8}{3\sqrt{2}}\right) = 6 + \log_{3/2}\left(\frac{4}{9}\right) = 6 + \log_{3/2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 6 - 2 = 4$

9*. If $3^x = 4^{x-1}$, then x = **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60] (FOM-II)**

यदि $3^x = 4^{x-1}$, तब x = **[JEE (Advanced) 2013, Paper-2, (3, –1)/60] (FOM-II)**

(A) $\frac{2\log_3 2}{2\log_3 2-1}$ (B) $\frac{2}{2-\log_2 3}$ (C) $\frac{1}{1-\log_4 3}$ (D) $\frac{2\log_2 3}{2\log_2 3-1}$

Sol. (A, B, C)

$3^x = 4^{x-1}$ $\Rightarrow$ $x = (x-1)\log_3 4$ $\Rightarrow$ $x(1 - 2\log_3 2) = -2\log_3 2$

$x = \dfrac{2\log_3 2}{2\log_3 2 - 1}$ **Ans. (A)**

Again पुनः $x\log_2 3 = (x-1)\cdot 2 \Rightarrow x(\log_2 3 - 2) = -2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{2-\log_2 3}$ **Ans. (B)**

$x = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}\log_2 3} = \dfrac{1}{1-\log_4 3}$ **Ans.(C)**

10. The value of $((\log_2 9)^2)^{\frac{1}{\log_2(\log_2 9)}} \times (\sqrt{7})^{\frac{1}{\log_4 7}}$ is ___________.**[JEE(Advanced) 2018, Paper-1,(4, –2)/60]**

$((\log_2 9)^2)^{\frac{1}{\log_2(\log_2 9)}} \times (\sqrt{7})^{\frac{1}{\log_4 7}}$ का मान है ___________. **[JEE(Advanced) 2018, Paper-1,(4, –2)/60]**

Ans. **(8)**

Sol. $\left((\log_2 9)^2\right)^{\frac{1}{\log_2(\log_2 9)}} \times (\sqrt{7})^{\log_7 4}$

$(\log_2 9)^{2\log_{(\log_2 9)} 2}.(2) = 4.2 = 8$

PART - II : PREVIOUS YEARS PROBLEMS OF MAINS LEVEL

भाग - II : पिछले वर्षो के प्रश्न MAINS स्तर के

1. If $\log_p x = \alpha$ and $\log_q x = \beta$, then the value of $\log_{p/q} x$ is **[KCET-1997]**

यदि $\log_p x = \alpha$ तथा $\log_q x = \beta$, तो $\log_{p/q} x$ का मान है

(1) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}$ (2) $\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}$ (3) $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}$ (4*) $\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}$

2. If $\log_x a$, $a^{x/2}$ and $\log_b x$ are in G.P. Then x is equal to **[KCET-1998]**

(1*) $\log_a(\log_b a)$ (2) $\log_a(\log_e a) + \log_a \log_b b$ (3) $-\log_a(\log_a b)$ (4) none of these

यदि $\log_x a$, $a^{x/2}$ तथा $\log_b x$ गुणोत्तर श्रेणी में है, तो x बराबर है

(1*) $\log_a(\log_b a)$ (2) $\log_a(\log_e a) + \log_a \log_b b$ (3) $-\log_a(\log_a b)$ (4) इनमें से कोई नहीं

3. If $\log_x 256 = 8/5$, then x is equal to **[KCET-2000]**

यदि $\log_x 256 = 8/5$, तो x का मान है

(1) 64 (2) 16 (3*) 32 (4) 8

4. If log 2, $\log(2^x - 1)$ and $\log(2^x + 3)$ are in A.P., then x is equal to **[KCET-2000]**

यदि log 2, $\log(2^x - 1)$ तथा $\log(2^x + 3)$ समान्तर श्रेणी मे है, तो x का मान है

(1) 5/2 (2*) $\log_2 5$ (3) $\log_2 3$ (4) $\log_3 2$

5. The number $\log_2 7$ is **[DCE-2000]**

(1) an integer (2) a rational (3*) an irrational (4) a prime number

संख्या $\log_2 7$ है

(1) पूर्णांक (2) परिमेय (3*) अपरिमेय (4) अभाज्य संख्या

6. The roots of the equation $\log_2(x^2 - 4x + 5) = (x - 2)$ are **[KCET-2001]**
समीकरण $\log_2(x^2 - 4x + 5) = (x - 2)$ के हल है
(1) 4, 5 (2) 2, – 3 (3*) 2, 3 (4) 3, 5

7. If x = 198 !, then value of the expression $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + ... + \frac{1}{\log_{198} x}$ equals **[DCE-2005]**
यदि x = 198 !, तो व्यंजक $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + ... + \frac{1}{\log_{198} x}$ का मान बराबर है
(1) –1 (2) 0 (3*) 1 (4) 198

8. If $\log_{0.3}(x - 1) < \log_{0.09}(x - 1)$, then x lies in the intervel **[DCE-2006]**
(1*) $(2, \infty)$ (2) (1, 2) (3) (–2, –1) (4) none of these
यदि $\log_{0.3}(x - 1) < \log_{0.09}(x - 1)$, तो x किस अन्तराल मे स्थित है
(1*) $(2, \infty)$ (2) (1, 2) (3) (–2, –1) (4) इनमें से कोई नहीं

9. If A, B and C are three sets such that $A \cap B = A \cap C$ and $A \cup B = A \cup C$, then **[AIEEE-2009, (4, – 1), 144]**
यदि A, B एवं C तीन समुच्चय इस प्रकार है कि $A \cap B = A \cap C$ एवं $A \cup B = A \cup C$ तब–
(1) A = C (2*) B = C (3) $A \cap B = \phi$ (4) A = B

Sol. We have, $A \cup B = A \cup C$ $\Rightarrow$ $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C$
$\Rightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) = C$ $[\because (A \cup C) \cap C = C]$
$\Rightarrow (A \cap B) \cup (B \cap C) = C$ ...(i) $[\because A \cap C = A \cap B]$
Again, $A \cup B = A \cup C$
$\Rightarrow (A \cup B) \cap B = (A \cup C) \cap B$ $\Rightarrow$ $B = (A \cap B) \cup (C \cap B)$
$\Rightarrow (A \cap B) \cup (C \cap B) = B$ $\Rightarrow$ $(A \cap B) \cup (B \cap C) = B$ ...(ii)
From (i) and (ii), we get B = C

Hindi. हमें दिया है कि, $A \cup B = A \cup C$ $\Rightarrow$ $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap C$
$\Rightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) = C$ $[\because (A \cup C) \cap C = C]$
$\Rightarrow (A \cap B) \cup (B \cap C) = C$ ...(i) $[\because A \cap C = A \cap B]$
पुनः, $A \cup B = A \cup C$
$\Rightarrow (A \cup B) \cap B = (A \cup C) \cap B$ $\Rightarrow$ $B = (A \cap B) \cup (C \cap B)$
$\Rightarrow (A \cap B) \cup (C \cap B) = B$ $\Rightarrow$ $(A \cap B) \cup (B \cap C) = B$ ...(ii)
समीकरण (i) तथा (ii) से, B = C

10. Let X = {1, 2, 3, 4, 5}. The number of different ordered pairs (Y, Z) that can formed such that $Y \subseteq X$, $Z \subseteq X$ and $Y \cap Z$ is empty, is : **[AIEEE-2012, (4, – 1), 120]**
माना X = {1, 2, 3, 4, 5} है। इससे निर्मित किए जा सकने वाले विभिन्न क्रमिक युग्मों (Y, Z), जो इस प्रकार हैं कि $Y \subseteq X$, $Z \subseteq X$ तथा $Y \cap Z$ रिक्त समुच्चय है, की संख्या है :
(1) 5^2 (2*) 3^5 (3) 2^5 (4) 5^3

Sol. Every element has 3 options. Either set Y or set Z or none
so number of ordered pairs = 3^5

Hindi प्रत्येक अवयव के लिए तीन विकल्प है या तो समुच्चय Y में या समुच्चय Z में या किसी भी समुच्चय में नहीं
अतः क्रमित युग्मों की संख्या = 3^5

11. If $X = \{4^n - 3n - 1 : n \in N\}$ and $Y = \{9(n - 1) : n \in N\}$, where N is the set of natural numbers, then $X \cup Y$ is equal to **[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]**

यदि $X = \{4^n - 3n - 1 : n \in N\}$ तथा $Y = \{9(n - 1) : n \in N\}$, है, जहाँ N प्राकृत्त संख्याओं का समुच्चय है, तो $X \cup Y$ बराबर है— **[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]**

(1) X (2) Y (3) N (4) Y – X

Sol. **Ans. (2)**

$X = \{0, 9, ... 4^n - 3n - 1\}$

$Y = \{0, 9, ..., 9(n - 1)\}$

Now $4^n - 3n - 1 = (3 + 1)^n - 3n - 1$

$= 3^n + n.3^{n-1} + ... + {}^nC_2 .9.$

is a multiple of 9.

Also Y consists of all multiples of '9' from 0, 9,.......

Hence all values of X are subset of values of Y.

Thus $X \cup Y = Y$

Hindi. $X = \{0, 9, ... 4^n - 3n - 1\}$

$Y = \{0, 9, ..., 9(n - 1)\}$

अब $Y^n - 3n - 1 = (3 + 1)^n - 3n - 1$

$= 3^n + n.3^{n-1} + ... + {}^nC_2 .9.$

9 का गुणज है

तथा Y, 9 के सभी गुणज रखता है 0, 9,.......

अतः X के सभी मान Y के मानों का उपसमुच्चय है

अतः $X \cup Y = Y$

12. The sum of all real values of x satisfying the equation $(x^2 - 5x + 5)^{x^2+4x-60} = 1$ is

[JEE(Main) 2016, (4, – 1), 120]

x के उन सभी वास्तविक मानों का योग जो समीकरण $(x^2 - 5x + 5)^{x^2+4x-60} = 1$ को संतुष्ट करते हैं, है :

(1) – 4 (2) 6 (3) 5 (4) 3

Ans. (4)

Sol. $(x^2 - 5x + 5)^{x^2+4x-60} = 1$

$x^2 - 5x + 5 = 1$ | $x^2 + 4x - 60 = 0$ | $x^2 - 5x + 5 = -1$

$x^2 - 5x + 4 = 0$ | $x = -10, x = 6$ | $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 1, x = 4$ | | $x = 2, 3$

at x=2(पर), $x^2 + 4x - 60 = -48$ (even) (सम)

$\therefore$ x=2 is valid (वैद्य है)

at x=3(पर),$x^2 + 4x - 60 = -39$ (odd) (विाम है)

$\therefore$ x = 3 is invalid (अवैद्य है)

$x = 1, 2, 4, 6, -10$

13. In a class 140 students numbered 1 to 140, all even numbered students opted Mathematics course, those whose number is divisible by 3 opted Physics course and those whose number is divisible 5 opted Chemistry course. Then the number of student who **did not** opt for any of the three courses is :

[JEE(Main) 2019, Online (10-01-19),P-1 (4, – 1), 120]

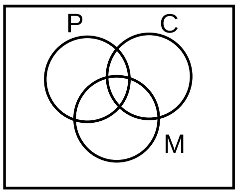
140 विद्यार्थियों, जिनके क्रमांक 1 से 140 हैं, की एक कक्षा में सभी सम क्रमांक के विद्यार्थियों ने गणित विषय चुना है, उन्होंने जिनके क्रमांक 3 से विभाजित होते हैं भौतिक शास्त्र विषय चुना है तथा उन्होंने जिनके क्रमांक 5 से विभाजित होते हैं, रसायन शास्त्र विषय चुना है। तो उन विद्यार्थियों की संख्या, जिन्होने इन तीन में से कोई भी विषय नहीं चुना है, हैं:

(1) 38 (2) 42 (3) 102 (4) 1

Ans. (1)

Sol. $n(P) = \left[\frac{140}{3}\right] = 46$

$n(C) = \left[\frac{140}{5}\right] = 28$



$n(M) = \left[\frac{140}{2}\right] = 70$

$n(P \cup C \cup M) = n(P) + n(C) + n(M) - n(P \cap C) - n(C \cap M) - n(M \cap P) + n(P \cap M \cap C)$

$= 46 + 28 + 70 - \left[\frac{140}{15}\right] - \left[\frac{140}{10}\right] - \left[\frac{140}{6}\right] + \left[\frac{140}{30}\right]$

$= 144 - 9 - 14 - 23 + 4$

$= 102$

so required number of student = 140 – 102 = 38

अतः आवश्यक विद्यार्थियों की संख्या = 140 – 102 = 38

14. Let $X = \{n \in N: 1 \le n \le 50\}$. If $A = \{n \in X$: n is a multiple of 2$\}$; $B = \{n \in X$: n is a multiple of 7$\}$, then the number of elements in the smallest subset of X containing both A and B is__________.

माना $X = \{n \in N: 1 \le n \le 50\}$. यदि $A = \{n \in X$: n, 2 का एक गुणज है$\}$; $B = \{n \in X$: n, 7 का एक गुणज है$\}$, तो X के सबसे छोटे उपसमुच्चय, जिसमें A तथा B दोनों हैं, में अवयवों की संख्या है__________.

Ans. **29** **[JEE(Main) 2020, Online (07-01-20),P-2 (4, 0), 120]**

Sol. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 25 + 7 - 3$

$= 29$

LOGARITHM TABLE

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	5 9 13 4 8 12	17 21 26 16 20 24	30 34 38 28 32 36
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 8 12 4 7 11	16 20 23 15 18 22	27 31 35 26 29 33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 7 11 3 7 10	14 18 21 14 17 20	25 28 32 24 27 31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	36 10 37 10	13 16 19 13 16 19	23 26 29 22 25 29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	36 9 36 9	12 15 19 12 14 17	22 25 28 22 25 26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 6 9 3 6 8	11 14 17 11 14 17	20 23 26 19 22 25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 6 8 3 5 8	11 14 16 10 13 16	19 22 24 18 21 23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3 5 8 3 5 8	10 13 15 10 12 15	18 20 23 17 20 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 5 7 2 4 7	9 12 14 9 11 14	17 19 21 16 18 21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 4 7 2 4 6	9 11 13 8 11 13	16 18 20 15 17 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8

LOGARITHM TABLE

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 2	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 5	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1 2 2	3 4 5	5 6 7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1 2 2	3 4 5	5 6 7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1 2 2	3 4 5	5 6 7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1 1 2	3 4 4	5 6 7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1 1 2	3 4 4	5 6 6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1 1 2	3 4 4	5 6 6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	9766	7973	7980	7987	1 1 2	3 3 4	5 6 6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1 1 2	3 3 4	5 5 6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1 1 2	3 3 4	5 5 6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1 1 2	3 3 4	5 5 6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1 1 2	3 3 4	5 5 6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1 1 2	3 3 4	5 5 6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1 1 2	3 3 4	4 5 6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1 1 2	2 3 4	4 5 6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1 1 2	2 3 4	4 5 6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1 1 2	2 3 4	4 5 5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1 1 2	2 3 4	4 5 5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1 1 2	2 3 4	4 5 5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1 1 2	2 3 4	4 5 5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1 1 2	2 3 3	4 5 5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1 1 2	2 3 3	4 5 5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1 1 2	2 3 3	4 4 5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1 1 2	2 3 3	4 4 5
79	8976	9882	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1 1 2	2 3 3	4 4 5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1 1 2	2 3 3	4 4 5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1 1 2	2 3 3	4 4 5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0 1 1	2 2 3	3 4 4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0 1 1	2 2 3	3 4 4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0 1 1	2 2 3	3 4 4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0 1 1	2 2 3	3 4 4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0 1 1	2 2 3	3 4 4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0 1 1	2 2 3	3 4 4
93	9685	9689	9694	8699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0 1 1	2 2 3	3 4 4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0 1 1	2 2 3	3 4 4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0 1 1	2 2 3	3 4 4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0 1 1	2 2 3	3 4 4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0 1 1	2 2 3	3 4 4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0 1 1	2 2 3	3 4 4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0 1 1	2 2 3	3 4 4

ANTILOGARITHM TABLE

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0 0 1	1 1 1	2 2 2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0 0 1	1 1 1	2 2 2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0 0 1	1 1 1	2 2 2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0 0 1	1 1 1	2 2 2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0 1 1	1 1 2	2 2 2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0 1 1	1 1 2	2 2 2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0 1 1	1 1 2	2 2 2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0 1 1	1 1 2	2 2 2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0 1 1	1 1 2	2 2 3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0 1 1	1 1 2	2 2 3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0 1 1	1 1 2	2 2 3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0 1 1	1 2 2	2 2 3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0 1 1	1 2 2	2 2 3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0 1 1	1 2 2	2 3 3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0 1 1	1 2 2	2 3 3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0 1 1	1 2 2	2 3 3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0 1 1	1 2 2	2 3 3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0 1 1	1 2 2	2 3 3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0 1 1	1 2 2	2 3 3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0 1 1	1 2 2	3 3 3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0 1 1	1 2 2	3 3 3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0 1 1	2 2 2	3 3 3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0 1 1	2 2 2	3 3 3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0 1 1	2 2 2	3 3 4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0 1 1	2 2 2	3 3 4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0 1 1	2 2 2	3 3 4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0 1 1	2 2 3	3 3 4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0 1 1	2 2 3	3 3 4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1841	1845	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0 1 1	2 2 3	3 4 4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2328	2234	1 1 2	2 3 3	4 4 5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1 1 2	2 3 3	4 4 5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1 1 2	2 3 3	4 4 5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1 1 2	2 3 3	4 4 5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2432	2427	2432	2443	2449	1 1 2	2 3 3	4 4 5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1 1 2	2 3 3	4 5 5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1 1 2	2 3 4	4 5 5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1 1 2	2 3 4	4 5 5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1 1 2	2 3 4	4 5 6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1 1 2	3 3 4	4 5 6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1 1 2	3 3 4	4 5 6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1 1 2	3 3 4	5 5 6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1 1 2	3 3 4	5 5 6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1 1 2	3 3 4	5 5 6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1 1 2	3 4 4	5 6 6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1 1 2	3 4 4	5 6 6

ANTILOGARITHM TABLE

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1 1 2	3 4 4	5 6 7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1 2 2	3 4 5	5 6 7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1 2 2	3 4 5	5 6 7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1 2 2	3 4 5	6 6 7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1 2 2	3 4 5	6 6 7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1 2 2	3 4 5	6 6 7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1 2 3	3 4 5	6 7 8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1 2 3	3 4 5	6 7 8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1 2 3	4 4 5	6 7 8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1 2 3	4 5 5	6 7 8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1 2 3	4 5 6	6 7 8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4156	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1 2 3	4 5 6	7 9 10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1 2 3	4 5 7	8 9 10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1 2 3	4 6 7	8 9 10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1 2 3	5 6 7	8 9 10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1 2 4	5 6 7	8 9 11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1 2 4	5 6 7	8 10 11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1 2 4	5 6 7	9 10 11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1 3 4	5 6 8	9 10 11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1 3 4	5 6 8	9 10 12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1 3 4	5 7 8	9 10 12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1 3 4	5 7 8	9 11 12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1 3 4	5 7 8	10 11 12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1 3 4	6 7 8	10 11 13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1 3 4	6 7 9	10 11 13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1 3 4	6 7 9	10 12 13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2 3 5	6 8 9	11 12 14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2 3 5	6 8 9	11 12 14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2 3 5	6 8 9	11 13 14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2 3 5	6 8 10	11 13 15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2 3 5	7 8 10	12 13 15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2 3 5	7 8 10	12 13 15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2 3 5	7 9 10	12 14 16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2 4 5	7 9 11	12 14 16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2 4 5	7 9 11	13 14 16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2 4 6	7 9 11	13 15 17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2 4 6	8 9 11	13 15 17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2 4 6	8 10 12	14 15 17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2 4 6	8 10 12	14 16 18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2 4 6	8 10 12	14 16 18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2 4 6	8 10 12	15 17 19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2 4 6	8 11 13	15 17 19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2 4 7	9 11 13	15 17 20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2 4 7	9 11 13	16 18 20
.99	9772	9795	9817	9849	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2 5 7	9 11 14	16 18 20