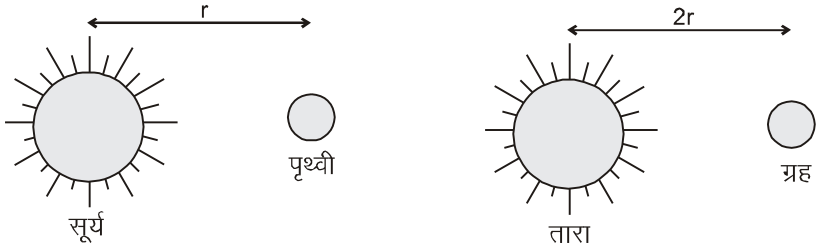
High Level Problems (HLP)

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. माना कि कोई तारा हमारे सूर्य से अधिक चमकीला है परन्तु उसका द्रव्यमान सूर्य के बराबर है। पृथ्वी पर व्यक्ति की औसत आयु 70 साल है। अगर पृथ्वी सदृश्य इस ग्रह की दूरी हमारे तारे से दूरी की दुगुनी दूरी है तो इस ग्रह पर आदमी की औसत आयु कितनी होगी। (समान औसत आयु मानते हुये तथा पृथ्वी पर वर्ष के पदो में)



2. पृथ्वी के चारो ओर दीर्घवृत्ताकार कक्षा में चक्कर काट रहे अन्तरिक्ष यान की कल्पना करते हे। इस कक्षा का न्यूनतम बिन्दु या अपसौर (perigee) जो पृथ्वी की सतह से 300 किमी० ऊपर है तथा अधिकतम बिन्दु या उपसौर (apogee) जो पृथ्वी की सतह से 3000 किमी० ऊपर स्थित है।

(a) अन्तरिक्षयान का आवर्तकाल कितना होगा ?

(b) अन्तरिक्षयान की न्यूनतम बिन्दु या अपसौर (perigee) तथा अधिकतम बिन्दु या उपसौर (apogee) पर चाल का अनुपात बताइये।

(c) अन्तरिक्षयान की न्यूनतम बिन्दु या अपसौर (perigee) तथा अधिकतम बिन्दु या उपसौर (apogee) पर चाल ज्ञात करें।

(d) पृथ्वी की सतह से अन्तरिक्षयान को पूर्णतया पलायन करवाने के लिए अगर अन्तरिक्षयान के रॉकेट को न्यूनतम बिन्दु या अपसौर (perigee) से दागा जाता है तो अंतरिक्ष यान की चाल को कितना बढ़ाना होगा? अगर रॉकेट को अधिकतम बिन्दु या उपसौर (apogee) से दागा जाता है तो क्या होगा? कक्ष का कौनसा बिन्दु उपयोग करना सबसे प्रभावी होगा?

3. एक ग्रह A सूर्य के चारों ओर दीर्घवृत्त में गति कर रहा है। जब यह सूर्य से r_0 दूरी पर होता है, उस क्षण इसका वेग v_0 के बराबर है तथा त्रिज्यीय सदिश r_0 एवं वेग सदिश v_0 के बीच कोण α के बराबर होता है। कक्षीय गति के दौरान इस ग्रह की सूर्य से महत्तम एवं न्यूनतम दूरी ज्ञात करो। (सूर्य का द्रव्यमान = M_S)

4. एक उपग्रह को वृत्तीय कक्षा में इस प्रकार रखते है जिससे यह पृथ्वी सतह पर स्थित किसी निश्चित बिन्दु के हमेशा ऊपर रहे। परन्तु गलती से उपग्रह की कक्षीय त्रिज्या यह करने के लिए 1.0 किमी० ज्यादा हो जाती है। किस दर तथा किस दिशा में उपग्रह के ठीक नीचे स्थित बिन्दु पृथ्वी सतह पर गति करेगा ?

R = पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 km

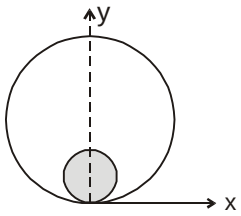
r = भूस्थिर उपग्रह की कक्षा की त्रिज्या = 42000 km

T = पृथ्वी का स्वयं के अक्ष के परित आवर्तकाल = 24 hr.

5. 220 kg एवं लगभग 640 km पृथ्वी सतह से ऊँचाई पर वृत्तीय कक्षा के उपग्रह की **(a)** चाल और **(b)** आवर्तकाल क्या होंगे। यह मानिए कि उपग्रह प्रति चक्कर 1.4×10^5 J यान्त्रिक ऊर्जा खो देता है। वातावरण के प्रतिरोध बल को माननें से पथ धीरे–धीरे घटती हुई त्रिज्या के वृत्त जैसा होता है। 1500 वा चक्कर खत्म होने पर उपग्रह के लिए निम्न की गणना कीजिए **(c)** ऊचाँई **(d)** चाल तथा **(e)** आवर्तकाल। **(f)** क्या पृथ्वी के केन्द्र के चारों ओर कोणीय संवेग उपग्रह के लिए या उपग्रह–पृथ्वी निकाय के लिए संरक्षित रहेगा।

6. m द्रव्यमान का एक ग्रह सूर्य के चारो ओर दीर्घवृत्ताकार कक्षा में इस प्रकार गतिमान है कि इसकी सूर्य से महत्तम एवं न्यूनतम दूरियाँ क्रमशः r_1 तथा r_2 है। इस ग्रह का सूर्य के केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग J ज्ञात करो।
(सूर्य का द्रव्यमान = M_S)

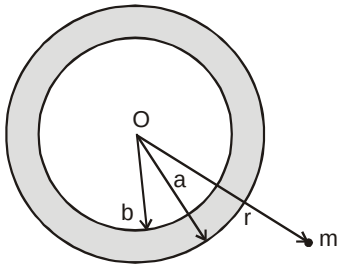
7. m द्रव्यमान एवं r त्रिज्या के ठोस गोले को, 4 m द्रव्यमान तथा 4r त्रिज्या के गोलीय कोश में रखा गया है। गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता निम्न बिन्दु पर ज्ञात करें :



(a) $r < y < 2r$ (b) $2r < y < 8r$ (c) $y > 8r$

यहां y निदशांक को गोले तथा कोश के स्पर्श बिन्दु से मापा जाता है।

8. एक गोला जिसकी त्रिज्या a तथा घनत्व ρ है, में एक b त्रिज्या की सकेन्द्रीय गोलीय गुहा चित्रानुसार है :



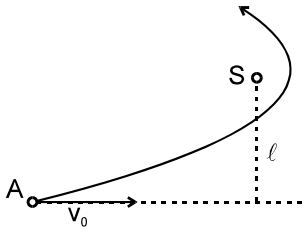
(a) गोले द्वारा m द्रव्यमान के कण पर जो गोले के केन्द्र से r दूरी पर स्थित है पर लगाये गये गुरूत्वीय बल F को ग्राफ द्वारा r ($0 \le r \le \infty$, की परास में) के फलन के रूप में प्रदर्शित करो। .

(b) निकाय की स्थितिज ऊर्जा u (r) को दूरी के साथ ग्राफ से प्रदर्शित करो।

9. (a) कोई वस्तु सूर्य (द्रव्यमान= M_S) के चारो ओर उसी कक्षा में स्थित है जिसमें पृथ्वी होती है तो इस वस्तु के लिए पलायन चाल क्या होगी। यह मानिए की कक्षिय त्रिज्या R है एवं वस्तु पृथ्वी से बहुत दूर स्थित है

(b) यदि वस्तु की चाल पहले से ही पृथ्वी की कक्षीय चाल के बराबर हो तो कितनी न्यूनतम अतिरिक्त चाल (a) भाग में पलायन के लिए देनी होगी?

10. एक नक्षत्रीय वस्तु A, सूर्य की तरफ v_0 वेग से (सूर्य से अत्यधिक दूरी पर) गतिमान है तथा निशाना प्राचल (aiming parameter) ℓ है। सूर्य के केन्द्र के सापेक्ष v_0 सदिश की दिशा चित्र में प्रदर्शित है। वस्तु की सूर्य से न्यूनतम दूरी ज्ञात करो। (सूर्य का द्रव्यमान = M_S)



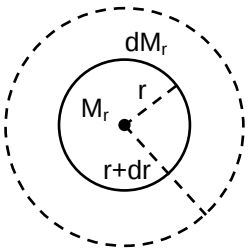
11. M_1 तथा M_2 द्रव्यमान के दो तारे अपने द्रव्यमान केन्द्र के परितः वृत्तीय कक्षा में है। M_1 द्रव्यमान के तारे की कक्षीय त्रिज्या R_1 तथा M_2 द्रव्यमान के तारे की कक्षीय त्रिज्या R_2 है। (यह मानते हुये कि द्रव्यमान केन्द्र त्वरित नही है एवं द्रव्यमानों के बीच की दूरी नियत है।)

(a) सिद्ध करो कि दोनों तारों की कक्षीय त्रिज्याओं का अनुपात उनके द्रव्यमानों के अनुपात के व्युत्क्रम के बराबर है अर्थात् $R_1/R_2 = M_2/M_1$

(b) समझाऐं कि दोनों का कक्षीय आवर्तकाल समान क्यों है तथा सिद्ध करो की आवर्तकाल $T = 2\pi \dfrac{(R_1 + R_2)^{3/2}}{\sqrt{G(M_1 + M_2)}}$.

12. Linked questions (12-16)

एक तारे को गर्म गैस की R त्रिज्या की एक गौलीय गेंद मानते हैं। तारे के अन्दर r दूरी पर गैस का घनत्व ρ_r तथा इस परिक्षैत्र में स्थित गैस का द्रव्यमान M_r है। त्रिज्या के सापेक्ष द्रव्यमान के परिवर्तन के लिये उपयुक्त अवकलन समीकरण $\left(\frac{dM_r}{dr}\right)$ क्या होगी (संलग्न चित्र को देखें) **[OLYMPIAD 2016_STAGE-1_(ASTRONOMY)]**



13. एक तारा अपने प्रारम्भिक काल में गुरूत्वाकर्षण तथा विकिरण दाब के अधीन साम्य अवस्था की स्थिति में कहलाता है। प्रश्न संख्या (12) के चित्र में प्रदर्शित dr मोटाई के कोश की कल्पना करते हैं। यदि इस कोश पर दाब dp हो तो सही समीकरण होगी। (G सार्वत्रिक गुरूत्वाकर्षण नियतांक है) **[OLYMPIAD 2016_STAGE-1_(ASTRONOMY)]**

14. खगोल विज्ञान में परिमाण की कोटि एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। अवकलज $\frac{dp}{dr}$ को $\frac{dp}{dr}$ के अन्तर का अनुपात मान सकते हो। R त्रिज्या के एक तारे की कल्पना करते हैं। इसके केन्द्र पर दाब P_C तथा बाहरी सतह पर दाब शून्य है। यदि औसत द्रव्यमान $\frac{\Delta P}{\Delta r}$ तथा औसत त्रिज्या $\frac{R_0}{2}$ हो तो P_C के लिये व्यंजक ज्ञात कीजिये।

[OLYMPIAD 2016_STAGE-1_(ASTRONOMY)]

15. सूर्य का द्रव्यमान तथा त्रिज्या क्रमशः $M_0 = 2 \times 10^{30}$ kg तथा $R_0 = 7 \times 10^5$ km हो तो इसके केन्द्र पर दाब लगभग कितना होगा। ($G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ .\ kg^{-1}.\ s^{-2}$) **[OLYMPIAD-2016_STAGE-1_(ASTRONOMY)]**

16. माना सूर्य के अंदर स्थित गैस को आदर्श गैस की तरह व्यवहार करती है। सूर्य के केन्द्र पर ताप लगभग कितना होगा ? (गैस के कणों का संख्या घनत्व $= \frac{2\rho}{M_H}$), बोल्ट्जमेन नियतांक $k_B = 1.4 \times 10^{-23}\ J.K^{-1}$ तथा प्रोटोन का द्रव्यमान $M_H = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) **[OLYMPIAD-2016_STAGE-1_(ASTRONOMY)]**

HLP Answers

1. $\frac{70}{(2)^{3/2}} \approx 25$ वर्ष

2. (a) $T = \frac{4\pi}{R\sqrt{g}} a^{3/2} = 7.16 \times 10^3$ सेकण्ड

(b) $\frac{v_1}{v_2} = \frac{94}{67} = 1.4$

(c) $V_p = 896\times10^2 \sqrt{\frac{94}{67\times161}}$ मी/से $= 8.35 \times 10^3$ मी/से,

$V_a = 896\times10^2 \sqrt{\frac{67}{94\times161}}$ मी/से $= 5.95 \times 10^3$ मी/से

(d) $\Delta V = 14\times 10^2\sqrt{67} - V_P = 3.09 \times 10^3$ मी/से, न्यूनतम बिन्दु या अपसौर

3. $r_m = \frac{r_0}{2-\eta}\left[1 \pm \sqrt{1-(2-\eta)\eta\sin^2\alpha}\right]$, जहाँ $\eta = r_0v_0^2/GM_S$.

4. $V_{rel} = \frac{3\Delta rR\pi}{rT} = \frac{\pi}{189}$ m/sec ≈ 1.66 cm/sec., भूमध्य रेखा के अनुदिश पूर्व की ओर।

5. (a) $\frac{448}{\sqrt{3520}}$ km/s $= 7.527$ km/s (b) $\frac{220\pi}{7}\sqrt{3520}$ sec. ≈ 1.63 hour

(c) $\left[\frac{22\times14\times64^2\times7040}{22\times14\times64^2+7040\times6} - 6400\right]$ km ≈ 411.92 km (d) $\frac{448}{\sqrt{3406}}$ km/sec. ≈ 7.67 km/s

(e) $\frac{1703\pi}{56}\sqrt{3406}$ sec. ≈ 1.55 hour (f) No

6. $J = m\sqrt{2GM_S r_1 r_2/(r_1+r_2)}$

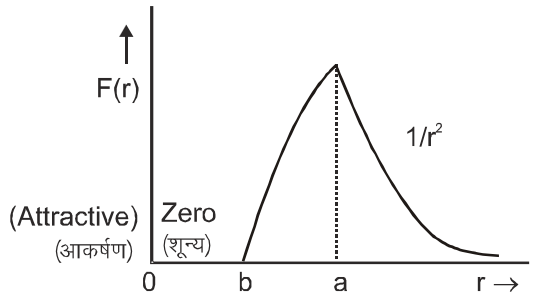
7. (a) $\left(\frac{Gm\ (y-r)}{r^3}(-\hat{j})\right)$ (b) $\left(\frac{Gm}{(y-r)^2}(-\hat{j})\right)$ (c) $\left(\frac{4Gm}{(y-4r)^2}+\frac{Gm}{(y-r)^2}\right)(-\hat{j})$

8. (a) बल r त्रिज्या तक के गोले के द्रव्यमान के कारण होगा

स्थिति (i) में $0 < r < b$; द्रव्यमान $M = 0$, अतः $F(r) = 0$

In case (ii) $b < r < a$; द्रव्यमान $M = \frac{4}{3}\pi\rho\ (r^3 - b^3)$, अतः $F(r) = \frac{4}{3}\pi Gpm\left(r - \frac{b^3}{r^2}\right)$

(iii) $a < r < \infty$; द्रव्यमान $M = \frac{4}{3}\pi\rho\ (a^3 - b^3)$, अतः $F(r) = \frac{4}{3}\pi Gpm\left(\frac{a^3-b^3}{r^2}\right)$

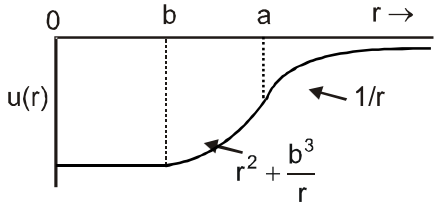


(b) $U_f - U_i = -\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}_c.\vec{dr}$

(i) $0 < r < b$; $u(r) = -2\pi G\rho m(a^2 - b^2)$

(ii) $b < r < a$; $u(r) = \frac{-2\pi G\rho m}{3r}(3ra^2 - 2b^3 - r^3)$

(iii) $a < r < \infty$; $u(r) = \frac{-4\pi G\rho m}{3r}(a^3 - b^3)$



9. (a) $\sqrt{\frac{2GM_s}{R}}$ (b) $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{GM_s}{R}}$

10. $r_{min} = (GM_S / v_0^2)\left[\sqrt{1+(\ell v_0^2 / GM_S)^2} - 1\right]$

11. $M_\alpha = \frac{4\pi^2[1.5\times10^{12}]^3}{3G[44.5\times365\times86400]^2} = 3.376 \times 10^{29}$ kg, $M_\beta = 2M_\alpha = 6.75 \times 10^{29}$ kg

12. $\frac{dM_r}{dr} = \rho_r 4\pi r^2$ **13.** $\frac{dp}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho_r$ **14.** $P_C = \frac{GM_0^2}{R_0^4}\times\left(\frac{3}{2\pi}\right)$

15. 5×10^{14} N/m^2 **16.** 2.10×10^7