HINT OF SOLUTION OF SIMPLE HARMONIC MOTION

EXERCISE-1

PART – I

भाग - I

A-1. $x = 5 \sin \left[\pi t + \frac{\pi}{6}\right]$

Compare this equation with

$x = A \sin (\omega t + \phi)$ $\Rightarrow A = 5$

$\phi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ sec

$V_{max} = A\omega = 5\pi$ m/s

Sol. $x = 5 \sin \left[\pi t + \frac{\pi}{6}\right]$

इस समीकरण की निम्न समीकरण के साथ तुलना करने पर

$x = A \sin (\omega t + \phi) \Rightarrow A = 5$

$\phi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ sec

$V_{max} = A\omega = 5\pi$ m/s

A-2. $x = (2.0 \text{ cm}) \sin \left[(100s^{-1})t + \frac{\pi}{6}\right]$

Compare this equation with

इसी समीकरण की तुलना करने पर

$x = A \sin (\omega t + \phi)$ $\Rightarrow$ $A = 2.0$ cm

$T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{100} = 0.0635$

$K = m\omega^2 = \frac{10}{100}\ 100^2 = 100$ N/m

$x_{t=0} = 2.0 \sin \left[100 \times 0 + \frac{\pi}{6}\right] = 1$ cm

$v = 200 \cos \left(100t + \frac{\pi}{6}\right)$

$v_{t=0} = 200 \cos \left(100 \times 0 + \frac{\pi}{6}\right)$

$= 100\sqrt{3}$ cm/s $= \sqrt{3}$ m/s

$a = -20000 \sin \left(100 \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) = 10000$ cm/s^2

$= -100$ m/s^2

A-3. (A) $x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$

$o = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}o + \phi\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T}\ o + \phi = 0 \ \Rightarrow \quad \phi = 0$

$x = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$\frac{A}{2} = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{6}$

$t = \frac{T}{12}$

(D) $x = A \sin\left[\frac{2\pi t}{T} + \phi\right] \qquad \frac{-A}{\sqrt{2}} = A \sin\left[\frac{2\pi 0}{T} + \phi\right]$

$\phi = \frac{-\pi}{4}, \qquad x = A \sin\left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right]$

$\frac{A}{\sqrt{2}} = A \sin\left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right]$

$\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow t = \frac{T}{4}$

A-4. $v_0 = A\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{A}$

$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$

$v^2 = \left(\frac{v_0}{A}\right)^2 \left(A^2 - \frac{A^2}{2^2}\right)$

$v^2 = v_0^2\ \frac{3}{4} \qquad v = \frac{\sqrt{3}}{2}\ v_0$

A-5. A = 10 cm, T = 6 sec

So अतः $x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$

$= (10\text{ cm}) \sin\left(\frac{2\pi}{6}t + \phi\right) = 10\text{ cm} \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \phi\right)$

at t = 0, x = 5 cm पर

$\Rightarrow \quad 5\text{ cm} = 10\text{ cm} \sin(0 + \phi)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \sin(\phi) \qquad \phi = \frac{\pi}{6}$

So, अतः $x = (10\text{ cm}) \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$

acceleration त्वरण $a = -\omega^2 (10\text{ cm}) \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \times (10\text{ cm}) \sin\left(\frac{\pi}{3} \times 4 + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\pi^2 \times 10}{9} \simeq 11\text{ cm/s}^2$

A-6. $|v| = |A|\,\omega \Rightarrow 10 = |A|\,\omega$

$|a| = |A|\,\omega^2 \Rightarrow 50 = |A|\,\omega^2$

$\Rightarrow \omega = 5 \Rightarrow |A| = 2$

$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$

$8^2 = 5^2 (2^2 - x^2)$

$4 - x^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow x^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow x = \pm\frac{6}{5}$ cm

B-1. According to question प्रश्नानुसार ,

$\frac{1}{2}mv^2 = 3 \times \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{3}{2} m\omega^2 x^2$

$\Rightarrow A^2 = 4x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2} = \pm\frac{10\text{cm}}{2} = \pm 5$ cm.

B-2. Total energy कुल ऊर्जा $E = \frac{1}{2} m\,\omega^2 A^2$

$0.5 + 0.4 = \frac{1}{2} \times 0.2\left(2\pi \times \frac{25}{\pi}\right)^2 A^2$

$\Rightarrow 9 = (50)^2 A^2 \Rightarrow A = 0.06$ m

C-1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{10/1000}{K}} \Rightarrow K = 0.1$ N/m.

C-2. $K = m\omega^2 \Rightarrow K = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$

mg = Kx equilibrium साम्यवस्था

$x = \frac{mg}{K} \Rightarrow U = \frac{1}{2}Kx^2$

$= \frac{1}{2}K\frac{m^2g^2}{K^2} = \frac{m^2g^2T^2}{2 \times 4\pi^2 m} = \frac{2^2 \times 10^2 \times 4^2}{2 \times 4 \times 10 \times 2} = 40$ J

C-3. $\frac{1}{2}Kx^2 = 5$

$\frac{1}{2}k \times \left(\frac{25}{100}\right)^2 = 5$

k = 160

$\omega = 10\pi = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$m = \frac{K}{100\pi^2}$

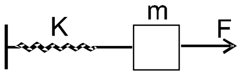
$m = \frac{160}{100\pi^2} = \frac{16}{10\pi^2} = 0.16$ kg

C-4. (a) Initial position of block is an extreme position. ब्लॉक की प्रारम्भिक अवस्था एक सीमान्त स्थिति है

At equilibrium साम्यवस्था पर F = KA $\Rightarrow$ A = F/K

Time period आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$



(b) Kinetic energy at mean position माध्य अवस्था पर गतिज ऊर्जा

$$K.E. = \frac{1}{2}\ K\ A^2$$

$$= \frac{1}{2}\ K\left(\frac{F}{K}\right)^2 = \frac{F^2}{2K}$$

(c) Total energy of the block. ब्लॉक की कुल ऊर्जा

$$\frac{1}{2}\ K\ A^2 = \frac{1}{2}\ K\left(\frac{2F}{K}\right)^2 = \frac{F^2}{2K}$$

C-5. (a) When spring is stretched by x then restoring force.

जब स्प्रिंग को x से खींचा जाता है, तो प्रत्यानयन बल

$F = K_1 x + K_2 x$

$F = K_{eq} x$

$K_{eq} x = K_1 x + K_2 x$

$K_{eq} = K_1 + K_2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1+K_2}}$$

(b) When bock is displaced by x from mean position then restoring force.

जब ब्लॉक को माध्य अवस्था से x खींचा जाता है तब प्रत्यानयन बल

$F = K_1 x + K_2 x$

$K_{eq} x = K_1 x + K_2 x$

$K_{eq} = K_1 + K_2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1+K_2}}$$

(c) When block is displaced by x and extension in upper spring is x_1, extension in lower spring is x_2

जब ब्लॉक को x विस्थापित किया जाता है तथा ऊपरी स्प्रिंग में विस्तार x_1, तथा निचली स्प्रिंग में विस्तार x_2 है।

then तब $F = K_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{F}{K_1}$

$F = K_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{F}{K_2}$

$F = K_{eq} x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F}{K_{eq}}$

$x = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{K_{eq}} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} \quad \Rightarrow \quad K_{eq} = \frac{K_1K_2}{K_1+K_2}$

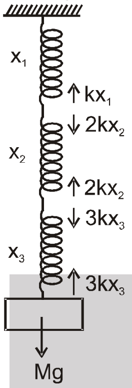
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(K_1+K_2)}{K_1K_2}}$$

When space is not gravity free then answers do not change as time period of spring mass system is independent of gravity.

जब वातावरण गुरूत्व मुक्त नहीं है तो उत्तर नही बदलता है क्योंकि स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय का आवर्तकाल गुरूत्व से स्वतंत्र होता है।

C-6. Let at equilibrium, elongation in springs are x_1, x_2 and x_3 then by force balance

मानाकि साम्यवस्था में स्प्रिंगो में विस्तार x_1, x_2 तथा x_3 है तो बल संतुलन से



$3kx_3 = Mg = 2kx_2 = k\,x_1$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{Mg}{k}$; $x_2 = \dfrac{Mg}{2k}$; $x_3 = \dfrac{Mg}{3k}$

So potential energy stored in each spring

अतः प्रत्येक स्प्रिंग में संचित ऊर्जा

$$(P.E.)_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{M^2g^2}{2k}$$

$$(P.E.)_2 = \frac{1}{2}2kx_2^2 = \frac{M^2g^2}{4k}$$

$$(P.E.)_3 = \frac{1}{2}3kx_3^2 = \frac{M^2g^2}{6k}$$

and Net spring constant और कुल बल नियतांक $= \dfrac{1}{1/k + 1/2k + 1/3k} = \dfrac{6k}{11}$

So Time period इसलिये आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{keq.}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{11}{6}\dfrac{M}{k}}$

D-1. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ $\quad 2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ $\quad \Rightarrow \ell = 1m$

D-2. Time period आवर्तकाल $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

$= 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{\pi^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 = 2\sqrt{\ell} \quad \Rightarrow \quad \ell = 0.25$ m.

D-3. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ $\qquad T' = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g'}}$

$\dfrac{T}{T'} = \sqrt{\dfrac{g'}{g}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{24\times 3600}{24\times 3600 + 24} = \sqrt{\dfrac{g'}{g}} \quad \Rightarrow \quad g' = \left(\dfrac{3600}{3601}\right)^2 g = 9.794 \quad m/s^2$

D-4. (i) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ $\Rightarrow$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}}$ $g_{eff} = g - \frac{3g}{4} = \frac{g}{4}$

So, time period अतः आर्वत काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g/4}}$ $\Rightarrow T = 2T_0$

(ii) $\frac{T_0}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}}$ $\frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}}$

$g_{eff} = 4g$ $\Rightarrow$ a = 3g upwards ऊपर की और

E-1. (a) Time period of compound pendulum is भौतिक लोलक का आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + md^2}{mg\ell}}$

For rod of length ℓ, ℓ लम्बाई की छड के लिए $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2}{mg\ell/4}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2(4+3)}{48}}{mg\ell/4}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{7\ell}{12g}}$ **Ans.**

(b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mr^2 + mr^2}{mgr}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$ **Ans.**

(c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ma^2}{6} + m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{mg\frac{a}{\sqrt{2}}}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{8}}{3}\frac{a}{g}}$ **Ans.**

(d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mr^2}{2} + m\left(\frac{r}{2}\right)^2}{mg\frac{r}{2}}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$ **Ans.**

E-2. (a) For minimum time period ℓ = K, where ℓ is distance between centre and point of suspension
न्यूनतम आवर्तकाल के लिए ℓ = K, जहाँ ℓ केन्द्र तथा निलम्बन बिन्दु के बीच की दूरी है

Moment of inertia about centre $= \frac{mr^2}{2} = mK^2 \Rightarrow K = \frac{r}{\sqrt{2}} = \ell$

केन्द्र के परित जड़त्वाघूर्ण $= \frac{mr^2}{2} = mK^2 \Rightarrow K = \frac{r}{\sqrt{2}} = \ell$

minimum time period $T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{r\sqrt{2}}{g}}$

न्यूनतम आवर्तकाल $T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{r\sqrt{2}}{g}}$

(b) Moment of inertia about centre $= \frac{mL^2}{12} = mK^2$

(b) केन्द्र के परित जड़त्वाघूर्ण $= \frac{mL^2}{12} = mK^2$

$\Rightarrow K = \frac{L}{2\sqrt{3}} = \ell$ where ℓ is distance between centre and point of suspension

जहाँ ℓ केन्द्र तथा निलम्बन बिन्दु के बीच की दूरी है

Minimum time period $T = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{3}g}}$

न्यूनतम आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{3}g}}$

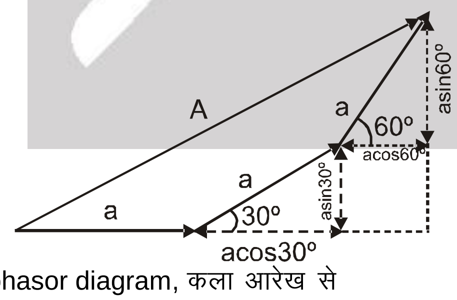
F-1. $A_r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\theta}$

(a) $A_r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2\times3\times4\times\cos 0} = 7$ cm

(b) $A_r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2\times3\times4\times\cos 60} = \sqrt{37}$ cm = 6.1 cm

(c) $A_r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2\times3\times4\times\cos 90} = 5$ cm

F-2.



From phasor diagram, कला आरेख से

$$A = \sqrt{\left(a + \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$A = \frac{a}{2}\sqrt{(3+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = a\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

F-3. $x = \sin \pi t$, $y = 2[1 - 2\sin^2 \pi t]$

$y = 2[1 - 2x^2]$ or $2x^2 + \frac{y}{2} = 1$ **Ans.**

G-2. (a) As the damping constant, b
चुंकि अवमदंन नियतांक b
(= 0.04 kg s^{-1}) << $\sqrt{km}$
the time period T from the equation
समीकरण से आवर्तकाल T

$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ is given by, निम्न प्रकार दिया जाता है

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2kg}{80Nm^{-1}}} = 0.314s$$

(b) From the equation $x(t) = x_m e^{-\frac{bt}{2m}}$ the time $T_{1/2}$ for the amplitude to drop to half of its intial value is

समीकरण से $x(t) = x_m e^{-\frac{bt}{2m}}$ आयाम प्रारम्भिक मान के आधे तक होने में लिया गया समय $T_{1/2}$ होगा।

$$\frac{1}{2} = e^{\frac{-bT_{1/2}}{2m}}$$

or या $\log_e 2 = \frac{bT_{1/2}}{2m}$

or या $0.693 = \frac{bT_{1/2}}{2m}$

or या $T_{1/2} = \frac{0.693 \times 2 \times 0.2}{40 \times 10^{-3}} = 6.93$ s

(c) $E(t) = E(0)\, e^{-\frac{bt}{m}}$;

$\frac{1}{2} = e^{-\frac{bt_{1/2}}{m}}$; $\log_e 2 = \frac{bt_{1/2}}{m}$

$$t_{1/2} = \frac{0.693 \times 0.2}{40 \times 10^{-3}} = 3.4 \text{sec}$$

PART - II
भाग - II

A-1. Comparing $F = -kx$
with $F = -cx^{1/3}$ के साथ तुलना करने पर
$\Rightarrow$ $kx = cx^{1/3}$ $\Rightarrow$ $c = kx^{2/3}$
As x increases c also increases. x बढने पर c भी बढ़ता है

A-2. Position where we see the particle once in a time period that is only extreme position. twice through every other position
वह स्थिति जहॉ कण एक आवर्तकाल में एक बार ही आता है केवल सीमान्त स्थिति है। दूसरी सभी स्थितियो पर दो बार आता है।

A-3. $\vec{V}_{max}$ only केवल $\vec{V}_{max}$

If initial velocity is $\vec{V}_{max}$
then after one time period particle acquires same speed V_{max} in same direction means same velocity $\vec{V}_{max}$

यदि प्रारम्भिक वेग $\vec{V}_{max}$ हो तो एक आवर्तकाल के पश्चात् कण समान दिशा में समान चाल V_{max} प्राप्त कर लेता है अर्थात् समान वेग $\vec{V}_{max}$ प्राप्त करता है।

A-4. (A) $\vec{F}\,.\,\vec{a}$
$m\vec{a}\cdot\vec{a}$ [It is always non-negative] [ये हमेशा अऋणात्मक है]

A-5. $y = a \sin (\omega t - \phi)$

$y = b \cos (\omega t - \phi) \quad \Rightarrow \quad y = b\sin(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2})$

So phase difference is $\pi/2$
अतः कलान्तर $\pi/2$ है।

A-6. $y = a \cos \omega t$

$\frac{a}{2} = a \cos \omega t$

$\omega t = \frac{\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{24} t = \frac{\pi}{3}$

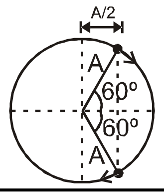
t = 4 sec.

A-7. $a_{avg} = \dfrac{\int_0^{T/2} -\omega^2 A \sin\omega t \; dt}{\int_0^{T/2} dt} \Rightarrow \dfrac{-\omega^2 A\left[\frac{\cos \omega t}{\omega}\right]_0^{T/2}}{T/2}$

$|a|_{avg} = \dfrac{-\omega^2 A[-1-1]}{T/2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4\omega A}{\frac{2\pi}{\omega}} = \dfrac{2\omega^2 A}{\pi}$

A-8. $X = A + B \sin \omega t$
$x - A = B \sin \omega t$
Hence, Amplitude = B
अतः आयाम = B

A-9. Consider SHM as projection of uniform circular motion.
From figure the phase difference between two particles is 120º.
सरल आवर्त को एकसमान वृन्तीय गति का प्रक्षेप मानते हुए
चित्र से दो कणो के मध्य कलान्तर 120º है।



A-10. Velocity वेग $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ $\Rightarrow$ $v^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2$ ....(1)

Acceleration त्वरण $a = -\omega^2 x$ $\Rightarrow$ $a^2 = \omega^4 x^2$ ....(2)

From (1) and (2) : $v^2 = \omega^2 A^2 - a^2/\omega^2$ $\Rightarrow$ $v^2 + a^2/\omega^2 = \omega^2 A^2$

(1) तथा (2) से

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{\omega^2 A^2} + \frac{a^2}{\omega^4 A^2} = 1$$

$\Rightarrow \quad v^2 = -a^2\left(\frac{1}{\omega^2}\right) + 1$ its straight line with -ve slope and +ve intercept

ये ऋणात्मक ढाल तथा धनात्मक अन्तःखण्ड वाली सरलरेखा है।

B-1. At equilibrium position K.E. is maximum. साम्यावस्था पर गतिज ऊर्जा अधिकतम होती है।

B-2. $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$

or या $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$.

B-3. From question प्रश्न से

$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 = 8 \times 10^{-3}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} \times 0.1 \times \omega^2 \times (0.1)^2 = 8 \times 10^{-3}$ $\Rightarrow$ $\omega = 4$

So, equation of SHM is अतः स. आ. ग. की समीकरण है $x = A\sin(\omega t + \phi) = 0.1\sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$.

B-4. $P_{AV} = \frac{1}{4}KA^2$ and और $K_{AV} = \frac{1}{4}KA^2$

B-5. $x = A\cos\omega t$

K.E. $= \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t$

$= \frac{1}{2}kA^2\,\frac{(1-\cos 2\omega t)}{2}$

$= \frac{kA^2}{4}(1 - \cos 2\omega t)$

Frequency of K.E. is double of acceleration.

गतिज ऊर्जा की आवृत्ति त्वरण की दुगुनी है।

B-6. Due to impulse force, the total energy of the particle becomes :

$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 + \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = m\omega^2A^2$

Let ; A' be the new amplitude. (Apply energy conservation law)

$\therefore \quad \frac{1}{2}m\omega^2(A')^2 = m\omega^2A^2$ $\Rightarrow$ $A' = \sqrt{2}A$. **Ans.**

Sol. आवेगीय बल के कारण, कण की कुल ऊर्जा :

$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 + \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = m\omega^2A^2$

माना A' नया आयाम है। (ऊर्जा संरक्षण के नियम से)

$\therefore \quad \frac{1}{2}m\omega^2(A')^2 = m\omega^2A^2$ $\Rightarrow$ $A' = \sqrt{2}A$. **Ans.**

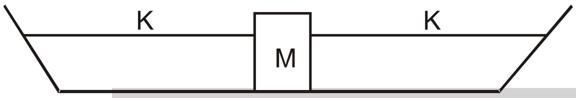
C-1. $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K_1x_1^2$

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K_2x_2^2$

$K_1x_1^2 = K_2x_2^2$

$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$

C-2.



Rubber ribbon can exert only tension not compression so at a time only one is effective.
रबर रिबन केवल तनाव आरोपित कर सकता है, सम्पीडन नही अतः एक समय में केवल एक ही प्रभावी रहेगा।

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

C-3. $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m_1}}$

$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m_2}}$

$f_2 = \frac{f_1}{2}$ or $m_2 = 4m_1$ or या $m_2 - m_1 = 3$ kg

C-4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ $\qquad m = \frac{T^2}{4\pi^2}k$

$mg = Kx$ $\qquad x = \frac{mg}{K}$

$x = \frac{T^2K}{4\pi^2}\frac{g}{K}$ $\qquad x = \frac{T^2g}{4\pi^2}$

C-5. $kx = mg \sin 30^o$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g\sin 30^o}{x}} = \sqrt{\frac{5\times 100}{2.5}} = 14.14$ **Ans.**

C-6. Time period आवर्तकाल $= T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

Spring divided into two equal parts so length is reduced to half
स्प्रिंग दो बराबर भागो में विभाजित की गयी है अतः लम्बाई आधी हो जायेगी

We know हम जानते है $K \propto \frac{1}{\ell}$

$\therefore$ K become twice K दुगुना हो जायेगा।

$T_{new} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{new}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2K}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}\right) = \frac{T}{\sqrt{2}}$

C-7. $k_{eq} = 2k + k + \frac{2k \times 2k}{2k + 2k} = 4k$

so, frequency, अतः आवृत्ति $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_{eq}}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4K}{M}}$

C-8. $E = \frac{1}{2} m\, \omega^2 A^2$

$= \frac{1}{2} m \times \frac{k}{m} \times A^2$

$= \frac{1}{2} kA^2$

E is independent of mass.
E द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है।

D-1. Given time for both are same दिया समय दोनो के लिये समान है।

$9T_1 = 7T_2$

$9 \times 2\pi \sqrt{\frac{\ell_1}{g}} = 7 \times 2\pi \sqrt{\frac{\ell_2}{g}}$

$\Rightarrow \quad 9\sqrt{\ell_1} = 7\sqrt{\ell_2} \Rightarrow \quad \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{49}{81}$

D-2. Let माना $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ and $x_2 = A_2 \sin \omega_2 t$

Two pendulums will vibrate in same phase again when there phase difference $(\omega_2 - \omega_1)t = 2\pi$
दो लोलक दुबारा समान कला मे कम्पन्न करेगे जब उनका कलान्तर $(\omega_2 - \omega_1)t = 2\pi$ होगा।

$\Rightarrow \quad \left(\frac{2\pi}{T_2} - \frac{2\pi}{T_1}\right)t = 2\pi$

$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{\frac{g}{1}} - \sqrt{\frac{g}{1.44}}\right) n \times T_1 = 2\pi$ (where n is number of vibrations completed by longer pendulum)

(जहाँ n लम्बे लोलक द्वारा पूरे किये गये दोलनो की संख्या है)

$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{\frac{g}{1}} - \sqrt{\frac{g}{1.44}}\right) n \times 2\pi \sqrt{\frac{1.44}{g}} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad n = 5$

Thus after 5 vibrations of longer pendulum they will again start swinging in same phase.
अतः बडे लोलक के 5 कम्पन्नो के बाद ये दुबारा समान कला में दोलन प्रारम्भ करेगें।

D-3. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g + g/4}} = \frac{2}{\sqrt{5}} T$

D-4. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, As it does not depend on amplitude चूंकि ये आयाम पर निर्भर नही करता है

$\therefore$ % change in time period is 0 % Hence option (D) is correct.
आर्वत काल में प्रतिशत परिवर्तन 0 % है अतः विकल्प (D) सही है।

D-5. $T_{max} = mg + m\omega^2\ell = mg + m\frac{v^2}{\ell} = mg + m\frac{(\omega A)^2}{\ell} = mg + m\frac{g}{\ell} \times \frac{A^2}{\ell} \quad \left(\because \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)$

or या $\quad T_{max} = mg + mg\left(\frac{A}{\ell}\right)^2 = mg\left[1 + \left(\frac{A}{\ell}\right)^2\right]$

E-1. $I = \frac{2}{5} mR^2 = \frac{2}{5} \times 25 \times (0.2)^2 = \frac{2}{5}$

$\tau = C\theta \qquad c = \frac{\tau}{\theta} = \frac{0.1}{1} = 0.1$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{5 \times 0.1}} = 2\pi \times 2 = 4\pi$ secs

E-2. $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$

where, ℓ is distance between point of suspension and centre of mass of the body.
Thus, for the stick of length ℓ and mass m :

$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m.g.\frac{\ell}{2}}{(mL^2/3)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$

when bottom half of the stick is cut of

$f_0' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{m}{2}.g.\frac{\ell}{4}}{\frac{m}{2}\frac{(\ell/2)^2}{3}}} = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{3g}{\ell}} = \sqrt{2}\, f_0$ **Ans.**

Sol. $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$

यहाँ, ℓ निलम्बन बिन्दु व वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र के बीच की दूरी है।
अतः द्रव्यमान m तथा ℓ लम्बाई की छड़ के लिए

$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m.g.\frac{\ell}{2}}{(mL^2/3)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$

जब छड़ को आधा काट लें तो

$f_0' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{m}{2}.g.\frac{\ell}{4}}{\frac{m}{2}\frac{(\ell/2)^2}{3}}} = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{3g}{\ell}} = \sqrt{2}\, f_0$ **Ans.**

F-1. $y = A \sin(\omega t + \phi)$ and तथा $x = A \sin(\omega t + \phi)$
then तो $y = x$ so path is straight line. अतः पथ सरल रेखा है

F-2. $x = C \sin \omega t + D \sin(\omega t + \pi/2)$

$A_r = \sqrt{C^2 + D^2 + 2CD\cos\frac{\pi}{2}} \qquad A_r = \sqrt{C^2 + D^2}$

F-3. $y = 10 \left(\frac{1}{2}\sin 3\pi t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3\pi t\right) = 10 \sin(3\pi t + \frac{\pi}{3})$

thus amplitude is अतः आयाम 10 m or या 1000 cm

F-4. $x = A \sin \omega t,\ y = A \cos \omega t$ or या $x^2 + y^2 = A^2$
Thus the motion of the particle is on a circle. अतः कण की गति वृत्त पर है।

G-1. In case of damped vibration, amplitude at any instant is
अवमन्दित कम्पन्न की स्थिति में किसी क्षण पर आयाम है।

$a = a_0 e^{-bt}$

where a_0 = initial amplitude
जहाँ a_0 = प्रारम्भिक आयाम

b = damping constant अवमन्दन गुणांक

Ist caes : $t = 100\ T$ and तथा $a = \frac{a_0}{3}$

$\therefore \quad \frac{a_0}{3} = a_0 e^{-b(100\ T)}$

$\Rightarrow \quad e^{-100\ bT} = \frac{1}{3}$

IInd caes : $t = 200\ T$

$a = a_0 e^{-bt} = a_0 e^{-b(200\ T)}$

$= a_0 (e^{-100\ bT})^2 = a_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{a_0}{9}$

G-2. $F \propto v \Rightarrow F = kV$

$k = \frac{F}{v} \Rightarrow [k] = \frac{[kgms^{-2}]}{[ms^{-1}]} = kg\ s^{-1}$

PART - III
भाग - III

---

1. $V_{max} = A\omega$

$\Rightarrow \quad A = \frac{V_{max}}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} \times (0.2) = 0.20m$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{T^2k}{4\pi^2} = 0.2\ kg$

At t = 0.1, acc. is maximum
t = 0.1 पर त्वरण महत्तम है –

$\Rightarrow a_{max} = -\omega^2 A = -\left(\frac{2\pi}{0.2}\right)^2 \times 0.2 = -200\ m/s^2$

Maximum energy = $\frac{1}{2} mV_{max}^2 = 4\ J$

महत्तम ऊर्जा = $\frac{1}{2} mV_{max}^2 = 4\ J$

2. (A) In frame of lift effective acceleration due to gravity is $g + \frac{g}{2} = \frac{3g}{2}$ downwards

लिफ्ट के फ्रेम में गुरूत्व के कारण त्वरण = $g + \frac{g}{2} = \frac{3g}{2}$ नीचे की तरफ

$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$

(B) $K\ell = mg$

$\therefore \frac{k}{m} = \frac{g}{L}$

constant acceleration of lift has no effect in time period of oscillation.
लिफ्ट का नियत त्वरण, दोलन के आवर्तकाल पर कोई असर नहीं डालता है।

$$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

(C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{3}}{mg\frac{\ell}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$

(D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho Ag}} = 2\pi\sqrt{\frac{(\rho/2)\ A\ell}{\rho Ag}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$

EXERCISE-2
PART - I

1. Acceleration त्वरण (a) = $\omega^2 x$

$$\Rightarrow \quad a_{max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$$

When $a_{max} = g$ then block and piston will be separated
जब $a_{max} = g$ वस्तु तथा पिस्टन अलग हो जायेगे।

$$a_{max} = g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \quad ; \quad (g = \pi^2)$$

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ m}$$

2. Restoring force प्रत्यानयन बल $F = \frac{-du}{dx} = \frac{-d}{dx}(u_0(1-\cos ax))$

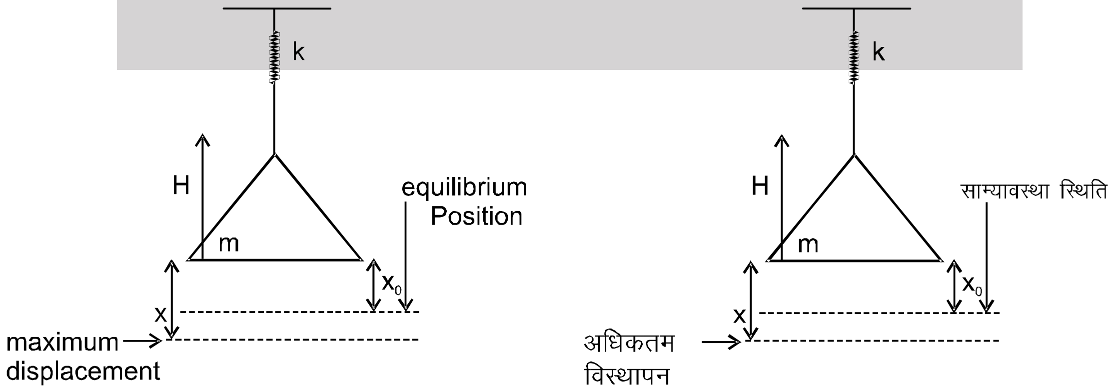
$$F(x) = -u_0 a \sin ax$$

for small angle लघु कोण के लिये $\sin ax \approx ax$

$F = -u_0a^2x \Rightarrow$ acc. त्वरण $= \frac{-u_0a^2x}{m} = -\omega^2 x = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times x$

So, Time period आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{u_0a^2}}$

3.



velocity before collision टकराने से पहले वेग = $\sqrt{2gH}$

pan is massless so velocity after collision
बर्तन भी द्रव्यमानहीन है अतः टक्कर के बाद वेग

$= \sqrt{2gH}$

by energy conservation ऊर्जा संरक्षण से

$mg(x) + \frac{1}{2}m\left(\sqrt{2gH}\right)^2 = \frac{1}{2}Kx^2$

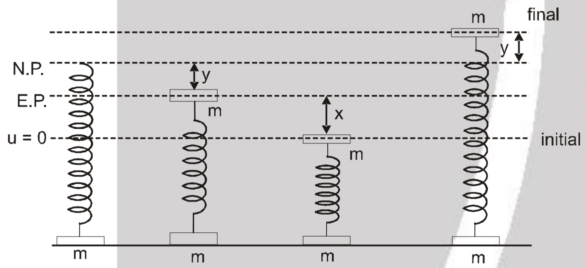
$Kx^2 - 2mgx - 2mgH = 0$

$x = \frac{mg}{K} + \frac{mg}{K}\sqrt{1+\frac{2HK}{mg}}$

at equilibrium साम्यवस्था पर $Kx_0 = mg \Rightarrow x_0 = mg/K$

mean Amplitude माध्य आयाम $= x - x_0 = \frac{mg}{K}\sqrt{1+\frac{2HK}{mg}}$

4.



Let upper block is pushed down by x, at equilibrium mg = ky, i.e., weight of upper block is balanced by spring When it is deformed by y, upper block will perform SHM with amplitude x about equilibrium position, lower block will leave surface when spring is extended by y, means upper block is at distance 2y from its mean position. That should be upper extreme position of upper block. So amplitude x = 2y
माना उच्च ब्लॉक नीचे x धकेला जाता है। साम्यवस्था पर mg = ky है अर्थात् उच्च ब्लॉक का भार स्प्रिंग द्वारा संतुलित होता है, जब स्प्रिंग मे संकुचन y है। उच्च ब्लॉक साम्यवस्था के परित आयाम x के साथ स.आ.ग. करेगा। जब स्प्रिंग y से विस्तारित होती है, निम्न ब्लॉक सतह को छोड देगा अर्थात उच्च ब्लॉक इसकी माध्यवस्था से 2y दूरी पर होता है। यह उच्च ब्लॉक की उच्च सीमान्त स्थिति होनी चाहिये अतः आयाम x = 2y.

Alternative :

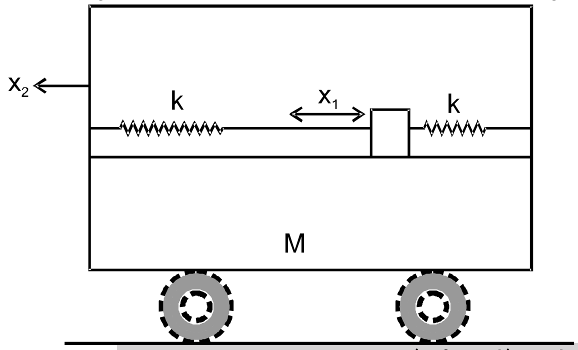
at equilibrium of upper block mg = ky
साम्यवस्था पर उच्च ब्लॉक के लिये mg = ky
lower plate will leave the surface if the extension in spring is y
यदि स्प्रिंग मे विस्तार y है तो निम्न प्लेट सतह छोड देगी
Let upper plate is displaced by x downward and left
माना उच्च प्लेट x नीचे विस्थापित करते हुये छोडी जाती है
so by energy conservation between compressed to extended positions
तो ऊर्जा संरक्षण से (संपीडित तथा विस्तारित अवस्थाओं के मध्य)

$0 + 1/2\, k\,(x + y)^2 = mg\,(x + 2y) + 1/2\, ky^2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + kxy = mgx + mg2y + \frac{1}{2}ky^2$

$\Rightarrow \quad x = 2y$

5. Let displacement of block is x_1 and of cart is x_2 as shown
माना वस्तु का विस्थापन x_1 तथा गाडी का x_2 है चित्रानुसार



by linear momentum conservation रेखीय संवेग संरक्षण से

$mv_1 = Mv_2 \Rightarrow v_2 = \frac{mv_1}{M}$ so $x_2 = \frac{mx_1}{M}$

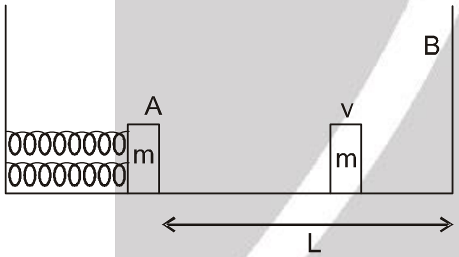
For block Force equation can be written as
गुटके के लिये बल समीकरण ऐसे लिखी जा सकती है।

$F = 2k(x_1 + x_2) = m\omega^2 x_1$

$\Rightarrow \quad 2k\left(x_1 + \frac{m}{M}x_1\right) = m\omega^2 x_1 \Rightarrow \omega^2 = 2k\left(\frac{M+m}{Mm}\right)$

So अतः $T = 2\pi\sqrt{\frac{Mm}{2k(M+m)}}$

6.



since all collision are elastic and total energy is conserved
चूंकि सारी टक्करें प्रत्यास्थ है और कुल ऊर्जा संरक्षित है।

Time period of motion of right block is $t_1 = \frac{2L}{v}$.

दाँये गुटके का आवर्तकाल है $t_1 = \frac{2L}{v}$.

Time period of motion of left block is $t_2 = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

बाँये गुटके का आवर्तकाल है $t_2 = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$

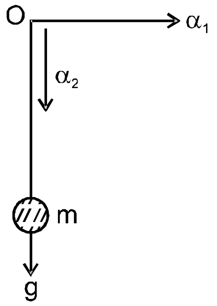
So, total time period अतः कुल आवर्त काल = $\frac{2L}{v} + \frac{1}{2}\left[2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\right]$

7. For simple pendulum $\omega = \sqrt{g/\ell}$ and maximum linear displacement $x_0 = \ell\theta_0$ and equation of S.H.M
सरल लोलक के लिये $\omega = \sqrt{g/\ell}$ और अधिकतम रेखीय विस्थापन $x_0 = \ell\theta_0$ और स.आ.ग. की समीकरण

$x = x_0 \cos \omega t$

$x = \ell\theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$

8. Point O is moving as shown बिन्दु O चित्रानुसार गति कर रहा है।



So acc. Of particle w.r.t O अतः कण का O के सापेक्ष त्वरण

$= (-\alpha_1\hat{i} + (\alpha_2 - g)\hat{j}$

So अतः $g_{eff.} = \sqrt{\alpha_1^2 + (g - \alpha_2)^2}$

So time period अतः आवर्तकाल

$= 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{(\alpha_1^2 + (g - \alpha_2)^2)^{1/2}}}$

9. **(B)** For simple pendulum $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} \begin{bmatrix} \ell - \text{const} \\ g - \text{change} \end{bmatrix}$

For physical pendulum $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mg\ell}}$ (g–change) $I, m, \ell \to$ const

For Torsional pendulum $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{C}} \left(\dfrac{I}{C} = \text{Const}\right)$ for any planet

For spring mass system $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

$\therefore mg = k\ell \qquad \left(\dfrac{m}{K} = \dfrac{\ell}{g} = \dfrac{\ell}{g'} = \text{Const for all planet}\right)$

Both the spring–mass system & torsional pendulum have no dependence on gravitational acceleration for their frequencies .

Sol. **(B)** सरल लोलक के लिए $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} \begin{bmatrix} \ell - \text{नियत} \\ g - \text{परिवर्तित} \end{bmatrix}$

भौतिक लोलक $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mg\ell}}$ (g–परिवर्तित) $I, m, \ell \to$ अचर

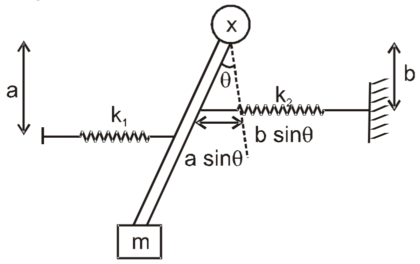
मरोड़ी लोलक $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{C}} \left(\dfrac{I}{C} = \text{Const}\right)$ सभी ग्रहों के लिए

स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय के लिए $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

$\therefore mg = k\ell \qquad \left(\dfrac{m}{K} = \dfrac{\ell}{g} = \dfrac{\ell}{g'} = \text{सभी ग्रहों के लिए अचर}\right)$

स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय तथा मरोड़ी लोलक दोनों की आवृत्ति गुरूत्वीय त्वरण पर निर्भर नहीं करता है।

10. For small angular displacement (θ)
लघु कोणीय विस्थापन के लिये



Net torque on body वस्तु पर कुल बलाघुर्ण = $I\alpha$

$= (k_1a \sin\theta)a + (k_2b \sin\theta)b = \left(mL^2 + \frac{ML^2}{3}\right)\alpha$

For small θ लघु θ के लिये $\Rightarrow \alpha = \frac{k_1a^2 + k_2b^2}{mL^2 + \frac{ML^2}{3}}\theta$

$\Rightarrow$ frequency आवृत्ति $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1a^2 + k_2b^2}{L^2(m + M/3)}}$

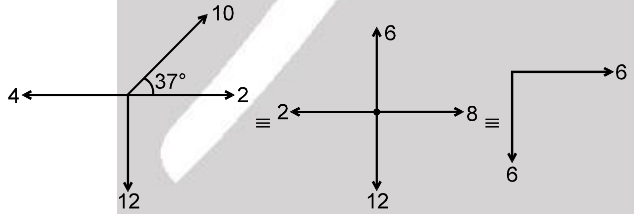
11. $x = 10 \sin^3(\pi t)$; $\left(\sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin(3A)}{4}\right)$

$\Rightarrow x = 10\left[\frac{3\sin(\pi t) - \sin(3\pi t)}{4}\right]$ $\Rightarrow x = \frac{30}{4}\sin \pi t - \frac{10}{4}\sin 3\pi t$

So Amplitude अतः आयाम $= \frac{30}{4}, \frac{10}{4}$

frequency आवृत्ति = 1/2 , 3/2

12. आयाम कला आरेख द्वारा

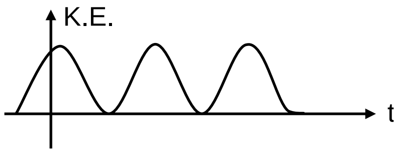


$\therefore$ resultant amplitude परिणामी आयाम $= 6\sqrt{2}$

13. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$

$\omega = \sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}} = \sqrt{\frac{1}{m\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_1}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_2^2}+\frac{1}{\omega_1^2}}} = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}$

14. K.E. $= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$



15. $C_1a^3 = C_2b^3$

$\frac{C_1a^3}{m} = k$

$\frac{C_2b^3}{m} = k'$

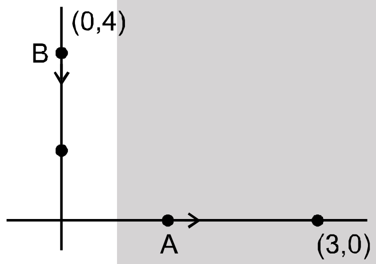
$F_{rs} = C_1(a - x)^3 - C_2(b + x)^3$

$= C_1a^3\left(1 - \frac{3x}{a}\right) - C_2b^3\left(1 + \frac{3x}{b}\right) = -3(C_1a^2 + C_2b^2)x$

$\because$ time period = $\frac{2\pi}{\sqrt{3\left(\frac{k}{a} + \frac{k'}{b}\right)}}$

PART - II

1.



At t = 0 Particle 2 is at point B and moving towards origin so displacement
t = 0 पर कण 2 बिन्दु B पर है तथा मूल बिन्दु की तरफ जा रहा है अतः

$Y = 4 - A \sin \omega t$

$Y = 4 - 2 \sin \omega t$

and displacement of particle 1 is
और कण 1 का विस्थापन है

$X = 3 - A \cos \omega t$

$X = 3 - 2 \cos \omega t$

So distance between them अतः अनके मध्य दूरी = $\sqrt{X^2 + Y^2}$

$s^2 = 29 - (16 \sin \omega t + 12 \cos \omega t) = 29 - 4 (4 \sin\omega t + 3 \cos\omega t)$

$\Rightarrow$ $29 - 20 (\sin\omega t + 37^o)$

So अतः $s^2_{max} = 49 \Rightarrow s_{max} = 7cm = S_1$

$s^2_{max} = 9 \Rightarrow s_{min} = 3cm = S_2$ $\quad\therefore S_1+S_2 = 10cm$

2. $x_1 = A\sin(\omega t + \phi_1)$

$x_2 = A\sin(\omega t + \phi_2)$

$\Rightarrow$ $|x_1 - x_2| = 2A \sin(2\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}) \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$

To maximize अधिकतम के लिए $|x_1 - x_2|$:

$\sin(2\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}) = 1$

$\Rightarrow$ $a\sqrt{2} = 2a \times 1 \times \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\frac{\pi}{4} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$ $\Rightarrow$ $\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore$ N =2

3. $f = a - bx$

For maximum velocity, acceleration should be zero.

i.e. $a - bx = 0 \Rightarrow x = a/b$

$\therefore$ At x = a/b, the particle has its maximum velocity.

$$f = \frac{vdv}{dx} = a - bx \Rightarrow \frac{v^2}{2} = ax - \frac{bx^2}{2} + c$$

At x = 0 ; v = 0 $\Rightarrow$ c = 0

Substituting ; x = a/b ; gives

$$v_{max} = \frac{a}{\sqrt{b}}$$

Also, the velocity of the car should become zero at station B.

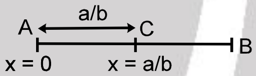
i.e. $ax - \frac{bx^2}{2} = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = \left(\frac{2a}{b}\right)$

$\therefore$ Distance between the two stations is 2a/b

$\therefore$ N = 2

Alternate : f = a – bx means particle will do SHM.

At mean position ; f = 0



$\Rightarrow$ x = a/b

In the figure shown, 'C' is the mean position and A & B are extreme positions

$\therefore$ $x_{max} = 2a/b$

Sol. $f = a - bx$

अधिकतम वेग के लिए त्वरण शून्य होना चाहिए

i.e. $a - bx = 0 \Rightarrow x = a/b$

$\therefore$ x = a/b पर, कण अपनी अधिकतम चाल पर है।

$$f = \frac{vdv}{dx} = a - bx \Rightarrow \frac{v^2}{2} = ax - \frac{bx^2}{2} + c$$

x = 0 पर ; v = 0 $\Rightarrow$ c = 0

प्रतिस्थापित करने पर ; x = a/b ; प्राप्त करते हैं।

$$v_{max} = \frac{a}{\sqrt{b}}$$

तथा स्टेशन B पर कार का वेग शून्य हो जाएगा

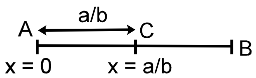
i.e. $ax - \frac{bx^2}{2} = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = \left(\frac{2a}{b}\right)$

$\therefore$ दोंनो स्टेशनों के बीच की दूरी = $\frac{2a}{b}$

$\therefore$ N = 2

विकल्प : f = a – bx अर्थात कण सरल आवर्त गति करेगा।

माध्य स्थिति पर ; f = 0



$\Rightarrow$ x = a/b

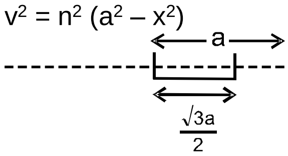
प्रदर्शित चित्र में 'C' माध्य स्थिति है तथा A , B चरम स्थितियाँ हैं।

$\therefore$ $x_{max} = 2a/b$

4. $\frac{1}{2} K x^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} KA^2$

$mn^2x^2 + mv^2 = mn^2a^2$

$v^2 = n^2 (a^2 - x^2)$



$$\frac{1}{2} m (v + na)^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} K A_1^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} mn^2a^2 + \frac{2}{2} mnav + \frac{1}{2} mn^2 \frac{3a^2}{4} = \frac{1}{2} mn^2 A_1^2$$

$$mn^2 (a^2 - x^2) + mn^2a^2 + 2mna\, n \sqrt{a^2 - x^2} + mn^2 \frac{3a^2}{4} = mn^2A_1^2$$

$$a^2 - x^2 + a^2 + 2a \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^2}{4} = A_1^2$$

$$11a^2 - 4x^2 + 8a \sqrt{a^2 - 3a^2} = 4A_1^2$$

Putting $x = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ रखने पर

$12a^2 = 4A_1^2$ $\quad A_1 = \sqrt{3}a = 15\sqrt{3}$ cm $\quad \therefore \quad k = 15$

5. The coordinates of the particles are

कण के निर्देशांक

$x_1 = A_1 \cos \omega t$, $x_2 = A_2 \cos \omega t$

separation बीच की दूरी $= x_1 - x_2 = (A_1 - A_2) \cos \omega t = 12 \cos \omega t$

Now अब $x_1 - x_2 = 6 = 12 \cos \omega t$

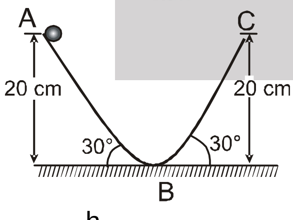
$\Rightarrow \quad \omega t = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{12} \cdot t = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad t = 2s$

Ans. t = 2s

6.



$S = \frac{h}{\sin 30}$, a = g sin 30, h = 20 cm, u = 0

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times (0.2 \times 2)}{10 \times (0.5)}} = 0.4$

v = 0 + (g sin30) (0.4) = 2

For BC max height reached by the particle will be same as h = 20 cm (by energy conservation)

and for BA and BC $\quad$ t = 0.4

Total time period = 0.4 × 4 = 1.6 second = 16×10^{-1} sec

$\therefore$ N = 16

BC के लिये कण द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई h = 20 cm के समान की है

(ऊर्जा संरक्षण से)

तथा BA एवं BC के लिये t = 0.4

कुल आवर्तकाल = 0.4 × 4 = 1.6 second = 16×10^{-1} sec $\therefore$ N= 16

7. After displacement x against spring C

स्प्रिंग C के विरूद्ध x विस्थापन के बाद

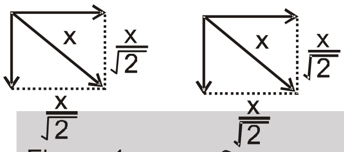


Figure-1 चित्र-1

Deformation in springs ABC is shown in figure 1.

चित्र – 1 में स्प्रिंगो A, B तथा C संकुचन दिखाया गया है।

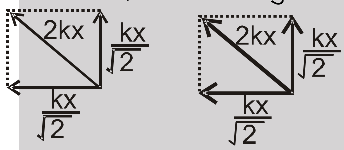


Figure-2 चित्र-2

Forces applied by three springs ABC is shown in figure-2.

चित्र-2 में तीनो स्प्रिंगो A, B, C के द्वारा आरोपित बल दर्शाया गया है।

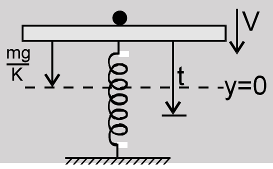
$$F = \frac{kx}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2 + 2kx = 3\ kx = m\omega^2\ x$$

$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad \therefore \qquad N = 3$

8. Velocity of the particle just before collision टक्कर के तुरन्त पहले कण का वेग

$$u = \sqrt{2g\times\frac{4.5mg}{K}}$$

$$u = 3g\sqrt{\frac{m}{K}}$$



Now it collides with the plate.

Now just after collision velocity of system of plate + particle

अब यह प्लेट से टकराता है

टक्कर के बाद (प्लेट + कण) निकाय का वेग

$$mu = 3mv \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{u}{3} = g\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Now system perform's SHM with time period $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{K}}$ and mean position as $\frac{mg}{K}$ distance below the point of collision. Let the equation of motion be.

निकाय SHM करेगा इसका आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{K}}$ तथा माध्य स्थिति, टकराने वाली स्थिति से $\frac{mg}{K}$ नीचे है।

गति की समीकरण

$y = A \sin(\omega t + \phi)$

for t = 0 के लिए $y = mg/K$

$\frac{mg}{K} = A \sin \phi$ ...(1)

Now for amplitude अतः आयाम

$V = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$g\sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{\frac{K}{3m}}\sqrt{A^2 - \frac{m^2g^2}{K^2}}$

$\left(\sqrt{3}\ \frac{mg}{K}\right)^2 = A^2 - \frac{m^2g^2}{K^2}$

$A = \frac{2mg}{K}$ ...(2)

By (1) & (2) समीकरण (1) व (2) से

$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{K}}$

$x = \frac{A}{2}$ to से $x = 0$ तक $\Rightarrow$ $t = \frac{T}{12}$

$x = 0$ to से $x = A$ तक $\Rightarrow$ $t = T/4$

total time कुल समय = $\frac{T}{12} + \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{3m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$

$\therefore$ a = 3

9. Let block is pushed down by x from its equilibrium position.

माना ब्लॉक को इसकी साम्यवस्था स्थिति से x दूरी नीचे धकेला जाता है।

Let extension in springs be y_1 and y_2 as shown in figure.

माना चित्रानुसार स्प्रिंगो में विस्तार क्रमशः y_1 तथा y_2 है।

so restoring force on block $F = K_2y_2$

अतः ब्लॉक पर प्रत्यानयन बल $F = K_2y_2$

Force in left spring is बॉयी स्प्रिंग पर बल $2F = K_1y_1$

From constraint motion बंधित गति से $2y_1 + y_2 = x$

$\Rightarrow \quad 2 \times \frac{2F}{K_1} + \frac{F}{K_2} = x$

$\Rightarrow \quad F = \left(\frac{K_1K_2}{K_1 + 4K_2}\right)x = \omega^2 x$

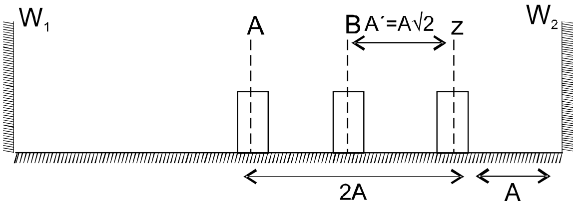
So अतः, $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{K_1K_2}{K_1 + 4K_2}\right)}$

$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ (K_1 + 4K_2)}{K_1K_2}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ (K_1 + 4K_2)}{K_1K_2}} = \pi\sqrt{\frac{12m}{K}}$

$\therefore \quad n = 12$

10.



The motion starts from position A the time taken from A to W_2 $(t_1) = \frac{T}{4} + \frac{T}{12}$

Before collision the energy of the system is conserved,
Kinetic energy of the block just before collision

$K_i = \frac{1}{2}K(2A)^2 - \frac{1}{2}KA^2 = \frac{3}{2}KA^2$ & just after collision $K_f = \frac{K_i}{3}$ (given) $= \frac{1}{2}KA^2$

Now during motion after collision , the energy is again conserved

Hence , $K_f + \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA'^2$

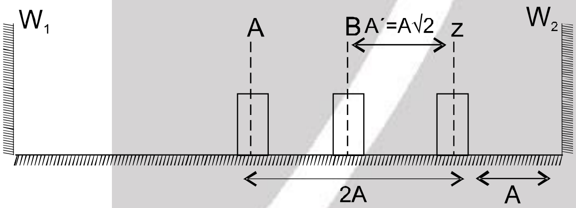
A' = maximum compression after collision $\Rightarrow A' = A\sqrt{2}$

ie. Now motion has amplitude $A\sqrt{2}$
Now time taken by block from

W_2 to position B $= \frac{T}{4} + \frac{T}{8}$

total time taken = $t_1 + t_2 = \frac{T}{4} + \frac{T}{12} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{17}{24}T = \frac{17\pi}{12}\sqrt{\frac{m}{K}} = 17\text{sec}\left\{\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{12}{\pi}\right\}$

Sol.



स्थिति A से गति प्रारम्भ करता है तो A से W_2 तक लिया गया समय $(t_1) = \frac{T}{4} + \frac{T}{12}$

टक्कर के पहले निकाय की ऊर्जा संरक्षित है।
टक्कर के ठीक पहले ब्लॉक की गतिज ऊर्जा

$K_i = \frac{1}{2}K(2A)^2 - \frac{1}{2}KA^2 = \frac{3}{2}KA^2$ और टक्कर के ठीक बाद $K_f = \frac{K_i}{3}$ (दिया है)$= \frac{1}{2}KA^2$

अब टक्कर के बाद, गति के दौरान ऊर्जा दुबारा संरक्षित होगी

अतः , $K_f + \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA'^2$

A´ = टक्कर के बाद अधिकतम सम्पीड़िन $\Rightarrow A' = A\sqrt{2}$

अर्थात गति का आयाम $A\sqrt{2}$ होगा

अब ब्लॉक द्वारा W_2 से B तक गति में लिया गया समय $(t_2) = \frac{T}{4} + \frac{T}{8}$

कुल समय = $t_1 + t_2 = \frac{T}{4} + \frac{T}{12} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{17}{24}T = \frac{17\pi}{12}\sqrt{\frac{m}{K}} = 17\text{sec}\left\{\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{12}{\pi}\right\}$

11. Frequency (आवृत्ति) $n_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$

$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100}{4+5}} = \frac{1}{2\pi}\times\frac{10}{3} = \frac{5}{3\pi}$

By conservation of linear momentum at mean position,
माध्य अवस्था पर रेखीय संवेग संरक्षण से

$P_i = P_f$

$\Rightarrow \quad m_1\omega_1A_1 = (m_1 + m_2)\,\omega_2A_2$

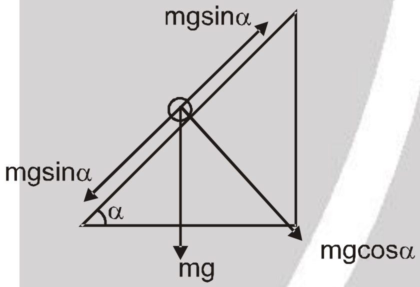
$\Rightarrow \quad m_1\sqrt{\frac{k}{m_1}}A_1 = (m_1 + m_2)\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}A_2$

$\Rightarrow \quad \sqrt{km_1}A_1 = \sqrt{k(m_1+m_2)}\,A_2$

$\Rightarrow \quad A_2 = 2/30$ m.

12. Free body diagram of bob of the pendulum with respect to the accelerating frame of reference is as follows:

$\therefore$ Net tension in the string is T = mg cos α



So, $g_{eff} = \frac{T}{m} = \frac{mg\cos\alpha}{m} = g\cos\alpha$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}}$ or $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\cos\alpha}}$

Alternative :

Whenever point of suspension is accelerating

Take $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}}$ Where $\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{a}$

$\vec{a}$ = Acceleration of point of suspension.

In this question $\vec{a} = g\sin\alpha$ (down the plane)

$\therefore \quad |\vec{g}-\vec{a}| = g_{eff} = \sqrt{g^2 + (g\sin\alpha)^2 + 2(g)(g\sin\alpha)\cos(90° + \alpha)} = g\cos\alpha$

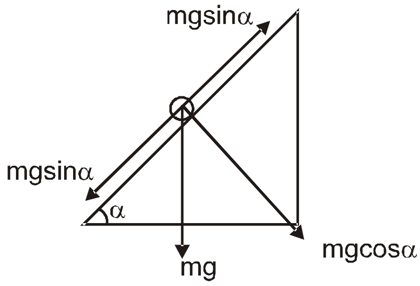
$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\cos\alpha}}$ (α = 60°)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$

$\therefore \quad$ x= 2

त्वरित निर्देश तंत्र के सापेक्ष पेन्डूलम के लोलक का मुक्त वस्तु रेखा चित्र ऐसा होगा।

$\therefore$ रस्सी में कुल तनाव T = mg cos α



और लोलक का कुल त्वरण $g_{eff} = \frac{T}{m} = \frac{mg\cos\alpha}{m} = g\cos\alpha$

$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}}$ या $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\cos\alpha}}$

वैकल्पिक

जब भी आलम्बन बिन्दु त्वरित होता है।

लीजिये $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}}$ जहाँ $\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{a}$

$\vec{a}$ = आलम्बन बिन्दु का त्वरण

इस प्रशन में $\vec{a}$ = g sin α (तल के नीचे की ओर)

$\therefore \quad |\vec{g} - \vec{a}| = g_{eff} = \sqrt{g^2 + (g\sin\alpha)^2 + 2(g)(g\sin\alpha)\cos(90° + \alpha)} = g\cos\alpha$

$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\cos\alpha}}$ $(\alpha = 60°)$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$ $\therefore$ x = 2

13. $\frac{1}{2}mV_m^2 = 15 \times 10^{-3}$

$V_m = \sqrt{0.150}$ m/s

$A\omega = \sqrt{0.150}$ m/s

$L\theta_m . \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{0.150}$ m/s

$\sqrt{gL} = \frac{\sqrt{0.150}}{100 \times 10^{-3}}$ $gL = \frac{0.150}{0.01} = 1.5$ m

$l = \frac{15}{g}$ m $\therefore$ n =15

14. The time period of simple pendulum in air वायु में सरल लोलक का आवर्त काल

$T = t_0 = 2\pi\sqrt{\left(\frac{\ell}{g}\right)}$ .... (i)

ℓ, being the length of simple pendulum. ℓ, सरल लोलक की लम्बाई हैं।

In water, effective weight of bob जल में गोलक का प्रभावी भार

w' = weight of bob in air – upthrust

w´ = वायु में गोलक का भार – ऊपर की ओर बल

$\Rightarrow \quad \rho V g_{eff} = mg - m'g = \rho Vg - \rho' Vg = (\rho - \rho')Vg$

where ρ = density of bob, जहाँ ρ = गोलक का घनत्व

ρ' = density of water जल का घनत्व

$\therefore \quad g_{eff} = g\left(\frac{\rho-\rho'}{\rho}\right) = \left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)g \quad \therefore \quad t = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\left[\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)g\right]}}$ ....(ii)

Thus अतः, $\frac{t}{t_0} = \sqrt{\frac{1}{\left[\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)\right]}} = \sqrt{\left(\frac{1}{1-\frac{1000}{(4/3)\times 1000}}\right)} = 2$

$\Rightarrow \quad t = 2\,t_0$; $t/t_0 = 2 \quad \therefore \quad N = 2$

15. Half of the volume of sphere is submerged.
For equilibrium of sphere, weight = upthrust

$\therefore \quad V\rho_s g = \frac{V}{2}(\rho_L)(g) \quad \Rightarrow \quad \rho_s = \frac{\rho_L}{2}$

When slightly pushed down by x weight will remain as it is while upthrust will increase. The increased upthrust will become the net restoring force (upwards).

$F = -$ (extra upthrust) = (extra volume immersed) (ρ_L) (g)

or $\quad ma = -(\pi R^2)\, x\rho_L g$ (a = acceleration)

$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{\rho_L}{2}\right)a = -(\pi R^2\rho_L g)\,x \quad \therefore \quad a = -\left(\frac{3g}{2R}\right)x$

As $a \propto -x$ motion is simple harmonic

Frequency of oscillation, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left|\frac{a}{x}\right|} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2R}}$.

$f = \sqrt{\frac{3}{8R}}\ \{\pi = \sqrt{g}\} \quad \therefore \quad N = 8$

गोले का आधा आयतन डूबा हुआ है, गोले की साम्यावस्था के लिए

भार = उत्प्लावक बल

$\therefore \quad V\rho_s g = \frac{V}{2}(\rho_L)(g) \quad \Rightarrow \quad \rho_s = \frac{\rho_L}{2}$

जब थोड़ा सा नीचे की ओर x से धकेला जाता है भार अपरिवर्तित रहता परन्तु उत्प्लावक बल बढ़ जाता है। बढ़ा हुआ उत्प्लावक बल परिणामी प्रत्यानयन बल (ऊपर की ओर) बन जायेगा।

$F = -$ (अतिरिक्त उत्प्लावक बल)

= (अतिरिक्त डूबा हुआ आयतन) (ρ_L) (g)

या $\quad ma = -(\pi R^2)\, x\rho_L g$ (a = त्वरण)

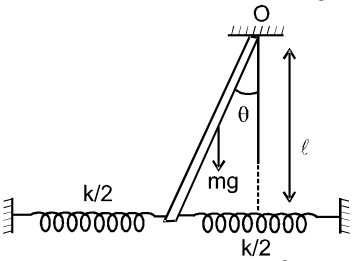
$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi R^3\, a\left(\frac{\rho_L}{2}\right) = -(\pi R^2\rho_L g)\,x \quad \therefore \quad a = -\left(\frac{3g}{2R}\right)x$

क्योंकि $a \propto -x$ गति सरल आवर्त है

दोलन की आवृत्ति $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left|\frac{a}{x}\right|} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2R}}$

$f = \sqrt{\frac{3}{8R}}\ \{\pi = \sqrt{g}\} \quad \therefore \quad N = 8$

16. For small Angular displacement लघु कोणीय विस्थापन के लिये



Restoring torque about point O बिन्दु O के परित प्रत्यानयन बलापूर्ण

$(mg\ \ell/2\ \sin\theta) + (K\ell\sin\theta)\ \ell = \frac{m\ell^2}{3}\alpha$, (for small θ $\sin\theta \approx \theta$) (लघु θ के लिये $\sin\theta \approx \theta$)

$\alpha = \frac{(mg\ell/2 + K\ell^2)\theta}{\frac{m\ell^2}{3}}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \left[\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{m}\right]\theta = -\omega^2\theta$

So angular speed अतः कोणीय वेग $\omega = \sqrt{\left(\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{m}\right)}$

$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}\left(1 + \frac{2k\ell}{mg}\right)} = \sqrt{\frac{75}{\ell}}$ $\therefore$ N = 75

PART – III

1. $x = x_0 \sin^2 \omega t = \frac{x_0(1-\cos 2\omega t)}{2}$

So अतः $A = \frac{x_0}{2}$ Time period आवर्तकाल $= \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi/\omega$

2. Equation of S.H.M $x - x_0 = a \sin(\omega t + \phi)$ $\Rightarrow x = x_0 + a\sin(\omega t + \phi)$
स.आ.ग. की समीकरण $x - x_0 = a \sin(\omega t + \phi)$ $\Rightarrow x = x_0 + a\sin(\omega t + \phi)$

(A) $x = \sin 2\omega t$

(B) $x = \sin^2 \omega t = \left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t$

$\Rightarrow x - 1/2 = -1/2 \cos 2\omega t$

(C) $x = \sin\omega t + 2\cos\omega t = \sin(\omega t + \phi)$ $\{\phi = \tan^{-1} 2\}$
So represent equation of S.H.M
अतः समीकरण स.आ.ग. की समीकरण को प्रस्तुत करती है

(D) But $\sin\omega t + \cos 2\omega t$ cannot write as $\sin(\omega t+\phi)$
$\sin\omega t + \cos 2\omega t$ को $\sin(\omega t+\phi)$ के जैसे नहीं लिखा जा सकता है।
So it is not S.H.M equation ये स.आ.ग. की समीकरण नही है।

3. $v^2 = 108 - 9x^2$

$\frac{2vdv}{dx} = -18x \Rightarrow$ acc. $A = -9x$ (non-uniform) असमान

at x = 3cm पर

$a = -27$ or $|a| = 27 cm/s^2$

also $a = -9x$ is a S.H.M equation so particle perform S.H.M about the give fixed point
तथा $a = -9x$ एक स.आ.ग. समीकरण है अतः कण दिये गये स्थिर बिन्दु के सापेक्ष स.आ.ग. करेगा।

V is maximum at x = 0 V, x = 0 पर अधिकतम है।

and V is Zero at $x = \sqrt{12}$ तथा V, $x = \sqrt{12}$ पर शून्य है।

So Amplitude = $2\sqrt{3}$ cm अतः आयाम = $2\sqrt{3}$ cm

4. Given दिया है $A = 0.4m$, and और $a = g$

so अतः $\omega^2 A = g \Rightarrow \omega^2 = \frac{10}{0.4} = 25$

$\Rightarrow \omega = 5$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi/5$ sec.सैकण्ड

At lowest position acceleration.निम्नतम बिन्दु पर त्वरण $= \omega^2 A + g = g + g = 2g$

So weight अतः भार $= m(2g) = 2mg$

at half distance आधी दूरी पर $a = g/2$

So weight at upper half distance अतः भार ऊपरी आधी दूरी पर $= m(g-g/2) = mg/2$

and weight at lower half distance तथा निचली आधी दूरी पर भार

$= m(g + g/2) = \frac{3mg}{2}$

actual weight at equilibrium position (maximum v)

सही भार साम्यावस्था स्थिति पर (अधिकतम वेग)

5. acceleration त्वरण $a = \omega^2 x$

maximum acceleration अधिकतम त्वरण $a_{max} = \omega^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{2.5}{100}$

When block and platform are separated

जब वस्तु तथा प्लेटफार्म अलग होते है।

$a_{max} = g = 10$

$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{40} = 10 \Rightarrow T^2 = \frac{\pi^2}{100}$ $T = \pi/10$sec

6. For S.H.M स.आ.ग. के लिये

$y = A \sin \omega t = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$ $v_{max} = \omega A$

(A) At $y = A/2$ पर

$v = \omega\sqrt{A^2 - A^2/4} = \frac{\sqrt{3}\omega A}{2} > \frac{\omega A}{2}$

(B) For $v = \frac{V_{max}}{2}$ के लिये $\Rightarrow \omega\sqrt{A^2 - y^2} = \frac{\omega A}{2}$

$\Rightarrow A^2 - y^2 = \frac{A^2}{4}$ $\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}A}{2} > \frac{A}{2}$

(C) for $t = T/8$ के लिये

$y = A \sin\left(\frac{2\pi.T}{8.T}\right) = A/\sqrt{2} > \frac{A}{2}$

(D) for $y = A/2$ के लिये $A/2 = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$\Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi/6 \Rightarrow t = \frac{T}{12} < T/8$

7. $F = \frac{-du}{dx} = -[10x - 20] = 20 - 10x$

acceleration त्वरण $a = \frac{20 - 10x}{m} = 100(2-x) = -\omega^2(x - 2)$

$a = 0$ at $x = 2$ So V is maximum at $x = 2$

$x = 2$ पर $a = 0$ है अतः V, $x = 2$ पर अधिकतम है।

This is equation of S.H.M so particle executes S.H.M

यह स.आ.ग. की समीकरण है अतः कण स.आ.ग. करता है।

also तथा $\omega^2 = 100 \Rightarrow \omega = 10$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi/5$ sec.

8.* $U(x) = 1 - e^{-x^2}$

It is an exponentially increasing graph of potential energy (U) with x^2. Therefore U versus x graph will be as shown.

From the graph it is clear that at origin

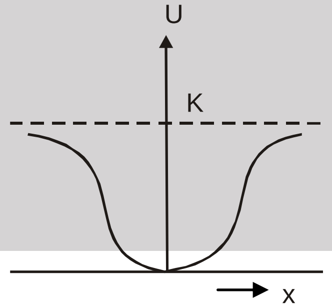
Potential energy U is minimum (therefore, kinetic energy will be maximum) and force acting on the particle is also zero because $F = \frac{-dU}{dx} = -$(slope of U – x graph) = 0.

Therefore, origin is the stable equilibrium position. Hence particle will oscillate simple harmonically about x = 0 for small displacements. Therefore, correct option is (D).

(A) At equilibrium position $F = \frac{-dU}{dx} = 0$ i.e. slope of U-X graph should be zero and from the graph we can see that slope is zero at $x = 0$ and $x = \pm\infty$. Now among these equilibriums stable equilibrium position is that where U is minimum (Here x = 0). Unstable equilibrium position is that where U is maximum (Here none). Neutral equilibrium position is that where U is constant (Here $x = \pm\infty$). Therefore, option (A) is wrong.

(B) For any finite non-zero value of x, force is directed towards the origin, because origin is in stable equilibrium position. Therefore, option (B) is incorrect.

(C) At origin, potential energy is minimum, hence kinetic energy will be maximum. Therefore, option (C) is also wrong.



Sol. $U(x) = K(1 - e^{-x^2})$

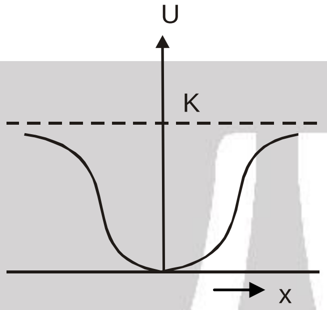
यह स्थितिज ऊर्जा (U) का x^2 के साथ चरघातांकी बढता हुआ ग्राफ है। अतः U और X के मध्य ग्राफ चित्रानुसार होगा। ग्राफ से यह स्पष्ठ हे कि मूलबिन्दू पर स्थितिज ऊर्जा U न्यूनतम है (अतः गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी) और कण पर लगने वाला बल भी शून्य होगा क्योकि $F = \frac{-dU}{dx} = -$(U – x ग्राफ का ढाल) = 0

अतः मूलबिन्दु स्थायी साम्यावस्था की स्थिति है अतः कण x = 0 के सापेक्ष छोटे विस्थापन के लिये कण सरल आवर्त गति करेगा। अतः विकल्प (D) सही है।

(A) साम्यवस्था पर $F = \frac{-dU}{dx} = 0$ है अतः U-X ग्राफ का ढाल शून्य होगा और ग्राफ से हम कह सकते है कि $x = 0$ तथा $x = \pm \infty$ पर ढाल शून्य है। अब इन साम्यावस्थाओ में से स्थायी साम्यावस्था पर U का मान न्यूनतम होगा। (यहाँ $x = 0$) अस्थायी साम्यावस्था पर U अधिकतम होती है। (यहां पर कोई नही) तथा उदासीन साम्यवास्था पर U नियत (यहां $x = \pm \infty$) होती है अतः विकल्प (A) गलत है।

(B) x के किसी भी परिमित अशून्य मान के लिए बल मूलबिन्दु की ओर होगा क्योकि मूलबिन्दु स्थायी साम्यावस्था की स्थिति है। अतः विकल्प (B) गलत है।

(C) मूलबिन्दु पर स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम है अतः गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी।
अतः विकल्प (C) भी गलत है।



9. max^m amplitude अधिकतम आयाम $= \beta\ell$

So time to travel angle α अतः α कोण तय करने में लगा समय

$x = x_0 \sin \omega t$

$\alpha\ell = \beta\ell \sin \omega t$

$t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{\alpha}{\beta}$

Now period of pendulum = $\frac{1}{2}$ (actual time period) +2 (time to travel angle α)

अब लोलक का आर्वतकाल = $\frac{1}{2}$ (वास्तविक आवर्तकाल) +2 (α कोण तय करने मे लगा समय)

$= \frac{1}{2} . 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} + 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sin^{-1} \frac{\alpha}{\beta}$

$= 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[\pi/2 + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \right]$

Also if time taken to travel from right extreme position to wall is t then
यदि दांयी सीमान्त स्थिति से दीवार तक जाने में लगा समय t है तो

$-\alpha = \beta \cos \omega t$

$\Rightarrow \cos\omega t = -\frac{\alpha}{\beta}$

$t = \frac{1}{\omega} \cos^{-1}\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)$

$T = 2t = \frac{2}{\omega} \cos^{-1}\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)$

$T = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cos^{-1}\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)$

10.* Given दिया है $y = (\sin \omega t + \cos \omega t)$ $\quad y = \sqrt{2} \sin (\omega t + \pi/4)$

So अतः $A = \sqrt{2}$ m and तथा at $t = 0$ पर $y = 1$m

11. $\vec{r} = A\cos\omega t\,\hat{i} + 2A\cos\omega t\,\hat{j}$

$\Rightarrow$ $x = A\cos\omega t$, $y = 2A\cos\omega t$ so अतः $y = 2x$

$|\vec{r}| = A\cos\omega t.\sqrt{5} = \sqrt{5}\,A\cos\omega t$

So motion is at straight line, periodic and S.H.M

अतः गति सरल रेखा पर आवर्ती व स.आ.ग. है।

12. From superposition principle

$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3$

$= a\sin\omega t + a\sin(\omega t + 45^o) + a\sin(\omega t + 90^o)$

$= a\{\sin\omega t + \sin(\omega t + 90^o)\} + a\sin(\omega t + 45^o)$

$= 2a\sin(\omega t + 45^o)\cos 45^o + a\sin(\omega t + 45^o)$

$= (\sqrt{2} + 1)\,a\sin(\omega t + 45^o)$

$= A\sin(\omega t + 45^o)$

Therefore, resultant motion is simple harmonic of amplitude

$A = (\sqrt{2} + 1)\,a$

and which differ in phase by 45º relative to the first.

Energy in SHM (amplitude)^2 $[E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2]$

$\therefore \quad \frac{E_{resultant}}{E_{single}} = \left(\frac{A}{a}\right)^2 = (\sqrt{2}+1)^2 = (3 + 2\sqrt{2})$

$\therefore \quad E_{resultant} = (3 + 2\sqrt{2})\,E_{single}$

अध्यारोपण सिद्वान्त से

$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3$

$= a\sin\omega t + a\sin(\omega t + 45^o) + a\sin(\omega t + 90^o)$

$= a\{\sin\omega t + \sin(\omega t + 90^o)\} + a\sin(\omega t + 45^o)$

$= 2a\sin(\omega t + 45^o)\cos 45^o + a\sin(\omega t + 45^o)$

$= (\sqrt{2} + 1)\,a\sin(\omega t + 45^o)$

$= A\sin(\omega t + 45^o)$

अतः परिणामी गति सरल आवर्त्त गति है जिसका आयाम

$A = (\sqrt{2} + 1)\,a$

और यह प्रथम के सापेक्ष 45º कलान्तर पर है।

SHM मे ऊर्जा (आयाम)^2 $[E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2]$

$\therefore \quad \frac{E_{\text{परिणामी}}}{E_{\text{एकल}}} = \left(\frac{A}{a}\right)^2 = (\sqrt{2}+1)^2 = (3 + 2\sqrt{2})$

$\therefore \quad E_{\text{परिणामी}} = (3 + 2\sqrt{2})\,E_{\text{एकल}}$

PART - IV

1. $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{200}$ rad/s

1 to 3

Maximum extension the spring from natural position is x.

Then mg + ma = kx

$\Rightarrow x = \frac{2\ \ (10+5)}{400} = 7.5$ cm

Extension of the spring when it is stretched to equilibrium line is x'.

mg =kx'

$\Rightarrow \quad x' = \frac{2 \times 10}{400} = 5$ cm

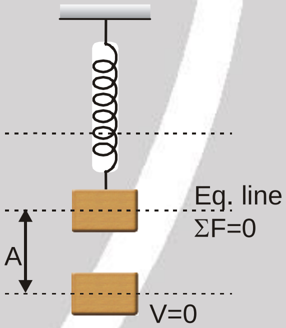
Therefore amplitude A = x –x' = 2.5 cm

If upward direction is taken as positive at t = 0, x = – A

Using x = A sin (ωt + ϕ)

– A = A sin ϕ

$\phi = \frac{3\pi}{2}$



हल: 1 to 3

स्प्रिंग की प्राकृतिक स्थिति से महत्तम खिंचाव x है।

तो mg + ma = kx $\quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\ \ (10+5)}{400} = 7.5$ cm

साम्यवस्था से स्प्रिंग खिंचने पर इसमें खिंचाव x' है।

mg =kx' $\quad \Rightarrow \quad x' = \frac{2 \times 10}{400} = 5$ cm

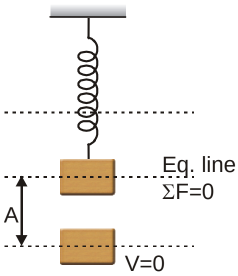
अतः आयाम A = x –x' = 2.5 cm

यदि ऊपर की दिशा को धनात्मक लें, तो t = 0 पर x = – A

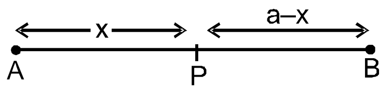
x = A sin (ωt + ϕ) का प्रयोग करने पर

– A = A sin ϕ

$\phi = \frac{3\pi}{2}$



6. (i)



force on particle at point P

बिन्दु P पर स्थित कण पर बल

$$F = \frac{2mg(a-x)}{a} - \frac{mg(x)}{a}$$

$$F = \frac{mg}{a}(2a - 3x)$$

$$F = \frac{-3mg}{a}(x - 2a/3)$$

(ii) So this is equation of S.H.M ($F = m\omega^2 x$) so particle perform S.H.M with mean position $x - 2a/3 = 0$

अतः ये समीकरण स.आ.ग. की समीकरण है। ($F = m\omega^2 x$) अतः कण स.आ.ग. करेगा जिसकी माध्य अवस्था है

$x - 2a/3 = 0$ $x = 2a/3$ (from point A) बिन्दु A से

So अतः $\omega^2 = \frac{3g}{a} \Rightarrow \omega = \sqrt{3g/a}$

So Time period अतः आर्वतकाल $T = 2\pi\sqrt{a/3g}$

and amplitude और आयाम $= 2a/3 - a/2 = a/6$

(iii) minimum distance from B से न्यूनतम दूरी $= a - (2a/3 + a/6) = a/6$

(iv)

at point P velocity of particle = 0

बिन्दु P पर कण का वेग = 0

and force और बल $= \frac{2mg\ \ x}{a}$

(at point q) (q बिन्दु पर)

acc. त्वरण $= \frac{2g\ \ x}{a} \Rightarrow \int_0^v v\ \ dv = \int_0^{a/6} \frac{2gx\ \ dx}{a} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2ga}}{6}$

8. At equilibrium position साम्यावस्था की स्थिति पर : →

$Kx_0 = m_1 g \sin\theta + m_2 g \sin\theta$

$x_0 = \frac{(m_1 + m_2)g\ \ \sin\theta}{k}$

Block will separate when acceleration of block of mass m_1 will be just equal to $g \sin\theta$

जब m_1 द्रव्यमान के ब्लॉक का त्वरण $g \sin\theta$ के बराबर होगा ब्लॉक अलग – अलग हो जायेगे।

$\Rightarrow \quad a = \omega^2 x = g \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{m_1 + m_2} \times x = g \sin\theta$

$\Rightarrow \quad x = \frac{m_1 + m_2}{K} g \sin\theta = x_0$

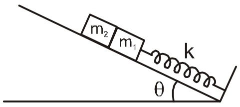
So, blocks will separate when blocks are at distance $x = \frac{m_1 + m_2}{K} g \sin\theta$

अतः जब ब्लॉक माध्यवस्था से $x = \frac{m_1 + m_2}{K} g \sin\theta$ की दूरी पर होगे ब्लॉक अलग अलग हो जायेगे।

From mean position

i.e. spring is at its natural position (amplitude $A = \left(\frac{2}{K}(m_1 + m_2) g \sin\theta\right)$)

जब स्प्रिंग इसकी प्राकृतिक स्थिति मे है। (आयाम A = $\left(\frac{2}{K}(m_1+m_2)g\sin\theta\right)$)



Blocks will separate at distance x = x_0 from mean position.
माध्यवस्था से x = x_0 दूरी पर ब्लॉक अलग हो जायेगे।

$$v = \sqrt{A^2 - x_0^2}$$

$$= \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}\sqrt{\left(\frac{2}{K}(m_1+m_2)g\sin\theta\right)^2 - \left(\left(\frac{m_1+m_2}{K}\right)\ g\sin\theta\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{k}(m_1+m_2)}\ \ g\sin\theta$$

EXERCISE-3

PART - I

भाग - I

1. $x = A\frac{(1-\cos 2\omega t)}{2} + B\frac{(1+\cos 2\omega t)}{2} + \frac{C}{2}\sin 2\omega t$

Choose different combinations of A, B & C to get linear combination of sin & cos functions.
A, B तथा C के भिन्न–भिन्न मानों के लिये sin व cos फलन के रेखीय मिश्रण प्राप्त करो।

2. (A) SHM की प्रकृति से, विकल्प p से दिये गए ग्राफ से स्थितिज ऊर्जा–विस्थापन का फलन परवलय होगा
अतः (A) → (p)

(B) a = 0 या a = नियत (दी गई शर्त से)
V > 0 यह धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश है।
y – विस्थापन

$y = ut \pm \frac{1}{2}at^2$ for a = नियत

$y = vt$ for a = 0

यह दोनों स्थितियां (q) व (s) द्वारा संतुष्ट होती है। (B) → (q, s)
(p) को नही लिया गया है चूंकि t = 0 पर विस्थापन शून्य नही है तथा वेग का ऋणात्मक मान है।

(C) $R = \frac{u^2\sin(2\theta)}{g}$ and $R \propto u^2$ एक नियत प्रक्षेपण कोण के लिए

तथा u = 0, R = 0 ⇒ (C) → (s)

(D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{\ell}{g} \Rightarrow y = \frac{4\pi^2}{g}x \Rightarrow$ (D) → (q)

3. Applying equation of torque about lowest point
सबसे निम्नतम बिन्दु पर बलाघूर्ण का समीकरण लगाने पर

$$(2Kx)\,R = \left(\frac{3}{2}MR^2\right)\alpha$$

$$\alpha R = \frac{4Kx}{3M}$$

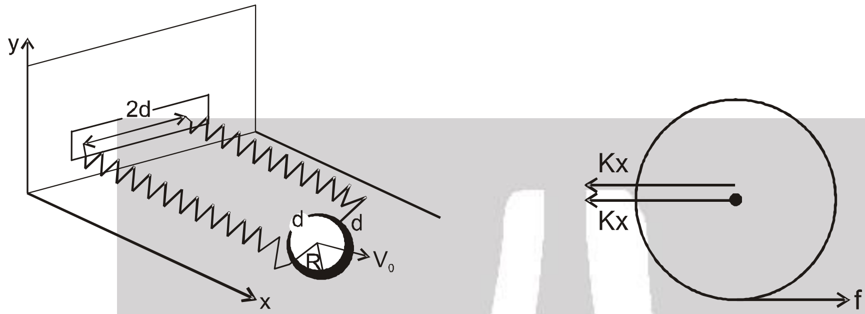
as there is no slipping
चूंकि कोई फिसलन नहीं है।

$a = \alpha R = \dfrac{4Kx}{3M}$

Net force कुल बल $= Ma = \dfrac{4Kx}{3}$

Which is directed opposite to displacement
जो कि विस्थापन के विपरीत है।

$F_{net} = \dfrac{-4Kx}{3}$ **Ans. (D)**

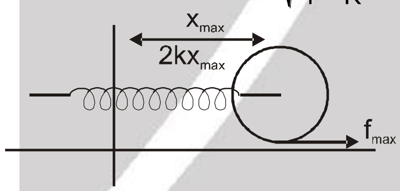


4. $F_{net} = -\dfrac{4kx}{3} = -M(\omega^2 x)$

$\omega = \sqrt{\dfrac{4k}{3M}}$ **Ans. (D).**

5. $\dfrac{1}{2}MV_0^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{MR^2}{2}\left(\dfrac{V_0}{R}\right)^2 = \dfrac{1}{2}(2K)x^2_{max}$

$= \dfrac{3}{2}MV_0^2 = 2kx^2_{max} \Rightarrow x_{max} = \sqrt{\dfrac{3}{4}\dfrac{MV_0^2}{K}}$



At extreme position, friction will have maximum value.
चरम स्थिति पर, घर्षण अधिकतम होगा।

$2kx_{max} - f_{max} = \dfrac{4k}{3}x_{max} \Rightarrow f_{max} = \dfrac{2}{3}kx_{max}$

$\mu Mg = \dfrac{2}{3}k\sqrt{\dfrac{3}{4}\dfrac{MV_0^2}{K}} \Rightarrow \mu Mg = \left(\sqrt{\dfrac{K}{3}M}\right)V_0$

$V_0 = \mu g\sqrt{\dfrac{3M}{K}}$ **Ans. (C)**

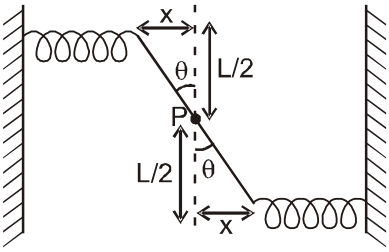
6. From graph (ग्राफ से)

$T = 8$ second., $A = 1$ cm, $x = A\sin\omega t. = 1\sin\dfrac{2\pi}{8}t.$

$a = -\omega^2 x = -\left(\dfrac{2\pi}{8}\right)^2 \sin\left(\dfrac{2\pi}{8}\right)t$ cm/s²

At, $t = \dfrac{4}{3}$ second पर $a = \left(\dfrac{2\pi}{8}\right)^2 - \dfrac{\pi}{3}\sin = -\dfrac{\sqrt{3}\ \pi^2}{32}$ cm/s²

7.



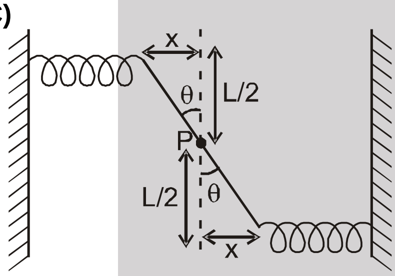
Torque about P = (kx) $\frac{L}{2}$ + (kx) $\frac{L}{2}$ = kxL ($\theta = \frac{2x}{L}$)

$\tau = I\,\alpha$

$\Rightarrow \quad -\frac{KL^2}{2}\theta = \frac{ML^2}{12}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{-6K\theta}{M} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{6K}{M}\theta = -\omega^2\theta$

$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{6K}{M}}$ and $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6K}{M}}$

Sol. (C)



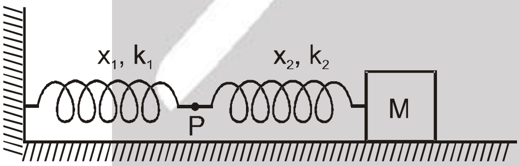
P के सापेक्ष बल आघूर्ण = (kx) $\frac{L}{2}$ + (kx) $\frac{L}{2}$ = kxL ($\theta = \frac{2x}{L}$)

$\tau = I\,\alpha$

$\Rightarrow \quad -\frac{KL^2}{2}\theta = \frac{ML^2}{12}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{-6K\theta}{M} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{6K}{M}\theta = -\omega^2\theta$

$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{6K}{M}}$ और $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6K}{M}}$

8.



Extensions in springs are x_1 and x_2 then

स्प्रिंगों में विस्तार x_1 व x_2 है तब

$k_1x_1 = k_2x_2$

and और $x_1 + x_2 = A$

$\Rightarrow \quad x_1 + \frac{k_1x_1}{k_2} = A \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{k_2A}{k_1 + k_2}$

9. When $0 < E < V_0$ there will be acting a restoring force to perform oscillation because in this case particle will be in the region $|x| \le x_0$.

जब $0 < E < V_0$, यहा दोलन करने के लिए एक प्रत्यानयन बल कार्यरत है क्योकि इस स्थिति में कण क्षेत्र $|x| \le x_0$ में रहता है।

10. $V = \alpha x^4$

T.E. = $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \alpha A^4$ (not strictly applicable just for dimension matching it is used)

T.E. = $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \alpha A^4$ (पूर्णतः लागू नही है केवल यह विमीय रूप से मिलान के लिए उपयोगी है)

$\omega^2 = \frac{2\alpha A^2}{m} \quad \Rightarrow \quad T \propto \frac{1}{A}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$

11. $F = -\frac{dU}{dx}$

as for $|x| > x_0$ $V = V_0$ = constant

जैसा कि $|x| > x_0$ के लिए $V = V_0$ = नियतांक

$\Rightarrow \quad \frac{dU}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 0$

12*. torque is same for both the cases.

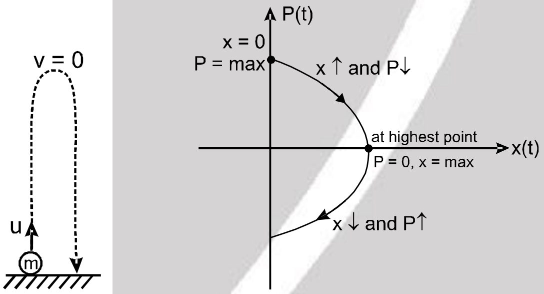
दोनों प्रकरणो में बलाघूर्ण समान है

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$

$I_A > I_B$

$\omega_A < \omega_B$

13.



14. In 1st case amplitude of SHM is a.

In 2nd case amplitude of SHM is 2a

Total energy = $\frac{1}{2}k(\text{amplitude})^2$

$E_1 = \frac{1}{2}k(2a)^2$

$E_2 = \frac{1}{2}k(a)^2 \quad E_1 = 4 \quad E_2$

Alternative :

Linear momentum $P = mv$

$= m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\Rightarrow P^2 = m^2\omega^2 (A^2 - x^2)$

$\Rightarrow P^2 + (m\omega)^2 x^2 = m^2\omega^2 A^2$ ...(i)

Equation of circle (bigger)

$P^2 + x^2 = (2a)^2$

$P^2 + x^2 = 4a^2$ ...(ii)

Equation of circle (smaller)

$P^2 + x^2 = a^2$ ...(iii)

Comparing (i) and (ii)

Amplitude A = 2a

and $(m\omega)^2 = 1 \Rightarrow m\omega^2 = \frac{1}{m}$

$\frac{1}{2}m\omega^2(A)^2$

So energy $E_1 = \frac{1}{2}m\omega^2(2a)^2$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{m}\times(4a^2)$

$= \frac{2a^2}{m}$

Comparing (i) and (iii)

A = a

$(m\omega)^2 = 1 \Rightarrow m\omega^2 = \frac{1}{m}$

So $E_2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{m}a^2 = \frac{1}{2}\frac{a^2}{m^2}\;\frac{1}{2}\frac{a^2}{m}$

So $\frac{E_1}{E_2} = 4 \Rightarrow E_1 = 4E_2$

Sol. प्रथम स्थिति में SHM का आयाम a है।

द्वितीय स्थिति में SHM का आयाम 2a है।

कुल ऊर्जा = $\frac{1}{2}$k(आयाम)^2

$E_1 = \frac{1}{2}k(2a)^2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2}k(a)^2$

$E_1 = 4\ E_2$

वैकल्पिक :

रेखीय संवेग P = mv

$= m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\Rightarrow P^2 = m^2\omega^2(A^2 - x^2)$

$\Rightarrow P^2 + (m\omega)^2x^2 = m^2\omega^2A^2$ ...(i)

वृत्त (बड़ा वाला) का समीकरण

$P^2 + x^2 = (2a)^2$

$P^2 + x^2 = 4a^2$ ...(ii)

वृत्त (छोटा वाला) का समीकरण

$P^2 + x^2 = a^2$ ...(iii)

(i) तथा (ii) की तुलना करने पर

आयाम A = 2a

तथा $(m\omega)^2 = 1 \Rightarrow m\omega^2 = \frac{1}{m}$

$\frac{1}{2}m\omega^2(A)^2$

अतः ऊर्जा $E_1 = \frac{1}{2}m\omega^2(2a)^2$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{m}\times(4a^2)$

$= \frac{2a^2}{m}$

(i) तथा (iii) की तुलना करने पर

A = a

$(m\omega)^2 = 1 \Rightarrow m\omega^2 = \frac{1}{m}$

अतः $E_2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{m}a^2 = \frac{1}{2}\frac{a^2}{m^2}\ \frac{1}{2}\frac{a^2}{m}$

अतः $\frac{E_1}{E_2} = 4 \Rightarrow E_1 = 4E_2$

15. Linear momentum

$P = mv$

$= m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\Rightarrow \quad P^2 + m^2\omega^2x^2 = m^2\omega^2A^2$

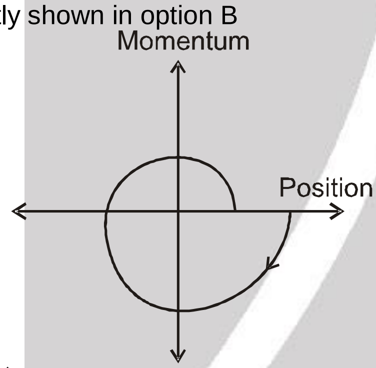
represents a circle on P–x diagram with radius of circle R = A ($\because m^2\omega^2 = 1$)

ω of spring mass system remains constant and equal to $\sqrt{\frac{k}{m}}$

Amplitude of oscillation inside liquid will decrease due to viscous force

So radius of circular arcs will decrease as position change

Correctly shown in option B



रेखीय संवेग

$P = mv$

$= m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\Rightarrow \quad P^2 + m^2\omega^2x^2 = m^2\omega^2A^2$

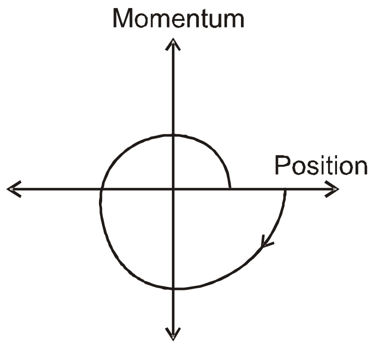
R = A त्रिज्या के साथ P–x चित्र पर वृत्त को प्रदर्शित करता है ($\because m^2\omega^2 = 1$)

स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय का ω नियत रहता है तथा $\sqrt{\frac{k}{m}}$ के बराबर होता है

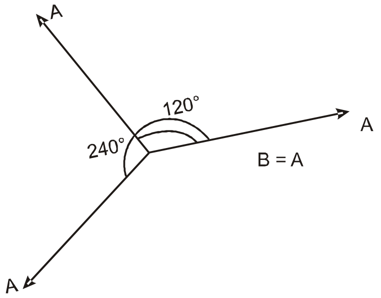
द्रव के अन्दर दोलन का आयाम श्यान बल के कारण घटेगा

अतः वृत्ताकार चाप की त्रिज्या स्थिति परिवर्तन के अनुसार घटेगी

सही ग्राफ विकल्प B में है।



16.



So अतः B = A, $\phi = 240° = \frac{4\pi}{3}$

17. Time of flight for projectile प्रक्षेप के लिये उड्डयन काल

$$T = \frac{2u\sin\theta}{g} = 1 \text{ sec.}$$

$$\frac{2u\sin 45}{g} = 1 \text{ sec.}$$

$$u = \frac{g}{\sqrt{2}}$$

$$u = \sqrt{50} \text{ m/s}$$

18*. $x = A\sin\omega t$

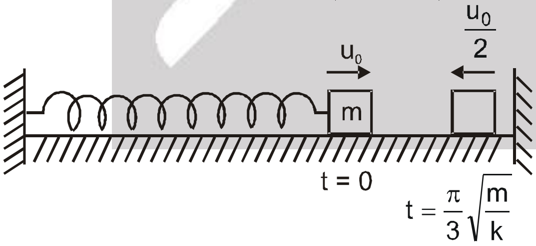
$$v = A\omega\cos\omega t = \frac{\omega A}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\omega t = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

for (C) $\quad$ time $= \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{m}{k}}$

for (D) $\quad$ time $= \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{5\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$



Hindi $x = A\sin\omega t$

$$v = A\omega\cos\omega t = \frac{\omega A}{2} \Rightarrow \cos\omega t = \frac{1}{2}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(C) के लिए $\quad$ समय $= \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{m}{k}}$

(D) के लिए $\quad$ समय $= \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{5\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$

19. For first oscillator / प्रथम दोलित्र के लिए

$b = ma\omega_1$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{m\omega_1} = n^2$

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = n^2$

For Second oscillator / द्वितीय दोलित्र के लिए

$\frac{1}{m\omega_2} = 1$

Ans. B

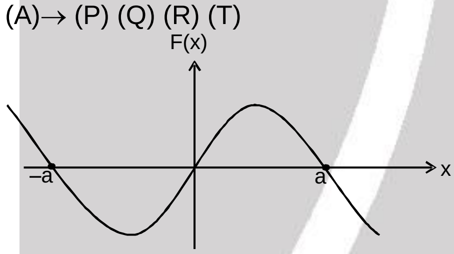
$E_1 = \frac{1}{2}m\omega_1^2 a^2$; $E_2 = \frac{1}{2}m\omega_2^2 \quad R^2$

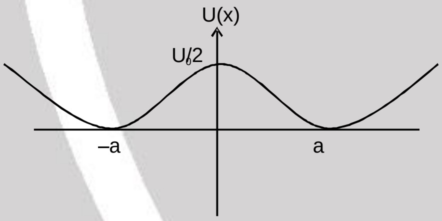
$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \times n^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \times \frac{\omega_2}{\omega_1}$;

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{E_1}{\omega_1} = \frac{E_2}{\omega_2}$ Ans. D

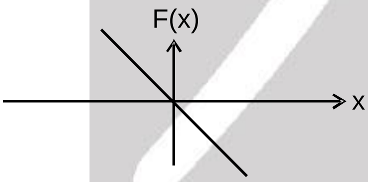
20. **(A)** $F_x = \frac{-dU}{dx} = -\frac{2U_0}{a^3}\,[x-a]\ \ [x]\ \ [x+a]$

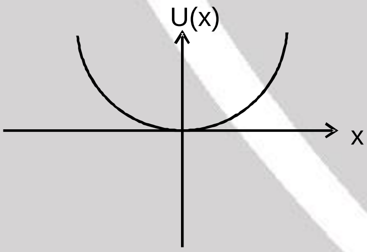
(A)$\rightarrow$ (P) (Q) (R) (T)





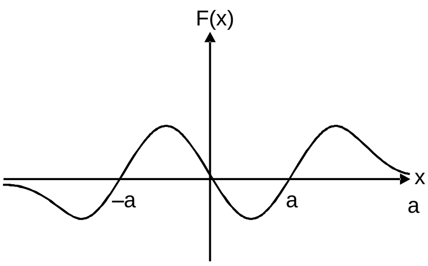
(B) $F_x = \frac{-dU}{dx} = -U_0\left(\frac{x}{a}\right)$

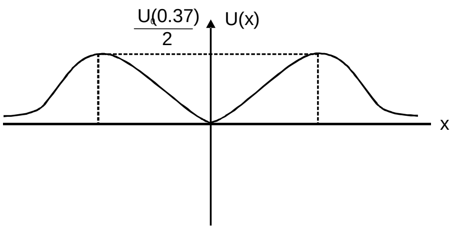




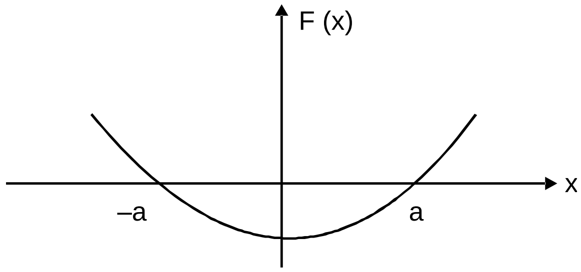
(C) $F_x = -\frac{dU}{dx}$

$= U_0\ \frac{e^{-x^2/a^2}}{a^3}\ [x][x-a]\ [x+a]$

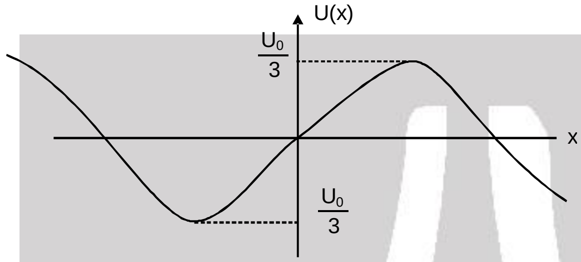




(D) $F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{U_0}{2a^3}[(x-a)(x+a)]$

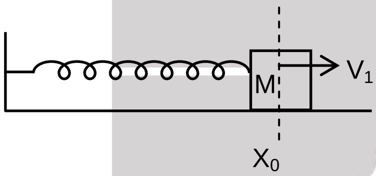


P, R, T

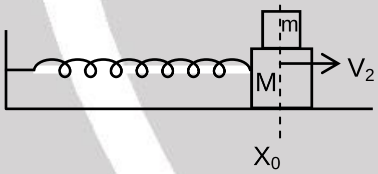


21. Case-1

Just before m is placed

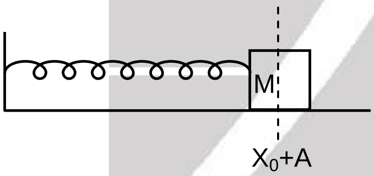


Just after m is placed

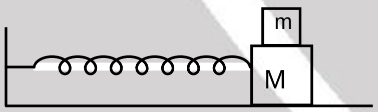


Case-2

Just before m is placed

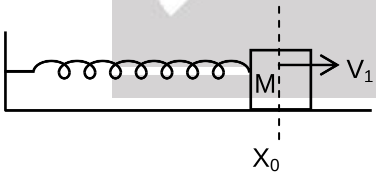


Just after m is placed

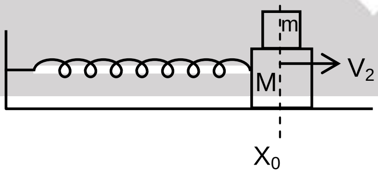


Case-I

m को रखने के ठीक पहले

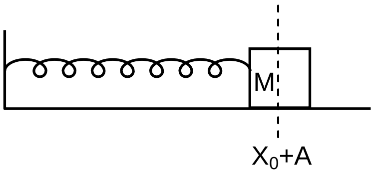


m को रखने के ठीक बाद

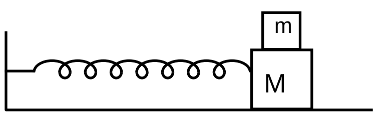


Case-II

m को रखने के ठीक पहले



m को रखने के ठीक बाद



In case-1 में

$MV_1 = (M + m)V_2$

$V_2 = \left(\frac{M}{M+m}\right)V_1$

$\sqrt{\frac{k}{M+m}}\,A_2 = \left(\frac{M}{M+m}\right)\sqrt{\frac{k}{M}}\,A_1$

$A_2 = \sqrt{\frac{M}{M+m}}\,A_1$

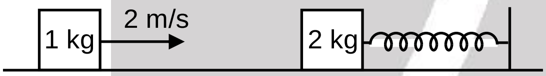
In case-2 में

$A_2 = A_1$

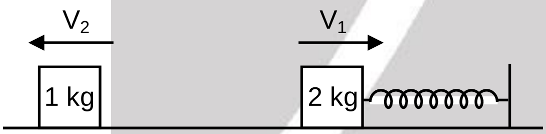
$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{K}}$ in both case. दोनों स्थितियों में

Total energy decreases in first case where as remain same in 2nd case.
Instantaneous speed at x_0 decreases in both case.
प्रथम स्थिति में कुल ऊर्जा घटती है जबकि द्वितीय स्थिति में नियत रहती है।
x_0 पर तात्क्षणिक चाल दोनों स्थितियों में घटती है।

22. **Just Before Collision टक्कर के पहले**



Just After Collision टक्कर के बाद



$V_1 + V_2 = 2$ .....(1)

$2V_1 - V_2 = 4$ .....(2)

$3V_1 = 4 \Rightarrow V_1 = \frac{4}{3}$ $\qquad V_2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ m/s

$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{2}} = \pi$ sec.

Distance दूरी $= \pi V_2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{22}{7}\right)m = \frac{44}{21}m = 2.09$

PART - II
भाग - II

1. $A\omega = v_{max}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi A}{v_{max}} = 0.01$ sec.

2*. $A\omega^2 = g$

$\Rightarrow \quad A = g/\omega^2$

3. $|v| = (2 \times 10^{-2})\ (\pi)\sin\pi t$

For $|v|$ to be maximum $\sin\pi t = 1$

$|v|$ के अधिकतम होने के लिए $\sin\pi t = 1$

$\pi t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$,........... $t = \frac{1}{2}$ s.

4. $x = x_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad v = -x_0\,\omega\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

$a = -x_0\omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$, $\quad a = x_0\omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \pi\right)$

$a = x_0\omega^2.\ \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$

5. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$, $f_{new} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k_1 + 4k_2}{m}} = 2f$.

6. $K_{av} = \frac{\int_0^{T/4} \frac{1}{2} m[a\omega\cos(\omega t)]^2 dt}{\int_0^{T/4} dt} = \frac{ma^2\omega^2}{2.\frac{T}{4}} \int_0^{T/4} \cos^2(\omega t)dt = \frac{2ma^2\omega^2}{T}.\frac{T}{8} = \frac{1}{4} ma^2\omega^2$

$= \frac{1}{4} ma^2(2\pi\upsilon)^2 = \pi^2\, ma^2\, \upsilon^2$.

7.* $x = A \sin \omega t$

$v = A\ \omega \cos \omega t$

$a = -A\omega^2 \sin \omega t$

(1) $\frac{aT}{x} = \left(\frac{-A\omega^2 \ \sin\omega t}{A\sin\ \ \omega t}\right) T = -\ \omega^2 T = -\ 2\pi\omega$

(2) $aT + 2\pi v = -\ A\omega^2\ T \sin \omega t + 2\pi.\ A\omega \cos \omega t$

(3) $\frac{aT}{V} = \frac{-A\omega^2 \sin\omega t \times T}{A\omega\cos\omega t}$

(4) $a^2T^2 + 4\pi^2\ v^2 = +\ A^2\ \omega^4\ T^2 \sin^2\omega t + 4\pi^2A^2\omega^2 \cos^2\omega t = +\ A^2\ \omega^4 \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 \sin^2\omega t + 4\pi^2A^2\omega^2 \cos^2\omega t$

$= 4\pi^2A^2\omega^2$

8. C.O.L.M.

रेखीय संवेग संरक्षण से (C.O.L.M.)

$MV_{max} = (m + M)V_{new}$, $V_{max} = A_1\omega_1$

$V_{new} = \dfrac{MV_{max}}{(m+M)}$

Now अतः, $V_{new} = A_2.\omega_2$

$\dfrac{M.A_1}{(m+M)}\sqrt{\dfrac{K}{M}} = A_2\sqrt{\dfrac{K}{(m+M)}}$

$A_2 = A_1\sqrt{\dfrac{M}{(m+M)}}$ $\dfrac{A_1}{A_2} = \left(\dfrac{m+M}{M}\right)^{1/2}$ **Ans.**

9. $\ell_A = \dfrac{2\ell}{5}$, $\ell_B = \left(\dfrac{3\ell}{5}\right)$ $K\ell = K_A\ell_A = K_B\ell_B$

$K\ell = K_A\left(\dfrac{2\ell}{5}\right)$

$K_A = \dfrac{5K}{2}$ $\Rightarrow$ $K_B = \dfrac{5K}{3}$.

10. $x_1 = A\sin(\omega t + \phi_1)$

$x_2 = A\sin(\omega t + \phi_2)$

$x_1 - x_2 = A\left[2\sin\left[\omega t + \dfrac{\phi_1+\phi_2}{2}\right]\sin\left[\dfrac{\phi_1-\phi_2}{2}\right]\right]$

$A = 2A\sin\left(\dfrac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$

$\dfrac{\phi_1-\phi_2}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ $\phi_1 = \dfrac{\pi}{3}$ **Ans.**

11. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\dfrac{dx}{dt}$

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$ here b is demping coefficient यहाँ b मंदक गुणांक है।

This has solution of type

$x = e^{\lambda t}$ substituting this

समीकरण के हल $x = e^{\lambda t}$ की तरह है। इसका मान रखने पर

$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$

$\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$

on solving for x, we get x के लिए हल करने पर

$x = e^{-\frac{b}{2m}t}$ a cos (ω_1 t – α)

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ where यहाँ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$\lambda = +\dfrac{b}{2}$

So, average life अतः औसत आयु काल = $\dfrac{2}{b}$

12. $A = A_0 e^{-\frac{bt}{2m}}$

after 5 second

5 सैकण्ड पश्चात्

$0.9A_0 = A_0 e^{-\frac{b(5)}{2m}}$ ...(i)

After 10 more second

और 10 सैकण्ड पश्चात्

$A = A_0 e^{-\frac{b(15)}{2m}}$ ...(ii)

From (i) & (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

$A = 0.729\ A_0$ **Hence Ans. (3)**

13. $x = A\cos\omega t$

displacement in t time = $A - A\cos\omega t$

t समय में विस्थापन = $A - A\cos\omega t$

for $t = \tau$ के लिए $A[1 - \cos\omega\tau] = a$

for $t = 2\tau$ के लिए $A[1 - \cos 2\omega\tau] = 3a$

$$\frac{1-\cos\omega\tau}{1-\cos 2\omega\tau} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1-\cos\omega\tau}{2\sin^2\omega\tau} = \frac{1}{3}$$

Say माना $x = \cos\omega t$

$$\frac{1-x}{2(1-x^2)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3 = 2 + 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} = \cos\omega\tau$$

$$A = 2a,\quad \omega\tau = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}\tau = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow T = 6\tau$$

14. K.E. is maximum at mean position, whereas P.E. is minimum.

At extreme position, K.E. is minimum and P.E. is maximum.

माध्य स्थिति पर गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी, जबकि स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होगी .

चरम स्थिति पर गतिज ऊर्जा न्यूनतम होगी, जबकि स्थितिज ऊर्जा अधिकतम होगी .

15. $v = \omega\sqrt{A^2 - \left(\frac{2A}{3}\right)^2}$

$v = \sqrt{5}\,\frac{A\omega}{3}$

$v_{new} = 3v = \sqrt{5}\,A\omega$

So the new amplitude is given by

अतः नया आयाम होगा

$$v_{new} = \omega\sqrt{A_{new}^2 - x^2} \Rightarrow \sqrt{5}\,A\omega = \omega\sqrt{A_{new}^2 - \left(\frac{2A}{3}\right)^2}$$

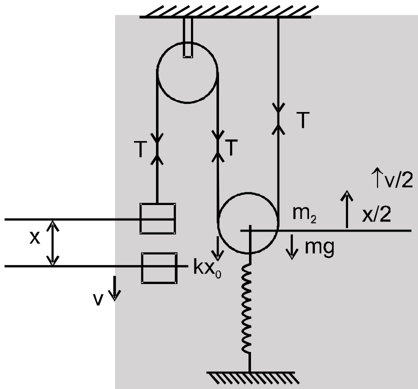
$$A_{new} = \frac{7A}{3}$$

16. $x = A\sin(\omega t + \phi)$
$\phi = 0, \pi$
$x = \pm A\sin\omega t$
$KE = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$
$= \frac{1}{2}KA^2\cos^2\omega t$

HIGH LEVEL PROBLEMS (HLP)

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1.



(i) Equilibrium position determination साम्यवस्था स्थिति निर्धारण

$M_1g = T \rightarrow$ (from FBD of M_1) (M_1 के मु. व. रे. से)

$2T = M_2g + kx_0$ (from FBD of M_2) (M_2 के मु. व. रे. से)

$\therefore\ 2M_1g = M_2g + kx_0$

$\therefore\ kx_0 = 2M_1g - M_2g$

(ii) Displace block M_1 by small disp. x by वस्तु M_1 को छोटे विस्थापन x से विस्थापित करने पर

At new displaced position नयी विस्थापित स्थिति

$$- Mgx + \frac{1}{2}M_1V^2 + \frac{1}{2}M_2\left(\frac{v}{2}\right)^2 + M_2g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}K\left(x_0 + \frac{x}{2}\right)^2 = C$$

Differentiating equation समीकरण का अवकलन करने पर

$$- M_1g\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}M_1\,2v\frac{dv}{dt} + \frac{M_2}{8}\,2v\frac{dv}{dt} + \frac{M_2g}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{2}\,2\left(x_0 + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow - M_1g + M_1a + \frac{M_2a}{4} + \frac{M_2g}{2} + \frac{K}{2}\left(x_0 + \frac{x}{2}\right) = 0 \qquad \left(\text{where जहाँ } a = \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow -M_1g + \frac{M_2g}{2} + M_1a + \frac{M_2a}{4} + \frac{Kx_0}{2} + \frac{Kx}{4} = 0$$

(from equilibrium साम्यावस्था से $- M_1g + \frac{M_2g}{2} + \frac{Kx_0}{2} = 0$)

Hence अतः, $\frac{4M_1 + M_2}{4}\,a = \frac{-Kx}{4}$

$\therefore\quad a = -\left(\frac{K}{4M_1 + M_2}\right)x \qquad \omega^2 = \frac{K}{(4M_1 + M_2)}$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{(4M_1 + M_2)}}\ ;\quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \therefore \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{4M_1 + M_2}{K}}$

2. By work energy theorem;

$w_{ext} + w_{spring} = k_f - k_i$

Let x_1, x_2 be the equilibrium distances of spring from natural length & V V' are their velocities at equilibrium positions.

Initially,

$$Fx_1 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \cdots (1)$$

and finally $$Fx_2 - \frac{1}{2}k'x_2^2 = \frac{1}{2}mv'^2 \quad \cdots (2)$$

In both cases : force applied is same, and velocity becomes maximum when F = kx. (at equilibrium) (after which the mass will deaccelerate)

$\therefore \quad F = kx_1 = (4k)x_2$

$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{x_1}{4} \qquad (k' = 4k)$

Substituting in (2) :

$$fx_2 - \frac{1}{2}k'x_2^2 = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$\frac{Fx_1}{4} - \frac{1}{2}(4k)\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\left[Fx_1 - \frac{1}{2}kx_1^2\right] = \frac{1}{2}mv'^2 \quad \cdots (3)$$

Dividing (3)/(1) ; we get :

$$\frac{1}{4} = \frac{v'^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v}{2} \text{ **Ans.**}$$

Sol(2). $V_{max.} = V = A\omega = \frac{F}{K}\sqrt{\frac{K}{m}}$

$V' = A'\omega' = \frac{F}{K}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{V}{2}$ **Ans.**

Sol(1). कार्य ऊर्जा प्रमेय से

$w_{ext} + w_{spring} = k_f - k_i$

यहाँ x_1, x_2 क्रमशः प्रारम्भिक व अन्तिम विस्तारण है तथा v, v' क्रमशः प्रारम्भिक व अंतिम वेग है।

प्रारम्भ में $Fx_1 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \cdots (1)$

अन्त में $Fx_2 - \frac{1}{2}k'x_2^2 = \frac{1}{2}mv'^2 \quad \cdots (2)$

दोनों स्थितियों में आरोपित बल समान है। तथा F = kx पर वेग अधिकतम हो जायेगा (साम्यावस्था पर) इसके बाद द्रव्यमानों का मंदन होगा

$\therefore \quad F = kx_1 = (4k)x_2$

$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{x_1}{4}$

(2) में प्रतिस्थापन से :

$$\frac{Fx_1}{4} - \frac{1}{2}(4k)\left(\frac{x_1}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\left[Fx_1 - \frac{1}{2}kx_1^2\right] = \frac{1}{2}mv'^2 \quad \cdots (3)$$

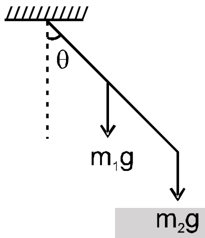
(3)/(1) भाजित करने पर हम प्राप्त करते है

$$\frac{1}{4} = \frac{v'^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v}{2} \text{ **Ans.**}$$

Sol(2). $V_{max.} = V = A\omega = \frac{F}{K}\sqrt{\frac{K}{m}}$

$V' = A'\omega' = \frac{F}{K}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{V}{2}$ **Ans.**

3



Net restoring torque about O   O के सापेक्ष कुल प्रत्यानयन बल

$= m_1g\,\ell_1 \sin\theta + m_2g\,\ell_2 \sin\theta = (m_1\ell_1 + m_2\ell_2)g \sin\theta$

for small oscillation छोटे दोलनों के लिए $\sin\theta \sim \theta$

$\Rightarrow \quad \tau_{restoring} = (m_1\ell_1 + m_2\ell_2)g\theta$

compare with $\tau = C\theta$ से तुलना करने पर

$C = (m_1\ell_1 + m_2\ell_2)g$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)}{(m_1\ell_1 + m_2\ell_2)g}} = \pi$

4. For pure rolling to take place,

$v = R\omega$

ω' = angular velocity of COM of sphere C about O

$= \frac{v}{4R} = \frac{R\omega}{4R} = \frac{\omega}{4}$

$\therefore \quad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{1}{4}\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \alpha' = \frac{\alpha}{4}$

or $\quad \alpha = \frac{a}{R}$ for pure rolling

where, $a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{5g\sin\theta}{7}$

as, $\quad I = \frac{2}{5}mR^2$

For small θ, $\sin\theta$ θ, being restoring in nature.

$\alpha' = -\frac{5g}{28R}\theta$

$\therefore \quad \omega = \sqrt{\left|\frac{\alpha'}{\theta}\right|} = \sqrt{\frac{5g}{28R}} = 5$

हल शुद्ध लोटनी गति के लिए,

$v = R\omega$

ω' = गोले के COM का O के परित: कोणीय वेग

$= \frac{v}{4R} = \frac{R\omega}{4R} = \frac{\omega}{4}$

$\therefore \quad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{1}{4}\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \alpha' = \frac{\alpha}{4}$

या $\quad \alpha = \frac{a}{R}$ शुद्ध लोटनी गति के लिए

जहाँ, $a = \dfrac{g\sin\theta}{1+\dfrac{1}{mR^2}} = \dfrac{5g\sin\theta}{7}$

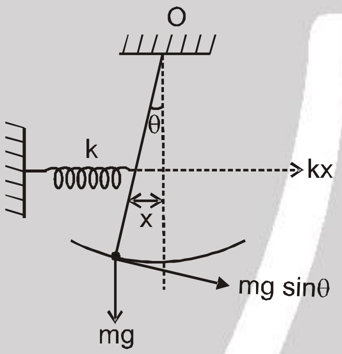
चूंकि $I = \dfrac{2}{5}mR^2$

अल्प θ के लिए sinθ θ, प्रकृति में (प्रत्यानयन) है।

$\alpha' = -\dfrac{5g}{28R}\theta$

$\therefore \quad \omega = \sqrt{\left|\dfrac{\alpha'}{\theta}\right|} = \sqrt{\dfrac{5g}{28R}} = 5$

5. When the small angular displacement Given to rod
जब छड़ को लघु कोणीय विस्थापन दिया जाता है–



for small displacement
छोटे विस्थापन के लिये

$x = \ell \sin\theta$

$kx = k\ell \sin\theta$

Torque about point O = $I_o\alpha$
बिन्दु O के सापेक्ष बलाघूर्ण = $I_o\alpha$

$(kx)\,\ell + mg\sin\theta\,\ell = mL^2\,\alpha$

$\alpha = \dfrac{\left(k\ell^2 + mgL\right)\sin\theta}{mL^2}$

For small θ लघु θ के लिये

$\alpha = -\left[\dfrac{k\ell^2 + mgL}{mL^2}\right]\theta$

Time period आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL^2}{k\ell^2 + mgL}} = \pi\sqrt{\dfrac{L}{25}}$

6. **Method - 1**

Average speed = $\dfrac{\text{total distance travelled}}{\text{total time taken}} = \dfrac{S}{2\,(2n-1)}$

Here $\Delta t = 2\,(2n-1) = 4n - 2 = 4(n-1) + 2$
From the graph it is clear that the Time period T = 4 sec.

$\therefore \quad \Delta t = (n-1)\,T + \dfrac{T}{2}$

Total distance travelled in one time period is = 4A
where 'A' is amplitude

$\therefore$ Total distance travelled in Δt is

$S = (n-1)\,4A + 2A = (2n-1)\,2A$

$\therefore$ $<v> = \frac{(2n-1)2A}{2(2n-1)} = A$ and $\omega A = v_{max} = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{4} A = 4$

$\Rightarrow A = \frac{8}{\pi}$ $\therefore$ $<v> = \frac{8}{\pi}$ m/s **Ans.**

Method - 2

It can be observed from the graph, that average speed in time interval t = 0 to t = 2 sec is same as that in intervals t = 0 to t = 4 sec., t = 0 to t = 8 sec., t = 0 to t = 12 sec............

or t = 0 to t = 2 (2n – 1) seconds

The speed as function of time is

$$v = \left|4 \sin \frac{2\pi}{T} t\right| = \left|4 \sin \frac{2\pi}{4} t\right| = \left|4 \sin \frac{\pi t}{2}\right|$$

The average speed in time interval

t = 0 to t = 2 sec is

$$\bar{v} = \frac{\int_0^2 v\,dt}{\int_0^2 dt} = \frac{\int_0^2 4 \sin \frac{\pi t}{2} dt}{2} = \frac{8}{\pi} \text{ m/s}$$

Sol. **Method - 1**

औसत चाल = $\frac{\text{कुल तय दूरी}}{\text{लिया गया कुल समय}} = \frac{S}{2\,(2n-1)}$

यहाँ $\Delta t = 2\,(2n-1) = 4n - 2 = 4(n-1) + 2$

ग्राफ से आवर्त काल T = 4 sec.

$\therefore$ $\Delta t = (n-1)\,T + \frac{T}{2}$

एक आवर्त काल में कुल तय दूरी = 4A

यहाँ 'A' आयाम है।

$\therefore$ Δt समय में कुल तय दूरी

$S = (n-1)\,4A + 2A = (2n-1)\,2A$

$\therefore$ $<v> = \frac{(2n-1)2A}{2(2n-1)} = A$ तथा $\omega A = v_{max} = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{4} A = 4$

$\Rightarrow A = \frac{8}{\pi}$ $\therefore$ $<v> = \frac{8}{\pi}$ m/s **Ans.**

Method - 2

ग्राफ से देख सकते हैं कि t = 0 से t = 2 सेकण्ड़ तक औसत चाल अन्तराल t = 0 से t = 4 सेकण्ड़ t = 0 से t = 8, t = 0 से t = 12 सेकण्ड़ तक की औसत चाल के समान है।

या t = 0 से t = 2 (2n – 1) सैकण्ड

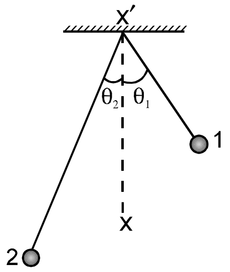
समय के फलन में चाल

$$v = \left|4 \sin \frac{2\pi}{T} t\right| = \left|4 \sin \frac{2\pi}{4} t\right| = \left|4 \sin \frac{\pi t}{2}\right|$$

समयान्तराल में औसत चाल t = 0 से t = 2 sec

$$\bar{v} = \frac{\int_0^2 v\,dt}{\int_0^2 dt} = \frac{\int_0^2 4 \sin \frac{\pi t}{2} dt}{2} = \frac{8}{\pi} \text{ m/s}$$

7.



The angular position of pendulum 1 and 2 are (taking angles to the right of reference line xx′ to be positive)

सरल लोलकों 1 तथा 2 की कोणीय स्थितियाँ (संदर्भ रेखा xx′ से दायी तरफ कोण धनात्मक है)

$\theta_1 = \theta \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$ [where यहाँ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$]

$\theta_2 = -\theta \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$

For the strings to be parallel for the first time

पहली बार रस्सीयाँ समान्तर होने पर

$\theta_1 = \theta_2$

or या $\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$

$\therefore$ $\frac{4\pi}{T}t = 2n\pi \pm \left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$

for n = 0, $t = \frac{T}{2}$ के लिए

for n = 1, $t = \frac{T}{6}, \frac{3T}{2}$ के लिए

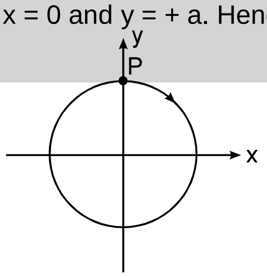
$\therefore$ Both the pendulum are parallel to each other for the first time after $t = \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ **Ans.**

$\therefore$ पहली बार लोलको के एक दूसरे के समान्तर होने का समय $t = \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ **Ans.**

8. (a) $x^2 + y^2 = a^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = a^2$

Hence the particle moves in a circle of radius ‘a’ with centre at origin.

(b) At t = 0 sec, x = 0 and y = + a. Hence the particle is at P as shown in figure.



As ‘t’ increases ‘x’ increases and ‘y’ decreases

$\therefore$ The particle moves in clock wise sense.

(c) The ‘x’ and ‘y’ components of acceleration are

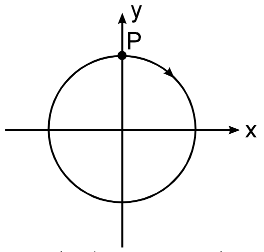
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \; ; \; a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

The magnitude of force = $m\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = m\omega^2 a$

Sol. (a) $x^2 + y^2 = a^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = a^2$

अतः कण 'a' त्रिज्या वाले वृत्त पर गति करेगा

(b) अतः $t = 0$ sec, पर $x = 0$ और $y = + a$ है। अतः कण चित्र में P बिन्दु पर है।



जब 't' बढ़ता है तो 'x' बढ़ता है तथा 'y' घटता है

∴ अतः कण दक्षिणावर्त गति करेगा

(c) त्वरण के 'x' तथा 'y' घटक

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \; ; \; a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

बल का परिणाम $= m\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = m\omega^2 a$

9. (a) In equilibrium, pressure of same liquid at same level will be same.

साम्यावस्था में समान स्तर, पर समान तरल का दाब समान होगा

Therefore इसलिए, $P_1 = P_2$

or या $P + (1.5 \rho g h_1) = P + (\rho g h_2)$

(P = pressure of gas in empty part of the tube)

(P = खाली नली में गैस का दाब)

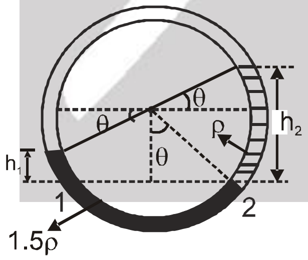
∴ $1.5 h_1 = h_2$

$1.5 [R \cos\theta - R \sin\theta] = \rho (R \cos\theta + R \sin\theta)$

or या $3 \cos\theta - 3 \sin\theta = 2 \cos\theta + 2 \sin\theta$

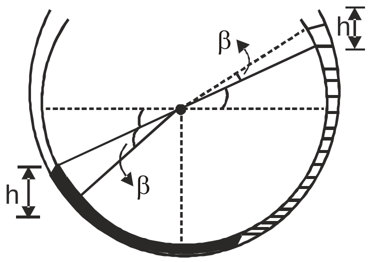
or या $5 \tan\theta = 1$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$



(b) When liquids are slightly disturbed by an angle β. Net restoring pressure $\Delta P = 1.5 \rho gh + \rho gh$ This pressure will be equal at all sections of the liquid. Therefore, net restoring torque on the whole liquid.

(b) जब तरल को हल्के से β कोण से विक्षेपित करते हैं तो कुल प्रत्यानयन दाबांतर $\Delta P = 1.5 \rho gh + \rho gh$ है यह दाब तरल में सभी भाग में एक समान होगा। अतः तरल पर कुल प्रत्यानयन बलाघूर्ण



$h = R \sin(\theta+\beta) - R\sin\theta$

$\tau = -(\Delta P)(A)(R)$

or या , $\tau = -2.5\rho gh\ AR$

$= -2.5\rho g\ AR\,[R\sin(\theta+\beta) - R\sin\theta]$

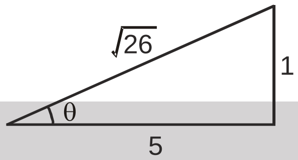
$= -2.5\rho g\ AR^2\,[\sin\theta\cos\beta + \sin\beta\cos\theta - \sin\theta]$

Assuming $\cos\beta = 1$ and $\sin\beta = \beta$ (given, β is small)

माना $\cos\beta = 1$ and $\sin\beta = \beta$ (दिया है, β छोटा है)

$\therefore$ $\tau = -(2.5\,\rho A\,gR^2\cos\theta)\,\beta$

or या $I\alpha = -(2.5\,\rho AgR^2\cos\theta)\,\beta$ ....(1)



Here, यहाँ $I = (m_1 + m_2)R^2$

$= [\,(\frac{\pi R}{2}.A)\,\rho + \left(\frac{\pi R}{2}\right).A\,(1.5\,\rho)\,]\,R^2$

$= (1.25\,\pi R^3\rho)\ A$

and और $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}} = 0.98$

Substituting in equation (1), we have

समीकरण (1) में रखने से प्राप्त होगा

$\alpha = -\frac{(6.11)\beta}{R}$ $\Rightarrow$ angular acceleration कोणीय त्वरण $\propto$–angular displacement कोणीय विस्थापन

As angular acceleration is proportional to $-\beta$, motion is simple harmonic in nature.

अतः कोणीय त्वरण $-\beta$, के समानुपाती है, इसलिए गति सरल आवर्त गति होगी।

$T = 2\pi\sqrt{\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{6.11}}$

10. Given – Mass of each block A and B, m = 0.1kg

Radius of circle, R = 0.06 m

दिया गया है – प्रत्येक ब्लॉक A तथा B का द्रव्यमान, m = 0.1kg

वृत्त की त्रिज्या, R = 0.06 m

Natural length of spring $\ell_0 = \pi R = 0.06\,\pi$ (Half circle)

and spring constant, k = 0.1 N/m

In the stretched position elongation in each spring

$x = R\,\theta$.

Let us draw FBD of A

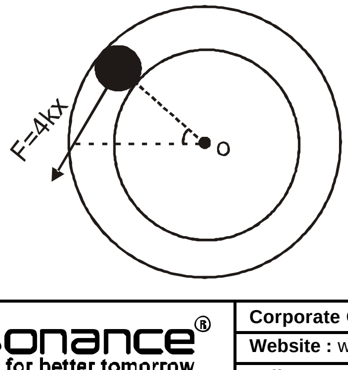
स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई $\ell_0 = \pi R = 0.06\,\pi$ (आधा वृत्त)

और स्प्रिंग नियतांक , k = 0.1 N/m

विस्तारित अवस्था में प्रत्येक स्प्रिंग में विस्तार

$x = R\,\theta$.

A का FBD बनाने से



Spring in lower side is stretched by 2x and on upper side compressed by 2x. Therefore, each spring will exert a force 2kx on each ball.
Hence, a restoring force, F = 4kx will act on A in the direction shown in figure.
Restoring torque of this force about origin
यहाँ नीचे की स्प्रिंग 2x से विस्तारित तथा ऊपर की स्प्रिंग 2x से सम्पीडित हुई है, इसलिए दोनों स्प्रिंग प्रत्येक गेंद पर 2kx बल आरोपित करेगी।
अतः चित्रानुसार प्रत्यानयन बल, F = 4kx A पर दिखाई गई दिशा में कार्य करेगा।
कुल बिन्दु के परितः प्रत्यानयन बल युग्म का आघूर्ण

$\tau = -F \cdot R = -(4kx)R = -(4kR\theta)R$

or या $\tau = -4kR^2 \cdot \theta$ ....(1)

Since, $\tau \propto -\theta$, each ball executes angular SHM about origin O.
Eq. (1) can be rewritten as
चूंकि, $\tau \propto -\theta$, प्रत्येक गेंद मूल बिन्दू O के परितः कोणिय सरल आवर्त गति करेगी।
समीकरण (1) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है -

$I\alpha = -4kR^2\theta$

or या $(mR^2)\alpha = -4kR^2\theta$

or या $\alpha = -\left(\frac{4k}{m}\right)\theta$

$\therefore$ Frequency of oscillation दोलन आवृत्ति , $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left|\frac{\text{acceleration}}{\text{displacement}}\right|}\ \sqrt{\left|\frac{\text{त्वरण}}{\text{विस्थापन}}\right|} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{\theta}\right|}$

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}$

Substituting the values, we have मान रखने पर

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\times 0.1}{0.1}} = \frac{1}{\pi}\text{Hz}$

Alternate वैकल्पिक : $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k'}{\mu}}$

where जहाँ $k' = 2k,\ \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\times 0.1}{0.1}} = \frac{1}{\pi}\text{Hz}$

(ii) In stretched position, potential energy of the system is
विस्तारित अवस्था में निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$PE = 2\ \{\frac{1}{2}k\}\{2x\}^2 = 4kx^2$ $\left(x = \frac{R\pi}{6}\right)$

and in mean position, both the blocks have kinetic energy only. Hence,
माध्य स्थिति में दोनों ब्लॉक के पास केवल गतिज ऊर्जा होगी। अतः

$KE = 2\{\frac{1}{2}mv^2_{max}\} = mv^2_{max}$

From energy conservation
ऊर्जा संरक्षण नियम से

$PE = KE$

$\therefore$ $4kx^2 = mv^2_{max}$

$\therefore$ $v_{max} = 2x\sqrt{\frac{k}{m}} = 2R\theta\sqrt{\frac{k}{m}}$

Substituting the values मान रखने पर

$$v_{max} = 2\,(0.06)\,(\pi / 6)\sqrt{\frac{0.1}{0.1}} = 0.02\pi$$

or या $v_{max} = 0.0628$ m /s

(iii) Total energy of the system, E = PE in stretched position
निकाय की कुल ऊर्जा, E = PE विस्तारित अवस्था में

or या = KE at mean position KE माध्य स्थिति पर

$$E = 2\left(\frac{1}{2}mv_{max}^2\right) = (0.1)\,(0.0628)^2 \text{ J} \quad \text{or} \quad E = 3.9 \times 10^{-4} \text{ J}$$

11. Between C and D block will move with constant speed of 120 cm/s. Therefore, period of oscillation will be (starting from C).
C तथा D के बीच ब्लॉक अचर चाल 120 cm/s. से गतिमान होगा, अतः दोलन का आवर्त काल (C से शुरू करते हुए)

$$T = t_{CD} + \frac{T_2}{2} + t_{DC} + \frac{T_1}{2}$$

Here यहाँ , $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ and और $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$

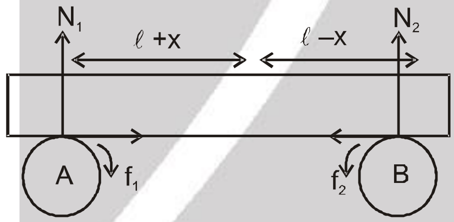
and और $t_{CD} = t_{DC} = \frac{CD}{v} = \frac{60}{120} = 0.5$ s

$$\therefore \quad T = 0.5 + \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{0.2}{3.2}} + 0.5 + \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{0.2}{1.8}}$$

(m = 200 g = 0.2 kg)

T = 2.82 s

12. If plank is displaced by x toward right then
यदि प्लेट को दायी और x विस्थापित कर दे तो



Let N_1, N_2 and f_1, f_2 are Normal and friction force at Point A and B by force balance
माना N_1, N_2 तथा f_1, f_2 अभिलम्ब तथा घर्षण बल बिन्दु A तथा B पर है।

$N_1 + N_2 = Mg$ ——(1)

and Torque balance बलाघूर्ण संतुलन से

$Mg(\ell + x) = N_2 \times 2\ell$ ——(2)

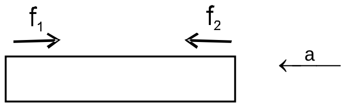
by equation (1) and (2) समीकरण (1) से (2)

$$N_1 = \frac{Mg}{2} - \frac{Mgx}{2\ell} \qquad N_2 = \frac{Mg}{2} + \frac{Mgx}{2\ell}$$

So अतः $f_1 = \mu\left(\frac{Mg}{2} - \frac{Mgx}{2\ell}\right)$

and और $f_2 = \mu\left(\frac{Mg}{2} + \frac{Mgx}{2\ell}\right)$

F.B.D of M M का मु. व. रे.



$f_2 - f_1 = Ma$

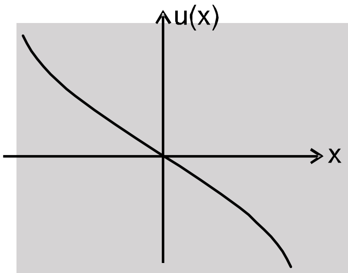
$\mu \cdot \frac{2Mgx}{2\ell} = Ma = -\frac{d^2x}{dt^2}.M$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-\mu gx}{\ell}$

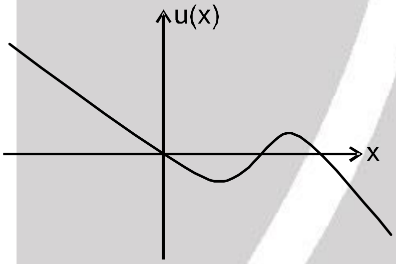
$\Rightarrow$ Time period आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}}$

13. **(a)** $U(x) = \frac{m\omega^2x^2}{2} - \delta x - \frac{\alpha x^3}{3}$

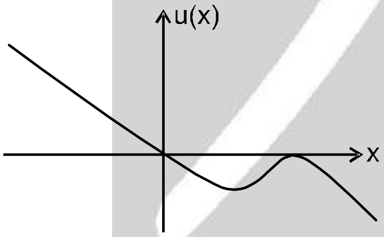
$U'(x) = -\alpha x^2 + m\omega^2 x - \delta$

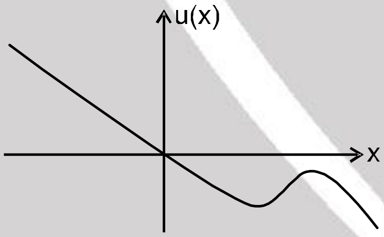


if यदि D < 0. $m^2 \omega^4 - 4\alpha s < 0$.



D > 0, $m^2 \omega^4 - 4\alpha s > 0$.

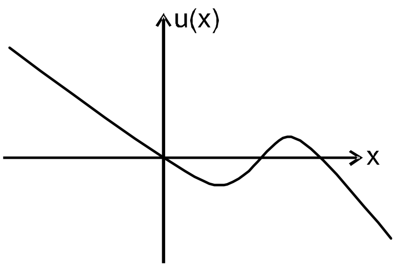




(b) $U(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}$

$U'(x) = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$

$D = 4 - 4\times \frac{1}{2} = 2$



U = 0

$$\frac{-x}{6}\left(2x^2-6x+3\right)=0$$

$$x = 0,\ \frac{6\pm\sqrt{12}}{4}$$

$$x = 0,\ \frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$$

between x = 0 and $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. U is (–ve). So, K.E. is +ve.

x = 0 एवं $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ में मध्य U ऋणातमक है। अतः गतिज ऊर्जा धनात्मक है।

So, this the only allowed region.

अतः केवल यह अनुमत परिक्षेत्र है।

The particle will oscillate between these two points periodically.

कण इन दो बिन्दुओं के मध्य आवर्त रूप से दौलन करेगा।

14. (a) $t = \sqrt{\frac{2(m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2)}{F}} = 0.26$ s

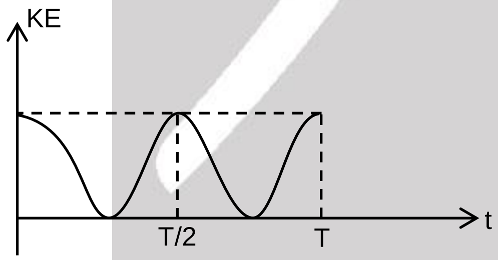
(b) Speed चाल = $\frac{\sqrt{2F(m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2)}}{m_1+m_2} = 0.52\ ms^{-1}$

Kinetic energy गतिज ऊर्जा = $\frac{F(m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2)}{m_1+m_2} = 0.40$ J

(c) Kinetic energy w.r.t. CM + Energy stored = $\frac{m_2(\Delta x_1 - \Delta x_2)}{m_1+m_2}F = 0.20$ J

द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष गतिज ऊर्जा + संचित ऊर्जा = $\frac{m_2(\Delta x_1 - \Delta x_2)}{m_1+m_2}F = 0.20$ J

संचित ऊर्जा = 0.10 J



NOTE : But as per options given, best possible answer will be option (1)

17. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\Rightarrow$ $k = 4\pi^2 m \times f^2$

$k = 4\pi^2 \times \frac{108\times10^{-3}}{6.02\times10^{23}} \times f^2$

$= \frac{4\times\pi^2\times108}{6.02} \times \frac{10^{24}\times10^{-3}}{10^{23}}$

= 7.1 N/m