SOLUTIONS OF PROJECTILE MOTION

EXERCISE-1

भाग - I

खण्ड (A)

A-1. $T_1 = \frac{2u\sin\theta}{g}$; $T_2 = \frac{2u\sin(90-\theta)}{g}$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin\theta}{\sin(90-\theta)} = \tan\theta$

{ या $T_1 : T_2 = \tan\theta : 1$

A-2. $H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$, $H_1 = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$, $H_2 = \frac{u^2\sin^2(90-\theta)}{2g}$

$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$ $H_1 : H_2 = \tan^2\theta : 1$

A-3. क्षैतिज परास $R = \frac{u^2\sin2\theta}{g}$

ऊर्ध्वाधर ऊँचाई $H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

दिया है $R = H$

अतः $\frac{u^2\sin2\theta}{g} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

$2\times2\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta$

$\tan\theta = 4$

A-4. θ_1 और θ_2 के लिए R समान है

$\theta_2 = 90 - \theta_1$

$T = \frac{2u\sin\theta}{g}$ $\therefore$ $T_1 = \frac{2u\sin\theta}{g}$; $T_2 = \frac{2u\sin(90-\theta)}{g}$

&, $R = \frac{u^2\sin2\theta}{g}$; $T_1T_2 = \frac{2^2\times u^2\sin\theta\cos\theta}{g^2} = \frac{2}{g}\left(\frac{u^2\sin2\theta}{g}\right)$

$T_1T_2 = \frac{2R}{g}$ **Ans**

A-5. $R_{max} = 100$ m (given) $H_{max} = ?$ (for any θ)

$R_{max} = \frac{u^2\sin90}{g} = 100 \Rightarrow u^2 = 1000$ (अधिकतम परास के लिए $\theta = 45^o$)

$\therefore$ $(H)_{max} = \frac{u^2(\sin^2\theta)_{max}}{2g} = \frac{u^2}{2g}$ (अधिकतम ऊँचाई के लिए $\theta = 90^o$)

$= \frac{1000}{20} \Rightarrow$ $H_{max} = 50$ m **Ans**

A-6. (1) $\theta = 45^\circ$ $u = 20$ m/s

$T = \frac{2u_y}{g} = \frac{2 \times 20 \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{10} = 2\sqrt{2}$ s $\qquad u_x = 20 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

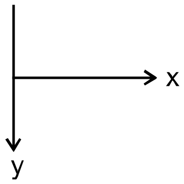
अब, $R = \left(20 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times 2\sqrt{2} = 40$ m

$\Rightarrow$ दूसरे खिलाडी द्वारा तय की गई दूरी 60 – 40 = 20 m

समय $2\sqrt{2}$ s & वेग $= \frac{20m}{2\sqrt{2}s} = 5\sqrt{2}$ m/s

खण्ड (B)

B-1. $u_x = 98$ m/s



(i) H = 490 m, $g = 9.8$ m/s^2, $u_y = 0$, $a_y = g = 9.8$ m/s^2

$s_y = u_y t + 1/2 a_y t^2$,

$\therefore$ $490 = 0 + 1/2 \times 9.8\, t^2$, $100 = t^2 \Rightarrow t = \pm 10$

"–ve" मान को हटाते हुए, क्योकि यह प्रक्षेप गति से पहले का समय है। हमें t = 10 s प्राप्त होता है।

(ii) पहाड से दूरी $= u_x \times T = 98 \times 10 = 980$ m **Ans**

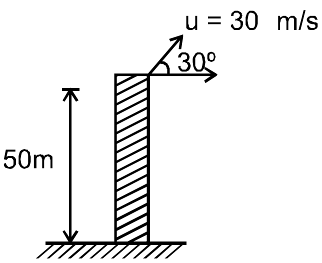
(iii) $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ $\qquad V_x = u_x = 98$ m/s $\qquad V_y^2 = u_y^2 + 2a_y s_y$

$V_y^2 = 0 + 2 \times 9.8 \times 490$,

अतः $V = \sqrt{98^2 + 2 \times 9.8 \times 490}$,

$V = 98\sqrt{2}$ m/s. **Ans**

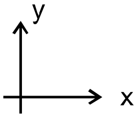
B-2.



$H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{30 \times 30 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2 \times 10} = \frac{90}{8} = 11.25$

$\therefore$ धरातल से H = 50 + 11.25 = 61.25 m. **Ans**

(ii) $s_x = u_x T + a_x T^2$, $a_x = 0 \Rightarrow s_x = u_x T$



T के मान के लिए $s_y = u_y T + \frac{1}{2} a_y T^2$ $\qquad$ यहां $s_y = -50$ = ऊर्ध्वाधर विस्थापन

$u_y = u \sin 30^\circ = 15$ m/s , $a_y = -g = -10$ m/s^2

यह मान रखने पर

$-50 = 15\,T + \frac{1}{2}(-10)\,T^2$; या, $T^2 - 3T - 10 = 0$; या $T^2 - 5T + 2T - 10 = 0$;

या $T(T-5) + 2(T-5) = 0$; या, $(T-5)(T+2) = 0$; या $T = 5$ or या $T = -2$

$\Rightarrow$ $T = 5$ sec **Ans**

$s_x = u\cos\theta \cdot T = 30 \times \cos 30^\circ \times T = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = 75\sqrt{3}$ m **Ans**

खण्ड (C)

C-1. $y = \sqrt{3}\,x - g\frac{x^2}{2}$, दिये गये समीकरण की प्रांचलिक समीकरण से तुलना करने पर

$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\theta}$

हमें प्राप्त होता है, $\sqrt{3} = \tan\theta$ $\Rightarrow$ $\theta = 60^\circ$

$u^2\cos^2\theta = 1$, $\theta = 60^\circ$ रखने पर, हमें प्राप्त होगा $u^2 = \frac{1}{(1/2)^2}$ $\Rightarrow$ $u = 2$m/s.

अन्य विधि

$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\theta}$

इस समीकरण में at $t = 0$ पर, $x = 0$, $y = 0$; $a_x = 0$; $a_y = -g$

इन स्थितियों का प्रयोग दी गई समीकरण में करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}g2x\frac{dx}{dx}$$

θ ज्ञात करने के लिए हम $\tan\theta = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{at\ t=0}$ ज्ञात करते है।

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=0} = \sqrt{3} - 0$ { $\because$ $t = 0$ पर $x = 0$ है। }

$\tan\theta = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\theta = 60^\circ$ **Ans.**

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{3}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}g\left[2x\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]$$

$V_y = \sqrt{3}\ V_x - gx\,V_x$

$t = 0$ पर, $x = 0$, $V_y = u_y$ & $V_x = u_x$; $u_y = \sqrt{3}\ u_x$

$\frac{d^2y}{dt^2} = \sqrt{3}\frac{d^2x}{dt^2} - g\left[x\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\times\frac{dx}{dt}\right]$ यहाँ $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \sqrt{3}\times 0 - g\ [0 + V_x]^2$ $\Rightarrow$ $a_y = -g\,V_x^2$

अब, $a_y = -g$ $\Rightarrow$ $V_x^2 = 1 \Rightarrow V_x = \pm 1$

$v_x = u_x + a_xt$, $a_x = 0 \Rightarrow v_x = u_x$

$\therefore u_x = \pm 1$ $\Rightarrow$ $u_y = \sqrt{3}\,(\pm 1)$; $u_y = \pm\sqrt{3}$

$\therefore$ चाल $= u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4}$; $u = 2$ m/s. **Ans**

C-2 $y = x \tan\theta\,(1 - x/R)$

$\Rightarrow \quad \frac{R}{4} = \frac{3R}{4}\tan\theta\left(1 - \frac{3R}{4R}\right)$

$\Rightarrow \quad 1 = 3\tan\theta\,(1/4)$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = 3/4$

$\Rightarrow \quad \theta = 53°$

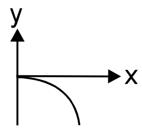
C-3. $\vec{r} = at\hat{i} - bt^2\hat{j}$ की $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ से तुलना करने पर

हमे प्राप्त होगा $x = at$

& $y = -bt^2$

$\Rightarrow \quad y = -b\left(\frac{x}{a}\right)^2$ प्रक्षेप्य का समीकरण

(i) $y = -\frac{bx^2}{a^2}$



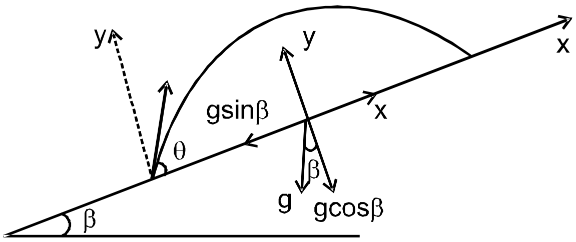
Ans

(ii) $\vec{v} = a\hat{i} - 2bt\hat{j}$, त्वरण $= -2b\hat{j}$,

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2}$, |त्वरण| $= 2b$

खण्ड (D)

D-1.#



(a) a_x = त्वरण का x घटक $= -g\sin\beta$

(b) त्वरण का y घटक $= a_y = -g\cos\beta$

(c) वेग का x – घटक $= V_x$

$V = u + at$

$\therefore \quad V_x = u_x + a_x t = (u\cos\theta) + (-g\sin\beta)\,t$

अर्थात, $V_x = u\cos\theta - g\sin\beta.t$ **Ans**

(d) वेग का y – घटक $= V_y$

$\therefore \quad V_y = u_y + a_y t$

i.e. अर्थात, $V_y = u\sin\theta - g\cos\beta\,.\,t$. **Ans**

(e) विस्थापन का x-घटक $= s_x$

$s = ut + 1/2\,at^2$

$s_x = u_x t + 1/2\,a_x t^2 = (u\cos\theta)\,t + 1/2\,(-g\sin\beta)\,t^2$

अर्थात, $s_x = u\cos\theta\,t - 1/2g\sin\beta t^2$ **Ans**

(f) विस्थापन का y घटक $= s_y$

$s_y = u_y t + 1/2\,(-g\cos\beta)\,t^2 \quad \Rightarrow \quad s_y = u\sin\theta\,t - 1/2g\cos\beta\,t^2$ **Ans**

(g) $V_y = ?$ when जब $s_y = (s_y)_{max}$.

$ds/dt = V$

$$\frac{d(s_y)}{dt} = V_Y$$

अधिकतम s_y के लिए $= \frac{d(s_y)}{dt} = 0$

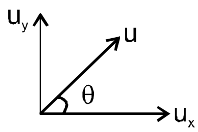
अर्थात, $V_y = 0$ **Ans (g)**

भाग - II

खण्ड (A)

A-1. $V = u + at$

V_y पहले घटेगा फिर बढेगा



$\Rightarrow$ V घटेगा फिर बढेगा ($\because$ V_x अचर है।)

$\Rightarrow$ चाल पहले घटेगी फिर बढेगी इसलिए "A" गलत है।

$KE = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{m}{2}$ (चाल)^2 $\Rightarrow$ " B" गलत है।

V_y = बदलता है $\Rightarrow$ "C" गलत है

V_x = अचर है क्योकि गुरूत्व y अक्ष के समानान्तर है

$\Rightarrow$ "D" सही है **Ans**

A-2. प्रक्षेप्य गति में क्षैतिज त्वरण $a_x = o$ और उर्ध्व त्वरण $a_y = g = 10 m/s^2$

$a_x = 0$

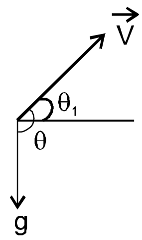
$a_y = 10$ (नीचे की तरफ)

$\Rightarrow$ सिर्फ "C" सही है **Ans**

A-3. वेग का क्षैतिज के साथ संभव न्यून कोण -90^o से $+90^o$ है अतः g के साथ कोण $0°$ से 180^o है।

θ_1 न्यून कोण है

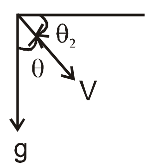
$\Rightarrow$ $0^o \le \theta_1 < 90^o$ (ऊपर की तरफ फैकने पर)



चित्र से $\theta = 90^o + \theta_1$

या $90^o \le \theta < 180^o$ ....(1)

नीचे की तरफ गति के समय



$0^o < \theta_2 < 90^o$

$\theta = 90^o - \theta_2$

$0^o < \theta < 90^o$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) से

अर्थात $0 < \theta < 90^o$ U $90^o \le \theta < 180^o$

$\Rightarrow$ $0^o < \theta < 180^o$ "D" **Ans.**

A-4. A व B के मध्य औसत वेग $= \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$ (त्वरण नियत है=g)

अब,यदि $\vec{v}_1 = V_1\hat{i} + V_1\hat{j}$

तो $\vec{v}_2 = V_1\hat{i} - V_1\hat{j}$ (दोनो A व B एक ही रेखा पर है)

$\therefore$ $\vec{v}_{avg.} = V_1\hat{i} = V\sin\theta$ (θ ऊर्ध्वाधर से है) " B " **Ans.**

A-5. $y = ax^2$ .....(1)

दिया है $V_x = c$

समीकरण (1) से $\frac{dy}{dt} = 2a\,x.\frac{dx}{dt}$

$V_y = 2ax\,.c$ .....(2)

समीकरण (2) से $\frac{dv_y}{dt} = 2ac.\frac{dx}{dt}$

$a_y = 2acV_x$

$a_y = 2ac^2$

अतः $\vec{a}_y = 2ac^2\,\hat{j}$

A-6. पृथ्वी की सतह के पास गुरूत्वीय त्वरण नियत रहता है।

A-7. अधिकतम ऊँचाई पर $v = u\cos\theta$

$\frac{u}{2} = v \Rightarrow \frac{u}{2} = u\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

$R = \frac{u^2\sin 2\theta}{g} = \frac{u^2\sin(120°)}{g} = \frac{u^2\cos 30°}{g} = \frac{\sqrt{3}u^2}{2g}$

A-8. $\vec{u}_x = 6\hat{i} + 8\hat{j}$

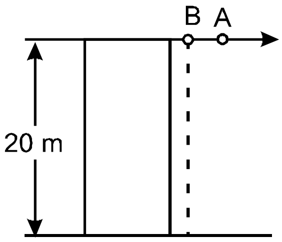
$\vec{u}_x = 6\hat{i}$

$u_y = 8\hat{j}$

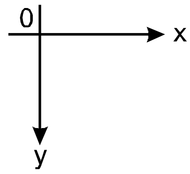
$R = \frac{2u_xu_y}{g} = \frac{2\times 6\times 8}{10} = 9.6$

खण्ड (B)

B-1.*



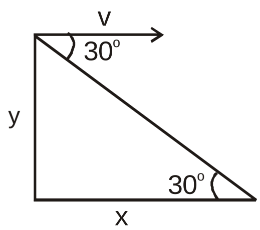
10 m/s = u_A ; u_B = 0 m/s $u_A = 10\hat{i}$



जमीन पर पहुँचने पर
दोनो के ऊर्ध्वाधर वेग समान होगें
$V_y^2 = u_y^2 + 2a_y s_y$
चूंकि u_y = 0 दोनो A व B के लिए
a_y = g दोनो A व B के लिए
s_y = 20 m दोनो A व B के लिए
इसलिए दोनो के द्वारा लिया गया समय भी समान होगा।

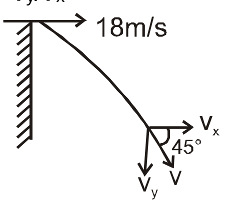
B-2.# AC = $\frac{1}{2}gt^2$ = 45 m BC = $45\sqrt{3}$ m = u.t u = $\frac{45}{\sqrt{3}}$ = $15\sqrt{3}$ m/s.

Alter : वस्तु को क्षैतिज फैंका गया है अतः $u_x = v$ & $u_y = 0$
चित्र से



$-y = u_y t - 1/2\, gt^2$; $y = 1/2 \times 10 \times (3)^2$
y = 45m ....(1)
& tan 30° = y/x= > y= $\sqrt{3}$ x ....(2)
& x = v t = 3v ....(3)
समीकरण (1), (2) व (3) से
$45\sqrt{3} = 3v$; $v = 15\sqrt{3}$ m/s

B-3. $\tan 45° = v_y/v_x$



$\Rightarrow$ $v_y = v_x$ = 18m/s **Ans.**

B-4.# 2 sec. में बम द्वारा क्षैतिज दिशा में तय दूरी = 20 × 2 = 40 m.
2 sec. में बम द्वारा ऊर्ध्वाधर दिशा में तय दूरी = 1/2 × 10 × 2^2 = 20 m.
2 sec. में शिकारी द्वारा चली गई क्षैतिज दूरी = 10 × 2 = 20 m.

बम के जमीन से टकराने में बचा हुआ समय = $\sqrt{\frac{2\times 80}{10}} - 2 = 2$ sec.

माना V_x तथा V_y क्रमशः गोली के वेग के क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर घटक है। अतः

$\frac{2V_y}{g} = 2 \Rightarrow V_Y = 10$ m/s तथा $\frac{20}{V_x - 20} = 2 \Rightarrow V_x = 30$ m/s

अतः गोली का प्रक्षेपण वेग $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 10\sqrt{10}$ m/s.

खण्ड (C)

C-1. For (Y_{max}) $\Rightarrow$ dY/dt = 0

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(10t - t^2) = 10 - 2t \Rightarrow t = 5$

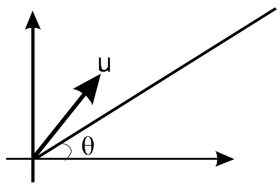
$\Rightarrow Y_{max} = 10(5) - 5^2 = 25$ m

Ans "D"

खण्ड (D)

D-1. नत तल पर अधिकतम संभव परास

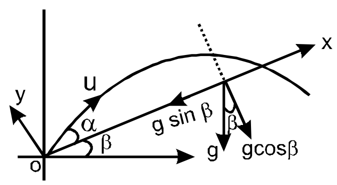
$$R = \frac{V^2}{g(1+\sin\theta)}$$



अधिकतम परास = ?

यदि $\theta = \beta$

नततल से प्रक्षेपण कोण = α



$u_y = u \sin\alpha$ $u_x = \cos\alpha$ $a_x = -g\sin\beta$ $a_y = -g\cos\beta$

परास = $s_x = u_xT + \frac{1}{2}a_xT^2$

(नततल पर) जहां $T = \frac{2u_y}{g_y}$

$$\Rightarrow s_x = (u\cos\alpha)\left[\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right] + \frac{1}{2}[-g\sin\beta]\left[\frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}\right]^2$$

$$= \frac{2u^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}[\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta]$$

$$s_x = \frac{2u^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}[\cos(\alpha+\beta)]$$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)]$$

$$= \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(2\alpha+\beta) + \sin(-\beta)]$$

$s_x = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}[\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta]$

s_x अधिकतम होगा

जब sin $(2\alpha + \beta)$ अधिकतम होगा ($\because$ β = अचर)

$\Rightarrow \quad 2\alpha + \beta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{2}$

जब गेंद नततल एंव कुल त्वरण की विपरीत दिशा के मध्य बने कोण के समद्विभाजक पर फैकी जाए।

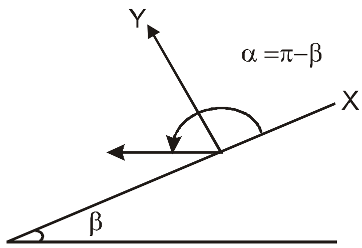
& $(s_x)_{max} = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}\left[1-\sin\beta\right] = \frac{u^2 \quad (1-\sin\beta)}{g \quad (1-\sin\beta) \quad (1+\sin\beta)}$

नततल पर अधिकतम परास $= \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}$

यहाँ $\beta = \theta$

$\Rightarrow \quad R_{max} = \frac{u^2}{g(1+\sin\theta)}$ **Ans** "B"

D-2.



$R = \frac{v^2}{g\cos^2\beta}\left[\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta\right]$

यहाँ $\beta = 45^o$ & $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

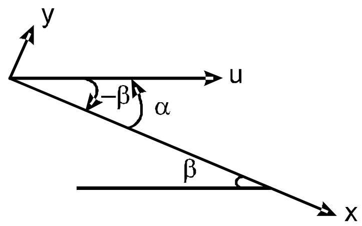
$R = \frac{v^2}{g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\left[\sin\left(2\times\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$s_x = \frac{v^2\times 2}{g}\left[-2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -2\sqrt{2}\frac{v^2}{g}$

(–ve चिन्ह यह दर्शाता है कि विस्थापन ऋणात्मक x दिशा में होगा)

$\Rightarrow$ परास $= 2\sqrt{2}\frac{v^2}{g}$ **Ans** "D"

Alternate II method



$\beta = -\frac{\pi}{4}$ & $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$R = \frac{u^2}{g \ \cos^2\beta} \ \left[\sin \ (2\alpha+\beta)-\sin\beta\right]$

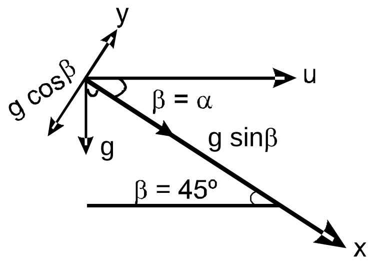
$= \frac{u^2}{g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\left[\sin\frac{\pi}{4}-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$R = \frac{2\sqrt{2}u^2}{g}$ (+ve x दिशा में)

III Method

$u_x = u\cos\beta$, $\quad T = \left|\frac{2u\sin\beta}{g\cos\beta}\right|$, $a_x = g\sin\beta$; $a_y = -g\cos\beta$

$s_x = u_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 = (u \cos\beta)\left[\frac{2u\sin\beta}{g\cos\beta}\right] + \frac{1}{2}(g\sin\beta)\left(\frac{2u\sin\beta}{g\cos\beta}\right)^2$

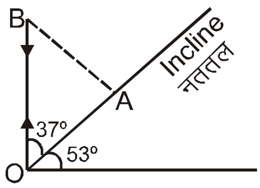


यदि $\alpha = \beta = 45^o$

इसलिए, $s_x = \frac{u^2 2}{g}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{2.2u^2}{g^2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{u^2}{g}[1+1]\ s_x = 2\sqrt{2}\frac{u^2}{g}$

Ans "D"

D-3. $OB = \frac{u^2}{2g} = 5m$

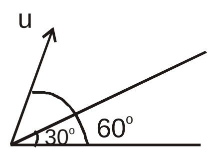


$\therefore \quad AB = OB \sin 37^o = 3m.$

D-4.

Sol. $u = 10m/s$

नत तल पर उड्डयन काल



$T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}$

दिया है $\alpha = 30^o$ & $\beta = 30^o$ & $u = 10\sqrt{3}$ m/s

$T = \frac{2\times 10\sqrt{3}\sin 30^o}{10\cos 30^o}$

अतः $T = 2$ sec .

D-5.# $H = \frac{u_\perp^2}{2a_\perp}$

$a_\perp$ तीनों स्थितियों में समान है।

$H_A = \frac{(u\sin\alpha)^2}{2a_\perp}$, $H_B = \frac{u^2}{2a_\perp}$ and $H_C = \frac{(u\cos\alpha)^2}{2a_\perp}$

$\therefore H_B = H_A + H_C$

भाग - III

1.# उड्डयन काल $T = \frac{2u}{g\cos 45^\circ} = \frac{2u}{g\cos 45^\circ} = \frac{2\sqrt{2}u}{g} \quad \therefore D \to p$

आधे उड्डयन काल के समय पर पत्थर का वेग x-अक्ष के अनुदिश होगा।

$\therefore \quad A \to r$

जब x - अक्ष के साथ पत्थर का वेग 45° का कोण बनाता है उस क्षण वेग क्षैतिज होगा।

अतः समय $= \frac{u\sin 45^\circ}{g} = \frac{u}{\sqrt{2}g}$

$\therefore \quad B \to s$

जब x-अक्ष के अनुदिश विस्थापन, क्षैतिज परास के आधे के बराबर होगा।

तब तक का समय $= \frac{1}{\sqrt{2}} T = \frac{2u}{g}$ $\therefore$ $C \to q$

2. पथ का समीकरण $y = ax - bx^2$

इसकी प्रक्षेप्य के मानक समीकरण से तुलना करने पर

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta = a, \quad \frac{g}{2u^2\cos^2\theta} = b$$

वेग का क्षैतिज घटक $= u\cos\theta = \sqrt{\frac{g}{2b}}$

उड्डयन काल $T = \frac{2u\sin\theta}{g} = \frac{2(u\cos\theta)\tan\theta}{g} = \frac{2\left(\sqrt{\frac{g}{2b}}\right)a}{g} = \sqrt{\frac{2a^2}{bg}}$

अधिकतम ऊँचाई $H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{[u\cos\theta.\tan\theta]^2}{2g} = \frac{\left[\sqrt{\frac{g}{2b}}.a\right]^2}{2g} = \frac{a^2}{4b}$

क्षैतिज परास $R = \frac{u^2\sin 2\theta}{g} = \frac{2(u\sin\theta)(u\cos\theta)}{g} = \frac{2\left[\sqrt{\frac{g}{2b}}.a\right]\left[\sqrt{\frac{g}{2b}}\right]}{g} = \frac{a}{b}$

EXERCISE-2

भाग-I

1. $a_x = 2\ m/s^2$; $a_y = 0$

$u_x = 8$ m/s

$u_y = -15$ m/s.

$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j}$

$V_y = u_y + a_y t$

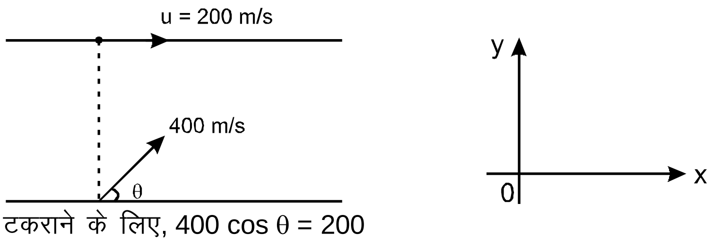
$\Rightarrow$ $V_y = -15$ m/s

$V_x = u_x + a_x t$

$V_x = 8 + 2t$

$\Rightarrow$ $V = [(8 + 2t)\hat{i} - 15\hat{j}]$ m/s. **Ans.**

2.



टकराने के लिए, $400\cos\theta = 200$

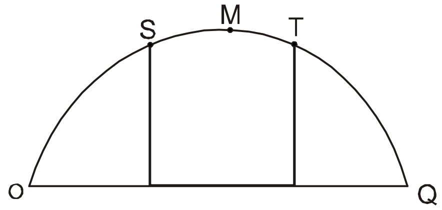
{$\because$ दर्शाई गई स्थिति से दोनो क्षैतिज में समान दूरियाँ तय करेगें अतः दोनों के x निर्देशांक समान है।}

$\Rightarrow$ $\theta = 60^o$ **Ans.**

3. $\frac{R^2}{8h}+2h = \frac{\left(\frac{u^2 2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2}{\frac{8\times u^2\sin^2\theta}{2g}} + 2\,\frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

$= \frac{u^2}{g}$ (अधिकतम क्षैतिज परास)

4.



$t_{(OS)} = 1$ sec

$t_{(OT)} = 3$

या $t_{(ST)} = 1/2\ t_{(OT)} - t_{(OS)} = 3 - 1 = 2$ sec

$\therefore$ $t_{(SM)} = t_{(ST)} = 1$ sec.

$\therefore$ $t_{(OM)} = t_{(OS)} + t_{(SM)} = 1 + 1 = 2$sec.

$\therefore$ उड्डयन काल = 2 × 2 = 4 sec. **Ans. "C"**

5.# माना पत्थर की प्रारम्भिक व अन्तिम चाल u तथा v है।

$\therefore$ $v^2 = u^2 - 2gh$ ....(1)

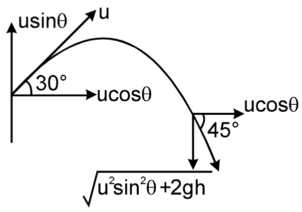
और $v\cos 30° = u\cos 60°$ ....(2)

(1) व (2) को हल करने पर

$u = \sqrt{3gh}$

6.

Sol. $v = \sqrt{u^2+2gh}$ के प्रयोग से



$v = \sqrt{u^2\sin^2\theta+2gh}$

ऊर्ध्वाधर घटक, जब जमीन से टकराता है

अब tan 45° = 1

$u\cos\theta = \sqrt{u^2\sin^2\theta+2gh}$

$u^2\cos^2\theta = u^2\sin^2\theta + 2gh$ ......(1)

$u^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right) = 2gh$

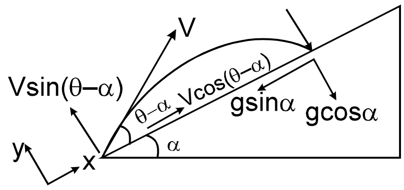
$u^2 = 4gh$

$u = 2\sqrt{gh}$

$\tan\theta = \frac{v_T}{v_H} = \frac{\sqrt{4gh.\frac{3}{4}+2gh}}{2\sqrt{gh}\times\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5gh}}{\sqrt{gh}} = \sqrt{5}$

7.#

Sol. नत तल के लम्बवत गति के समीकरण लगाने पर y = 0 के लिए



$0 = V \sin(\theta - \alpha)t + \frac{1}{2}(-g\cos\alpha)\, t^2$

$\Rightarrow \quad t = 0 \quad \& \quad \frac{2V\sin(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha}$

नत तल पर टकराते समय वेग नत तल के लम्बवत् है। अतः नत तल के अनुदिश वेग का घटक शून्य होगा।

$0 = v\cos(\theta - \alpha) + (-g\sin\alpha).\ \frac{2V\sin(\theta-\alpha)}{g\cos\alpha}$

$v\cos(\theta - \alpha) = \tan\alpha.\ 2V\sin(\theta - \alpha)$

$\cot(\theta - \alpha) = 2\tan\alpha$ **Ans. (D)**

8. चूँकि उड्डयन काल केवल वेग के ऊर्ध्वाधर घटक तथा त्वरण पर निर्भर करता है, इसलिए उड्डयन काल

$T = \frac{2u_y}{g}$ जहाँ $u_x = u\cos\theta$ तथा $u_y = u\sin\theta$

$\therefore$ क्षैतिज दिशा (x) में

$d = u_x t + ½ a_x t^2 = u\cos\theta\left(\frac{2u\sin\theta}{g}\right) + \frac{1}{2}g\left(\frac{2u\sin\theta}{g}\right)^2$

$= \frac{2u^2}{g}(\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta)$

(हम f(θ) को अधिकतम करना चाहते हैं)

$f(\theta) = \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta$

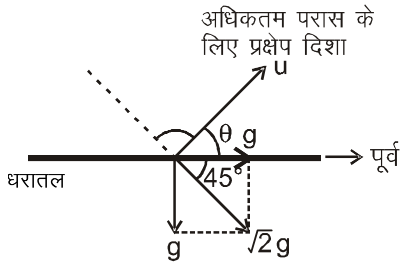
$\Rightarrow \quad f'\theta = -\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \quad \cos2\theta + \sin2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan2\theta = -1$

या $2\theta = \frac{3\pi}{4}$ या $\theta = \frac{3\pi}{8} = 67.5°$

वैकल्पिक :

जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, प्रक्षेप्य का कुल त्वरण क्षैतिज से 45° का कोण बनाता है। क्षैतिज तल पर अधिकतम परास के लिए, प्रक्षेप कोण क्षैतिज तथा प्रक्षेप्य के कुल त्वरण की विपरीत दिशा के बीच के कोणार्धक के अनुदिश होना चाहिए।

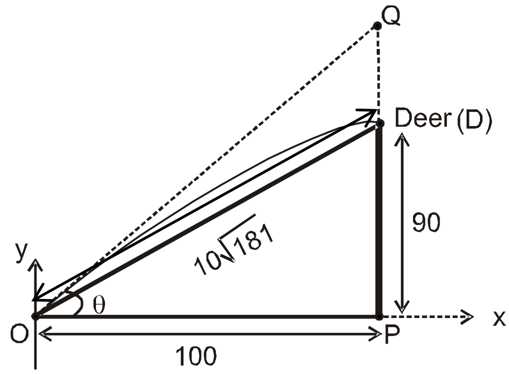


$\therefore \quad \theta = \frac{135°}{2} = 67.5°$

भाग - II

1.

Sol. OD = $10\sqrt{181}$ PD = 90



माना θ प्रक्षेपण कोण है

हमारे पास है QD = PQ – PD.

प्रक्षेप्य के पथ के समीकरण से

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2}\sec^2\theta$$

हिरण के निर्देशांक ≡ (100,90)

$\therefore$ $90 = 100\tan\theta - \frac{5(100)^2}{(100)^2}\sec^2\theta$

या $90 = 100\tan\theta - 5(1 + \tan^2\theta)$

या $\tan^2\theta - 20\tan\theta + 19 = 0$

या $\tan^2\theta - 19\tan\theta - \tan\theta + 19 = 0$

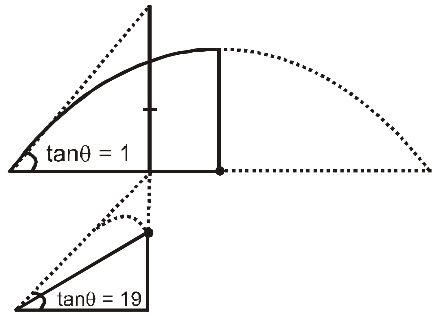
या $\tan\theta(\tan\theta - 19) - 1(\tan\theta - 1) = 0$

या $\tan\theta = 1$

$\tan\theta = 19$

या $\frac{PQ}{100} = 1$ θ = 1 के लिए

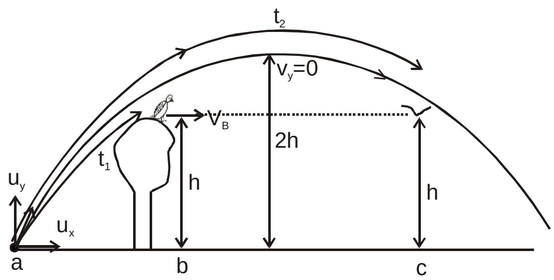
$\frac{PQ}{100} = 19$ θ = 19 के लिए



दो मूल दो संभव प्रक्षेप्य पथ को इंगित करते हैं जिनके लिये निशाना लगाया जायेगा।

2.

Sol. ac = ab + bc



bc = ac – ab

$V_B t_2 = U_x t_2 - U_x t_1$

(V_B = चिड़िया का वेग)

$V_B t_2 = U_x(t_2 - t_1)$ .... (1)

समय t में y दिशा में विस्थापन

$S_y = U_y t - 1/2\, gt^2$

$\therefore V_y^2 = U_y^2 - 2g(2h)$

$0 = U_y^2 - 2g(2h)$

$U_y = \sqrt{4gh}$

$h = \sqrt{2g(2h)}\,t - \frac{1}{2}gt^2$

हल करने पर हम पाते हैं।

$t_1 = \sqrt{h/g}(2 - \sqrt{2})$

$t_2 = \sqrt{h/g}(2 + \sqrt{2})$

समीकरण (1) में t_1 व t_2 के मान रखने पर

हम प्राप्त करते हैं $\frac{U_x}{V_B} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$

Aliter

b से c तक गति करने में पत्थर द्वारा लिया गया समय = $2\sqrt{\frac{h}{g}}$

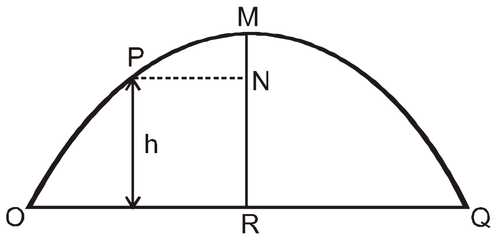
b से c तक गति करने में चिड़िया द्वारा लिया गया समय = $\sqrt{2\frac{h}{g}}+\sqrt{\frac{h}{g}}$

दोनों स्थितियों में चली गई bc दूरी को बराबर करने पर

$$V_B\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}+\sqrt{\frac{h}{g}}\right) = U_x\left(2\sqrt{\frac{h}{g}}\right)$$

$$\frac{U_x}{V_B}=\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$$ **Ans.**

3.



$t_{op} = 4$

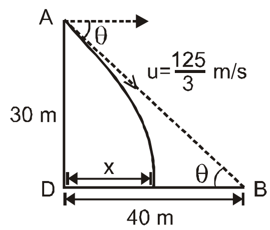
$t_{PQ} = 5$

$\therefore t_{OQ} = 4 + 5 = 9$

या $\tan\theta = 9/2 = 4.5$

RM – MN = h = $1/2\ g\ [(4.5)^2 - (.5)^2] = 1/2 \times 9.8 \times 20 = 98$

4.



Sol. ΔABD में, $\tan\theta = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

माना x-दिशा में लिया गया समय 't' है

$x = u_x t$

$x = u\cos\theta\ t$

$x = \frac{125}{3}\times\frac{4}{5}t \Rightarrow x = \frac{100}{3}\ t$ ....(1)

y-दिशा में

$y = u_y t + \frac{1}{2}gt^2$

$30 = u\sin\theta\ t + \frac{1}{2}gt^2$

$30 = \frac{125}{3}\times\frac{3}{5}t + 5t^2$

$t^2 + 5t - 6 = 0$

$(t + 6)(t - 1) = 0$

$t = 1$ sec. ....(2)

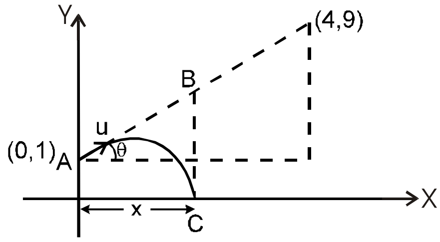
(1) व (2) से

$x = 100/3$

$\therefore$ पैकट इतनी दूरी पहले गिरेगा $40 - \frac{100}{3} = \frac{20}{3}$ m **Ans.**

5.

Sol. $\tan\theta = \dfrac{9-1}{4-0} = 2,$

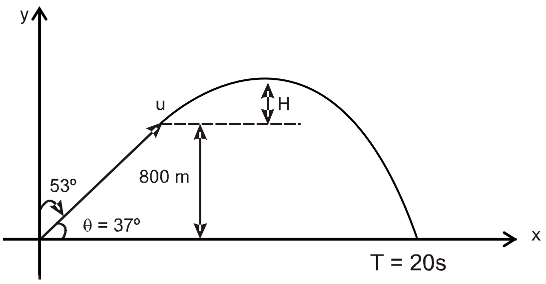


$y = u_y t + \dfrac{1}{2} a_y t^2$

अब, $-1 = u\sin\theta\ (1) - \dfrac{1}{2} g\ (1)^2$

$u\sin\theta = 4$ तथा $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\Rightarrow\ u = 2\sqrt{5}$

6.

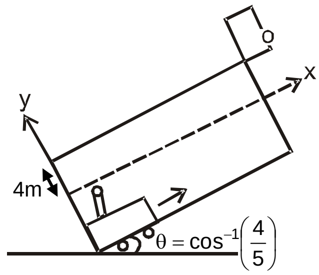


$s_y = u_y\, t + \dfrac{1}{2} a_y\, t^2$ $\quad 800 = (-\,u\cos 53^o)\, T + \left(\dfrac{10}{2}\right) T^2 \Rightarrow$ $\quad u = 100$ m/s

7.#

t = 0 पर

a_y गेंद के त्वरण का जमीन के सापेक्ष उर्ध्व घटक है।



$a_y = -\,g\cos\theta = -g \times \dfrac{4}{5}$

लूप को पार करते समय वेग x-अक्ष के समान्तर है

$\therefore$ $V_y = 0$

लूप का y निर्देशांक = + 4

$V_y^2 - u_y^2 = 2a_y\,(y_f - y_i)$

$0 - u_y^2 = -\,2.\ \dfrac{4g}{5}\ (4-0)$

$u_y^2 = \dfrac{8g}{5}\ .\ 4$

$u_y^2 = 8 \times 8$

$u_y = 8$ m/s

गेंद द्वारा लूप तक पहुँचने में लगा समय

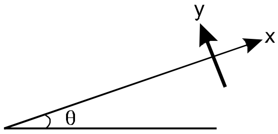
$V_y - u_y = a_y\, t$

$0 - 8 = -\,\dfrac{4g}{5}\ t$

या $\quad t = 1$ second

II method :

$V_y = 0$ (दिया गया है)

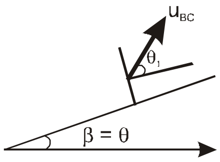


$V_y = u_y + a_y t$ ....(1)

$s_y = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$ ....(2)

दो समीकरण दो चर राशियॉ 'u_y' & 't'

't' का मान ज्ञात करने के लिए



$V_y = u_y + a_y t$

$0 = u_{BC} \sin \theta_1 - g \cos \beta\ T.$ ($\beta = \cos^{-1} 4/5 = 37^o$)

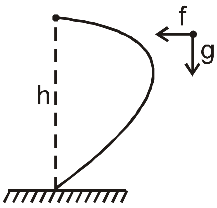
u_{BC} = कार के सापेक्ष गेंद का वेग

$\Rightarrow$ $u_{BC} \sin \theta_1 = u_y = T. \times 10 \times 4/5 = 8T.$

$s_y = (8T)\ T + T^2 = 4, (s_y = 4\text{ m})$ $\Rightarrow$ T = 1s **Ans.**

8.

Sol. जमीन पर पहुँचने का समय निम्न समीकरण से दिया जाता है : $h = \frac{1}{2} g t^2$ ....(1)



समय t में क्षैतिज विस्थापन शून्य है।

$\therefore$ $t = 2v/f$ ....(2)

समीकरण (1) व (2) से

$$h = \frac{2gv^2}{f^2}$$

9. t = 0 पर $u_x = u\cos\theta$ and $u_y = u\sin\theta$

$\vec{u} = u\cos\theta\ \hat{i} + u\sin\theta\ \hat{j}$

माना 't' समय पश्चात् प्रक्षेप्य का वेग यदि v उसका प्रारम्भिक वेग u है तो

अतः समय t पर

$V_x = u\cos\theta$, $V_y = u\sin\theta - gt$

$\vec{V} = u\cos\theta\ \hat{i} + (u\sin\theta - gt)\ \hat{j}$

$u \perp v$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

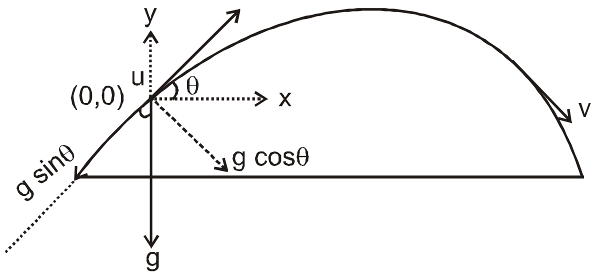
$(u\cos\theta\ \hat{i} + (u\sin\theta - gt)\ \hat{j})\ (u\cos\theta\ \hat{i} + u\sin\theta\ \hat{j})$

$u^2\cos^2\theta + (u\sin\theta)^2 - gt\ u\sin\theta = 0$

$u^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = gt u\sin\theta$

$$\frac{u}{g\sin\theta} = t$$

वैकल्पिक हल :



अब माना $\vec{u}$ और v, t समय पश्चात् लम्बवत् हो जाते हैं तो वेग का घटक, u के अनुदिश शून्य हो जाता है

$\vec{g}$ का घटक $\vec{u}$ के अनुदिश

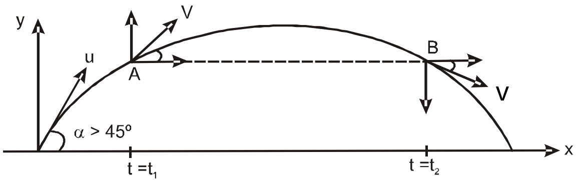
$= - g \sin\theta$

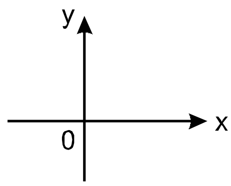
$\therefore \quad 0 = u - g \sin\theta\, t$

$t = u/g \sin\theta$

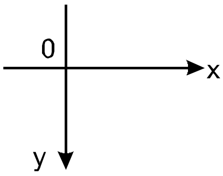
भाग - III

1.





$V_x = V_y$ अब हम निर्देशांक इस प्रकार मानेगें



$\Rightarrow$ वह समय जब $V_x = V_y$ होगा

अब, $V_x = u \cos\alpha$

$V_y = u \sin\alpha - gt$

$\Rightarrow \quad u \cos\alpha = u \sin\alpha - gt \quad \{\because V_y = V_x\}$; $t = t_1$ पर (say)

$\Rightarrow \quad t_1 = \dfrac{u}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha)$ **"C" Ans**

और जब $V_y \equiv V_x$ {i.e., जब हम 'y' अक्ष – y दिशा की तरफ लेगें} तब समय $t = t_2$ होगा

$u \cos\alpha = -(u \sin\alpha - gt_2)$

$\Rightarrow \quad t_2 = \dfrac{u}{g}(\sin\alpha + \cos\alpha)$ **"B" Ans**

2. $x = 24 = u \cos\theta . t$

$\Rightarrow \quad t = \dfrac{24}{24\cos\theta} = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$y = 14 = u \sin\theta t - \dfrac{1}{2} gt^2$

$\Rightarrow \quad 14 = \dfrac{u\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{5}{\cos^2\theta} \qquad \Rightarrow \quad 14 = u \tan\theta - 5 \sec^2\theta$

$\Rightarrow \quad 5 \tan^2\theta - 24 \tan\theta + 19 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \tan\theta = 1, 19/5.$ **Ans**

3.# चूंकि अधिकतम ऊचाँईयां समान है, इसलिए उनके उड्डयनकाल समान होंगे।

$\therefore$ $T_1 = T_2$

प्रारम्भिक वेग के ऊर्ध्वाधर घटक भी समान है।

$\therefore$ चूंकि 2 की परास, 1 की परास से अधिक है।

$\therefore$ इसलिए 2 के वेग का क्षैतिज घटक > 1 के वेग का क्षैतिज घटक

इसलिए , $u_2 > u_1$

4. $R = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$\sqrt{3} = 20.\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{10}$

$\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $\Rightarrow$ $16\sin^4\theta - 16\sin^2\theta + 3 = 0$

$\sin^2\theta = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{16}}$ $\Rightarrow$ $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1}{2}$

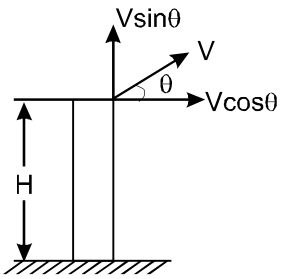
$\theta = 60^\circ$; 30°

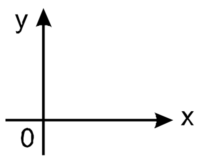
$H_{max} = \dfrac{u^2 \sin^2\theta}{2g} = 0.75\text{m} \; \& \; 0.25 \text{ m}$

$V_{min} = \sqrt{5}$ m/s, $\sqrt{15}$ m/s

$T = \dfrac{2u\sin\theta}{g} = \sqrt{\dfrac{3}{5}};\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

5.*#✍





माना अन्तिम वेग V_2 है

अब v_{2x} = वेग का क्षेतिज घटक है।

$V_{2x} = V\cos\theta$ & $V^2_{2y} = (V\sin\theta)^2 + 2(-g)(-H)$

$\therefore$ $V^2_{2y} = V^2\sin^2\theta + 2gH$

$\Rightarrow$ $V^2_2 = V^2_{2x} + V^2_{2y}$

$= (V\cos\theta)^2 + [V^2\sin^2\theta + 2gH]$

$V^2_2 = V^2 + 2gH$

i.e., $V_2 = \sqrt{V^2 + 2gH}$

अन्तिम वेग का परिमाण θ पर निर्भर नही करता है। इसलिए जमीन से टकराते समय सबका वेग समान होगा 'A' सही है। ऊर्ध्वाधर गति में

विस्थापन की दिशा में प्रारम्भिक अधिकतम वेग कण (1) का है। इसलिए कण (1) जमीन पर सबसे पहले पहुचेगा (चूंकि a_y तथा s_y सभी के लिए समान है)

i.e., 'C' is correct "C" सही है। **Ans** A & C

भाग - IV

1. बिन्दु P पर वेग पूर्णतः क्षैतिज है अर्थात् $u\cos\theta = 20\cos30^o = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ m/sec.

$\therefore v_{vertical} = 0$ m/sec.

2. उर्ध्वाधर नीचे की दिशा को धनात्मक मानिये।
उर्ध्वाधर दिशा में समीकरण बनाने पर (बिन्दु A निर्देश के रूप में लेने पर)

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\therefore \quad 20 = -20\sin\theta \times t + \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$

$\therefore \quad 20 = -20\sin30^o t + 5t^2$

$20 = -10t + 5t^2$

$\therefore \quad 5t^2 - 10t - 20 = 0 \quad$ or $\quad t^2 - 2t - 4 = 0$

$\therefore \quad t = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$.

$\because \quad (1 - \sqrt{5})$ सेकण्ड पर कण धरातल के प्रारम्भिक बिन्दु पर था।

$\therefore \quad$ स्वीकृत समय = $(1 + \sqrt{5})$ sec

3. बिन्दु Q, पर वेग का x-घटक शून्य है, अतः प्रतिस्थापित करने पर

$v_x = u_x + a_x t$

$0 = 10\sqrt{3} - 5\sqrt{3}t$

या $\quad t = \frac{10\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = 2s \quad$ **Ans.**

4. Q बिन्दु पर $\quad v = v_y = u_y + a_y t$

$\therefore \quad v = 0 - (5)(2) = -10$ m/s **Ans.**

यहाँ, ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि Q पर कण का वेग ऋणात्मक y दिशा में है।

5. PO = |yदिशा में कण का विस्थापन| = $|s_y|$

यहाँ , $\quad s_y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$

$= 0 - \frac{1}{2}(5)(2)^2 = -10$ m

$\therefore \quad$ PO = 10 m

इसलिये , h = PO sin 30° = $(10)\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad$ या $\quad$ h = 5 m $\quad$ Ans.

6. दूरी $\quad$ OQ = x दिशा के अनुदिश कण का विस्थापन = s_x

यहाँ, $s_x = u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (10\sqrt{3})(2) - \frac{1}{2}(5\sqrt{3})(2)^2 = 10\sqrt{3}$ m

या $\quad OQ = 10\sqrt{3}$ m

$\therefore \quad PQ = \sqrt{(PO)^2 + (OQ)^2} = \sqrt{(10)^2 + (10\sqrt{3})^2}$

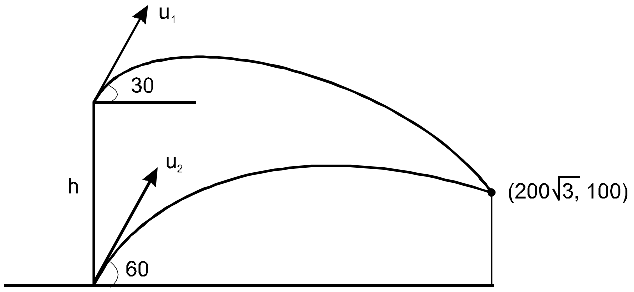
$= \sqrt{100 + 300} = \sqrt{400}$

$\therefore \quad$ PQ = 20 m $\quad$ **Ans.**

EXERCISE-3

भाग - I

1.



$u_1 \cos 30^o = u_2 \cos 60^o$ (एक साथ टकरायेगें)

$\sqrt{3}\, u_1 = u_2$

$100 = 200\sqrt{3} \tan 60^o - \frac{1}{2} \times \frac{g(200\sqrt{3})^2}{u_2^2 \cos^2 60^o}$ $\Rightarrow$ $u_2 = 40\sqrt{3}$ m/s

समीकरण (1) व (2) से

$u_1 = \frac{u_2}{\sqrt{3}}$ $u_1 = 40$ m/s

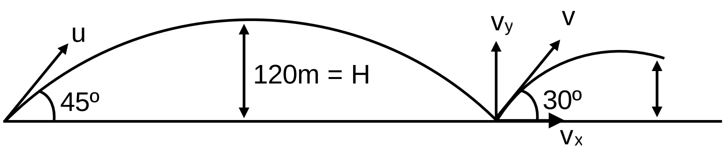
$x = u_2 \cos 60^o \times T$ $200\sqrt{3} = 40\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times T$ $\Rightarrow$ T = 10 sec

$\Rightarrow$ $(h - 100) = 200\sqrt{3} \tan 30^o - \frac{1}{2} g \frac{(200\sqrt{3})^2}{u_1^2 \cos^2 30^o}$

$g = 10$ m/sec^2 रखने पर

& $u_1 = 40$ m/sec h = 400 m

2.



$K_2 = \frac{1}{2} mu^2$ $\frac{v_y}{v_x} = \tan 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$H = \frac{u^2 \sin^2 45^o}{2g}$ $\sqrt{3}\, v_y = v_x$.

$= \frac{u^2}{4g} = 120$m $K_f = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2)$

$K_f = \frac{1}{2} K_i$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} mu^2$ $\Rightarrow$ $v_x^2 + v_y^2 = \frac{u^2}{2}$

$\Rightarrow$ using $u_x = \sqrt{3}\, u_y$ का प्रयोग करने पर $\Rightarrow$ $3\, u_y^2 + u_y^2 = \frac{u^2}{2}$

$\Rightarrow$ $u_y^2 = \frac{u^2}{8}$ $\Rightarrow$ $h = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{u^2}{16g} = \frac{1}{4}\left(\frac{u^2}{4g}\right) = \frac{H}{4} = \frac{120}{4} = 30$ m

3. प्रथम प्रक्षेप्य के लिये

$< V > = \frac{R}{T} = U_x = v_1$

गति के दौरान

$$< V >_{1-n} = \frac{R_1 + R_2 + ... + R_n}{T_1 + T_2 + ... + T_n} = \frac{\frac{2u_{x_1}u_{y_1}}{g} + \frac{2u_{x_2}u_{y_2}}{g} + ... + \frac{2u_{x_n}u_{y_n}}{g}}{\frac{2u_{y_1}}{g} + \frac{2u_{y_2}}{g} + ... \frac{2u_{y_n}}{g}}$$

$$U_x\left[\frac{1+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}+.....\frac{1}{\alpha^{2n}}}{1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+....+\frac{1}{\alpha^n}}\right] = 0.8\ v_1 \Rightarrow \frac{v_0\left[\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right]}{\left[\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}\right]} = 0.8v_1$$

$\Rightarrow \quad \frac{\alpha}{1+\alpha} = 0.8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4$

भाग - II

1. $\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}\ t$

$= (3\hat{i} + 4\hat{j}) + (0.4\hat{i} + 0.3\hat{j}) \times 10 = 7\ i + 7\ j|\ \vec{v}\ | = 7\sqrt{2}$

2. $\frac{d\vec{r}}{dt} = K(y\hat{i} + x\hat{j})$

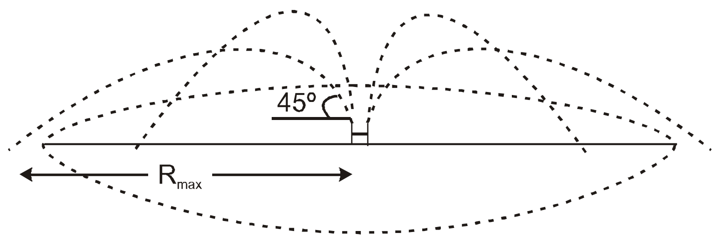
$\Rightarrow \quad dx/dt = y, \quad dy/dt = x$

अतः, $dy/dx = x/y$

$\int y dy = \int x dx \quad ; \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$

$y^2 = x^2 +$ नियतांक

3.



$R_{max} = \frac{v^2}{g}\ \sin 2\theta = \frac{v^2}{g}$

क्षेत्रफल $= \pi R^2$

$= \pi\frac{v^4}{g^2}$ **Ans.**

4. $h_{max} = \frac{u^2}{2g} = 10$

$u^2 = 200$ ....(1)

$R_{max} = \frac{u^2}{g} = 20m$

5. $\vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j}$

$\Rightarrow$ $x = t$ ...(i)

$y = 2t - 1/2\ (10t^2)$ ...(ii)

From (i) and (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

$y = 2x - 5x^2$

Hence Ans (2)

6. नततल पर (परास) $R = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}$

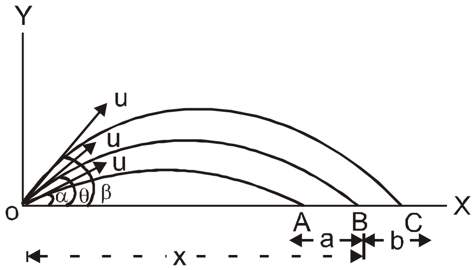
जहाँ $\alpha = 15^o$, $\beta = 30^o$, $u = 2$ m/s

हल करने पर हम प्राप्त करते है

$R = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right) \approx 20$ cm

HIGH LEVEL PROBLEMS (HLP)

1.



$OA = x - a = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$ ...(1)

$OC = x + b = \frac{u^2 \sin 2\beta}{g}$ ...(2)

$OB = x = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$ ...(3)

समीकरण (1) तथा (2) से

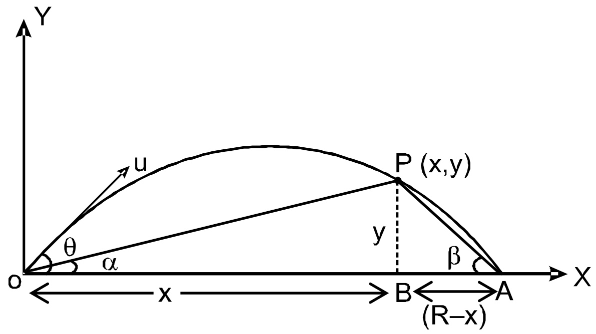
$x\,(b + a) = \left(\frac{b\sin 2\alpha + a\sin 2\beta}{g}\right)u^2$

समीकरण (3) से x का मान रखने पर

$\frac{u^2 \sin 2\theta}{g}\ (b + a) = \left(\frac{b\sin 2\alpha + a\sin 2\beta}{g}\right)u^2$

इस समीकरण को हल करने पर हमे θ का मान मिल जाऐगा।

2. चित्रानुसार



चित्र से $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{y}{x} + \frac{y}{(R-x)}$

R परास है।

$\therefore \quad \tan\alpha + \tan\beta = \frac{y(R-x)+xy}{x(R-x)}$

या $\quad \tan\alpha + \tan\beta = \frac{y}{x} \times \frac{R}{(R-x)}$ ....(1)

लेकिन $y = x\tan\theta\left(1-\frac{x}{R}\right)$

या $\quad \tan\theta = \frac{y}{x} \times \frac{R}{(R-x)}$ ....(2)

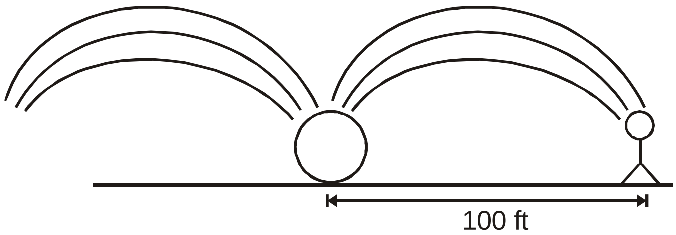
समीकरण (1) व (2) से

$\tan\theta = \tan\alpha + \tan\beta.$

3. दिये गये प्रश्न के अनुसार u = 80 m/s

परास $= \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$\sin 2\theta = \frac{100 \times 32}{(80)^2} = 1/2$



θ = 15° For same Range θ = 15°, 75°

θ = 15° समान परास के लिए θ = 15°, 75°

इस प्रकार दो उड्डयन काल होंगे।

$T_1 = \frac{2u\sin 15^\circ}{g} = \frac{2 \times 80 \times \sin 15^\circ}{32}$ (न्यूनतम समय)

$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

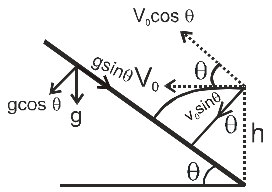
$T_2 = \frac{2u\sin 75^\circ}{g} = \frac{2 \times 8 \times \sin 75^\circ}{32}$ (अधिकतम समय)

$\sin 75° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

खतरे का समय = अधिकतम समय – न्यूनतम समय = $(T_2 - T_1)$

$= \dfrac{2\times 80}{32}$ [sin75° –sin 15°] $= \dfrac{2\times 80}{32}\left[\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right] = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$ sec.

4.



तल के समान्तर

$0 = V_0 \cos\theta - g \sin\theta \times t$

$t = \dfrac{V_0 \cos\theta}{g\sin\theta}$ ...... (1)

तल के लम्बवत्

$h \cos\theta = V_0 \sin\theta\, t + \dfrac{1}{2}(g \cos\theta)\, t^2$

$h \cos\theta = V_0 \sin\theta\left(\dfrac{V_0\cos\theta}{g\sin\theta}\right) + (\dfrac{1}{2} g\cos\theta)\left(\dfrac{V_0\cos\theta}{g\sin\theta}\right)^2$

$h \cos\theta = V_0^2\,\dfrac{\cos\theta}{g} + \dfrac{V_0^2\cos\theta\cot^2\theta}{2g}$

$h = \dfrac{V_0^2}{g} + \dfrac{V_0^2\cot^2\theta}{2g}$

$2gh = (2 + \cot^2\theta)\, V_0^2$

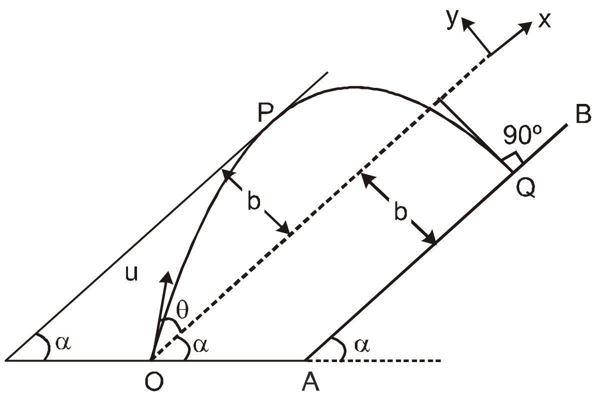
$V_0 = \sqrt{\dfrac{2gh}{2+\cot^2\theta}}$

5. O से P तक कण की गति में

P पर v_y शून्य है

$v_y^2 = u_y^2 + 2a_y s_y$

$\therefore \quad 0 = (u \sin\theta)^2 - 2\,(g \cos\alpha)\, b$ या $b = \dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g\cos\alpha}$ ....(i)



O से Q तक कण की गति में

कण, AB पर 90º से बिन्दु Q पर टकराता है। अर्थात x-अक्ष के अनुदिश वेग शून्य होगा।

$v_x = u_x + a_x t$, के प्रयोग से we have

$0 = u \cos\theta - (g \sin\alpha)t$

या $t = \dfrac{u\cos\theta}{g\sin\alpha}$ ...(ii)

y-दिशा में गति के लिए $s_y = u_y t + \dfrac{1}{2} a_y t^2$

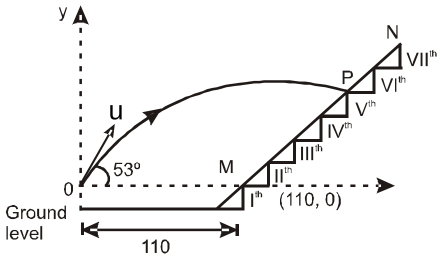
या $-b = u \sin\theta \left(\dfrac{u\cos\theta}{g\sin\alpha}\right) + \dfrac{1}{2}(-g\cos\alpha)\left(\dfrac{u\cos\theta}{g\sin\alpha}\right)^2$ ...(iii)

समीकरण (i) व (iii) से

या $-\dfrac{u^2\sin^2\theta}{2g\cos\alpha} = \dfrac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g\sin\alpha} - \dfrac{gu^2\cos\alpha\cos^2\theta}{2g^2\sin^2\alpha}$ या $-\dfrac{\sin^2\theta}{2\cos\alpha} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\alpha} - \dfrac{\cos\alpha\cos^2\theta}{2\sin^2\alpha}$

हल करने पर $\tan\theta = \left(\sqrt{2}-1\right)\cot\alpha$

6. गेंद का समीकरण



$y = x\tan\theta - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}$

मान रखने पर

$y = 1.33\,x - 0.011\,3x^2$ .....(1)

MN रेखा का ढाल 1 है और यह बिन्दु (110 m, 0) से गुजरती है रेखा का समीकरण होगा।

$y = x - 110$ ....(2)

दोनों व्रको का कटाव बिन्दु P है समीकरण (1) व (2) से y का धनात्मक मान प्राप्त करने पर

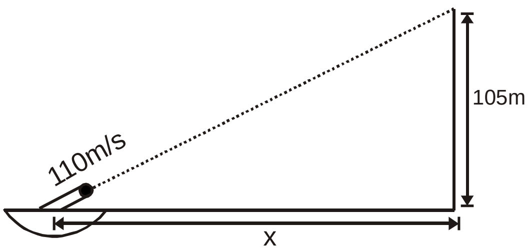
अर्थात $y_p = 4.5$

एक सीढी की ऊँचाई 1 m है. गेंद

y = 4 m और y = 5 m के बीच कही टकराती है। जो 6th सीढी होगी

7. $y = x\tan\theta - \dfrac{1}{2}\dfrac{gx^2}{u^2\cos^2\theta}$

$105 = x\tan\theta - \dfrac{5}{(110)^2}x^2\,(1+\tan^2\theta)$



$$\frac{5x^2}{(110)^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + \left[105 + \frac{5x^2}{(110)^2}\right] = 0 \qquad (b^2 - 4ac > 0\ )$$

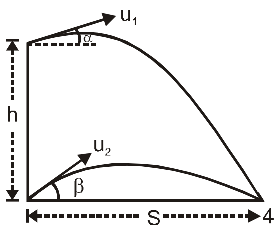
$$x^2 - 4\ x\ \frac{5x^2}{110^2}\left(105 + \frac{5x^2}{110^2}\right) > 0$$

$$1 - 20\ x\ \frac{105}{110^2} - \frac{100x^2}{(110)^4} > 0$$

हल करने पर हम पाते हैं

x = 1100 m.

8.



$$-h = (u_1 \sin\alpha)\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = (u_2 \sin\beta)\ t - \frac{1}{2}gt^2$$

$\therefore \qquad (u_1 \sin\alpha)t + h = (u_2 \sin\beta)t$

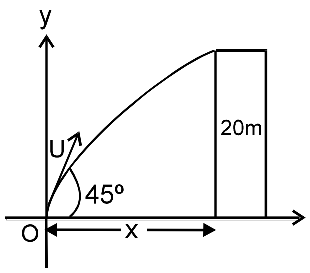
परन्तु $\quad t = \dfrac{s}{u_1\cos\alpha} = \dfrac{s}{u_2\cos\beta}$

$$(u_1 \sin\alpha)\left(\frac{s}{u_1\cos\alpha}\right) + h = (u_2 \sin\beta)\left(\frac{s}{u_2\cos\beta}\right)$$

$h + s\tan\alpha = s\tan\beta$

$h = s(\tan\beta - \tan\alpha)$.

9.



माना व्यक्ति गेंद को x दूरी से फेंकता है। प्रक्षेपण बिन्दु को (0,0) निर्देशांक मानते हुए।

पथ के समीकरण द्वारा $\quad y = x\tan\theta - \dfrac{1}{2}\dfrac{gx^2}{u^2\cos^2\theta}$

$$20 = x\tan 45^\circ - \frac{1}{2}\frac{10x^2}{u^2\cos^2 45}$$

$$u^2 = \frac{10x^2}{x-20} \qquad \text{.............(1)}$$

'u' के न्यूनतम होने के लिए du/dx = 0

'x' के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2u\frac{du}{dx} = \frac{10\times 2x\ \ (x-20) - 10x^2\times 1}{(x-20)^2} = 0$$

du/dx = 0

$\Rightarrow \quad 20x(x-20) - 10x^2 = 0$

$20x^2 - 10x^2 - 400x = 0$

$10x(x-40) = 0$

$x = 40$

x को 40 से ज्यादा होने पर ढाल धनात्मक होगा।

x को 40 से कम होने पर ढाल ऋणात्मक होगा।

इसलिए x = 40 पर u का मान न्यूनतम होगा।

समीकरण (1) से न्यूनतम वेग

$$u^2_{min} = \frac{10\times 40^2}{40-20}$$

$u_{min} = \sqrt{800}$

u_{min} = $20\sqrt{2}$ m/s

10. क्षैतिज दिशा में $x = v_0\cos 53^o t = v_0\cos 37^o(t - t_0)$

$\frac{3}{5}t = \frac{4}{5}(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad 3t = 4(t - t_0)$...........(1)

ऊर्ध्वाधर दिशा में

$y = v_0 \sin 53^o t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin 37^o (t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$ ....(2)

$$v_0 \times \frac{4}{5}t - 5t^2 = v_0 \times \frac{3}{5} \times \frac{3t}{4} - \frac{10}{2}\times\frac{9t^2}{16}$$

$$\frac{v_0 t}{5}\left(4 - \frac{9}{4}\right) = 5t^2\left(1 - \frac{9}{16}\right)$$

$\frac{250}{5}\times\frac{7}{4} = 5t \times \frac{7}{16} \quad \Rightarrow \quad t = 40$ अतः $t_0 = 10$ sec

11. माना कि गोले की चाल u तथा हवा की चाल v है।

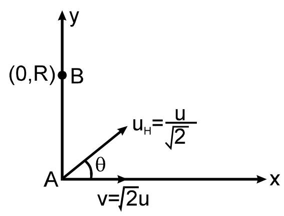
हवा से उड्यन काल T परिवर्तित नहीं होगा।

$T = \frac{\sqrt{2}u}{g}$ ....(1)

हवा की अनुपस्थिति में गोले के वेग का क्षैतिज घटक

$u_H = \frac{u}{\sqrt{2}}$ ....(2)

अतः गोले के वेग के x तथा y घटक (चित्रानुसार)



$u_x = \sqrt{2}\,u + \frac{u}{\sqrt{2}}\cos\theta$ ....(3a)

$u_y = \frac{u}{\sqrt{2}}\sin\theta$ ....(3b)

∴ जहाँ गोला टकराता है उसके x तथा y निर्देशांक बिन्दु P है।

$x = u_xT = (\sqrt{2}\,u + \frac{u}{\sqrt{2}}\cos\theta)\ \frac{\sqrt{2}u}{g} = 2R + R\cos\theta$ ....(4a)

$y = u_yT = \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)\frac{\sqrt{2}u}{g} = R\sin\theta$ ....(4b)

∴ B तथा P के बीच की दूरी S है।

$S^2 = (x-0)^2 + (y-R)^2 = (2R + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta - R)^2$

$= R^2\,[6 + 4\cos\theta - 2\sin\theta]$

$= R^2\,\left[6 + \sqrt{20}\left(\frac{4\cos\theta}{\sqrt{20}} - \frac{2\sin\theta}{\sqrt{20}}\right)\right]$

∴ $S_{minimum} = R\sqrt{6-\sqrt{20}}$

$= R\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ or $R(\sqrt{5}-1)$ **Ans.**

Alternate : चित्र (1) में प्रदर्शित वृत सभी बिन्दुओं का बिन्दुपथ प्रदर्शित करता है, जहां पर तूफान की अनुपस्थिति में जमीन पर गोले गिरते है।

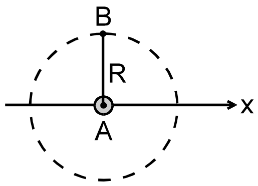


fig.1

माना गोले की चाल 'u' तथा तूफान की चाल $v = \sqrt{2}\,u$ है। माना T उड्डयन काल है। जो कि तूफान की उपस्थिति में भी अपरिवर्तित रहता है। माना R अधिकतम परास है जिसके लिए प्रक्षेपण कोण क्षैतिज से 45º है।

तो $R = \frac{u}{\sqrt{2}}\,T$ .... (1)

x-अक्ष के अनुदिश हवा के प्रवाह के कारण गोलो में x दिशा के अनुदिश उड्डयन काल के दोरान अतिरिक्त विस्थापन (Δx)

$\Delta x = vT = \sqrt{2}\,uT = 2R.$

अतः चित्र (2) के अनुसार जमीन पर गोले गिरने वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ x-अक्ष पर 2R विस्थापित हो जाता है।

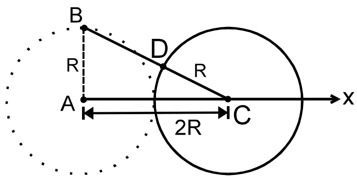


fig.2

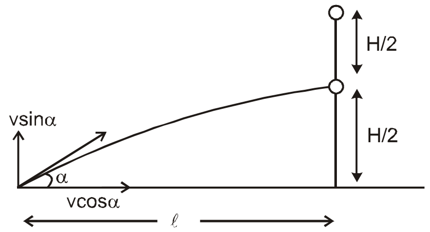
चित्र (2) से

$BC = \sqrt{R^2 + (2R)^2} = \sqrt{5R^2} = \sqrt{5}\,R$

अतः आवश्यक न्यूनतम दूरी

$BD = BC - DC = \sqrt{5}\,R - R =$ **$(\sqrt{5} - 1)$ R Ans.**

12.



माना टक्कर में लिया गया समय t हो तो $\frac{H}{2} = \frac{1}{2}gt^2$ ...(i)

प्रक्षेप्य गति के लिये

$\ell = (v\cos\alpha)t$ ...(ii)

तथा $\frac{H}{2} = (v\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ ...(iii)

समीकरण (i) तथा (iii) से

$\frac{H}{2} = vt\sin\alpha - \frac{H}{2}$

$\Rightarrow$ $H = vt\sin\alpha$ ...(iv)

समीकरण (ii) तथा (iv) से

$\frac{H}{\ell} = \tan\alpha$

$v = \frac{H}{t\sin\alpha} = \frac{H}{\sqrt{\frac{H}{g}}}$ $\left(\because t = \sqrt{\frac{H}{g}} \text{ from (i)}\right)$

तथा $\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{\ell^2 + H^2}}$

इसलिये $V = \sqrt{\frac{\ell^2 + H^2}{H/g}} = \sqrt{\frac{g}{H}(\ell^2 + H^2)} = \sqrt{\frac{gH^2}{H}\left(\frac{\ell^2}{H^2} + 1\right)} = \sqrt{gH\left(1 + \frac{\ell^2}{H^2}\right)}$

13. $u = 5\sqrt{3}$ m/s.

$\therefore$ $u\cos 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ m/s

तथा $u\sin 60^0 = 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7.5$ m/s

चूंकि दोनों गोलियों का क्षेतिज विस्थापन बराबर है, इसलिए दूसरी गोली को पहले दागना होगा, क्योंकि इसके वेग का क्षेतिज घटक $u\cos 60^0$ पहली के जो कि u या $5\sqrt{3}$ m/s है, से कम है।

अब माना पहली गोली बिन्दू P तक पहुँचने में समय t_1 लेती है तथा दूसरी समय t_2 लेती है, तो–

$x = (u\cos 60^o)\, t_2 = u.\, t_1$

or $x = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)t_2 = 5\sqrt{3}\, t_1$ ....(1)

or $t_2 = 2t_1$ ....(2)

and $h = \frac{1}{2}g\, t_1^2 = \frac{1}{2}gt_2^2 - (7.5)\, t_2$

Taking $g = 10$ m/s^2 लेने पर

$h = 5t_2^2 - 7.5\, t_2 = 5t_1^2$ ....(3)

समीकरण (3) में $t_2 = 2t_1$ रखने पर

$$5(2t_1)^2 - 7.5\,(2\,t_1) = 5t_1^2$$

या $\quad 5t_1^2 = 5t_1$

$t_1 = 0$ तथा 1s

इसलिए $t_1 = 1s$ तथा

$t_2 = 2t_1 = 2s$

$x = 5\sqrt{3}\,t_1 = 5\sqrt{3}$ m (समीकरण 1 से)

तथा $\quad h = 5\,t_1^2 = 5\,(1)^2 = 5$ m (समीकरण 3 से)

$\therefore \quad y = 10 - h = (10 - 5) = 5$ m

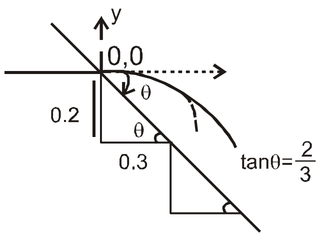
इसलिए

(i) दोनों गोलियों के बीच का समय अन्तराल $= t_2 - t_1 = (2 - 1)$ s

$\Delta = 1s$

(ii) P के निदेशांक = $(x, y) = 5\sqrt{3}$ m. 5 m

14.



हमारे पास प्रक्षेपण बिन्दु (0, 0) है। सरल रेखा के समीकरण से (चित्रानुसार)

$$y = x\tan\theta$$

$$y = \frac{-2}{3} \times \qquad ....(1)$$

तथा क्षैतिज प्रक्षेपण हेतु बिन्दुपथ का समीकरण

$$y = \frac{-1}{2} g \frac{x^2}{u^2} \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$\frac{1}{2} g\ \frac{x^2}{u^2} = \frac{2}{3} x$$

या $\quad x = \frac{2}{3} \times \frac{u^2}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{4.5 \times 4.5}{5} = 3 \times 0.9$

यदि सीढियों की संख्या n हो तो $n \times 0.3 = 3 \times 0.9$

n = 9

15. $x = y^2 + 2y + 2$

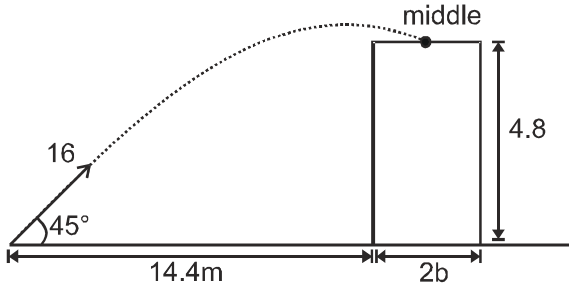
$$\frac{dx}{dt} = 2y\frac{dy}{dt} + 2\frac{dy}{dt} + 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2y\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0.\ \ (\frac{dy}{dt} = 5 \text{ m/s})$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,(5^2) + 0 + 0 = 50$ m/s^2. **Ans. "A"**

16. पथ की समीकरण



$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\theta}$

4.8 = (14.4 + b) × 1 – 1/2

इस समीकरण को हल करने पर

हम प्राप्त करते हैं 2b = 9.6 m $\Rightarrow$ b = 4.8 m

अब $10\sqrt{3}$ m/s की चाल वाली गेंद के लिए प्रक्षेपण कोण को ज्ञात करने के लिए

$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\theta}$ [x = 2b + 14.4 $\Rightarrow$ 9.6 + 14.4 = 24 m]

$4.8 = 24\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{10(24)^2\sec^2\theta}{(10\sqrt{3})^2}$

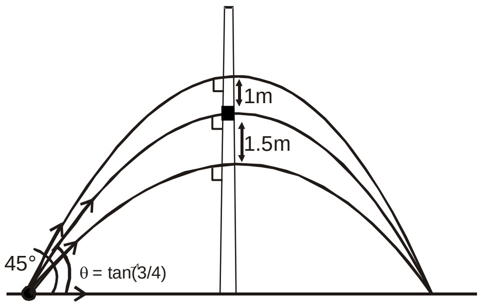
$4.8 = 24\tan\theta - \frac{24\times4}{10}(1+\tan^2\theta)$

$4\tan^2\theta - 10\tan\theta + 6 = 0$

$\tan\theta = \frac{3}{2}, 1$

$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{2}, \theta = 45°$

17. $H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$, $R = \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$



इसलिए

$\frac{H}{R} = \left(\frac{\tan\theta}{4}\right)$ ......(1)

$\frac{H+1}{R} = \left(\frac{\tan 45°}{4}\right) = \frac{1}{4}$ ....(2)

$\frac{H-1.5}{R} = \frac{\tan\left[\tan^{-1}(3/4)\right]}{4}$

$$\frac{H-1.5}{R}=\frac{3/4}{4}=\frac{3}{16} \qquad ....(3)$$

$$\frac{H+1}{H-1.5}=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{10}{R}=\frac{1}{4} \Rightarrow \mathbf{R = 40\ m}$$

3H + 3 = 4H – 6

H = 9 m

$$\frac{9}{40}=\frac{\tan\theta}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{9}{10} \qquad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$$

R = 40 $\qquad \tan\theta = 9/10$

$$\frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = 40 \qquad \sin\theta = \frac{9}{\sqrt{181}}$$

$$R = \frac{u^2.2\sin\theta\cos\theta}{g}$$ का उपयोग करते हुए

$$\frac{u^2 2\left(\frac{9}{\sqrt{181}}\right)\left(\frac{10}{\sqrt{181}}\right)}{10} = 40$$

$$u^2 = \frac{3620}{9} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3620}}{3}\ \text{m/s}$$