Exercise-1

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

खण्ड (A) : मूलों और गुणांकों के मध्य सम्बन्ध और द्विघात समीकरण

A-1. 'a' के किस मान के लिए समीकरण $(a^2 - a - 2)x^2 + (a^2 - 4)x + (a^2 - 3a + 2) = 0$ के दो से अधिक हल होंगे ? क्या 'x' का ऐसा कोई वास्तविक मान विद्यमान है जिसके लिए दी गई समीकरण 'a' में एक सर्वसमिका हो ?

A-2. यदि समीकरण $2x^2 + 3x + 4 = 0$ के मूल α एवं β हों, तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए–

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

A-3. यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हों, तो वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके मूल निम्न है–

(i) $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ (ii) $\alpha^2 + 2, \beta^2 + 2$

A-4. यदि $\alpha \neq \beta$ लेकिन $\alpha^2 = 5\alpha - 3, \beta^2 = 5\beta - 3$ हो, तो वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{\alpha}{\beta}$ एवं $\frac{\beta}{\alpha}$ हो।

A-5. $x^2 + px + q = 0$ रूप की एक द्विघात समीकरण को लिखते समय x का गुणांक गलती से –11 की जगह –10 लिखने पर मूल 4 एवं 6 प्राप्त होते हो, तो सही समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए।

A-6. (i) यदि $x = \frac{3 + 5\sqrt{-1}}{2}$ हो, तो व्यंजक $2x^3 + 2x^2 - 7x + 72$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $x = \frac{-1 + \sqrt{15}}{2}$ हो, तो व्यंजक $2x^3 + 2x^2 - 7x + 72$ का मान ज्ञात कीजिये।

(iii) निम्न समीकरणों को हल कीजिए $2^{2x} + 2^{x+2} - 32 = 0$

A-7. माना a, b, c वास्तविक संख्याएँ है जबकि $a \neq 0$ तथा माना समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β है। समीकरण $a^3x^2 + abcx + c^3 = 0$ के मूलों को α, β के पदों में व्यक्त कीजिए।

A-8. यदि α, β समीकरण $x^2 - px + q = 0$ के मूल है तथा $\alpha - 2, \beta + 2$ समीकरण $x^2 - px + r = 0$ के मूल है तब सिद्ध कीजिए कि $16q + (r + 4 - q)^2 = 4p^2$.

A-9. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल दूसरे मूल की nवीं घात के बराबर हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $(ac^n)^{1/(n+1)} + (a^nc)^{1/(n+1)} + b = 0$.

A-10. यदि द्विघात समीकरण $(a + 1)x^2 + (2a + 3)x + (3a + 4) = 0$ के मूलों का योगफल –1 है तब मूलों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

A-11. '2a' का न्यूनतम अभाज्य पूर्णांक मान ज्ञात करो जबकि समीकरण $2x^2 + 6x + a = 0$ के मूल α, β असमिका $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} < 2$ को सन्तुष्ट करते है।

खण्ड (B) : मूलों और गुणांकों के मध्य सम्बन्ध ; उच्च घात समीकरणें

B-1. यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ $(r \neq 0)$ के दो वास्तविक मूल α, β इस प्रकार है कि सम्बन्ध $\alpha\beta + 1 = 0$ को सन्तुष्ट करते है, तो सिद्ध कीजिए कि $r^2 + pr + q + 1 = 0$.

B-2. यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल α, β, γ हो, तो $\left(\alpha - \frac{1}{\beta\gamma}\right)\left(\beta - \frac{1}{\gamma\alpha}\right)\left(\gamma - \frac{1}{\alpha\beta}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

B-3. (i) समीकरण $24x^3 - 14x^2 - 63x + \lambda = 0$ को हल कीजिए जबकि एक मूल दूसरे मूल का दुगुना है फलतः λ का/के मान ज्ञात कीजिए।

(ii) समीकरण $18x^3 + 81x^2 + \lambda x + 60 = 0$ को हल कीजिए जबकि एक मूल, अन्य दो मूलों के योगफल का आधा है अतः λ का मान ज्ञात कीजिए।

B-4. यदि α, β, γ समीकरण $x^3 - 6x^2 + 10x - 3 = 0$ के मूल है तब समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $2\alpha + 1, 2\beta + 1$ और $2\gamma + 1$ है।

B-5. यदि समीकरण $2x^3 + x^2 - 7 = 0$ के मूल α, β, γ हो, तो $\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

B-6. समीकरण $4x^3 + 20x^2 - 23x + 6 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो मूल समान हैं।

खण्ड (C) : मूलों की प्रकृति

C-1. यदि समीकरण $x^2 + px + q = 0$ का एक मूल $2 + i\sqrt{3}$ हो (जहाँ $p, q \in R$ तथा $i^2 = -1$), तो क्रमित युग्म (p, q) ज्ञात कीजिये।

C-2. यदि समीकरण $x^2 - 2cx + ab = 0$ के मूल वास्तविक और असमान हो, तो सिद्ध कीजिए कि समीकरण $x^2 - 2(a + b)x + a^2 + b^2 + 2c^2 = 0$ के मूल काल्पनिक होंगे।

C-3. 'k' के किन मानों के लिए व्यंजक $kx^2 + (k + 1)x + 2$ एक रैखिक बहुपद का पूर्ण वर्ग होगा ?

C-4. यदि समीकरण $(a^2 - bc)x^2 + 2(b^2 - ac)x + c^2 - ab = 0$ के मूल समान हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि या तो $b = 0$ या $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ होगा।

C-5. यदि $a, b, c \in R$, तो सिद्ध कीजिए कि समीकरण $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ के मूल सदैव वास्तविक होगें तथा कोई मूल नहीं हो सकता यदि $a = b = c$ हो।

C-6. यदि समीकरण $\frac{1}{(x+p)}+\frac{1}{(x+q)}=\frac{1}{r}$ के मूल परिमाण में बराबर तथा विपरीत चिन्ह के हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $p + q = 2r$ एवं मूलों का गुणनफल $(-1/2)(p^2 + q^2)$ है।

C-7. (i) यदि $-2 + i\beta$ समीकरण $x^3 + 63x + \lambda = 0$ (जहाँ $\beta \in R - \{0\}$, $\lambda \in R$ और $i^2 = -1$ है),का एक मूल है तब समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $\frac{-1}{2} + i\beta$, समीकरण $2x^3 + bx^2 + 3x + 1 = 0$ (जहाँ $b, \beta \in R - \{0\}$ और $i^2 = -1$ है), के मूल है तब b का/के मान ज्ञात कीजिए।

C-8. समीकरण $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2 = 0$ को हल कीजिए जबकि इसका एक मूल $-1 + \sqrt{-1}$ हो।

C-9. $y = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ का आरेख खीचींए। फलतः धनात्मक शून्यों की संख्या ज्ञात कीजिए।

खण्ड (D) : द्विघात व्यंजक का परिसर और द्विघात व्यंजक का चिन्ह

D-1. निम्नलिखित द्विघात व्यंजकों के आलेख बनाइए –

(i) $y = x^2 + 4x + 3$ (ii) $y = 9x^2 + 6x + 1$ (iii) $y = -2x^2 + x - 1$

D-2. निम्नलिखित द्विघात व्यंजको के परिसर ज्ञात कीजिए –

(i) $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \quad \forall\ x \in R$

(ii) $f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \forall\ x \in [0, 3]$

(iii) $f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad \forall\ x \in (0, 1]$

D-3. यदि 'x' वास्तविक हो, तो निम्नलिखित परिमेय व्यंजको के परिसर ज्ञात कीजिए–

(i) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ (ii) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x^2 - 2x - 9}$

D-4. k के मानों का परिसर ज्ञात कीजिए, यदि $f(x) = \dfrac{kx^2 + 2(k+1)x + (9k+4)}{x^2 - 8x + 17}$ हमेशा ऋणात्मक रहता है।

D-5. $x^2 + (a - b)x + (1 - a - b) = 0$, $a, b \in R$ 'a' पर प्रतिबन्ध ज्ञात कीजए कि जबकि

(i) समीकरण के दोनों मूल वास्तविक और असमान है $\forall\ b \in R$.

(ii) मूल काल्पनिक है $\forall\ b \in R$

खण्ड (E) : मूलों की स्थिति

E-1. यदि समीकरण $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ के दोनों मूल 3 से बड़े हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $a > 11/9$

E-2. समीकरण $x^2 - (K + 1)x + K^2 + K - 8 = 0$ का एक मूल 2 से बड़ा एवं दूसरा मूल 2 से छोटा होने के लिए 'K' के मान ज्ञात कीजिए।

E-3. समीकरण $(a^2 - a + 2)x^2 + 2(a - 3)x + 9(a^4 - 16) = 0$ के मूल विपरीत चिन्ह के होने के लिए 'a' के सभी वास्तविक मान ज्ञात कीजिए ।

E-4. समीकरण $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ का ठीक एक मूल संख्याओं 2 और 4 के मध्य स्थित हो तथा समीकरण का कोई भी मूल न तो 2 के बराबर हो और न ही 4 के बराबर हो, तो 'a' के सभी मान ज्ञात कीजिए।

E-5. यदि $x^2 + 2(K - 3)x + 9 = 0$ के मूल α एवं β हो, तो 'K' का मान ज्ञात कीजिए जबकि $\alpha, \beta \in (-6, 1)$.

खण्ड (F) : उभयनिष्ठ मूल एवं बहुपदों के आरेख

F-1. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का कोई एक मूल समीकरण $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ के मूलों में से एक का व्युत्क्रम है तो प्रदर्शित कीजिए कि $(aa_1 - cc_1)^2 = (bc_1 - ab_1)(b_1c - a_1b)$.

F-2. $x^2 - 11x + a = 0$ और $x^2 - 14x + 2a = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ होने के लिए 'a' के मान ज्ञात कीजिए।

F-3. यदि $ax^2 + bx + c = 0$ और $bx^2 + cx + a = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो और a, b, c अशून्य वास्तविक संख्याएँ हो, तो $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$ का मान ज्ञात कीजिए।

F-4. यदि $x^2 + px + q = 0$ और $x^2 + qx + p = 0$, $(p \neq q)$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $1 + p + q = 0$ तथा यह भी प्रदर्शित कीजिए कि शेष मूल समीकरण $x^2 + x + pq = 0$ के मूल हैं।

F-5. निम्न के आरेख खीचीऐं।

(i) $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 15$ (ii) $y = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 2$

F-6. 'k' का मान ज्ञात कीजिए जबकि समीकरण $x^3 - 3x^2 + 2 = k$ रखता है –

(i) 3 वास्तविक मूल (ii) 1 वास्तविक मूल

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

खण्ड (A) : मूलों और गुणांकों के मध्य सम्बन्ध और द्विघात समीकरण

A-1. समीकरण $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ के मूल हैं–

(A) $\frac{c-a}{b-c}, 1$ (B) $\frac{a-b}{b-c}, 1$ (C) $\frac{b-c}{a-b}, 1$ (D) $\frac{c-a}{a-b}, 1$

A-2. यदि द्विघात समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल α, β हो और समीकरण $x^2 + px - r = 0$ के मूल γ, δ हो, तो $(\alpha-\gamma).(\alpha-\delta)$ का मान है –

(A) $q + r$ (B) $q - r$ (C) $-(q + r)$ (D) $-(p + q + r)$

A-3. दो वास्तविक संख्याएँ α एवं β इस प्रकार है कि $\alpha+\beta = 3$ एवं $\alpha-\beta = 4$ हो, तो वह द्विघात समीकरण जिसके मूल α एवं β है, होगी–

(A) $4x^2 - 12x - 7 = 0$ (B) $4x^2 - 12x + 7 = 0$
(C) $4x^2 - 12x + 25 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं।

A-4. समीकरण $3x^2 + px + 3 = 0,\ p > 0$ के लिए यदि एक मूल दूसरे का वर्ग हो, तो p का मान है–

(A) 1/3 (B) 1 (C) 3 (D) 2/3

A-5. निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :

S_1 : यदि समीकरण $x^2 - bx + c = 0$ के मूल दो क्रमागत पूर्णांक हो, तो $b^2 - 4c$ का मान 1 है।

S_2 : यदि $x^2 - x + 3 = 0$ के मूल α, β हो, तो $\alpha^4 + \beta^4$ का मान 7 है।

S_3 : यदि $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$ के मूल α, β, γ हो, तो $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ का मान 17 है।

S_1, S_2, S_3 के सत्य (T) या असत्य (F) होने का सही क्रम है –

(A) TTT (B) FTF (C) TFT (D) FTT

खण्ड (B) : मूलों और गुणांकों के मध्य सम्बन्ध ; उच्च घात समीकरणें

B-1. यदि समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0, (r \neq 0)$ के दो मूल मापांक में बराबर परन्तु विपरीत चिन्ह के हो, तो –

(A) $pr = q$ (B) $qr = p$ (C) $pq = r$ (D) इनमें से कोई नही।

B-2. यदि समीकरण $x^3 - x - 1 = 0$ के दो मूल α, β एवं γ हो, तो $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$ का मान है–

(A) शून्य (B) -1 (C) -7 (D) 1

B-3. यदि समीकरण $(x-a)(x-b)(x-c) = d,\ d \neq 0$, के मूल α, β, γ हो, तो समीकरण $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) + d = 0$ के मूल हैं –

(A) $a + 1, b + 1, c + 1$ (B) a, b, c (C) $a - 1, b - 1, c - 1$ (D) $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$

B-4. यदि α, β, γ समीकरण $x^3 + ax + b = 0$ के मूल है तब $\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ का मान बराबर है–

(A) $\frac{3b}{2a}$ (B) $\frac{-3b}{2a}$ (C) $3b$ (D) $2b$

B-5. यदि समीकरण $x^4 - 2x^3 + ax^2 + 8x + b = 0$ के दो मूल परिमाण मे बराबर परन्तु विपरीत चिन्ह के है तब $4a + b$ का मान बराबर है–

(A) 16 (B) 8 (C) –16 (D) –8

खण्ड (C) : मूलों की प्रकृति

C-1. यदि समीकरण $x^2 - \sqrt{3}x + \lambda = 0$, $\lambda \in R$ का एक मूल $\sqrt{3} + 2$ है तब, दूसरा मूल है –
(A) $\sqrt{3} - 2$ (B) -2 (C) $2 - \sqrt{3}$ (D) 2

C-2. यदि समीकरण $2x^2 + bx + c = 0$; $b, c \in R$, के मूल वास्तविक और भिन्न–भिन्न है तब, समीकरण $2cx^2 + (b - 4c)x + 2c - b + 1 = 0$ के मूल है
(A) काल्पनिक (B) बराबर
(C) वास्तविक और भिन्न–भिन्न (D) कुछ कहा नहीं जा सकता

C-3. माना समीकरण $x^2 + \ell x + m = 0$ का एक मूल दूसरे मूल का वर्ग है यदि $m \in R$ तब
(A) $\ell \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \{1\}$ (B) $\ell \in (-\infty, 0]$ (C) $\ell \in \left(-\infty, \frac{1}{9}\right]$ (D) $\ell \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$

C-4. यदि a, b, c पूर्णांक हो और $b^2 = 4(ac + 5d^2)$, $d \in N$, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं –
(A) अपरिमेय (B) परिमेय और असमान (C) सम्मिश्र संयुग्मी (D) परिमेय और समान

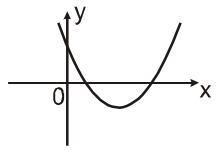
C-5. यदि a एवं b वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार है कि $4a + 2b + c = 0$ तथा $ab > 0$ हो, तो समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$
(A) के दोनों मूल वास्तविक है। (B) के दोनों मूल काल्पनिक है।
(C) का ठीक एक मूल है। (D) इनमें से कोई नहीं।

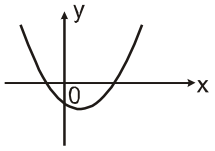
C-6. किसी समीकरण $x^2 + 2x - n = 0$, जहाँ $n \in N$ और $n \in [5, 100]$, के मूल पूर्णांक होने के लिए n के भिन्न–भिन्न मानों की कुल संख्या है –
(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 3

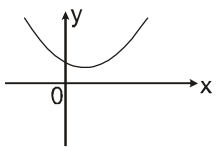
खण्ड (D) : द्विघात व्यंजक का परिसर और द्विघात व्यंजक का चिन्ह

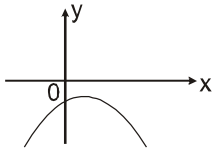
D-1. यदि समीकरण $x^2 + bx + c = 0$ (जहाँ $c < 0 < b$) के मूल α एवं β ($\alpha < \beta$) हो, तो–
(A) $0 < \alpha < \beta$ (B) $\alpha < 0 < \beta^2 < \alpha^2$ (C) $\alpha < \beta < 0$ (D) $\alpha < 0 < \alpha^2 < \beta^2$

D-2. निम्नलिखित में से कौन–सा आलेख व्यंजक $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ को प्रदर्शित करता है जबकि $a > 0, b < 0$ एवं $c < 0$ हो –

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

D-3. व्यजंक $y = ax^2 + bx + c$ का चिन्ह सदैव 'a' के चिन्ह के समान होता है यदि –
(A) $4ac < b^2$ (B) $4ac > b^2$ (C) $4ac = b^2$ (D) $ac < b^2$

D-4. व्यंजक $y = x^2 + kx - x + 9$ का सम्पूर्ण आलेख x-अक्ष से ऊपर होगा यदि और केवल यदि –
(A) $k < 7$ (B) $-5 < k < 7$ (C) $k > -5$ (D) इनमें से कोई नहीं।

D-5. यदि $a, b \in R$, $a \neq 0$ एवं द्विघात समीकरण $ax^2 - bx + 1 = 0$ के मूल काल्पनिक हो, तो $a + b + 1$ होगा–
(A) धनात्मक (B) ऋणात्मक (C) शून्य (D) b के चिन्ह पर निर्भर।

D-6. यदि समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के अशून्य भिन्न–भिन्न मूल 'a' एवं 'b' हो, तो $x^2 + ax + b$ का न्यूनतम मान है–
(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{9}{4}$ (C) $-\frac{9}{4}$ (D) 1

D-7. यदि $y = -2x^2 - 6x + 9$ हो, तो –
(A) y का अधिकतम मान –11 है और यह $x = 2$ पर प्राप्त होता है।
(B) y का न्यूनतम मान –11 है और यह $x = 2$ पर प्राप्त होता है।
(C) y का अधिकतम मान 13.5 है और यह $x = -1.5$ पर प्राप्त होता है।
(D) y का न्यूनतम मान 13.5 है और यह $x = -1.5$ पर प्राप्त होता है।

D-8. यदि $f(x) = x^2 + 2bx + 2c^2$ एवं $g(x) = -x^2 - 2cx + b^2$ इस प्रकार है कि min f(x) > max g(x) है, तो b एवं c में सम्बन्ध है–

(A) कोई सम्बन्ध नहीं (B) $0 < c < b/2$ (C) $c^2 < 2b$ (D) $c^2 > 2b^2$

खण्ड (E) : मूलों की स्थिति

E-1. यदि $b > a$ हो, तो समीकरण $(x - a)(x - b) - 1 = 0$

(A) के दोनों मूल अन्तराल [a, b] में है। (B) के दोनों मूल अन्तराल $(-\infty, a)$ में है।

(C) के दोनों मूल अन्तराल $[b, \infty)$ में है। (D) का एक मूल अन्तराल $(-\infty, a)$ में एवं दूसरा (b, ∞) में है।

E-2. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - 2p(x - 4) - 15 = 0$ के मूल α, β हो, तो इनमें से एक मूल 1 से छोटा और दूसरा मूल 2 से बड़ा होने के लिए 'p' के मानों का समुच्चय है–

(A) $(7/3, \infty)$ (B) $(-\infty, 7/3)$ (C) $x \in R$ (D) इनमें से कोई नहीं।

E-3. यदि समीकरण $4x^2 - 16x + \lambda = 0$ जहाँ $\lambda \in R$, के मूल α, β इस प्रकार है कि $1 < \alpha < 2$ और $2 < \beta < 3$ हो, तो 'λ' के पूर्णांक हलों की संख्या है –

(A) 5 (B) 6 (C) 2 (D) 3

E-4. k के वास्तविक मानों का समुच्चय होगा यदि समीकरण $x^2 - (k-1)x + k^2 = 0$ का (1,2) में कम से कम एक मूल रखता है –

(A) (2, 4) (B) [–1, 1/3] (C) {3} (D) ϕ

खण्ड (F) : उभयनिष्ठ मूल एवं बहुपदों के आरेख

F-1. यदि समीकरणों $k(6x^2 + 3) + rx + 2x^2 - 1 = 0$ एवं $6k(2x^2 + 1) + px + 4x^2 - 2 = 0$ के दोनों मूल उभयनिष्ठ हो, तो $(2r - p)$ का मान है–

(A) 0 (B) 1/2 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं।

F-2. यदि $3x^2 - 17x + 10 = 0$ और $x^2 - 5x + \lambda = 0$ का एक उभयनिष्ठ मूल है तब λ के सभी संभावित वास्तविक मानों का योगफल है

(A) 0 (B) $-\frac{29}{9}$ (C) $\frac{26}{9}$ (D) $\frac{29}{3}$

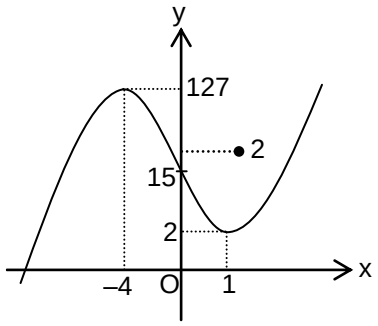
F-3. यदि a, b, p, q अशून्य वास्तविक संख्याएँ है, तो समीकरणों $2a^2x^2 - 2abx + b^2 = 0$ एवं $p^2x^2 + 2pqx + q^2 = 0$ के लिए

(A) कोई उभयनिष्ठ मूल नहीं है। (B) एक मूल उभयनिष्ठ है, यदि $2a^2 + b^2 = p^2 + q^2$

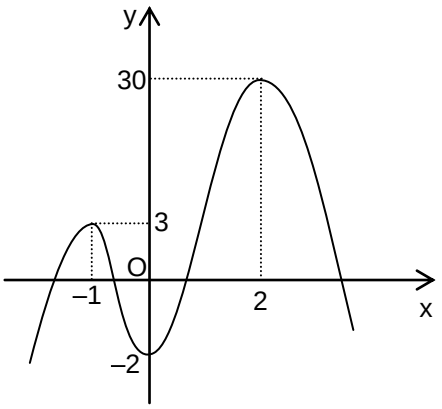
(C) दो मूल उभयनिष्ठ है, यदि $3pq = 2ab$ (D) दो मूल उभयनिष्ठ है, यदि $3qb = 2ap$

F-4. $y = \frac{x^3 - 4x}{4}$ का आरेख है–

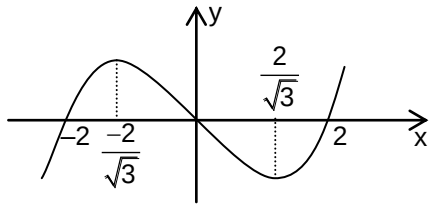
(A)



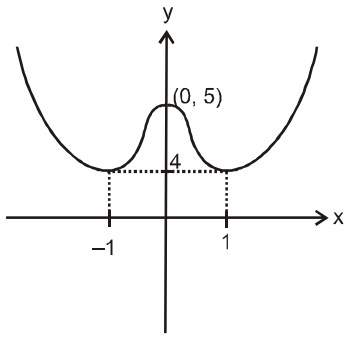
(B)



(C)

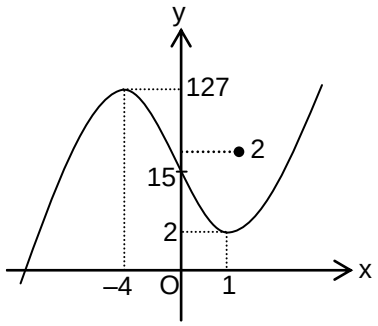


(D)

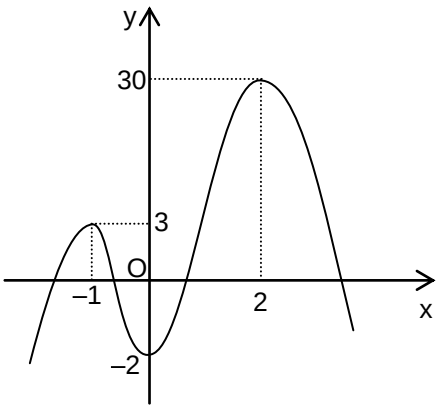


F-5. $y = x^4 - 2x^2 + 5$ का आरेख है–

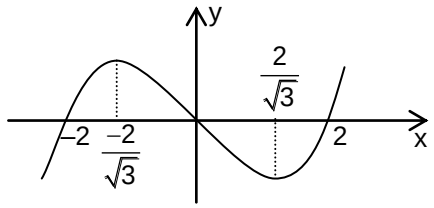
(A)



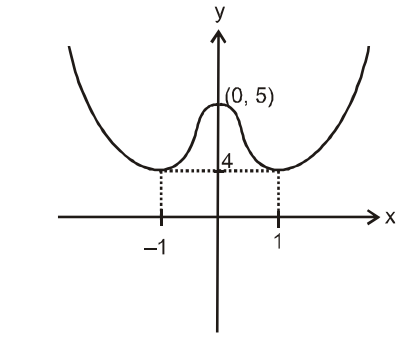
(B)



(C)



(D)

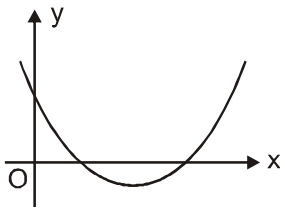
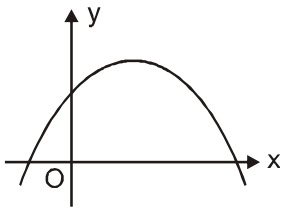
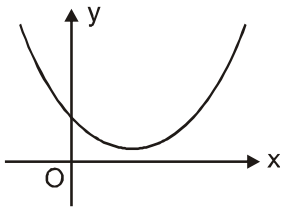
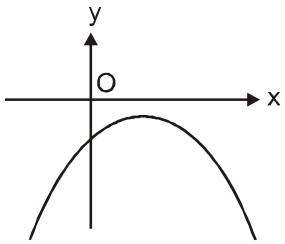


भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

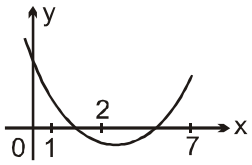
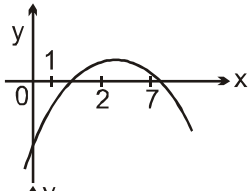
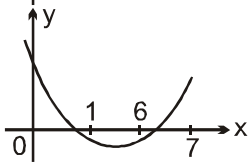
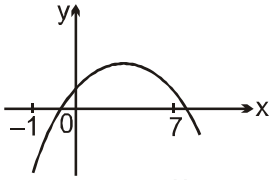
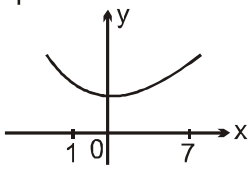
1.

	स्तम्भ – I		स्तम्भ – II	
(A)	यदि $x^2 - 8x + k = 0$ के मूल $\alpha, \alpha + 4$ हो, तो 'k' का सम्भावित मान है –	(p)	4
(B)	यदि α, β समीकरण $x^2 + 2x - 4 = 0$ के मूल है तथा $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ समीकरण $x^2 + qx + r = 0$ के मूल है तब $\frac{-3}{q+r}$ का मान है–	(q)	0
(C)	यदि समीकरण $ax^2 + c = 0, ac \neq 0$ के मूल α, β है तब $\alpha^3 + \beta^3$ बराबर है–	(r)	12
(D)	यदि $x^2 - kx + 36 = 0$ के मूल पूर्णांक है तब k के मानों की संख्या है–	(s)	10

2. यदि द्विघात व्यंजक $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ का ग्राफ स्तम्भ-II में प्रदर्शित है तो स्तम्भ-I का स्तम्भ-II ये संभावित मिलान करो। (जहाँ $D = b^2 - 4ac$)

स्तम्भ – I	स्तम्भ – II	
(A) $\frac{abc}{D} > 0$	(p)	
(B) $\frac{abc}{D} < 0$	(q)	
(C) $abc > 0$	(r)	
(D) $abc < 0$	(s)	

3. माना $y = Q(x) = ax^2 + bx + c$ एक द्विघात व्यंजक है। स्तम्भ **- I** में असमिकाओं को स्तम्भ **- II** से संभावित आरेख से मिलाइये

स्तम्भ - II		**स्तम्भ - II**
(A)	$Q(x) > 0, \forall\ x \in (2, 7)$	(p) 
(B)	$Q(x) > 0, \forall\ x \in (-\infty, 1)$	(q) 
(C)	$Q(x) < 0, \forall\ x \in (1, 6)$	(r) 
(D)	$Q(x) < 0, \forall\ x \in (-\infty, -1)$	(s) 
		(t) 

Exercise-2

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. यदि $a > 0, b > 0$ एवं $c > 0$ हो, तो समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के –
(A) दोनो मूल वास्तविक एवं ऋणात्मक है। (B) दोनों मूलों के वास्तविक भाग ऋणात्मक है।
(C) दोनो मूल परिमेय संख्याएँ है। (D) दोनों मूलों के वास्तविक भाग धनात्मक है।

2. यदि समीकरण $x^2 + 2ax + b = 0$ के मूल वास्तविक एवं भिन्न–भिन्न हो तथा उनका अन्तर अधिकतम $2m$ हो, तो b निम्न अन्तराल में स्थित है–
(A) $(a^2 - m^2, a^2)$ (B) $[a^2 - m^2, a^2)$ (C) $(a^2, a^2 + m^2)$ (D) इनमें से कोई नहीं

3. समीकरण $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 5)x + (2\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0$ के मूलों का योग एवं गुणनफल दोनों 1 से छोटे होने के लिए 'λ' के संभव मानों का समुच्चय है –
(A) $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ (B) (1, 4) (C) $\left[1, \frac{5}{2}\right]$ (D) $\left(1, \frac{5}{2}\right)$

4. यदि $p, q, r, s \in R$ हो, तो समीकरण $(x^2 + px + 3q)(-x^2 + rx + q)(-x^2 + sx - 2q) = 0$ के लिए –
(A) 6 वास्तविक मूल है। (B) कम से कम दो वास्तविक मूल है।
(C) 2 वास्तविक और 4 काल्पनिक मूल है। (D) 4 वास्तविक और 2 काल्पनिक मूल है।

5. यदि चार घात वाली समीकरण के गुणांक, सभी भिन्न–भिन्न है तथा समुच्चय {–9, – 5, 3, 4, 7} के अवयव है, तब समीकरण रखती है–
(A) कम से कम दो वास्तविक मूल
(B) चार वास्तविक मूल, दो संयुग्मी करणी मूल और अन्य दो भी संयुग्मी करणी मूल
(C) चार काल्पनिक मूल
(D) इनमें से कोई नहीं

6. माना $p, q, r, s \in R$, $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + rx + s = 0$ इस प्रकार है कि $2(q + s) = pr$ तब
(A) कम से कम एक समीकरण के मूल वास्तविक है।
(B) या तो दोनों समीकरणों के काल्पनिक मूल है या दोनों समीकरणों के वास्तविक मूल है।
(C) समीकरणों में से एक वास्तविक मूल रखती है और दूसरी समीकरण काल्पनिक मूल रखती है।
(D) कम से कम एक समीकरण के काल्पनिक मूल है।

7. समीकरण $\pi^x = -2x^2 + 6x - 9$ रखती है–
(A) कोई हल नहीं (B) एक हल (C) दो हल (D) अनन्त हल

8. यदि $(\lambda^2 + \lambda - 2)x^2 + (\lambda + 2)x < 1 \ \forall x \in R$ हो, तो 'λ' किस अन्तराल में स्थित है–
(A) $(-2, 1)$ (B) $\left[-2, \frac{2}{5}\right)$ (C) $\left(\frac{2}{5}, 1\right)$ (D) इनमें से कोई नहीं।

9. यदि प्रतिबन्ध C_1 एवं C_2 इस प्रकार परिभाषित है कि $C_1 : b^2 - 4ac \geq 0$ एवं $C_2 : a, -b, c$ समान चिन्ह के हो, तो $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल वास्तविक एवं धनात्मक होंगे यदि
(A) C_1 एवं C_2 दोनों संन्तुष्ट हो। (B) केवल C_2 संन्तुष्ट हो।
(C) केवल C_1 संन्तुष्ट हो। (D) इनमें से कोई नहीं।

10. यदि 'x' वास्तविक हो, तो $\frac{x^2 - x + c}{x^2 + x + 2c}$ सभी वास्तविक मान ग्रहण कर सकता है यदि –
(A) $c \in [0, 6]$ (B) $c \in [-6, 0]$ (C) $c \in (-\infty, -6) \cup (0, \infty)$ (D) $c \in (-6, 0)$

11. यदि द्विघात समीकरण $(2 - x)(x + 1) = p$ के दोनों मूल भिन्न–भिन्न एवं धनात्मक हो, तो 'p' के सभी मानों का समुच्चय होगा–
(A) $(2, \infty)$ (B) $(2, 9/4)$ (C) $(-\infty, -2)$ (D) $(-\infty, \infty)$

12. यदि समीकरण $(a - 1)(x^2 + x + 1)^2 - (a + 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0$ के दोनों मूल वास्तविक तथा भिन्न–भिन्न हो, तो 'a' किस अन्तराल में स्थित है–
(A) $(-2, 2)$ में (B) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ में (C) $(2, \infty)$ में (D) $(-\infty, -2)$

13. समीकरणों $x^3 + 5x^2 + px + q = 0$ एवं $x^3 + 7x^2 + px + r = 0$ के दो मूल उभयनिष्ठ है। यदि प्रत्येक समीकरण का तीसरा मूल क्रमशः x_1 एवं x_2 से प्रदर्शित किया जाता हो, तो क्रमित युग्म (x_1, x_2) है–
(A) $(-5, -7)$ (B) $(1, -1)$ (C) $(-1, 1)$ (D) $(5, 7)$

14. यदि a, b, c वास्तविक है तथा $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ है तब $ab + bc + ca$ अन्तराल में स्थित है–
(A) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ (B) $[0, 2]$ (C) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ (D) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$

भाग-II : संख्यात्मक प्रश्न (NUMERICAL VALUE QUESTIONS)

निर्देश :

- इस खण्ड में प्रत्येक प्रश्न का उत्तर **संख्यात्मक मान** के रूप में है जिसमें दो पूर्णांक अंक तथा दो अंक दशमलव के बाद में है।
- यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान है, तो संख्यात्मक मान को दशमलव के **दो** स्थानों तक **ट्रंकेट/राउंड ऑफ (truncate/round-off)** करें।

1. समीकरण $x(x+1)(x+2)(x+3) = 120$ के वास्तविक मूलों के वर्गों का योग ज्ञात कीजिए।

2. x के सभी वास्तविक मानों का गुणनफल ज्ञात कीजिए जो $(5+2\sqrt{6})^{x^2-3}+(5-2\sqrt{6})^{x^2-3}=10$ सन्तुष्ट करती है।

3. यदि a, b समीकरण $x^2 + px + 1 = 0$ के मूल है तथा c, d समीकरण $x^2 + qx + 1 = 0$ के मूल है तब $(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)/(q^2-p^2)$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. समीकरण $\lambda(x^2 - x) + x + 5 = 0$ के मूल α, β है। यदि λ के दो मान λ_1 एवं λ_2 हैं जिसके लिए मूल α, β सम्बन्ध $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = 4$ द्वारा सम्बन्धित हो, तो $\left(\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{15}\right)$ का मान है–

5. माना समीकरण $(\ell - m)x^2 + \ell x + 1 = 0$ का एक मूल दूसरे मूल का दुगुना हो। यदि ℓ वास्तविक हो और $m \le k$ तो k का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

6. माना α, β समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के मूल है तथा γ, δ समीकरण $x^2 - ax + b - 2 = 0$ के मूल है। यदि $\alpha\beta\gamma\delta = 24$ तथा $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{11}{5}$, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि $a > b > 0$ और $a^3 + b^3 + 27ab = 729$ हो तथा द्विघात समीकरण $ax^2 + bx - 9 = 0$ के मूल α, β $(\alpha < \beta)$ है तब $4\beta - a\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. माना α व β समीकरण $x^2 - 6(5t^2 - 3t + 7)x - 2 = 0$ के मूल है तथा $\alpha > \beta$ है। यदि $a_n = \alpha^n - \beta^n$, $n \ge 1$ के लिए हो तब $\frac{a_{100}-2a_{98}}{a_{99}}$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। (जहाँ $t \in R$)

9. यदि $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ समीकरण $x^4 - Kx^3 + Kx^2 + Lx + M = 0$ के मूल है जहाँ K, L और M वास्तविक संख्याऐं है तब $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ का न्यूनतम मान – n है तब n का मान ज्ञात कीजिए।

10. माना कि $y=\frac{2x}{1+x^2}$, जहाँ x वास्तविक है तब व्यंजक $y^2 + y - 2$ का परिसर [a, b] है तब (b –a) का मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि समीकरण $3x^3 + Px^2 + Qx - 37 = 0$ के मूल समीकरण $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ के प्रत्येक मूल से एक अधिक हो, जहाँ A, B, C, P एवं Q अचर हैं, तो A + B + C का मान है–

12. यदि समीकरण $t^2 - (12x)t - (f(x) + 64x) = 0$ का एक मूल, दूसरे मूल का दोगुना है तो f(x) का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए, जबकि $x \in R$.

13. समीकरण $x^2 + 2(k - 1)x + k + 5 = 0$ का कम से कम एक मूल धनात्मक होने के लिए 'k' के मानों का समुच्चय $(-\infty, -b]$ है तब b का मान ज्ञात कीजिए।

14. 'a' का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $x^2 - (a - 3)x + a = 0$ के मूलों में से कम से कम एक 2 से अधिक है।

15. यदि द्विघात समीकरणों $3x^2 + ax + 1 = 0$ और $2x^2 + bx + 1 = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो व्यंजक $5ab - 2a^2 - 3b^2$ का मान है

16. समीकरणें $3x^2 - 7ax + b = 0$, $x^3 - px^2 + qx = 0$, जहाँ $a, b, p, q \in R - \{0\}$ का एक उभयनिष्ठ मूल है तथा दूसरी समीकरण के दो मूल बराबर है तब $\frac{3q+b}{aq}$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि $x - y$ तथा $y - 2x$ व्यंजक $x^3 - 3x^2y + \lambda xy^2 + \mu y^3$ के दो गुणनखण्ड है तब $\lambda^2 + \mu^2$ का मान है–

भाग - III:एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार (ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE)

1. 'p' के संभावित मान होगें जिसके लिए समीकरण $(p^2 - 3p + 2)x^2 - (p^2 - 5p + 4)x + p - p^2 = 0$ दो से अधिक मूल नहीं रखती है

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

2. यदि 'a' एवं 'b' अशून्य वास्तविक संख्याएँ हो एवं $x^2 + ax + b = 0$ के मूल α, β हो, तो –

(A) $x^2 - (2b - a^2)x + a^2 = 0$ के मूल α^2, β^2 होंगे।

(B) $bx^2 + ax + 1 = 0$ के मूल $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ होंगे।

(C) $bx^2 + (2b - a^2)x + b = 0$ के मूल $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ होंगे।

(D) समीकरण $x^2 + x(a + 2) + 1 + a + b = 0$ के मूल $(\alpha - 1), (\beta - 1)$ होंगे।

3. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ के मूल α, β है एवं समीकरण $Ax^2 + Bx + C = 0, (A \neq 0)$ के मूल δ के किसी अचर मान के लिए $\alpha + \delta, \beta + \delta$ है, तो

(A) $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A} - \frac{b}{a}\right)$ (B) $\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - \frac{B}{A}\right)$

(C) $\frac{b^2 - 4ac}{a^2} = \frac{B^2 - 4AC}{A^2}$ (D) $\frac{b^2 + 4ac}{a^2} = \frac{B^2 + 4AC}{A^2}$

4. यदि समीकरण $4x^2 + 2x - 1 = 0$ का एक मूल 'α' है तब

(A) α का मान $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ बराबर हो सकता है। (B) α का मान $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ हो सकता है।

(C) अन्य मूल $4\alpha^3 - 3\alpha$ है। (D) अन्य मूल $4\alpha^3 + 3\alpha$ है।

5. यदि α, β समीकरण $x^2 + 3x + 1 = 0$ के मूल है तब

(A) $(7 - \alpha)(7 - \beta) = 0$ (B) $(2 - \alpha)(2 - \beta) = 11$

(C) $\frac{\alpha^2}{3\alpha+1} + \frac{\beta^2}{3\beta+1} = -2$ (D) $\left(\frac{\alpha}{1+\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha+1}\right)^2 = 18$

6. यदि समीकरण $x^2 - 32x + c = 0$ के दोनों मूल अभाज्य है तब c के संभावित मान है

(A) 60 (B) 87 (C) 247 (D) 231

7. माना $f(x) = x^2 - a(x+1) - b = 0$, $a, b \in R - \{0\}$, $a + b \neq 0$. यदि α तथा β समीकरण $f(x) = 0$ के मूल है तब $\frac{1}{\alpha^2 - a\alpha} + \frac{1}{\beta^2 - a\beta} - \frac{2}{a+b}$ का मान बराबर है

(A) 0 (B) f(a) + a + b (C) f(b) + a + b (D) $f\left(\frac{a}{2}\right) + \frac{a^2}{4} + a + b$

8. यदि f(x), अग्रग गुणांक 1 के साथ तीन घात का बहुपद इस प्रकार है कि f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9 तब

(A) f(4) = 22 (B) $f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}\right)^3$

(C) $f(x) = x^3$, x के ठीक दो मान सन्तुष्ट होते है। (D) f(x) = 0, अन्तराल (0, 1) में एक मूल रखता है।

9. माना $P(x) = x^{32} - x^{25} + x^{18} - x^{11} + x^4 - x^3 + 1$ निम्न में से कौनसें सही है?

(A) P(x) के वास्तविक मूलों की संख्या 0 है। (B) P(x) = 0 के काल्पनिक मूलों की संख्या 32 है।

(C) P(x) = 0 के ऋणात्मक मूलों की संख्या शून्य है। (D) P(x) + P(–x) = 0 के काल्पनिक मूलों की संख्या 32 है।

10. यदि समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल α, β वास्तविक एवं असमान हो और समीकरण $x^2 - rx + s = 0$ के मूल α^4, β^4 हो, तो समीकरण $x^2 - 4qx + 2q^2 - r = 0$ सदैव रखती है– (दिया गया है $(\alpha \neq -\beta)$

(A) दो वास्तविक मूल (B) दो ऋणात्मक मूल

(C) दो धनात्मक मूल (D) एक धनात्मक मूल और एक ऋणात्मक मूल

11. यदि $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ जहाँ $a, b, c, d \in R$, का एक गुणनखण्ड $x^2 + x + 1$ हो, तो दी गई समीकरण का वास्तविक मूल है–

(A) – d/a (B) d/a (C) (b – a)/a (D) (a – b)/a

12. यदि $-5 + i\beta, -5 + i\gamma$ (जहाँ $\beta^2 \neq \gamma^2$; $\beta, \gamma \in R$ और $i^2 = -1$ है) समीकरण $x^3 + 15x^2 + cx + 860 = 0$, $c \in R$ के मूल है तब

(A) c = 222 (B) सभी तीनों मूल काल्पनिक है।

(C) दो मूल काल्पनिक है परन्तु एक दूसरे के सम्मिश्र संयुग्मी नहीं है।

(D) $-5 + 7i\sqrt{3}, -5 - 7i\sqrt{3}$ काल्पनिक मूल है।

13. माना $f(x) = ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in R$ या $f(x) < 0, \forall x \in R$ निम्न में से कौनसा सही है?

(A) यदि $a + b + c > 0$ तब $f(x) > 0, \forall x \in R$ (B) यदि $a + c < b$ तब $f(x) < 0, \forall x \in R$

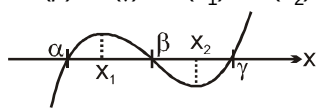
(C) यदि $a + 4c > 2b$ तब $f(x) < 0, \forall x \in R$ (D) $ac > 0$.

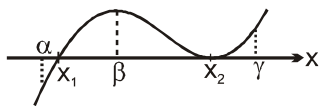
14. माना $x_1 < \alpha < \beta < \gamma < x_4$, $x_1 < x_2 < x_3$. यदि f(x) वास्तविक गुणांकों का घनीय बहुपद इस प्रकार है कि $(f(\alpha))^2 + (f(\beta))^2 + (f(\gamma))^2 = 0$, $f(x_1) f(x_2) < 0$, $f(x_2) f(x_3) < 0$ तथा $f(x_1) f(x_3) > 0$ तब निम्न में से कौनसा सही है?

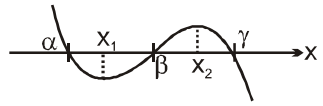
(A) $\alpha \in (x_1, x_2)$, $\beta \in (x_2, x_3)$ and तथा $\gamma \in (x_3, x_4)$ (B) $\alpha \in (x_1, x_3)$, $\beta, \gamma \in (x_3, x_4)$

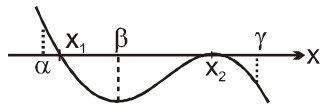
(C) $\alpha, \beta \in (x_1, x_2)$ and तथा $\gamma \in (x_4, \infty)$ (D) $\alpha \in (x_1, x_3)$, $\beta \in (x_2, x_3)$ and तथा $\gamma \in (x_2, x_4)$

15. यदि वास्तविक गुणांकों का घनीय बहुपद f(x), $\alpha < \beta < \gamma$ तथा $x_1 < x_2$ इस प्रकार है कि $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ तब y = f(x) का संभावित आरेख है (माना कि y-अक्ष उर्ध्वाधर है)

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

16. माना कि $f(x) = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-4}$ हो, तो $f(x) = 0$ के लिए –

(A) ठीक एक वास्तविक मूल (2, 3) में है। (B) ठीक एक वास्तविक मूल (3, 4) में है।

(C) 3 भिन्न-भिन्न मूल (D) कम से कम एक ऋणात्मक मूल

17. यदि द्विघात समीकरणों $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in R, a \neq 0)$ एवं $x^2 + 4x + 5 = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो a, b, c द्वारा सन्तुष्ट होने वाला प्रतिबन्ध है –

(A) $a > b > c$ (B) $a < b < c$

(C) $a = k; b = 4k; c = 5k$ $(k \in R, k \neq 0)$ (D) $b^2 - 4ac$ ऋणात्मक है।

18. यदि द्विघात समीकरणों $x^2 + abx + c = 0$ एवं $x^2 + acx + b = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो इनके अन्य मूलों से बना द्विघात समीकरण है–

(A) $x^2 + a(b + c)x - a^2bc = 0$ (B) $x^2 - a(b + c)x + a^2bc = 0$

(C) $a(b + c)x^2 - (b + c)x + abc = 0$ (D) $a(b + c)x^2 + (b + c)x - abc = 0$

19. निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :

S_1 : समीकरण $2x^2 + 3x + 1 = 0$ के मूल अपरिमेय है।

S_2 : यदि $a < b < c < d$ हो, तो समीकरण $(x - a)(x - c) + 2(x - b)(x - d) = 0$ के मूल वास्तविक एवं भिन्न–भिन्न हैं।

S_3 : यदि $x^2 + 3x + 5 = 0$ एवं $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल उभयनिष्ठ एवं $a, b, c \in N$ हो, तो $(a + b + c)$ का न्यूनतम मान 10 है।

S_4 : चतुर्थ घात व्यंजक $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x + 2$ का $x = 2 + \sqrt{3}$ पर मान 1 है।

निम्न में से कौनसा सही है?

(A) S_2 तथा S_4 सत्य है। (B) S_1 तथा S_3 गलत है। (C) S_1 तथा S_2 सत्य है। (D) S_3 तथा S_4 गलत है।

20. यदि समीकरणों $x^2 + ax + 12 = 0$, $x^2 + bx + 15 = 0$ एवं $x^2 + (a + b)x + 36 = 0$ में एक धनात्मक मूल उभयनिष्ठ हो निम्न में से कौनसे सही है–

(A) $ab = 56$ (B) उभयनिष्ट धनात्मक मूल 3 है

(C) जो मूल उभयनिष्ट नहीं है उनका योगफल 21 है (D) $a + b = 15$.

21. यदि $x^2 + \lambda x + 1 = 0$, $\lambda \in (-2, 2)$ तथा $4x^3 + 3x + 2c = 0$ का उभयनिष्ठ मूल है, तो $c + \lambda$ हो सकता है

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{3}{2}$

22. माना द्विघात समीकरण $p(x) = 0$ (जहाँ $p(x) = x^2 + bx + c$) तथा समीकरण $p(p(p(x))) = 0$ में एक मूल उभयनिष्ठ है, तो निम्नलिखित मे मे से कौनसा/कौनसें विकल्प सही है–

(A) If $b, c \in R$, तब $b^2 - 4c \geq 0$

(B) If $P(0) = 1$, तब $p(1) = 0$

(C) समीकरण $p(p(p(x))) = 0$ तथा $p(p(p(p(p(x))))) = 0$ मे कम से कम दो मूल उभयनिष्ठ है।

(D) समीकरण $p(p(p(p(p(p(x)))))) = 0$ का एक मूल 0 है।

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

अनुच्छेद # 1

यदि $x, y \in R$ हो तो किसी प्रश्न को सीधे ही चरम मानों को रखकर हल किया जा सकता है

e.g. (i) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 0$ संभव होगा केवल $x = 3$ और $y = 2$ के लिए

(ii) यदि $x \geq 3, y \geq 2$ और $xy \leq 6$ तब $x = 3$ तथा $y = 2$

1. व्यंजक $x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 7$ का न्यूनतम मान है–

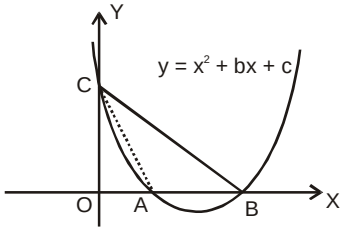
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

2. माना $P(x) = 4x^2 + 6x + 4$ और $Q(y) = 4y^2 - 12y + 25$ है यदि x, y समीकरण $P(x).Q(y) = 28$ के सन्तुष्ट करता है तब $11y - 26x$ का मान ज्ञात कीजिए।

(A) 6 (B) 36 (C) 8 (D) 42

अनुच्छेद # 2

चित्रानुसार ΔOBC समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है जबकि AC माध्यिका है, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



3. $y = 0$ के मूल है –

(A) {2, 1} (B) {4, 2} (C) {1, 1/2} (D) {8, 4}

4. वह समीकरण जिसके मूल $(\alpha + \beta)$ एवं $(\alpha - \beta)$ हो, जहाँ α, β $(\alpha > \beta)$ पिछले प्रश्न से प्राप्त मूल है, होगी–

(A) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (C) $4x^2 - 8x + 3 = 0$ (D) $x^2 - 16x + 48 = 0$

अनुच्छेद # 3

माना $x^4 - \lambda x^2 + 9 = 0$ एक दी गई समीकरण है। इसे $x^2 = t$ प्रतिस्थापित कर हल किया जा सकता है। इस प्रकार की समीकरण को क्षद्म द्विघात समीकरण (pseudo quadratic equations) कहते है।

5. यदि समीकरण के चार वास्तविक एवं भिन्न–भिन्न मूल हो, तो 'λ' निम्न अन्तराल में है –

(A) $(-\infty, -6) \cup (6, \infty)$ (B) $(0, \infty)$ (C) $(6, \infty)$ (D) $(-\infty, -6)$

6. यदि समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं हो, तो 'λ' निम्न अन्तराल में है –

(A) $(-\infty, 0)$ (B) $(-\infty, 6)$ (C) $(6, \infty)$ (D) $(0, \infty)$

7. यदि समीकरण के केवल दो वास्तविक मूल हो, तो 'λ' के मानों का समुच्चय है –

(A) $(-\infty, -6)$ (B) $(-6, 6)$ (C) {6} (D) ϕ

अनुच्छेद # 4

समीकरण $ax^{2m} + bx^{2m-1} + cx^{2m-2} + \ldots\ldots + kx^m + \ldots\ldots + cx^2 + bx + a = 0, \quad (a \neq 0) \rightarrow$ (I) के प्रकार को हल करने लिए, x^m से विभाजित करके पदों को व्यवस्थित करते है

$$a\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + b\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + c\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \ldots\ldots + k = 0$$

$t = x + \frac{1}{x}$ या $t = x - \frac{1}{x}$ रूपान्तरण समीकरण की सहायता से समीकरण की घात कम की जाती है।

8. समीकरण $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ के मूल है

(A) $2 \pm \sqrt{3}\ , 3 \pm \sqrt{2}$ (B) $2 \pm \sqrt{3}\ , 3 \pm 2\sqrt{2}$ (C) $3 \pm \sqrt{2}\ , 3 \pm 2\sqrt{2}$ (D) $8 \pm \sqrt{3}\ , 3 \pm \sqrt{2}$

9. समीकरण $x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 5x - 1 = 0$ के मूल है

(A) $1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (B) $1, \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{3 \pm i}{2}$

(C) $1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{3 \pm i}{2}$ (D) $1, \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

10. समीकरण $x^6 - 4x^4 + 4x^2 - 1 = 0$ के मूल है

(A) $\pm 1, \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (B) $\pm 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}$

(C) $\pm 1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (D) $\pm 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}$

Exercise-3

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -**

1. माना p तथा q ऐसी वास्तविक संख्याएँ हैं जिनके लिए $p \neq 0$, $p^3 \neq q$ तथा $p^3 \neq -q$. यदि $\alpha + \beta = -p$ तथा $\alpha^3 + \beta^3 = q$ को सन्तुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्याएँ α तथा β हैं जो शून्येतर (non zero) हैं तो एक द्विघातीय समीकरण जिसके मूल $\frac{\alpha}{\beta}$ तथा $\frac{\beta}{\alpha}$ निम्न है **[IIT-JEE 2010, Paper-1, (3, –1)/ 84]**

(A) $(p^3 + q)x^2 - (p^3 + 2q)x + (p^3 + q) = 0$ (B) $(p^3 + q)x^2 - (p^3 - 2q)x + (p^3 + q) = 0$

(C) $(p^3 - q)x^2 - (5p^3 - 2q)x + (p^3 - q) = 0$ (D) $(p^3 - q)x^2 - (5p^3 + 2q)x + (p^3 - q) = 0$

2. मान लो समीकरण $x^2 - 6x - 2 = 0$ के मूल α तथा β है, जहाँ $\alpha > \beta$ है। यदि $n \geq 1$ के लिये $a_n = \alpha^n - \beta^n$ है, तो $\frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9}$ का मान है– **[IIT-JEE 2011, Paper-1, (3, –1), 80]**

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

3. b के किस मान के लिये समीकरणों **[IIT-JEE 2011, Paper-2, (3, –1), 80]**

$x^2 + bx - 1 = 0$

$x^2 + x + b = 0$

का एक मूल उभयनिष्ठ (common) होगा

(A) $-\sqrt{2}$ (B) $-i\sqrt{3}$ (C) $i\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{2}$

4. वास्तविक गुणांकों वाले द्विघात समीकरण (quadratic equation) $p(x) = 0$ के मूल पूर्णतया काल्पनिक है। तब समीकरण $p(p(x)) = 0$ के **[JEE (Advanced) 2014, Paper-2, (3, –1)/60]**

(A) केवल पूर्णतया काल्पनिक मूल हैं। (B) सभी मूल वास्तविक हैं।

(C) दो वास्तविक और दो पूर्णतया काल्पनिक मूल हैं। (D) मूल न तो वास्तविक हैं न ही पूर्णतया काल्पनिक हैं।

5*. माना कि S उन सभी शून्येतर (non-zero) वास्तविक संख्याओं α का समुच्चय (set) है जिनके लिए द्विघाती समीकरण $\alpha x^2 - x + \alpha = 0$ के दो विभिन्न वास्तविक मूल x_1 और x_2 असमिका $|x_1 - x_2| < 1$ को संतुष्ट करते है। निम्नलिखित अंतरालों में से कौन सा (से) समुच्चय S के उपसमुच्चय है (हैं) ? **[JEE (Advanced) 2015, P-2 (4, –2)/ 80]**

(A) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (B) $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$ (C) $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ (D) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\right)$

6. माना कि $-\frac{\pi}{6} < \theta < -\frac{\pi}{12}$ हैं। मान लीजिये कि α_1 और β_1 समीकरण $x^2 - 2x \sec\theta + 1 = 0$ के मूल (roots) हैं और α_2 और β_2 समीकरण $x^2 + 2x \tan\theta - 1 = 0$. के मूल हैं। यदि $\alpha_1 > \beta_1$ और $\alpha_2 > \beta_2$, हैं, तब $\alpha_1 + \beta_2$ का मान है–

[JEE (Advanced) 2016, Paper-1, (3, –1)/62]

(A) $2(\sec\theta - \tan\theta)$ (B) $2\sec\theta$ (C) $-2\tan\theta$ (D) 0

अनुच्छेद : (प्रश्न सं. 7 व 8)

माना कि p, q पूर्णांक है एवम् α, β समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ के मूल है, जहां $\alpha \neq \beta$ है। n = 0,1,2,...., के लिये माना कि $a_n = p\alpha^n + q\beta^n$ है।

तथ्य : यदि a एवम b परिमेय सँख्यायें (rational numbers) हैं एवम् $a + b\sqrt{5} = 0$ है, तब a = 0 = b है।

7. a_{12} = **[JEE(Advanced) 2017, Paper-2,(3, 0)/61]**

(A) $a_{11} + 2a_{10}$ (B) $2a_{11} + a_{10}$ (C) $a_{11} - a_{10}$ (D) $a_{11} + a_{10}$

8. यदि $a_4 = 28$ है, तब $p + 2q$ = **[JEE(Advanced) 2017, Paper-2,(3, 0)/61]**

(A) 14 (B) 7 (C) 21 (D) 12

9. माना कि $x^2 - x - 1 = 0$ के मूल (roots) α और β हैं, जहाँ $\alpha > \beta$ है। सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिए निम्न को परिभाषित किया गया है **[JEE(Advanced) 2019, Paper-1,(4, –1)/62]**

$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $n \geq 1$

$b_1 = 1$ और $b_n = a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, $n \geq 2$

तब निम्न में से कौनसा (से) विकल्प सही है (हैं)-

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{10}{89}$ (2) प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए, $b_n = \alpha^n + \beta^n$

(3) प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए, $a_1 + a_2 + ...a_n = a_{n+2} - 1$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = \frac{8}{89}$

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. सचिन तथा राहुल एक द्विघात समीकरण को हल करने का प्रयास करते हैं। सचिन ने अचर पद लिखने में गलती की तथा मूल (4, 3) पाए। राहुल ने x का गुणांक गलत लिखा तथा मूल (3, 2) पाए। समीकरण के सही मूल है :

[AIEEE- 2011, II, (4, –1), 120]

(1) 6, 1 (2) 4, 3 (3) –6 , –1 (4) –4 , –3

2. माना $a \neq a_1 \neq 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ तथा $p(x) = f(x) - g(x)$. यदि केवल $x = -1$ के लिए $p(x) = 0$ तथा $p(-2) = 2$ है, तो $p(2)$ का मान है : **[AIEEE- 2011, II, (4, –1), 120]**

(1) 3 (2) 9 (3) 6 (4) 18

3. समीकरण $e^{\sin x} - e^{-\sin x} - 4 = 0$ के : **[AIEEE- 2012 (4, –1), 120]**

(1) अनन्त वास्तविक मूल हैं। (2) कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।

(3) मात्र एक वास्तविक मूल है। (4) मात्र चार वास्तविक मूल हैं।

4. यदि समीकरणों $x^2 + 2x + 3 = 0$ तथा $ax^2 + bx + c = 0$, $a,b,c \in R$, का एक मूल उभयनिष्ठ है, तो a : b : c है–

(1) 1 : 2 : 3 (2) 3 : 2 : 1 (3) 1 : 3 : 2 (4) 3 : 1 : 2

[AIEEE - 2013, (4, –1),360]

5. यदि $a \in R$ तथा समीकरण $-3(x - [x])^2 + 2(x - [x]) + a^2 = 0$ (जहाँ [x] उस बड़े से पूर्णांक को दर्शाता है जो $\leq x$ है) का कोई पूर्णांकीय हल नही है, तो a के सभी संभव मान जिस अंतराल में स्थित हैं, वह है–

[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]

(1) (–2, –1) (2) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ (3) $(-1, 0) \cup (0, 1)$ (4) (1, 2)

6. माना α तथा β समीकरण $px^2 + qx + r = 0$, $p \neq 0$ के मूल है। यदि p, q ,r समान्तर श्रेढ़ी में हैं तथा $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 4$ है, तो $|\alpha - \beta|$ का मान है– **[JEE(Main) 2014, (4, – 1), 120]**

(1) $\frac{\sqrt{34}}{9}$ (2) $\frac{2\sqrt{13}}{9}$ (3) $\frac{\sqrt{61}}{9}$ (4) $\frac{2\sqrt{17}}{9}$

7. माना α तथा β द्विघात समीकरण $x^2 - 6x - 2 = 0$ के मूल हैं। यदि $n \geq 1$ के लिए $a_n = \alpha^n - \beta^n$ है, तो $\frac{a_{10} - 2a_8}{2a_9}$ का मान है : **[JEE(Main) 2015, (4, – 1), 120]**

(1) 6 (2) – 6 (3) 3 (4) –3

8. α के उन सभी संभावित धन पूर्णांक मानों की संख्या जिनके लिए द्विघातीय समीकरण $6x^2 - 11x + \alpha = 0$ के मूल परिमेय संख्याएँ हैं, है– **[JEE(Main) 2019, Online (09-01-19),P-2 (4, – 1), 120]**

(1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 2

9. यदि x में द्विघात समीकरण $3m^2x^2 + m(m - 4)x + 2 = 0$ के मूलों का अनुपात λ है, तो m का वह न्यूनतम मान जिसके लिए $\lambda + \frac{1}{\lambda} = 1$ है, है– **[JEE(Main) 2019, Online (12-01-19),P-1 (4, – 1), 120]**

(1) $-2 + \sqrt{2}$ (2) $4 - 3\sqrt{2}$ (3) $2 - \sqrt{3}$ (4) $4 - 2\sqrt{3}$

10. यदि समीकरण $x^2 - 2x + 2 = 0$ के मूल α तथा β हैं, तो n का न्यूनतम मान, जिसके लिए $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 1$ है, **[JEE(Main) 2019, Online (08-04-19),P-1 (4, – 1), 120]**

(1) 3 (2) 4 (3) 2 (4) 5

11. यदि समीकरण $375x^2 - 25x - 2 = 0$ के मूल α तथा β है, तो $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} \alpha^r$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} \beta^r$ बराबर है : **[JEE(Main) 2019, Online (12-04-19),P-1 (4, – 1), 120]**

(1) $\frac{29}{358}$ (2) $\frac{21}{346}$ (3) $\frac{7}{116}$ (4) $\frac{1}{12}$

12. यदि एक भिन्न पदों वाली गुणोंत्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद α, β तथा γ इस प्रकार हैं कि समीकरणों $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ तथा $x^2 + x - 1 = 0$ का एक मूल समान है, तो $\alpha(\beta + \gamma)$ बराबर है : **[JEE(Main) 2019, Online (12-04-19),P-2 (4, – 1), 120]**

(1) 0 (2) $\alpha\gamma$ (3) $\beta\gamma$ (4) $\alpha\beta$

13. माना α तथा β समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ के मूल है। यदि $p_k = (\alpha)^k + (\beta)^k$, $k \geq 1$, तो निम्न में से कौन सा एक कथन सत्य नहीं है? **[JEE(Main) 2020, Online (07-01-20),P-2 (4, –1), 120]**

(1) $p_5 = p_2.p_3$ (2) $(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) = 26$

(3) $p_3 = p_5 - p_4$ (4) $p_5 = 11$

14. समीकरण $e^{4x} + e^{3x} - 4e^{2x} + e^x + 1 = 0$ के वास्तविक मूलों की संख्या है– **[JEE(Main) 2020, Online (09-01-20),P-1 (4, –1), 120]**

(1) 3 (2) 1 (3) 4 (4) 2

15. माना $a, b \in R$, $a \neq 0$ इस प्रकार है कि समीकरण $ax^2 - 2bx + 5 = 0$ का α पुनरावृत्त मूल है, जो समीकरण $x^2 - 2bx - 10 = 0$ का भी एक मूल है। यदि β इस समीकरण का दूसरा मूल है, तो $\alpha^2 + \beta^2$ बराबर है : **[JEE(Main) 2020, Online (09-01-20),P-2 (4, –1), 120]**

(1) 25 (2) 26 (3) 24 (4) 28

Answers

EXERCISE - 1

PART - I

खण्ड (A) :

A-1. a = 2; x के किसी भी वास्तविक मान के लिए नहीं **A-2.** (i) $-\frac{7}{4}$ (ii) $-\frac{7}{8}$

A-3. (i) $ac\,x^2 + b(a + c)\,x + (a + c)^2 = 0$ (ii) $a^2x^2 + (2ac - 4a^2 - b^2)\,x + 2b^2 + (c - 2a)^2 = 0$

A-4. $3x^2 - 19x + 3 = 0$. **A-5.** 8, 3

A-6. (i) 4 (ii) 72 (iii) 2

A-7. $\gamma = \alpha^2\beta$ तथा $\delta = \alpha\beta^2$ या $\gamma = \alpha\beta^2$ तथा $\delta = \alpha^2\beta$ **A-10.** 2 **A-11.** 11

खण्ड (B) :

B-2. $-\frac{(r+1)^3}{r^2}$

B-3. (i) मूल है $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-5}{3}$, $\lambda = 45$ या $\frac{-1}{2}, -1, \frac{25}{12}$, $\lambda = -25$.

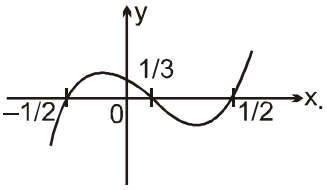
(ii) मूल है $\frac{-4}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{-5}{3}$, $\lambda = 121$

B-4. $x^3 - 15x^2 + 67x - 77 = 0$. **B-5.** – 3 **B-6.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -6$

खण्ड (C) :

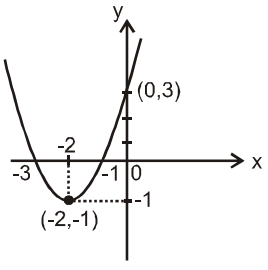
C-1. (– 4, 7) **C-3.** $3 \pm 2\sqrt{2}$

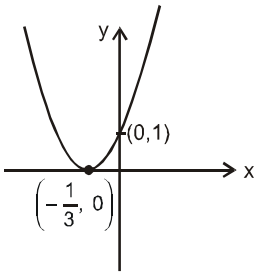
C-7. (i) $4, -2 \pm i5\sqrt{3}$ (ii) 3 or 4 **C-8.** $-1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{-1}$

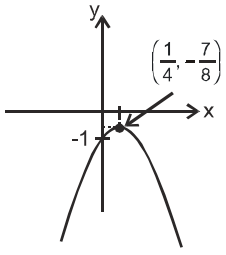
C-9. 

दो धनात्मक मूल है।

खण्ड (D) :

D-1. (i) 

(ii) 

(iii) 

D-2. (i) $(-\infty, 4]$ (ii) [2, 6] (iii) [3, 6)

D-3. (i) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ (ii) $\left(-\infty, \frac{-4}{5}\right] \cup (1, \infty)$ **D-4.** $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

D-5. (i) $a > 1$ (ii) $a \in \phi$.

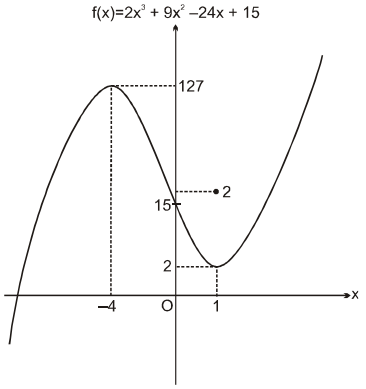
खण्ड (E) :

E-2. $K \in (-2, 3)$ **E-3.** $a \in (-2, 2)$ **E-4.** $a \in (1, 5) - \{3\}$ **E-5.** $6 < K < 6.75$

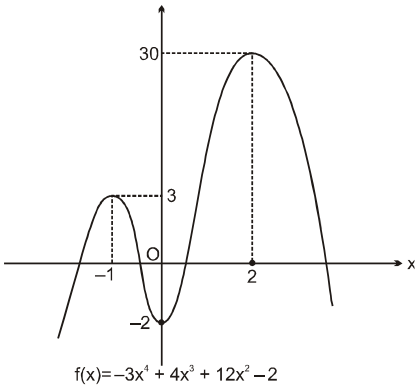
खण्ड (F) :

F-2. a = 0, 24 **F-3.** 3

F-5. (i)



(ii)



F-6. (i) $k \in [-2,2]$ (ii) $k \in (-\infty,-2) \cup (2, \infty)$

PART - II

खण्ड (A) :

A-1. (B) **A-2.** (C) **A-3.** (A) **A-4.** (C) **A-5.** (A)

खण्ड (B) :

B-1. (C) **B-2.** (C) **B-3.** (B) **B-4.** (A) **B-5.** (C)

खण्ड (C) :

C-1. (B) **C-2.** (C) **C-3.** (A) **C-4.** (A) **C-5.** (A) **C-6.** (C)

खण्ड (D) :

D-1. (B) **D-2.** (B) **D-3.** (B) **D-4.** (B) **D-5.** (A) **D-6.** (C) **D-7.** (C)
D-8. (D)

खण्ड (E) :

E-1. (D) **E-2.** (B) **E-3.** (D) **E-4.** (D)

खण्ड (F) :

F-1. (A) **F-2.** (C) **F-3.** (A) **F-4.** (C) **F-5.** (D)

PART – III

1. (A) → (r), (B) → (p), (C) → (q), (D) → (s) **2.** (A → r); (B → p,q,s); (C → s); (D → p,q,r)

3. (A) q, s, t (B) p, t (C) r (D) q, s.

EXERCISE - 2

PART - I

1.	(B)	**2.**	(B)	**3.**	(D)	**4.**	(B)	**5.**	(A)	**6.**	(A)	**7.**	(A)
8.	(B)	**9.**	(A)	**10.**	(D)	**11.**	(B)	**12.**	(B)	**13.**	(A)	**14.**	(C)

PART - II

1.	29.00	**2.**	08.00	**3.**	01.00	**4.**	68.13	**5.**	01.12	**6.**	13.20	**7.**	13.00
8.	39.30	**9.**	01.00	**10.**	02.25	**11.**	11.33	**12.**	32.00	**13.**	01.00	**14.**	09.00
15.	01.00	**16.**	03.50	**17.**	08.12								

PART - III

1. (ACD) **2.** (BCD) **3.** (BC) **4.** (AC) **5.** (BCD **6.** (BC) **7.** (ABD)

8. (ABCD) **9.** (ABCD) **10.** (AD) **11.** (AD) **12.** (AD) **13.** (ABD) **14.** (AD)

15. (AC) **16.** (AB) **17.** (CD) **18.** (BD) **19**. (AB) **20.** (ABC) **21.** (AB)

22. (ABCD)

PART - IV

1. (C) **2.** (B) **3.** (A) **4.** (A) **5.** (C) **6.** (B) **7.** (D)

8. (B) **9.** (A) **10.** (C)

EXERCISE - 3

PART - I

1. (B) **2.** (C) **3.** (B) **4.** (D) **5.** (A, D) **6.** (C)

7. (D) **8.** (D) **9*.** (A,B,C)

PART - II

1. (1) **2.** (4) **3.** (2) **4.** (1) **5.** (3) **6.** (2) **7.** (3)

8. (1) **9.** (2) **10.** (2) **11.** (1) **12.** (3) **13.** (1) **14.** (2)

15. (1)

High Level Problems (HLP)

1. सम्बन्ध $\alpha_1^3\left(\frac{\prod_{i=2}^{n}(x-\alpha_i)}{\prod_{i=2}^{n}(\alpha_1-\alpha_i)}\right)+\sum_{j=2}^{n-1}\left(\left(\frac{\prod_{i=1}^{j-1}(x-\alpha_i)\prod_{i=j+1}^{n}(x-\alpha_i)}{\prod_{i=1}^{j-1}(\alpha_j-\alpha_i)\prod_{i=j+1}^{n}(\alpha_j-\alpha_i)}\right)\alpha_j^3\right)+\left(\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x-\alpha_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)}\right)\alpha_n^3-x^3=0$ को सन्तुष्ट करने वाले मानों की संख्या है। (जहाँ $n \geq 5$)

.

2. यदि $a + b > c$ एवं $|a - b| < c$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2x^2 + (b^2 + a^2 - c^2)x + b^2 = 0$ के मूल वास्तविक नहीं है। (जहाँ a, b, c धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं)

3. असमिका $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x-4}<\frac{1}{30}$ को हल कीजिए।

4. यदि तीन असमान वास्तविक संख्याएँ a, b, c इस प्रकार है कि ये एक गुणोत्तर श्रेढ़ी में है (अर्थात् $b^2 = ac$), तथा यदि $a + b + c = x\,b$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $x < -1$ या $x > 3$.

5. यदि $V_n = \alpha^n + \beta^n$, जहाँ α, β समीकरण $x^2 + x - 1 = 0$ के मूल है तब सिद्ध कीजिए $V_n + V_{n-3} = 2\,V_{n-2}$ अतः V_7 ज्ञात कीजिए– (n पूर्ण संख्या है।)

6. अन्तराल [1, 2] में 'x' के सभी मानों के लिए $f(x) \equiv x^2 - (m - 3)x + m > 0$ होने के लिए 'm' के सभी मान ज्ञात कीजिए।

7. 'a' के वे मान ज्ञात कीजिये जिनके लिये द्विघात व्यंजक $ax^2 + (a - 2)x - 2$, 'x' के ठीक दो पूर्णांक मानों के लिये ऋणात्मक हो।

8. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$ के वास्तविक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. यदि समीकरण $x^2 - 34x + 1 = 0$ के मूल α, β हो, तो $\sqrt[4]{\alpha}-\sqrt[4]{\beta}$ ज्ञात कीजिए, $\sqrt[4]{.}$ जहाँ मुख्य मान को प्रदर्शित करता है।

10. 'a' के सभी मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण $\left(x^2+x+2\right)^2-(a-3)\left(x^2+x+2\right)\left(x^2+x+1\right)+(a-4)\left(x^2+x+1\right)^2=0$ का कम से कम एक वास्तविक मूल विद्यमान हो।

11. दर्शाइये कि द्विघात समीकरण $x^2 + 7x - 14(q^2 + 1) = 0$ जहाँ q एक पूर्णांक है, के पूर्णांक मूल नहीं है।

12. 'a' के पूर्णांक मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण $x^4-\left(a^2-5a+6\right)x^2-\left(a^2-3a+2\right)=0$ केवल वास्तविक मूल रखता है।

13. यदि $\alpha, \beta; \beta, \gamma$ तथा γ, α समीकरण $a_ix^2+b_ix+c_i=0$; i = 1, 2, 3 के मूल है, तो प्रदर्शित कीजिए कि

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+\alpha\beta\gamma=\pm\left\{\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{a_i-b_i+c_i}{a_i}\right)\right\}^{1/2}-1$$

14. माना कि $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$ और
$p = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$
$q = a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1 + a_2a_4 + a_4a_6 + a_6a_2$
$r = a_1a_3a_5 + a_2a_4a_6$,
तो प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $2x^3 - px^2 + qx - r = 0$ के मूल वास्तविक हैं।

15. यदि $x^2 + 2bx + c = 0$ के मूल $\beta + \cos^2\alpha$, $\beta + \sin^2\alpha$ है, तथा $X^2 + 2BX + C = 0$ के मूल $\gamma + \cos^4\alpha$, $\gamma + \sin^4\alpha$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $b^2 - B^2 = c - C$.

16. 'a' के मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए यदि $(x^2 + x)^2 + a(x^2 + x) + 4 = 0$ के
(i) चारों मूल वास्तविक एवं भिन्न–भिन्न हैं।
(ii) चार मूल होंगे जिनमें से केवल दो मूल वास्तविक एवं भिन्न–भिन्न हैं।
(iii) सभी चारों मूल काल्पनिक हैं।
(iv) चार वास्तविक मूल हैं जिनमें से केवल दो समान है।

17. $f(x) = x^2 + bx + c$, जहाँ $b,c \in R$, यदि $f(x)$ दोनों $x^4 + 6x^2 + 25$ और $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ का गुणनखण्ड हो, तो $f(x)$ ज्ञात कीजिए।

18. माना $ax^4 + bx^3 + x^2 + (3-a)x + 3 = 0$ और $x^2 + (2-a)x + 3 = 0$ के उभयनिष्ठ मूल है यदि $a \in (-1,5)$ तब $|a+12b|$ का मान है।

19. कितने द्विघात समीकरण इसप्रकार है कि उनके मूलों का वर्ग करने पर परिवर्तित नहीं होती है–

20. माना $P(x) = x^5 + x^2 + 1$ के शून्य $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ है और $Q(x) = x^2 - 2$, तब ज्ञात कीजिए
(i) $\prod_{i=1}^{5} Q(\alpha_i)$ (ii) $\sum_{i=1}^{5} Q(\alpha_i)$ (iii) $\sum_{1 \le i < j \le 5} \sum Q(\alpha_i)\, Q(\alpha_j)$ (iv) $\sum_{i=1}^{5} Q^2(\alpha_i)$

21. यदि a, b, c अशून्य, असमान परिमेय संख्याएँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि समीकरण $(abc^2)x^2 + 3a^2cx + b^2cx - 6a^2 - ab + 2b^2 = 0$ के मूल परिमेय है।

22. यदि a, b, c त्रिभुज की भुजाएँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि समीकरण $x^2 - (a^2 + b^2 + c^2)x + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 0$ के काल्पनिक मूल है।

23. यदि $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल 'x_1' तथा $-ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल 'x_2' जहाँ $0 < x_1 < x_2$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $ax^2 + 2bx + 2c = 0$ का एक मूल 'x_3' इस प्रकार होगा कि $0 < x_1 < x_3 < x_2$।

24. समीकरण $x^4 - 4x - 1 = 0$ के धनात्मक वास्तविक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

25. यदि $(1 + k)\tan^2x - 4\tan x - 1 + k = 0$ के वास्तविक मूल $\tan x_1$ और $\tan x_2$ है, जहाँ $\tan x_1 \neq \tan x_2$, तब k का मान ज्ञात कीजिए।

26. माना Δ^2 एक विवेचक है तथा समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β है तब समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $2a\alpha + \Delta$ और $2a\beta - \Delta$ है–

27. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\pi^e}{x-e} + \frac{e^\pi}{x-\pi} + \frac{\pi^\pi + e^e}{x-\pi-e} = 0$ का एक वास्तविक मूल (e, π) में और अन्य $(\pi, \pi + e)$ में है।

28. यदि α, β^2 पूर्णांक है, β^2, 3 का अशून्य गुणज है और समीकरण $x^3 + ax^2 + bx - 316 = 0$, $a, b, \beta \in R$ के मूल $\alpha + i\beta$, -2α है तब a, b ज्ञात कीजिए।

29. बहुपद $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ के गुणांक पूर्णांक है $(a > 0)$ यदि चार भिन्न–भिन्न पूर्णांक $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4)$ इस प्रकार है कि $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3) = f(\alpha_4) = 5$ और समीकरण $f(x) = 9$ के पूर्णांक मूल है तब ज्ञात कीजिए–

(i) $f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4}\right)$ (ii) $f'\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4}\right)$

(iii) $[\alpha_2, \alpha_3]$ मे $f(x)$ का परिसर (iv) $f(x) = 9$ के सबसे बडे मूल और सबसे छोटे मूल का अन्तर

30. यदि x तथा y दोनों अऋणात्मक पूर्णांक मान है जिसके लिए $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$ तब x के सभी संभावित मानों का योगफल ज्ञात कीजिए।

31. λ के वास्तविक मानों का एक समुच्चय ज्ञात करे जिसके लिये समीकरण $x^2 + 2(a + b + c)x + 3\lambda(ab + bc + ca)$ के मूल वास्तविक हो, जहाँ a, b, c भिन्न वास्तविक संख्याऐं है (जहाँ a, b, c एक विषमबाहु त्रिभुज की भुजाओं को निरूपपित करता है।)

(A) $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ (B) $\left(\frac{4}{3}, \infty\right)$ (C) $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ (D) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$

32. माना $P(x) = x^2 + bx + c (b, c \in R)$, तब निम्न मे से कौनसा कथन का अर्थ $P(P(x)) = 0$ का कम से कम एक ऋणात्मक मूल रखता है।

(A) $P(x) = 0$ के मूल विपरीत चिन्ह के है। (B) $P(x) = 0$ के दोनों मूल धनात्मक है।

(C) $P(x) = 0$ दोनों मूल ऋणात्मक है। (D) $\left(c - \frac{b^2}{4}\right)^2 + b\left(c - \frac{b^2}{4}\right) + c < 0$ और $b > 0$

Answers

1. अनन्त **3.** $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, 3) \cup (4, 6) \cup (7, \infty)$ **5.** –29

6. $(-\infty, 10)$ **7.** $[1, 2)$ **8.** 0 **9.** ± 2

10. $5 < a \leq \frac{19}{3}$ **12.** $a \in \{1, 2\}$

16. (i) $a \in (-\infty, -4)$ (ii) $a \in \left(\frac{65}{4}, \infty\right)$ (iii) $a \in \left(-4, \frac{65}{4}\right)$ (iv) $a \in \phi$

17. $x^2 - 2x + 5$ **18.** 3 **19.** 4

20. (i) – 23 (ii) – 10 (iii) 40 (iv) 20 **24.** 1 **25.** $\left(-\sqrt{5}, -1\right) \cup \left(-1, \sqrt{5}\right)$

26. $x^2 + 2b\,x + b^2 = 0$ or $x^2 + 2bx - 3b^2 + 16\,ac = 0$ **28.** $a = 0,\ b = 63$

29. (i) 9 (ii) 0 (iii) [5, 9] (iv) $2\sqrt{5}$ **30.** 14 **31.** (A) **32.** (AD)