द्विघात समीकरण (QUADRATIC EQUATIONS)

A man is like a fraction whose numerator is what he is and whose denominator is what he thinks of himself. The larger the denominator the smaller the fraction.........
Tolstoy, Count Lev Nikolgevich

1. बहुपद (Polynomial) :

कोई फलन f इस प्रकार परिभाषित हो कि $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1 x + a_0$
जहाँ $a_0, a_1, a_2,...,a_n \in R$ तो यह फलन f, वास्तविक गुणांको वाला n घात का बहुपद कहलाता है जबकि $a_n \neq 0, n \in W$
यदि $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in C$ हो, तो यह सम्मिश्र गुणांकों वाला बहुपद कहलाता है।

2. द्विघात बहुपद एवं द्विघात समीकरण (Quadratic polynomial & Quadratic equation):

दो घात का एक बहुपद द्विघात बहुपद कहलाता है। कोई समीकरण $f(x) = 0$, जहाँ f द्विघात बहुपद है, द्विघात समीकरण कहलाती है। द्विघात समीकरण का व्यापक रूप निम्न है–

$ax^2 + bx + c = 0$ ....(i)

जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ है जबकि $a \neq 0$. यदि $a = 0$ हो, तो समीकरण (i) रैखिक समीकरण बन जाता है।

3. समीकरण एवं सर्वसमिका में अन्तर : (Difference between equation & identity) :

यदि कोई कथन चर के सभी मानों के लिए सत्य हो, तो कथन सर्वसमिका कहलाता है। यदि कथन चर के कुछ ही मानों के लिए सत्य हो, तो कथन समीकरण कहलाता है।

उदाहरण :
(i) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ एक सर्वसमिका है।
(ii) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 8$ एक समीकरण है जिसका कोई मूल नहीं है।
(iii) $(x + 3)^2 = x^2 + 5x + 8$ एक समीकरण है जिसका एक मूल – 1 है।

एक द्विघात समीकरण के ठीक दो मूल होते है जो वास्तविक (समान या असमान) या काल्पनिक हो सकते है।
$ax^2 + bx + c = 0$

★ एक द्विघात समीकरण होगी यदि	$a \neq 0$	दो मूल
★ रैखिक समीकरण होगी यदि	$a = 0, b \neq 0$	एक मूल
★ विरोधाभास है यदि	$a = b = 0, c \neq 0$	कोई मूल नहीं
★ सर्वसमिका होगी यदि	$a = b = c = 0$	अनन्त मूल

यदि $ax^2 + bx + c = 0$, x के तीन भिन्न–भिन्न मानों से सन्तुष्ट हो, तो यह एक सर्वसमिका होगी।

उदाहरण # 1 : (i) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ एक द्विघात समीकरण है, जहाँ $a = 3$ है।
(ii) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, x में एक सर्वसमिका है।

हल : यहाँ दिये गये संबन्ध में x की अधिकतम घात 2 है एवं यह संबन्ध x के तीन भिन्न–भिन्न मानों $x= 0, x = 1$ और $x = -1$ से संन्तुष्ट होता है। अतः यह एक सर्वसमिका है क्योंकि एक n घात के बहुपद समीकरण के n से ज्यादा भिन्न–भिन्न मूल नहीं हो सकते है।

4. मूलों तथा गुणांको में सम्बन्ध (Relation Between Roots & Co-efficients) :

(i) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ के हल $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ द्वारा दिये जाते है। व्यंजक $b^2 - 4ac \equiv D$, द्विघात समीकरण का विवेचक कहलाता है।

(ii) यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ....(i)
के मूल α, β हो, तो समीकरण (i) को $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ द्वारा लिखा जा सकता है।
या $ax^2 - a(\alpha + \beta)x + a\,\alpha\beta = 0$ ......(ii)
समीकरण (i) एवं (ii) एक समान है।
$\therefore$ गुणांकों की तुलना करने पर

मूलों का योग $= \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$ तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(iii) समीकरण (i) को a से विभाजित करने पर $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow$ x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

इससे निष्कर्ष निकलता है कि द्विघात समीकरण जिसके मूल α एवं β हो, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ होती है।

उदाहरण # 2 : यदि $ax^2 + bx + c = 0$ के दो मूल α और β हो, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha + 2$ और $\beta + 2$ है।

हल दिये गये समीकरण में x को $(x - 2)$ से प्रतिस्थापित करने पर, अभीष्ट समीकरण है–

$a(x - 2)^2 + b(x - 2) + c = 0$ अर्थात् $ax^2 - (4a - b)x + (4a - 2b + c) = 0$.

उदाहरण # 3 : समीकरण $x^2 + px + q = 0$ में x के गुणांक को गलती से 13 की जगह 17 लिखने पर मूल – 2 और – 15 प्राप्त होते है तो मूल (सही) समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $q = (-2) \times (-15) = 30$, p का सही मान = 13. अतः मूल (सही) समीकरण है–

$x^2 + 13x + 30 = 0$ $\Rightarrow$ $(x + 10)(x + 3) = 0$ $\therefore$ मूल – 10, – 3

अभ्यास कार्य :

(1) यदि α, β द्विघात समीकरण $cx^2 - 2bx + 4a = 0$ के मूल हो, तो वह द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल है–

(i) $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ (ii) α^2, β^2 (iii) $\alpha + 1, \beta + 1$

(iv) $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \frac{1+\beta}{1-\beta}$ (v) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

(2) यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का अनुपात r हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$.

Answers : (1) (i) $cx^2 - bx + a = 0$ (ii) $c^2x^2 + 4(b^2 - 2ac)x + 16a^2 = 0$

(iii) $cx^2 - 2x(b + c) + (4a + 2b + c) = 0$

(iv) $(c - 2b + 4a)x^2 + 2(4a - c)x + (c + 2b + 4a) = 0$

(v) $4acx^2 + 4(b^2 - 2ac)x + 4ac = 0$

5. समीकरण सिद्वान्त (Theory of Equations) :

यदि $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, जहाँ $a_0, a_1, ... a_n$ सभी वास्तविक है तथा $a_0 \neq 0$, के मूल $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n$ हो, तो $\sum \alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0}$, $\sum \alpha_1\alpha_2 = +\frac{a_2}{a_0}$, $\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0}$,......, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3.......\alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$

नोट : (i) यदि समीकरण f(x) = 0 का एक मूल 'α' हो, तो बहुपद f(x), $(x - \alpha)$ से पूर्णतः विभाजित होता है या f(x) का एक गुणनखण्ड $(x - \alpha)$ होगा। इसी प्रकार इसका विपरीत भी सत्य है।

(ii) n $(n \geq 1)$ घात की प्रत्येक समीकरण के ठीक n मूल होते है तथा यदि समीकरण के मूल n से अधिक है, तब यह एक सर्वसमिका कहलाती है।

(iii) यदि f(x) = 0 के सभी गुणांक वास्तविक हो एवं इसका एक मूल $\alpha + i\beta$ हो, तो $\alpha - i\beta$ भी इसका एक मूल होगा अर्थात काल्पनिक मूल संयुग्मी युग्मों में होते है।

(iv) एक विषम घात की समीकरण के वास्तविक मूलों की संख्या विषम होगी तथा सम घात की समीकरण के वास्तविक मूलों की संख्या सम होगी।

(v) यदि समीकरण के सभी गुणांक परिमेय है तथा इसका एक मूल $\alpha + \sqrt{\beta}$ हो, तो $\alpha - \sqrt{\beta}$ भी इसका मूल होगा जहाँ $\alpha, \beta \in Q$ तथा β परिमेय संख्या का वर्ग नहीं है।

(vi) यदि कोई दो वास्तविक संख्याएँ a एवं b इस प्रकार हो कि f(a) एवं f(b) विपरीत चिन्ह के हो, तो a एवं b के मध्य, f(x) = 0 के वास्तविक मूलों की संख्या विषम (कम से कम एक वास्तविक मूल) होगी।

(vii) विषम घात की प्रत्येक समीकरण f(x) = 0 का एक वास्तविक मूल इस समीकरण के अन्तिम पद के चिन्ह के विपरीत चिन्ह का होता है। (यदि अधिकतम घात के पद का गुणांक धनात्मक हो।).

उदाहरण # 4 : यदि $2x^3 + 3x^2 + 5x + 6 = 0$ के मूल α, β, γ हो, तो तब $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ एवं $\alpha\beta\gamma$ ज्ञात कीजिए।

हल : मूलों तथा गुणांकों में सम्बन्ध के प्रयोग से

$$\alpha + \beta + \gamma = = -\frac{3}{2}, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{5}{2}, \qquad \alpha\beta\gamma = -\frac{6}{2} = -3.$$

अभ्यास कार्य :

(3) यदि $2p^3 - 9pq + 27r = 0$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि समीकरण $rx^3 - qx^2 + px - 1 = 0$ के मूल हरात्मक श्रेणी में है।

(4) यदि समीकरण $x^3 + qx + r = 0$ के मूल α, β, γ हो, तो तब वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल निम्न हो–

(a) $2\alpha + 2\beta + \gamma,\ \alpha + 2\beta + 2\gamma,\ 2\alpha + \beta + 2\gamma$

(b) $-\frac{r}{\alpha}, -\frac{r}{\beta}, -\frac{r}{\gamma}$

(c) $(\alpha + \beta)^2, (\beta + \gamma)^2, (\gamma + \alpha)^2$

(d) $-\alpha^3, -\beta^3, -\gamma^3$

उत्तर : (4) (a) $x^3 + qx - r = 0$ (b) $x^3 - qx^2 - r^2 = 0$
(c) $x^3 + 2qx^2 + q^2 x - r^2 = 0$ (d) $x^3 - 3x^2r + (3r^2 + q^3) x - r^3 = 0$

6. मूलों की प्रकृति (Nature of Roots) :

माना $ax^2 + bx + c = 0$ एक द्विघात समीकरण है जिसके मूल α, β है।

$D \equiv b^2 - 4ac$

$D = 0$
मूल समान है, अर्थात् $\alpha = \beta = -b/2a$
तथा द्विघात व्यंजक को एक रैखिक बहुपद के पूर्ण वर्ग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$D \neq 0$
मूल असमान है।

$a, b, c \in R$, एवं $D > 0$
मूल वास्तविक हैं।

$a, b, c \in R$, एवं $D < 0$
मूल काल्पनिक हैं, अर्थात् $\alpha = p + iq$, $\beta = p - iq$

$a, b, c \in Q$ एवं
D एक परिमेय संख्या का पूर्ण वर्ग है।
$\Rightarrow$ मूल परिमेय हैं।
$\downarrow$
$a = 1$ और $b, c \in I$ एवं D एक पूर्णांक संख्या का पूर्ण वर्ग है। $\Rightarrow$ मूल पूर्णांक है।

$a, b, c \in Q$ एवं
D एक परिमेय संख्या का पूर्ण वर्ग नहीं है।
$\Rightarrow$ मूल अपरिमेय है।
अर्थात् $\alpha = p + \sqrt{q}$, $\beta = p - \sqrt{q}$

उदाहरण # 5 : 'm' के किन मानों के लिये समीकरण $(1 + m)x^2 - 2(1 + 3m)x + (1 + 8m) = 0$ के मूल बराबर है।

हल : दी गई समीकरण $(1 + m) x^2 - 2(1 + 3m)x + (1 + 8m) = 0$ ....(i)

माना समीकरण (i) का विवेचक D है। समीकरण (i) के मूल बराबर होगें यदि $D = 0$ हो।

अर्थात् $4(1 + 3m)^2 - 4(1 + m)(1 + 8m) = 0$

अर्थात् $4(1 + 9m^2 + 6m - 1 - 9m - 8m^2) = 0$

अर्थात् $m^2 - 3m = 0$ या $m(m - 3) = 0$ $\therefore$ $m = 0, 3$.

उदाहरण # 6 : 'a' के वें सभी पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिये समीकरण $(x-a)(x-10)+1=0$ के मूल पूर्णांक हो।

हल : दी गई समीकरण $x^2-(a+10)x+10a+1=0$ है। चूंकि पूर्णांक मूल सदैव परिमेय होते है अर्थात D पूर्ण वर्ग होना चाहिए।

(i) से $D = a^2 - 20a + 96$.

$\Rightarrow \quad D = (a-10)^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = (a-10)^2 - D$

लेकिन D एक पूर्ण वर्ग है अर्थात हम चाहते है कि दो पूर्ण वर्गो का अन्तर 4 हो जो केवल तभी संभव है जब $(a-10)^2 = 4$ एवं $D = 0$ हो।

$\Rightarrow \quad (a-10) = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad a = 12, 8$

उदाहरण # 7 : यदि समीकरण $(x-a)(x-b)-k=0$ के मूल 'c' और 'd' हो तो सिद्व कीजिए कि समीकरण $(x-c)(x-d)+k=0$ के मूल 'a' और 'b' है।

हल : दिए गये प्रतिबन्ध से $(x-a)(x-b)-k \equiv (x-c)(x-d)$

या $(x-c)(x-d)+k \equiv (x-a)(x-b)$

अतः इससे सिद्ध होता है कि समीकरण $(x-c)(x-d)+k=0$ के मूल a और b है।

उदाहरण # 8 : 'a' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $x^2-11x+a$ एवं $x^2-14x+2a$ का एक गुणनखण्ड उभयनिष्ठ है।

हल : माना $x^2-11x+a$ एवं $x^2-14x+2a$ का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $x-\alpha$ है।

तब $x=\alpha$ समीकरण $x^2-11x+a=0$ एवं $x^2-14x+2a=0$ को सन्तुष्ट करेगा।

$\therefore \quad \alpha^2 - 11\alpha + a = 0$ एवं $\quad \alpha^2 - 14\alpha + 2a = 0$

समीकरण (i) एवं (ii) को वज्र गुणन विधि से हल करने पर $a = 0, 24$.

उदाहरण # 9 : प्रदर्शित कीजिए कि व्यंजक $x^2 + 2(a+b+c)x + 3(bc+ca+ab)$ एक पूर्ण वर्ग है यदि $a=b=c$.

हल : दिया गया व्यंजक पूर्ण वर्ग होगा यदि इसके संगत समीकरण का विवेचक शून्य हो।

अर्थात् $\quad 4(a+b+c)^2 - 4.3(bc+ca+ab) = 0$

या $\quad (a+b+c)^2 - 3(bc+ca+ab) = 0$

या $\quad \dfrac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) = 0$

जो केवल तभी संभव है जब $a=b=c$ हो।

अभ्यास कार्य :

(5) 'k' के किस मान के लिए व्यंजक $(4-k)x^2 + 2(k+2)x + 8k + 1$ एक पूर्ण वर्ग होगा ?

(6) यदि व्यंजक $a_1x^2 + b_1x + c$ तथा $a_2x^2 + b_2x + c$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $(x-\alpha)$ हो, तो सिद्व कीजिए कि $\alpha(a_1 - a_2) = b_2 - b_1$.

(7) यदि $3x^2 + 2\alpha xy + 2y^2 + 2ax - 4y + 1$ को दो रेखीय गुणनखण्डो के रूप में लिखा जा सकता हो, तो सिद्ध कीजिए कि समीकरण $x^2 + 4ax + 2a^2 + 6 = 0$ का एक मूल 'α' है।

(8) मानाकि $4x^2 - 4(\alpha-2)x + \alpha - 2 = 0$ $(\alpha \in R)$, एक द्विघात समीकरण है। 'α' के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिये

(i) दोनो मूल वास्तविक और भिन्न हो। (ii) दोनों मूल समान हो।

(iii) दोनों मूल काल्पनिक हो। (iv) दोनों मूलो के चिन्ह विपरीत हो।

(v) दोनों मूलों का परिमाण बराबर हो एवं चिन्ह विपरीत हो।

(9) यदि $P(x) = ax^2 + bx + c$, तथा $Q(x) = -ax^2 + dx + c$, $ac \neq 0$ हो, तो सिद्व कीजिए कि $P(x) . Q(x) = 0$ के कम से कम दो मूल वास्तविक हैं।

Answers : (5) 0, 3

(8) (i) $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ (ii) $\alpha \in \{2, 3\}$ (iii) (2, 3) (iv) $(-\infty, 2)$ (v) ϕ

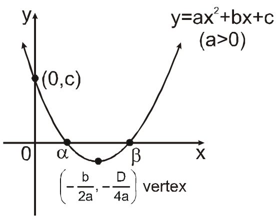
7. द्विघात व्यंजक का आलेख (Graph of Quadratic Expression) :

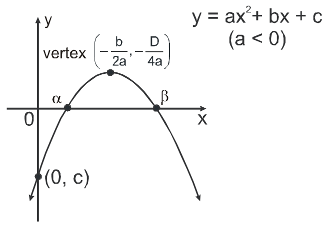
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ या $\left(y + \frac{D}{4a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

★★ x, y में आलेख सदैव एक परवलय है।

★ शीर्ष के निर्देशांक $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ है।

★ यदि a > 0 हो, तो परवलय का आकार उपर की ओर अवतल है तथा यदि a < 0 हो, तो परवलय का आकार नीचे की ओर अवतल है।.





★ परवलय y–अक्ष को बिन्दु (0, c) पर प्रतिच्छेद करता है।

★ परवलय एवं x–अक्ष के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के x-निर्देशांक द्विघात समीकरण f (x) = 0 के वास्तविक मूल होते है। अतः परवलय x अक्ष को प्रतिच्छेद कर सकता है और नहीं भी।

8. द्विघात व्यंजक $f(x) = ax^2 + bx + c$ का परिसर

(Range of Quadratic Expression $f(x) = ax^2 + bx + c$)

(i) परिसर :

यदि a > 0 $\Rightarrow$ $f(x) \in \left[-\frac{D}{4a}, \infty\right)$

यदि a < 0 $\Rightarrow$ $f(x) \in \left(-\infty, -\frac{D}{4a}\right]$

व्यंजक f (x) का अधिकतम एवं न्यूनतम मान संगत स्थितियों में $-\frac{D}{4a}$ होता है एवं यह $x = -\frac{b}{2a}$ (शीर्ष पर) पर प्राप्त होता है।

(ii) प्रतिबन्धित प्रान्त में परिसर :

दिया गया है कि $x \in [x_1, x_2]$,

(a) यदि $-\frac{b}{2a} \notin [x_1, x_2]$ हो, तो, $f(x) \in [\min\{f(x_1), f(x_2)\}, \max\{f(x_1), f(x_2)\}]$

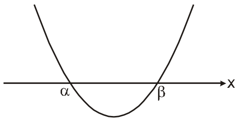
(b) यदि $-\frac{b}{2a} \in [x_1, x_2]$ हो, तो, $f(x) \in \left[\min\left\{f(x_1), f(x_2), -\frac{D}{4a}\right\}, \max\left\{f(x_1), f(x_2), -\frac{D}{4a}\right\}\right]$

9. द्विघात व्यंजक का चिन्ह (Sign of Quadratic Expressions) :

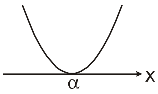
$x = x_0$ पर व्यंजक $f(x) = ax^2 + bx + c$ का मान परवलय $y = ax^2 + bx + c$ पर स्थित बिन्दु जिसका x–निर्देशांक x_0 है, के y–निर्देशांक के बराबर होता है। अतः यदि किसी $x = x_0$ के लिए बिन्दु x–अक्ष से उपर स्थित हो, तो $f(x_0) > 0$ एवं x अक्ष से नीचे स्थित हो, तो $f(x_0) < 0$

x–अक्ष के सापेक्ष परवलय की निम्नानुसार छः स्थितियाँ सम्भव है–

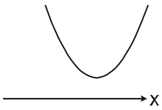
निष्कर्ष

(i) 

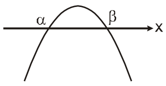
(a) $a > 0$
(b) $D > 0$
(c) मूल वास्तविक एवं भिन्न–भिन्न है।
(d) $x \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$ में $f(x) > 0$
(e) $x \in (\alpha, \beta)$ में $f(x) < 0$

(ii) 

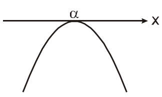
(a) $a > 0$
(b) $D = 0$
(c) मूल वास्तविक एवं समान है।
(d) $x \in R - \{\alpha\}$ में $f(x) > 0$

(iii) 

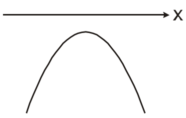
(a) $a > 0$
(b) $D < 0$
(c) मूल काल्पनिक है।
(d) $x \in R$ के लिए $f(x) > 0$

(iv) 

(a) $a < 0$
(b) $D > 0$
(c) मूल वास्तविक एवं भिन्न–भिन्न है।
(d) $x \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$ में $f(x) < 0$
(e) $x \in (\alpha, \beta)$ में $f(x) > 0$

(v) 

(a) $a < 0$
(b) $D = 0$
(c) मूल वास्तविक एवं समान है।
(d) $x \in R - \{\alpha\}$ में $f(x) < 0$

(vi) 

(a) $a < 0$
(b) $D < 0$
(c) मूल काल्पनिक है।
(d) $x \in R$ के लिए $f(x) < 0$

उदाहरण # 10 : यदि $c < 0$ एवं $ax^2 + bx + c = 0$ का कोई वास्तविक मूल नहीं है तब सिद्ध कीजिए कि
(i) $a - b + c < 0$ (ii) $9a + 3b + c < 0$.

हल : $c < 0$ एवं $D < 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = ax^2 + bx + c < 0 \ \forall \ x \in R$
$\Rightarrow$ $f(-1) = a - b + c < 0$ एवं $f(3) = 9a + 3b + c < 0$

उदाहरण # 11 : $f(x) = x^2 - 5x + 6$ का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : $x = -\dfrac{b}{2a}$ पर $f(x)$ का न्यूनतम मान $= -\dfrac{D}{4a}$ $\therefore x = \dfrac{5}{2}$ पर, $-\dfrac{D}{4a} = -\left(\dfrac{25-24}{4}\right) = -\dfrac{1}{4}$

$f(x)$ का अधिकतम मान $\to \infty$ अतः परिसर $\left[-\dfrac{1}{4}, \infty\right)$ है।

उदाहरण # 12 : परिमेय व्यंजक $y = \dfrac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 4}$, $x \in R$ का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \dfrac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 4}$ $\Rightarrow$ $(y - 1)x^2 + (y + 1)x + 4(y - 1) = 0$ ....(i)

<u>स्थिति</u>-I : यदि $y \neq 1$ हो, तो समीकरण (i), x में द्विघात है।
$\because$ x वास्तविक है,
$\therefore$ $D \geq 0$ $\Rightarrow$ $(y + 1)^2 - 16(y - 1)^2 \geq 0$ $\Rightarrow$ $(5y - 3)(3y - 5) \leq 0$
$\therefore$ $y \in \left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{3}\right] - \{1\}$

<u>स्थिति</u>-II : यदि $y = 1$ हो, तो समीकरण (i) निम्न प्रकार हो जाती है–
$2x = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ जो संभव है। (क्योंकि $x \in R$)
$\therefore$ परिसर $\equiv \left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{3}\right]$

उदाहरण # 13 : $\dfrac{x+3}{2x^2 + 3x + 9}$, $x \in R$ का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : $y = \dfrac{x+3}{2x^2 + 3x + 9}$ $\Rightarrow$ $2yx^2 + (3y - 1)x + 3(3y - 1) = 0$ ....(i)

<u>स्थिति</u>-I : यदि $y \neq 0$ हो, तो समीकरण (i), x में द्विघात है।
$\because$ x वास्तविक है।
$\therefore$ $D \geq 0$
$\Rightarrow$ $(3y - 1)^2 - 24y(3y - 1) \geq 0$
$\Rightarrow$ $(3y - 1)(21y + 1) \leq 0$
$y \in \left[-\dfrac{1}{21}, \dfrac{1}{3}\right] - \{0\}$

<u>स्थिति</u>-II : यदि $y = 0$ हो, तो समीकरण (i) निम्न प्रकार हो जाती है–
$x = -2$ जो संभव है। (क्योंकि $x \in R$)
$\therefore$ परिसर $y \in \left[-\dfrac{1}{21}, \dfrac{1}{3}\right]$

अभ्यास कार्य :

(10) यदि $c > 0$ हो एवं $ax^2 + 2bx + 3c = 0$ का कोई वास्तविक मूल नहीं हो, तो सिद्ध कीजिए कि
(i) $4a - 4b + 3c > 0$ (ii) $a + 6b + 27c > 0$ (iii) $a + 2b + 6c > 0$

(11) यदि $f(x) = (x - a)(x - b)$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $f(x) \geq -\dfrac{(a-b)^2}{4}$.

(12) 'k' के किस न्यूनतम पूर्णांक मान के लिए द्विघात बहुपद $k - 1) x^2 + 8x + k + 5 > 0 \ \forall \ x \in R$ होगा ?

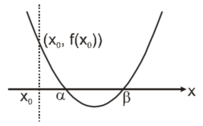
(13) व्यंजक $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$, $x \in R$ का परिसर ज्ञात कीजिए। यदि x वास्तविक है।

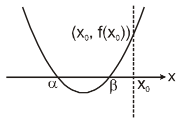
(14) व्यंजक $\frac{mx^2+3x-4}{-4x^2+3x+m}$, $\forall x \in R$ के सभी वास्तविक मान सम्भव होने के लिए 'm' किस अन्तराल में स्थित होगा, ज्ञात कीजिए।

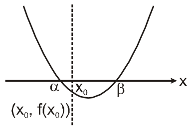
Answers : (12) k = 4 (13) $(-\infty, 5] \cup [9, \infty)$ (14) $m \in (1, 7)$

10. मूलों की स्थिति (Location of Roots) :

$f(x) = ax^2 + bx + c$, जहाँ $a > 0$ एवं $a, b, c \in R$.

(i) 

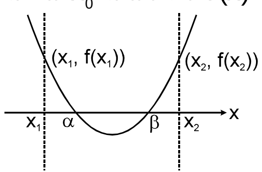
(ii) 

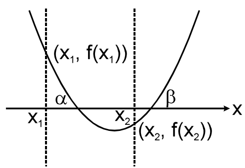
(iii) 

(i) $f(x) = 0$ के दोनों मूल एक विशेष संख्या x_0 से बड़े होने के लिए निम्न प्रतिबन्ध है–
$b^2 - 4ac \ge 0$ एवं $f(x_0) > 0$ एवं $(-b/2a) > x_0$

(ii) $f(x) = 0$ के दोनों मूल एक विशेष संख्या x_0 से छोटे होने के लिए निम्न प्रतिबन्ध है–
$b^2 - 4ac \ge 0$ एवं $f(x_0) > 0$ एवं $(-b/2a) < x_0$.

(iii) संख्या x_0 समीकरण $f(x) = 0$ के मूलों के मध्य स्थित होने के लिए प्रतिबन्ध $f(x_0) < 0$ है।

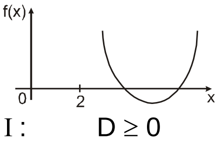
(iv) 

(v) 

(iv) समीकरण $f(x) = 0$ के दोनों मूल संख्या x_1 एवं x_2 $(x_1 < x_2)$ के मध्य स्थित होने के लिए निम्न प्रतिबन्ध है–
$b^2 - 4ac \ge 0$ एवं $f(x_1) > 0$ एवं $f(x_2) > 0$ एवं $x_1 < (-b/2a) < x_2$

(v) समीकरण $f(x) = 0$ का ठीक एक मूल अन्तराल (x_1, x_2) में स्थित अर्थात् $x_1 < x < x_2$ होने के लिए प्रतिबन्ध $f(x_1).f(x_2) < 0$ है।

उदाहरण # 14 : माना $x^2 - (m-3)x + m = 0$ $(m \in R)$ एक द्विघात समीकरण है, तब m के मान ज्ञात कीजिए जबकि–
(a) दोनों मूल 2 से बड़े हो।
(b) दोनों मूल धनात्मक हो।
(c) एक मूल धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक हो।
(d) एक मूल 2 से बड़ा तथा दूसरा 1 से छोटा हो।
(e) मूल परिमाण में बराबर तथा विपरीत चिन्ह के हो।
(f) दोनों मूल अन्तराल (1, 2) में स्थित हो।

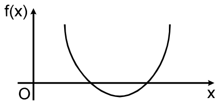
हल : (a) 

प्रतिबन्ध - I : $D \ge 0$ $\Rightarrow$ $(m-3)^2 - 4m \ge 0$ $\Rightarrow$ $m^2 - 10m + 9 \ge 0$
$\Rightarrow$ $(m-1)(m-9) \ge 0$
$\Rightarrow$ $m \in (-\infty, 1] \cup [9, \infty)$ ......(i)

प्रतिबन्ध - II : $f(2) > 0$ $\Rightarrow$ $4 - (m-3)2 + m > 0 \Rightarrow m < 10$ ......(ii)

प्रतिबन्ध - III :– $\frac{b}{2a} > 2 \Rightarrow$ $\frac{m-3}{2} > 2 \Rightarrow$ $m > 7$ ....(iii)

सर्वनिष्ठ से $m \in [9, 10)$

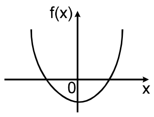
(b) 

प्रतिबन्ध - I $D \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 1] \cup [9, \infty)$

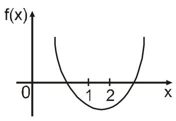
प्रतिबन्ध - II $f(0) > 0 \Rightarrow m > 0$

प्रतिबन्ध - III $-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{m-3}{2} > 0 \Rightarrow m > 3$

(i), (ii) एवं (iii) के सर्वनिष्ठ से $m \in [9, \infty)$ Ans.

(c) 

प्रतिबन्ध - I $f(0) < 0 \Rightarrow m < 0$ Ans.

(d) 

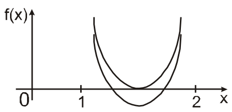
प्रतिबन्ध - I $f(1) < 0 \Rightarrow 4 < 0 \Rightarrow m \in \phi$

प्रतिबन्ध - II $f(2) < 0 \Rightarrow m > 10$

सर्वनिष्ठ से $m \in \phi$ Ans.

(e) मूलों का योग = 0 $\Rightarrow m = 3$

एवं $f(0) < 0 \Rightarrow m < 0 \quad \therefore \quad m \in \phi$ **Ans.**

(f) 

प्रतिबन्ध - I $D \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 1] \cup [9, \infty)$

प्रतिबन्ध - II $f(1) > 0 \Rightarrow 1 - (m-3) + m > 0 \Rightarrow$ 4 > 0 जो कि 'm' के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए सत्य है अतः $m \in R$

प्रतिबन्ध - III $f(2) > 0 \Rightarrow m < 10$

प्रतिबन्ध - IV $1 < -\frac{b}{2a} < 2 \Rightarrow 1 < \frac{m-3}{2} < 2 \Rightarrow 5 < m < 7$

सर्वनिष्ठ से $m \in \phi$ **Ans.**

उदाहरण # 15 : समीकरण $(a-2)x^2 - 2ax + a = 0$ के दोनों मूल अन्तराल (– 2, 1) में स्थित होने के लिए 'a' के सभी मान ज्ञात कीजिए–

हल : **स्थिति-I** : $f(-2) > 0 \Rightarrow 4(a-2) + 4a + a > 0$

$9a - 8 > 0 \Rightarrow a > \frac{8}{9}$

$f(1) > 0 \Rightarrow a - 2 - 2a + a > 0$

$-2 > 0$ संभव नहीं $\quad \therefore \quad a \in \phi$

स्थिति-I :

$a - 2 < 0$	$\Rightarrow$	$a < 2$
$f(-2) < 0$	$\Rightarrow$	$a < \frac{8}{9}$
$f(1) < 0$	$\Rightarrow$	$a \in R$
$-2 < \frac{b}{2a} - < 1$	$\Rightarrow$	$a < \frac{4}{3}$
$D \geq 0$	$\Rightarrow$	$a \geq 0$

उभयनिष्ठ $a \in \left[0, \frac{8}{9}\right)$

सम्पूर्ण हल $a \in \left[0, \frac{8}{9}\right) \cup \{2\}$

अभ्यास कार्य :

(15) यदि द्विघात समीकरण $x^2 - 2(a-1)x + a - 1 = 0$ $(a \in R)$ हो, तो a का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

(a) दोनों मूल धनात्मक हो। (b) दोनों मूल ऋणात्मक हो।

(c) दोनों मूल विपरित चिन्ह के हो। (d) दोनों मूल 1 से बड़े हो।

(e) दोनों मूल 1 से छोटे हो। (f) एक मूल 1 से छोटा तथा दूसरा मूल 1 से बड़ा हो।

(16) समीकरण $4x^2 - 20px + (25p^2 + 15p - 66) = 0$ के दोनों मूल 2 से छोटे होने के लिए 'p' के मान ज्ञात कीजिए।

(17) α के वे मान मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए 6, समीकरण $x^2 + 2(\alpha - 3)x + 9 = 0$ के मूलों के मध्य स्थित होगा।

(18) यदि $x^2 - 2(a-1)x + a - 1 = 0$ $(a \in R)$ द्विघात समीकरण हो, तो 'a' का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए

(i) ठीक एक मूल (0, 1) में हो। (ii) दोनों मूल (0, 1) में हो।

(iii) कम से कम एक मूल (0, 1) में हो।

(iv) एक मूल 1 से बड़ा तथा दूसरा 0 से छोटा हो।

(19) द्विघात व्यंजक $ax^2 + (a-2)x - 2$ का मान 'x' के ठीक दो पूर्णांक मानों के लिए ऋणात्मक होने के लिए 'a' के मान ज्ञात कीजिए।

Answers : (15) (a) $[2, \infty)$ (b) ϕ (c) $(-\infty, 1)$ (d) ϕ (e) $(-\infty, 1]$ (f) $(2, \infty)$

(16) $(-\infty, -1)$ (17) $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$

(18) (i) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ (ii) ϕ (iii) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ (iv) ϕ

(19) $[1, 2)$

11. उभयनिष्ठ मूल (Common Roots) :

मानाकि दो द्विघात समीकरण $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ एवं $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ हैं।

(i) यदि दोनों द्विघात समीकरणों के दोनों मूल उभयनिष्ठ हो, तो दोनों समीकरणें सर्वसम होगी एवं उनके गुणांक समानुपाती होंगे अर्थात् $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(ii) यदि केवल एक मूल उभयनिष्ठ हो, तो उभयनिष्ठ मूल

$\alpha = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{c_1a_2 - c_2a_1}$ होगा।

अतः एक मूल उभयनिष्ठ होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध

$$\Rightarrow (c_1a_2 - c_2a_1)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1)$$

नोट : यदि f(x) = 0 एवं g(x) = 0 दो बहुपदीय समीकरणें है जिनके कुछ मूल उभयनिष्ठ है तो ये उभयनिष्ठ मूल समीकरण h(x) = a f(x) + b g(x) = 0 के भी मूल होते है।

उदाहरण # 16 : यदि $x^2 - ax + b = 0$ तथा $x^2 - px + q = 0$ दोनों का एक मूल उभयनिष्ठ है तथा द्वितीय समीकरण में दोनों मूल समान है तो प्रदर्शित कीजिए कि $b + q = \frac{ap}{2}$ होगा।

हल : दिए गए समीकरण $x^2 - ax + b = 0$ .... (i)

तथा $x^2 - px + q = 0$ .... (ii) है।

माना 'α' इनका एक उभयनिष्ठ मूल है। तब समीकरण (ii) के मूल 'α' तथा 'α' होगें। माना समीकरण (i) का दूसरा मूल 'β' है। इस प्रकार समीकरण (i) के मूल α, β है तथा समीकरण (ii) के मूल α, α है।

अब $\alpha + \beta = a$ .... (iii)

$\alpha\beta = b$ .... (iv)

$2\alpha = p$ .... (v)

$\alpha^2 = q$ .... (vi)

बांयी ओर (L.H.S). $= b + q = \alpha\beta + \alpha^2 = \alpha(\alpha + \beta)$ .... (vii)

एवं दांयी ओर (R.H.S.) $= \frac{ap}{2} = \frac{(\alpha+\beta)\,2\alpha}{2} = \alpha\,(\alpha + \beta)$ .... (viii)

(vii) एवं (viii) से, बांयी ओर = दांयी ओर

उदाहरण # 17 : यदि $a, b, c \in R$ तथा समीकरणों $ax^2 + bx + c = 0$ तथा $x^2 + 2x + 9 = 0$ में एक मूल उभयनिष्ठ है तो सिद्व कीजिए कि $a : b : c = 1 : 2 : 9$.

हल : दी गयी समीकरणें $x^2 + 2x + 9 = 0$ .... (i)

तथा $ax^2 + bx + c = 0$ है। .... (ii)

स्पष्टतः समीकरण (i) के मूल काल्पनिक है। चूँकि समीकरण (i) एवं (ii) का एक मूल उभयनिष्ठ है, अतः उभयनिष्ठ मूल काल्पनिक होनें चाहिए तथा इस प्रकार दोनों मूल उभयनिष्ठ होगें इसलिए समीकरण (i) एवं (ii) सर्वसम है।

$\therefore \quad \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{9} \qquad \therefore \quad a : b : c = 1 : 2 : 9$

अभ्यास कार्य :

(20) यदि समीकरणों $ax^2 + bx + c = 0$ तथा $x^3 + x - 2 = 0$ के दो मूल उभयनिष्ठ हो तो प्रदर्शित कीजिए कि $2a = 2b = c$.

(21) यदि समीकरणों $ax^2 + 2bx + c = 0$ तथा $a_1x^2 + 2b_1x + c_1 = 0$ में एक मूल उभयनिष्ठ हो और $\frac{a}{a_1}, \frac{b}{b_1}, \frac{c}{c_1}$ समान्तर श्रेढ़ी में हो, तो प्रदर्शित किजिए कि a_1, b_1, c_1 गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

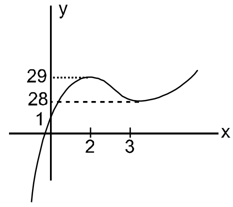
12. बहुपदों के आरेख (Graphs of Polynomials) :

$y = a_nx^n + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1x + a_0$. बिन्दु जहाँ $y' = 0$, परिवर्तित बिन्दु, जहाँ आरेख को खीचने पर क्रान्तिक है।

उदाहरण # 18 : $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ का आरेख खीचींए।

हल : $y' = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 3)(x - 2)$

x	2	3	∞	$-\infty$
y	29	28	∞	$-\infty$



उदाहरण # 19 : $y = -3x^4 + 4x^3 + 3$ का आरेख खीचींए।

हल : $y' = -12x^3 + 12x$

$y' = -12x^2(x - 1)$

x	0	1	∞	$-\infty$
y	3	4	$-\infty$	$-\infty$