Exercise-1

Marked Questions can be used as Revision Questions.
चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

Section (A) : Kinematics
खण्ड (A) : गतिकी

A-1. A uniform disk rotating with constant angular acceleration covers 50 revolutions in the first five seconds after the start. Calculate the angular acceleration and the angular velocity at the end of five seconds.
एक समरूप चकती नियत कोणीय त्वरण से घूमती हुई प्रारम्भ से पहले पाँच सैकण्ड में 50 चक्कर लगाती है। पाँच सैकण्ड पश्चात् कोणीय त्वरण तथा कोणीय वेग ज्ञात करो।

Ans. 4 rev/s^2, 20 rev/s

Sol. $\omega_i = 0$ $\quad t = 5$ sec $\quad \theta = 50\ (2\pi)$ rad.

$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\ \alpha\ t^2$

$(50)\ (2\pi) = 0 + \frac{1}{2}\ \alpha\ (5)^2$

$(50)\ (2\pi) = 0 + \frac{25\alpha}{2}$

$\alpha = \frac{(50)(2\pi)(2)}{25} = 4\ (2\pi) = 4$ rev/ se^2

$\omega_f = \omega_i + \alpha\, t$

$\omega_f = 0 + 4(5) = 20$ rev/ se

A-2. A body rotating with 20 rad/s is acted upon by a uniform torque providing it an angular deceleration of 2 rad/s^2. At which time will the body have kinetic energy same as the initial value if the torque acts continuously ?
20 rad/s से घूर्णन कर रही वस्तु को एक नियत बल–आघूर्ण 2 rad/s^2 का मंदन प्रदान करता है। किस समय पर वस्तु की गतिज ऊर्जा प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा के समान होगी यदि बल आघूर्ण लगातार आरोपित है ?

Ans. 20 s

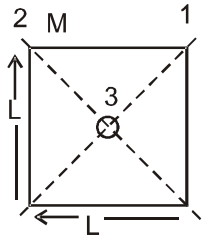
Sol. When initial angular velocity equel to the final angular velocity then
जब प्रारिम्भक कोणीय वेग, अन्तिम कोणीय वेग के बराबर है तब
(K.E. i = K.E. f)
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$
$-20 = 20 - 2t$
$-40 = -2t$
$t = 20$ sec

Section (B) : Moment of inertia
खण्ड (B) : जड़त्व आघूर्ण

B-1. Calculate the moment of inertia of a uniform square plate of mass M and side L about one of its diagonals, with the help of its moment of inertia about its centre of mass.
M द्रव्यमान व L भुजा की एक समरूप वर्गाकार प्लेट का इसके एक विकर्ण के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण, इसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण की सहायता से ज्ञात करो।

Ans. $\frac{ML^2}{12}$

Sol.



using perpendiculer theorem लम्बवत् अक्ष प्रमेय से $(I_3 = I_2 + I_1)$

both diagonals divides square plate in symmatrical way so $I_1 = I_2$

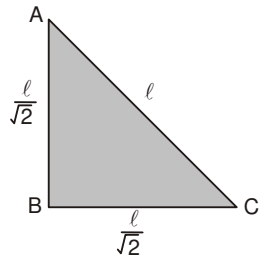
दोनो विकर्ण वर्गाकार प्लेट को सममित रूप से विभाजित करते है अतः $I_1 = I_2$

$I_3 = 2I_2 = 2I_1$

$I_1 = \left(\frac{I_3}{2}\right)$ $\qquad$ $I_3 = \left(\frac{ML^2}{6}\right)$ $\qquad$ $I_1 = \left(\frac{ML^2}{12}\right)$

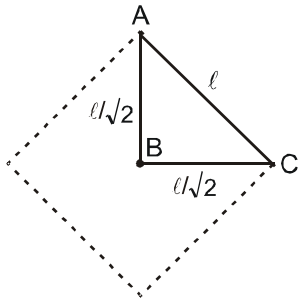
B-2. A uniform triangular plate of mass M whose vertices are ABC has lengths ℓ, $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$ and $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$ as shown in figure. Find the moment of inertia of this plate about an axis passing through point B and perpendicular to the plane of the plate.

चित्रानुसार एक M द्रव्यमान की समरूप त्रिभुजाकार प्लेट जिसके कोने ABC है, की लम्बाई ℓ, $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$ तथा $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$ है। इस प्लेट का बिन्दु B से गुजरने वाली व तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Ans. $\frac{M\ell^2}{6}$

Sol.



Assuming a square plate ACDE of mass 4M having centre B.

माना पूर्ण वर्गाकार प्लेट ACDE का कुल द्रव्यमान 4M है। तथा इसका केन्द्र B पर है

$I_B = \frac{(4M)\ell^2}{6}$

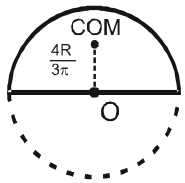
Moment of inertia of plate ABC $\qquad$ प्लेट ABC का जड़त्व आघूर्ण

$I_B' = \frac{1}{4}.\left(\frac{4M\ell^2}{6}\right) = \frac{M\ell^2}{6}$

B-3. Find the moment of inertia of a uniform half-disc about an axis perpendicular to the plane and passing through its centre of mass. Mass of this disc is M and radius is R.
एक समरूप आधी चकती के द्रव्यमान केन्द्र से पारित व तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो, चकती का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है।

Ans. $\frac{MR^2}{2} - M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$

Sol.



$I_0 = \left(\frac{mR^2}{2}\right)$

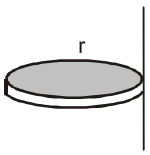
$I_0 = I_{cm} + md^2$

$\frac{mR^2}{2} = I_{cm} + m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$

$\Rightarrow I_{cm} = \frac{mR^2}{2} - m\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$

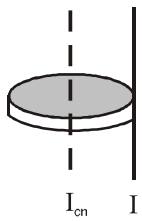
$I_{CM} = \left[\frac{MR^2}{2} - M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2\right]$

B-4. Calculate the radius of gyration of a uniform circular disk of radius r and thickness t about a line perpendicular to the plane of this disk and tangent to the disk as shown in figure.
एक वृत्ताकार r त्रिज्या की तथा एकसमान मोटाई t की एक चकती की इसके तल के लम्बवत् व चित्रानुसार इसके परिधि से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या ज्ञात करो।



Ans. $(K = \sqrt{\frac{3}{2}}\, r)$

Sol.



$I = I_{cm} + md^2$

$I = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2 = mK^2 \Rightarrow \quad (K = \sqrt{\frac{3}{2}}\, r)$

Section (C) : Torque
खण्ड (C) : बल आघूर्ण

C-1. Two forces $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - 5\hat{j} - 6\hat{k}$ and $\vec{F}_2 = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ are acting on a body at the points (1, 1, 0) and (0, 1, 2) respectively. Find torque acting on the body about point (–1, 0, 1).
दो बल $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - 5\hat{j} - 6\hat{k}$ तथा $\vec{F}_2 = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ एक वस्तु पर बिन्दुओं क्रमशः (1, 1, 0) तथा (0, 1, 2) पर आरोपित है। वस्तु का बिन्दु (–1, 0, 1) के सापेक्ष बल–आघूर्ण ज्ञात करो।

Ans. $-14\,\hat{i} + 10\,\hat{j} - 9\hat{k}$

Sol. $\vec{F}_1 = 2\,\hat{i} - 5\,\hat{j} - 6\hat{k}$ at point बिन्दु (1, 1, 0) पर

$\vec{F}_2 = -\,\hat{i} + 2\,\hat{j} - \hat{k}$ at point बिन्दु (0, 1, 2) पर

$r_0(-1,0,1)$

$$\vec{r}_1 = (1\,\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}) - (-\hat{i} + 0\,\hat{j} + \hat{k})$$

`
$$\vec{r}_1 = \left(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right)$$

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \left(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right) \times \left(2\hat{i} - 5\hat{j} - 6\hat{k}\right)$$

$$\vec{\tau}_1 = (-10\hat{k} + 12\,\hat{j} - 2\hat{k} - 6\,\hat{i} - 2\,\hat{j} - 5\,\hat{i})$$

$$\vec{\tau}_1 = (-11\,\hat{i} + 10\,\hat{j} - 12\hat{k})$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) \times \left(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\right)$$

Total कुल $\vec{\tau}_T = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$

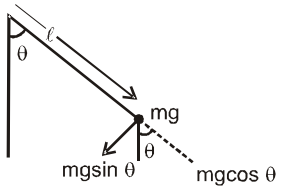
$$\vec{\tau}_T = \left(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right) \times \left(2\hat{i} - 5\hat{j} - 6\hat{k}\right) + \left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) \times \left(-\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\right)$$

$$\vec{\tau}_T = \left(-14\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k}\right)$$

C-2. A simple pendulum having bob of mass m and length ℓ is pulled aside to make an angle θ with the vertical. Find the magnitude of the torque of the weight of the bob about the point of suspension. At which position its torque is zero? At which θ it is maximum?
एक ℓ लम्बाई के सरल लोलक जिसमें m द्रव्यमान का गोलक लगा है, को एक ओर खींचा जाता है, ताकि यह ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाए। आलम्बन बिन्दु के सापेक्ष गोलक के भार के बल आघूर्ण का परिमाण ज्ञात करो। बल आघूर्ण किस स्थिति में शून्य होगा तथा किस θ के लिए यह अधिकतम होगा।

Ans. $mg\ell \sin\theta$, when the bob is at the lowest point, at $\theta = 90^\circ$.
$mg\ell \sin\theta$, जब गेंद निम्नतम बिन्दु पर है, $\theta = 90^\circ$.

Sol.



torque of mg about point of suspension is : निलम्बन बिन्दु के सापेक्ष mg का बलाघूर्ण

$\tau = (mg \sin\theta)\,(\ell)$

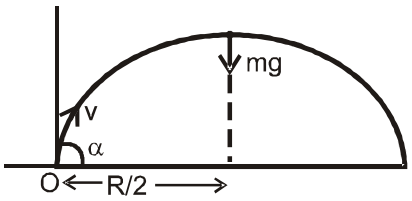
(When bob is at the lowest position $\tau = 0$) (जब गेंद निम्नतम स्थिति पर है तब $\tau = 0$)

Torque is maximum when string is horizontal that is $\theta = 90^\circ$
जब $\theta = 90^\circ$ अर्थात डोरी क्षैतिज होगी तब बलाघूर्ण अधिकतम होगा।

C-3. A particle having mass m is projected with a speed v at an angle α with horizontal ground. Find the torque of the weight of the particle about the point of projection when the particle (a) is at the highest point. (b) reaches the ground.
एक m द्रव्यमान का कण v वेग से क्षैतिज धरातल से α कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है। कण के भार का प्रक्षेपण बिन्दु के सापेक्ष बल आघूर्ण ज्ञात करो जब कण की स्थिति (a) उच्चतम बिन्दु पर हो (b) पुनः धरातल पर हो।

Ans. (a) $mv^2 \sin\alpha \cos\alpha$ perpendicular to the plane of motion
(b) $2mv^2 \sin\alpha \cos\alpha$ perpendicular to the plane of motion
(a) $mv^2 \sin\alpha \cos\alpha$ गति के तल के लम्बबत्
(b) $2mv^2 \sin\alpha \cos\alpha$ गति के तल के लम्बबत्

Sol. (a)

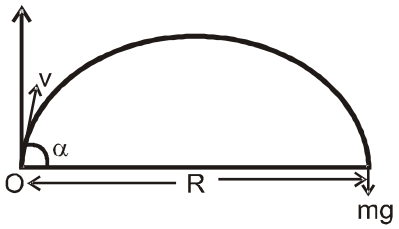


$\tau_0 = mg\ R/2 \quad = mg\left(\frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)$

$\tau_0 = mg\ \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g} = \left(\frac{mv^2 \sin 2\alpha}{2}\right)$

$\tau_0 = (mv^2 \sin\alpha \cos\alpha)$

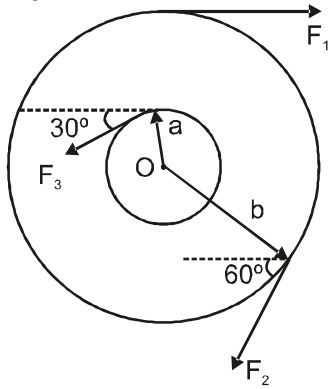
(b)



$\tau_0 = mgR$

$= (2mv^2 \sin\alpha \cos\alpha)$

C-4. Calculate the net torque on the system about the point O as shown in figure if $F_1 = 11$ N, $F_2 = 9$ N, $F_3 = 10$ N, a = 10 cm and b = 20 cm. (All the forces along the tangent.)
चित्रानुसार निकाय पर O के सापेक्ष कुल बलाघुर्ण ज्ञात करें यदि $F_1 = 11$ N, $F_2 = 9$ N, $F_3 = 10$ N, a = 10 cm तथा b = 20 cm (सभी बल स्पर्श रेखा के अनुदिश है)



Ans. 3 N – m

Sol. Net torque on the system about O
O के परितः निकाय पर बलाघुर्ण

$\tau_0 = F_1 . b + F_2 .b – F_3.a$
$= (F_1 + F_2) b – F_3a$
$= (11 + 9) 0.2 – 10 \times 0.1$
$= 3 N – m$

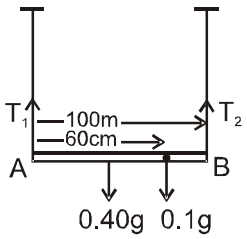
Section (D) : Rotational Equilibrium
खण्ड (D) : घूर्णन साम्यावस्था

D-1. A uniform metre stick having mass 400 g is suspended from the fixed supports through two vertical light strings of equal lengths fixed at the ends. A small object of mass 100 g is put on the stick at a distance of 60 cm from the left end. Calculate the tensions in the two strings. ($g = 10 m/s^2$)
एक 400 g की समरूप मीटर छड़ को सिरो पर स्थिर (जड़वत) समान लम्बाई की दो ऊर्ध्वाधर हल्की रस्सियों की सहायता से दो स्थिर कीलक से लटकाया जाता है। छड़ के बाऐं किनारे से 60 cm दूरी पर एक छोटी 100 g की वस्तु को रखा जाता है, तो दोनो रस्सियों में तनाव ज्ञात करो। ($g = 10 m/s^2$)

Ans. 2.4 N in the left string and 2.6 N in the right

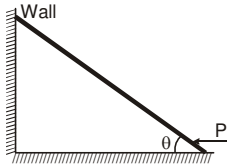
Ans. 2.4 N बायीं रस्सी में तथा 2.6 N दायीं रस्सी में

Sol.



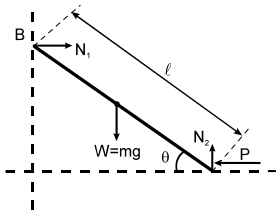
using force balance बल संतुलन के लिए
$T_1 + T_2 = 0.4 g + 0.1 g = 0.5 g = 5$
Torque about any point should be zero for rotation equilibrium.
घूर्णन साम्यावस्था के लिए किसी बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण शून्य होना चाहिए
$\tau_A = 0$
$(T_2 \times 100 cm) = (0.4 g) (50 cm) + (0.1 g) (60 cm)$
$T_2 = (0.4 \times 10 \times 0.5) + (0.1 \times 10 \times 0.6) = 2.6 N$
$T_2 = 2.6 N$
$T_1 = 2.4 N$

D-2. Assuming frictionless contacts, determine the magnitude of external horizontal force P applied at the lower end for equilibrium of the rod as shown in figure. The rod is uniform and its mass is ' m'.
घर्षणरहित सम्पर्क मानते हुए, चित्रानुसार छड़ की साम्यावस्था के लिए निचले सिरे पर लगाए गए, बाह्य क्षैतिज बल P का परिमाण ज्ञात करो। छड़ समरूप है तथा इसका द्रव्यमान m है।



Ans. $P = \frac{w}{2} \cot \theta$ or $P = \frac{mg}{2} \cot \theta$

Sol. The F.B.D. of rod is as shown
छड़ का FBD चित्रानुसार होगा
For rod to be in translational equilibrium
छड़ के स्थानान्तारित साम्यावस्था के लिए
$N_1 = P$ ....(1)
$N_2 = W = mg$ ....(2)



For rod to be in rotational equilibrium, net torque on rod about any axis is zero.
छड़ के घूर्णन साम्यावस्था के लिए किसी भी अक्ष के सापेक्ष छड़ का कुल बलआघूर्ण शून्य होगा।

$\therefore$ Net torque on rod about B is zero
B के सापेक्ष कुल बलआघूर्ण शून्य है।

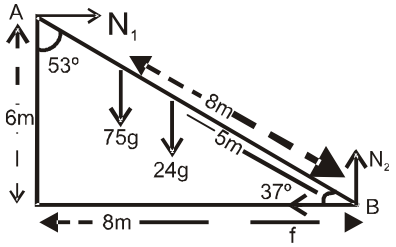
i.e., $mg\,\frac{\ell}{2}\cos\theta - N_2\,\ell\cos\theta + P\,\ell\sin\theta = 0$ ....(3)

from equation (2) and (3) solving we get
समीकरण (2) व (3) को हल करने पर

$$P = \frac{mg}{2}\cot\theta$$

D-3. A uniform ladder having length 10.0 m and mass 24 kg is resting against a vertical wall making an angle of 53° with it. The vertical wall is smooth but the ground surface is rough. A painter weighing 75 kg climbs up the ladder. If he stays on the ladder at a point 2 m from the upper end, what will be the normal force and the force of friction on the ladder by the ground? What should be the minimum coefficient of friction between ground and ladder for the painter to work safely? ($g = 10\ m/s^2$)
एक 24 kg द्रव्यमान व 10.0 m लम्बाई की समरूप सीढ़ी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे इससे 53° के कोण पर रखी गई है। ऊर्ध्वाधर दीवार घर्षण रहित है। परन्तु मैदान खुरदरा है। एक 75 kg द्रव्यमान का एक पेन्टर सीढ़ी के ऊपर चढ़ता है। यदि यह सीढ़ी के ऊपरी सिरे से 2 m की दूरी पर ठहरता है। तब जमीन द्वारा सीढ़ी पर लगाया गया अभिलम्ब बल व घर्षण बल क्या होगा? पेन्टर के सुरक्षित काम करने के लिए जमीन तथा सीढी के मध्य न्यूनतम घर्षण गुणांक क्या होना चाहिए? ($g = 10\ m/s^2$)

Sol.



For translational equilibrium स्थानान्तरीय साम्यावस्था के लिये

$\Sigma F_x = 0$ $\quad$ $\Sigma F_y = 0$

$N_1 = f$ $\quad$ $N_2 = 75g + 24g = 99g = 990$ N

Rotational equilibrium $\tau = 0$ (about any point)
घूर्णन साम्यावस्था में $\tau = 0$ (किसी भी बिन्दु के सापेक्ष)

$\tau_B = 0$

$N_1 \times 6 = 24g\,(5\cos 37^o) + 75g\,(8\cos 37^o)$

$N_1 \times 6 = 24g\,(5 \times \frac{4}{5}) + 75g\,(8 \times \frac{4}{5})$

$N_1 \times 6 = (96g + 480\,g)$

$N_1 = 96g = 960$ N

$f = N_1$

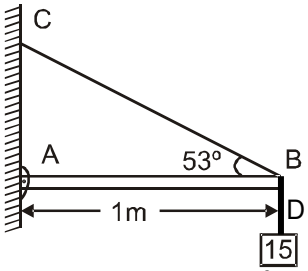
$\mu N_2 = N_1$

$\mu = \frac{N_1}{N_2} = \frac{96g}{99g} = \frac{32}{33}$

Ans. 990 N, 960 N , $\frac{32}{33}$

D-4. In the system as shown in figure, AB is a uniform rod of mass 10 kg and BC is a light string which is connected between wall and rod, in vertical plane. There is block of mass 15 kg connected at B with a light string. [Take g = 10 m/s^2] (BC and BD are two different strings)

चित्रानुसार प्रदर्शित निकाय में, ऊर्ध्वाधर तल में, एक समान द्रव्यमान 10 kg की छड AB है BC हल्की डोरी है जोकी दीवार तथा छड़ के मध्य उर्ध्वाधर तल में जुडी है, 15 kg का एक ब्लॉक B पर हल्की डोरी से जुडा है– [g = 10 m/s^2] (BC तथा BD दो भिन्न डोरी है)



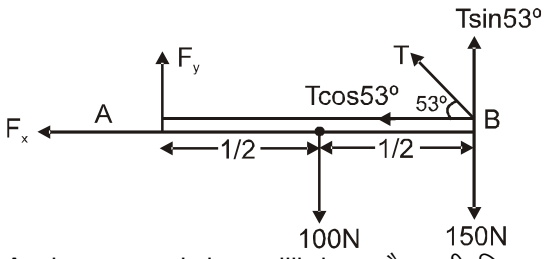
If whole of the system is in equilibrium then find यदि पूर्ण निकाय संतुलन में है तो

(i) Tension in the string BC — BC डोरी में तनाव ज्ञात करो

(ii) Hinge force exerted on beam at point A — A पर कीलक द्वारा आरोपित बल ज्ञात करो

Ans. (i) T = 250 N (ii) F_H= 150 N (→), F_V = 50 N (↑)

Sol. F.B.D. of Rod छड का



As the system is in equilibrium. जैसा की निकाय संतुलन में है।

$\sum F_x = 0$

$F_x + T \sin 53^\circ = 0$ ....(i)

$\sum F_x = 0$

$F_y + T\sin 53^\circ - 100 - 150 = 0$

$F_y + T \sin 53^\circ = 250$ ....(ii)

$\sum Z_A = 0$

$\Rightarrow \quad T \sin 53\ (i) - 100 \times \frac{1}{2} - 150 \times 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{4T}{5} = 200 \quad \Rightarrow \quad T = 250$ N

From eqn (i) $F_x = -T \cos 53$

समीकरण (i) से $F_x = -T \cos 53$

$= -250 \times \frac{3}{5} = -150$ N

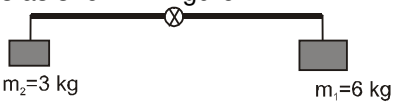
From eqn (ii) $F_y = 250 - T \sin 53 = 50$ N

समीकरण (ii) से $F_y = 250 - T \sin 53 = 50$ N

Section (E) : Rotation about fixed axis ($\tau_H = I_H\alpha$)

खण्ड (E) : स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन ($\tau_H = I_H\alpha$)

E-1. A rod of negligible mass having length ℓ = 2 m is pivoted at its centre and two masses of m_1 = 6 kg and m_2 = 3 kg are hung from the ends as shown in figure.



(a) Find the initial angular acceleration of the rod if it is horizontal initially.

(b) If the rod is uniform and has a mass of m_3 = 3 kg.

(i) Find the initial angular acceleration of the rod.

(ii) Find the tension in the supports to the blocks of mass 3 kg and 6 kg (g = 10 m/s^2).

ℓ = 2 m मीटर लम्बाई की नगण्य द्रव्यमान की एक छड़ चित्रानुसार मध्य बिन्दु से आलम्बित है तथा m_1 = 6 kg तथा m_2 = 3 kg के दो पिण्ड इसके किनारों से चित्रानुसार लटकाए जाते हैं

(a) यह मानते हुए कि छड़ प्रारम्भ में क्षैतिज थी। छड़ का प्रारम्भिक कोणीय त्वरण ज्ञात करो।

(b) यदि छड़ का द्रव्यमान m_3 = 3 kg है तथा इसकी लम्बाई पर समान रूप से वितरित हो तो ।

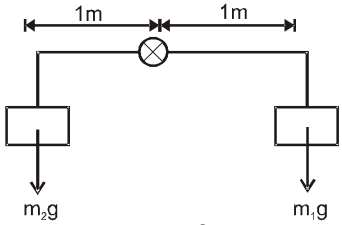
(i) छड़ का प्रारम्भिक कोणीय त्वरण ज्ञात करो।

(ii) 3 kg तथा 6 kg के ब्लॉक से जुड़ी हुई डोरी में तनाव ज्ञात करो। (g = 10 m/s^2)

Ans. **(a)** $\frac{2g}{\ell}\frac{(m_1-m_2)}{(m_1+m_2)} = \frac{10}{3}$ rad/s^2

(b) (i) $\alpha' = \frac{2(m_1-m_2)g}{\ell\left[m_1+m_2+\frac{m_3}{3}\right]}$ = 3 rad/s^2 , (ii) 42 N ; 39 N

Sol. **(a)**



Torque about hinge हिन्ज (hinge) या कीलकीत बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण

$(m_1g - m_2g)\left(\frac{\ell}{2}\right) = I.\,\alpha$

$\alpha = \frac{(m_1-m_2)g(\ell/2)}{m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

$\alpha = \frac{2(m_1-m_2)g}{(m_1+m_2)\,\ell}$

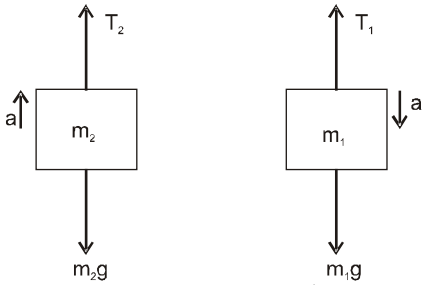
$\alpha = \frac{2(6-3)10}{2(6+3)} = \frac{10}{3}$ rad/sec^2

(b) If mass of rod is 3 Kg Torque about hinge यदि छड का द्रव्यमान 3 Kg है तो कीलकीत बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण

$(m_1g - m_2g)\ \frac{\ell}{2} = I'\alpha'$

$$\alpha' = \frac{(m_1 - m_2)g\left(\frac{\ell}{2}\right)}{\left[m_1\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{m_3\ell^2}{12}\right]}$$

$$\alpha' = \frac{2(m_1 - m_2)g}{\ell\left[m_1 + m_2 + \frac{m_3}{3}\right]} = \frac{2(6-3)10}{2\left[6+3+\frac{3}{3}\right]} = 3\ \text{rad/s}^2$$



For m_1 block m_1 ब्लॉक के लिए

$m_1g - T_1 = m_1a$

$$T_1 = \left(m_1g - \frac{m_1\ell\alpha}{2}\right)$$

$$T_1 = 60 - \frac{6\times2\times3}{2} = 42\ \text{N}$$

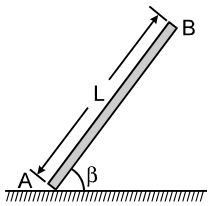
For m_2 block m_2 ब्लॉक के लिए

$T_2 - m_2g = m_2a$

$$T_2 = m_2g + m_2\ \frac{\ell\alpha}{2} = 30 + \frac{3\times2\times3}{2} \qquad T_2 = 39\ \text{N}$$

E-2. The uniform rod AB of mass m is released from rest when $\beta = 60^\circ$. Assuming that the friction force between end A and the surface is large enough to prevent sliding, determine (for the instant just after release)

चित्रानुसार एक समरूप द्रव्यमान m की छड़ AB, $\beta = 60^\circ$ से विराम से छोड़ी जाती है। यह मानिये कि किनारे A व सतह के मध्य घर्षण फिसलने से रोकने के लिए पर्याप्त है, तो छोड़ने के ठीक बाद ज्ञात करें—



(a) The angular acceleration of the rod

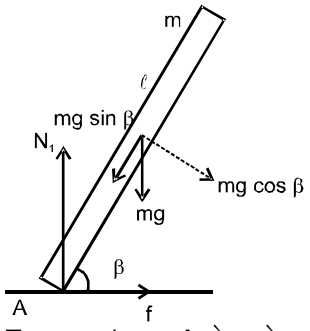
(b) The normal reaction and the friction force at A.

(a) छड़ का कोणीय त्वरण

(b) A पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल व घर्षण बल

Ans. (a) $\frac{3g}{4L}$ (cw) (b) $N = \frac{13\ mg}{16}\uparrow$, $F = \left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)mg \rightarrow$

Sol.



Torque about A के सापेक्ष बलाघूर्ण

$\tau = I\,\alpha$

$(mg\cos\beta)\,\frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{3}\,\alpha$

$\alpha = \frac{3g\cos 60}{2\ell} = \left(\frac{3g}{4\ell}\right)$

using Newton 2nd law न्यूटन के द्वितीय नियम के उपयोग से

$mg - N = (ma_y)$

$N = (mg - ma_y)$ $\qquad a_y : \alpha\left(\frac{\ell}{2}\cos\beta\right)$

$N = \left(mg - m\alpha\frac{\ell}{2}\cos\beta\right)$

$N = mg - m\,\frac{3g}{4\ell}\,\frac{\ell}{2}\,\cos 60 = mg - \frac{3mg}{6} = \left(\frac{13mg}{16}\right)$

$f = (m\,a_x)$

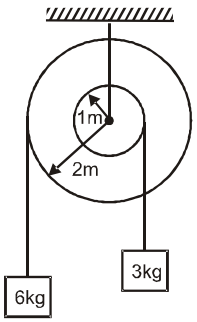
$f = m\left(\alpha\frac{\ell}{2}\sin\beta\right)$

$f = m\left(\frac{3g}{4\ell}\right)\left(\frac{\ell}{2}\right)\ \sin 60$

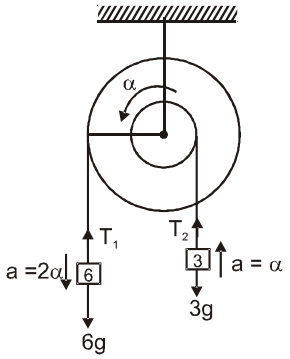
$f = \frac{3mg}{4\ell}\,\frac{\ell}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \left(f = \frac{3\sqrt{3}}{16}mg\right)$

E-3. The moment of inertia of the pulley system as shown in the figure is 3 kg – m^2. The radii of bigger and smaller pulleys are 2m and 1m respectively. As the system is released from rest, find the angular acceleration of the pulley system. (Assume that there is no slipping between string & pulley and string is light) [Take g = 10 m/s^2]

चित्र में प्रदर्शित घिरनी निकाय का जडत्व आघूर्ण 3 kg – m^2 है। बडी एवं छोटी घिरनी की त्रिज्या क्रमशः 2m एवं 1m है जब निकाय को विराम से मुक्त किया जाता है तथा यह मानीए घिरनी तथा रस्सी में फिसलन नहीं है तथा रस्सी हल्की है तब घिरनी के इस निकाय का कोणिय त्वरण का मान ज्ञात करे। [g = 10 m/s^2]



Sol. Let α be the angular acceleration of the pulley system.
α घिरनी निकाय का कोणिय त्वरण है—



For 6 kg block 6 kg ब्लॉक के लिये

$6g - T_1 = 6(2\alpha)$ .....(i)

for 3 kg block 3 kg ब्लॉक के लिये

$T_2 - 3g = 3\alpha$ .....(ii)

for pulley system घिरनी निकाय के लिये

$\Rightarrow \quad 2T_1 - T_2 = I\alpha = 3\alpha$ .....(iii)

From equation (i) and (ii) putting the values of T_1 and T_2.
समीकरण (i) तथा (ii) से T_1 तथा T_2 के मान रखने पर

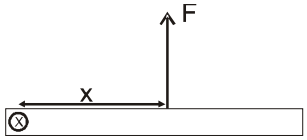
$\Rightarrow \quad 2[6g - 12\alpha] - [3g + 3\alpha] = 3\alpha$

$\Rightarrow \quad 12g - 24\alpha - 3g - 3\alpha = 3\alpha$

$\Rightarrow \quad 30\alpha - 9g$

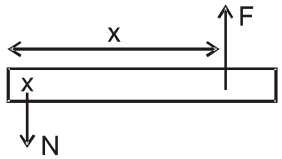
$\Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{90}{30} = 3 \text{ rad/s}^2$ **Ans.**

E-4. A uniform thin rod of length L is hinged about one of its ends and is free to rotate about the hinge without friction. Neglect the effect of gravity. A force F is applied at a distance x from the hinge on the rod such that force is always perpendicular to the rod. Find the normal reaction at the hinge as function of 'x', at the initial instant when the angular velocity of rod is zero.
L लम्बाई की एकसमान पतली छड़ को इसके एक सिरे के परितः किलकीत (hinge) कर दिया जाता है तथा यह किलक (hinge) के परितः बिना घर्षण के घूमने के लिए स्वतन्त्र है। गुरूत्व का प्रभाव नगण्य है। छड़ पर किलक से x दूरी पर एक बल F इस प्रकार लगाया जाता है कि बल हमेशा छड़ के लम्बवत् होता है। जब छड़ का कोणीय वेग शून्य हो जाता है तब उस क्षण पर किलक पर आरोपित अभिलम्ब प्रतिक्रिया x के फलन के रूप में ज्ञात करों।



Ans. $N = F\left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{x}{\ell}\right)$

Sol. $Fx = \dfrac{M\ell^2}{3}\alpha$



$F - N = M\dfrac{\ell}{2}\alpha \quad N = F - M\dfrac{\ell}{2}\left(\dfrac{3Fx}{M\ell^2}\right)$

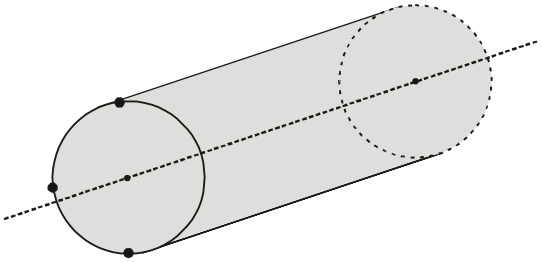
$N = F\left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{x}{\ell}\right)$

Section (F) : Rotation about Fixed Axis (Energy conservation)

खण्ड (F) : स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन (ऊर्जा संरक्षण) :

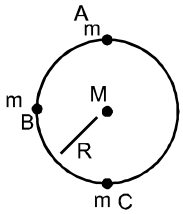
F-1. A solid cylinder of mass M = 1kg & radius R = 0.5m is pivoted at its centre & has three particles of mass m = 0.1kg mounted at its perimeter in the vertical plane as shown in the figure. The system is initially at rest. Find the angular speed of the cylinder, when it has swung through 90_0 in anticlockwise direction. [Take g = 10 m/s^2]

M = 1kg द्रव्यमान व R = 0.5m त्रिज्या का एक ठोस बेलन इसके केन्द्र से कीलकित किया जाता है तथा m = 0.1kg के तीन कण चित्रानुसार ऊर्ध्वाधर तल में इसकी परिधि पर बाँधे जाते हैं। प्रारम्भ में निकाय विरामावस्था में है। जब यह वामावर्त दिशा में 90° का कोण तय कर लेता है, तब बेलन का कोणीय वेग ज्ञात करो, [g = 10 m/s^2]

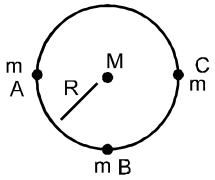


Ans. $\omega = \sqrt{5}$ rad/s

Sol.



After rotating 90º 90º से घूर्णन के बाद



Using Energy conservation ऊर्जा संरक्षण के उपयोग से

$U_i + K_i = U_f + K_f$

$(2mg\,R + mg\,R + 0 + 0) = mg\,R + O + mg\,R + \frac{1}{2}\,I\omega^2$

$3mg\,R = 2mg\,R + \frac{1}{2}\,I\omega^2 \quad \Rightarrow \quad (mg\,R = \frac{1}{2}\,I\omega^2)$

$2mg = \left(\frac{MR}{2} + 3mR\right)\omega^2$

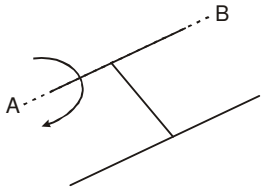
$\omega^2 = \left(\frac{4mg}{MR + 6mR}\right)$

$\omega = \sqrt{\frac{4mg}{MR + 6mR}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.1 \times 10}{1 \times 0.5 + 6 \times 0.1 \times 0.5}}$

$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{5}$ rad/s

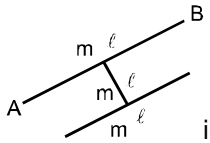
F-2. A rigid body is made of three identical uniform thin rods each of length L fastened together in the form of letter H. The body is free to rotate about a fixed horizontal axis AB that passes through one of the legs of the H. The body is allowed to fall from rest from a position in which the plane of H is horizontal. What is the angular speed of the body, when the plane of H is vertical.

एक दृढ़ वस्तु तीन L लम्बाई की समरूप छड़ से मिलकर H आकृति की बनाई जाती है। यह वस्तु क्षैतिज अक्ष AB के सापेक्ष घूर्णन के लिए स्वतंत्र है जब H का तल क्षैतिज हो तब इसे विराम से छोड़ा जाता हैं। जब H का तल ऊर्ध्वाधर हो तो इसका कोणीय वेग क्या होगा ?

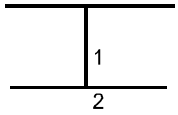


Ans. $\omega = \sqrt{\frac{9\,g}{4\,\ell}}$

Sol.



initial positial प्रारिम्भक स्थिती



final position अन्तिम स्थिति

Using Energy conservation ऊर्जा सरक्षंण से

$K_i + U_i = K_f + U_f$

$0 + 3mg\,\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}\,I\omega^2$

$I = (I_1 + I_2)$

$[I = \frac{m\ell^2}{3} + m\ell^2]$

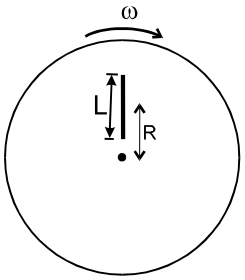
$3mg\,\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3} + m\ell^2\right)\omega^2 + 0$

$3g\ell = \left(\frac{\ell^2}{3} + \ell^2\right)\omega^2$

$3g = \frac{4\ell}{3}\,\omega^2$

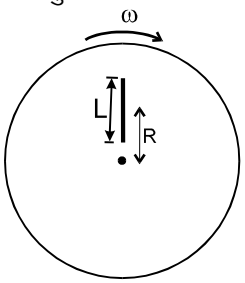
$\omega = \sqrt{\frac{9g}{4\ell}}$

F-3. A uniform rod of mass m and length L lies radially on a disc rotating with angular speed ω in a horizontal plane about its axis. The rod does not slip on the disc and the centre of the rod is at a distance R from the centre of the disc. Find out the kinetic energy of the rod.
अपनी अक्ष के परितः क्षैतिज तल में ω कोणीय वेग से घूमती चकती पर, m द्रव्यमान तथा L लम्बाई की एक समान छड त्रिज्यीय दिशा में रखी है। छड़, चकती पर फिसलती नहीं है तथा छड़ का केन्द्र, चकती के केन्द्र से R दूरी पर है, तब छड़ की गतिज ऊर्जा ज्ञात करो।



Ans. $\frac{1}{2}m\omega^2\left(R^2+\frac{L^2}{12}\right)$

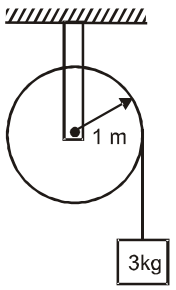
Sol. Moment of inertia of the rod w.r.t. the axis through centre of the disc is : (by parallel axis theorem).
छड़ का जड़त्व आघूर्ण चकती के केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष (समान्तर अक्ष प्रमेय से)



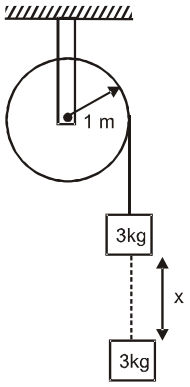
$I = \frac{mL^2}{12} + mR^2$

& K.E. of rod w.r.t. disc (चकती के परित छड़ की गतिज ऊर्जा) $= \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left[R^2+\frac{L^2}{12}\right]$ **Ans.**

F-4. The moment of inertia of the pulley system as shown in figure is 3 kgm^2. Its radius is 1m. The system is released from rest find the linear velocity of the block, when it has descended through 40 cm. (Assume that there is no slipping between string & pulley and string is light) [Take g = 10 m/s^2]
चित्रानुसार घिरनी निकाय का जड़त्वाघूर्ण 3 kgm^2 है। जब निकाय को विराम से मुक्त करते है तो ब्लॉक के 40 cm नीचे गिरने पर ब्लॉक की रेखिय चाल ज्ञात करो। घिरनी की त्रिज्या 1 m है तथा यह मानिये कि डोरी व घिरनी के मध्य कोई फिसलन नहीं है एवं डोरी हल्की है [g = 10 m/s^2]



Sol. When the block is descended through x, let its velocity be V.
from energy conservation
जब ब्लॉक x नीचे तब इसकी चाल V मानें तो ऊर्जा संरक्षण के नियम से.



$mgx = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2$

$mgx = \frac{1}{2} I\left(\frac{V}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow \quad 2mgx = V^2\left[\frac{I}{r^2} + m\right]$

Putting all given values दिये गये मान रखने पर V = 2 m/s

Section (G) : Angular Momentum & its conservation
खण्ड (G) : कोणीय संवेग तथा उसका संरक्षण

G-1. A particle having mass 2 kg is moving with velocity $(2\hat{i} + 3\hat{j})$m/s. Find angular momentum of the particle about origin when it is at (1, 1, 0).
2 kg द्रव्यमान का कण $(2\hat{i} + 3\hat{j})$m/s के वेग से गतिमान है। जब कण (1, 1, 0) पर है तब कण का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो।

Ans. $2\hat{k}$ kg m²/s

Sol. $\left(\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\right)$ $\qquad \vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{L} = \left(\hat{i} + \hat{j} + 0\hat{k}\right) \times \left(4\hat{i} + 6j\right)$ $\qquad \vec{p} = (4\hat{i} + 6\hat{j})$

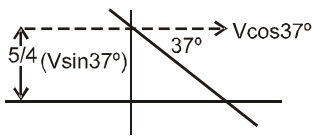
$\vec{L} = 6\hat{k} - 4\hat{k} = 2\hat{k}$ kgm²/s $\qquad \vec{r} = \left(\hat{i} + \hat{j} + o\hat{k}\right)$

G-2. A particle having mass 2 kg is moving along straight line 3x + 4y = 5 with speed 8m/s. Find angular momentum of the particle about origin. x and y are in meters.
2 kg द्रव्यमान का कण सरल रेखा 3x + 4y = 5 के अनुदिश 8m/s की चाल से गतिमान है। कण का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो। x और y मीटर में है।

Ans. 16 kg m²/s

Sol. 3x + 4y = 5

$\left(y = \frac{-3x}{4} + \frac{5}{4}\right)$

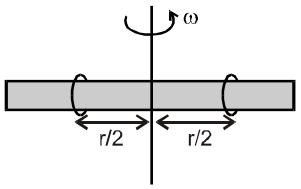


P = mv = 2 × 8 = 16 (kg – m/s)
L = (5/4) × mv cos 37º

$L = 5/4 \times 2 \times 8 \times \frac{4}{5} = 16$ kg m²/s

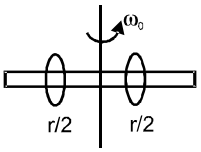
G-3. Two beads (each of mass m) can move freely in a frictionless wire whose rotational inertia with respect to the vertical axis is I. The system is rotated with an angular velocity ω_0 when the beads are at a distance r/2 from the axis. What is the angular velocity of the system when the beads are at a distance r from the axis ?

दो मोती (प्रत्येक द्रव्यमान m) एक घर्षणरहित तार में स्वतंत्रतापूर्वक गति कर सकते हैं। तार का ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है। जब मोती अक्ष से r/2 दूरी पर है, तो निकाय को ω_0 कोणीय वेग से घुमाया जाता है। जब मोती अक्ष से r दूरी पर है, तो निकाय का कोणीय वेग क्या होगा?

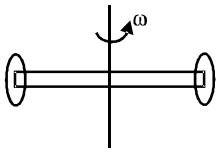


Ans. $\dfrac{\left(I+\dfrac{mr^2}{2}\right)\omega_0}{I+2mr^2}$

Sol.



initial position प्राम्भिक स्थिती



Final position अन्तिम स्थिती

No external torque so $\vec{L}$ = cont. कोई बाह्य बलाघूर्ण नही है $\vec{L}$ = नियत रहेगा

$L_i = L_f$

$(I_i\omega_0 = I_f\omega_0)$

$$\left(I+\frac{mr^2}{4}+\frac{mr^2}{4}\right)\omega_0 = (I + mr^2 + mr^2)\omega$$

$$\left[\omega = \left(\frac{I+\dfrac{mr^2}{2}}{I+2mr^2}\right)\ \omega_0\right]$$

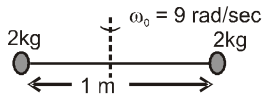
G-4. A system consists of two identical small balls of mass 2 kg each connected to the two ends of a 1 m long light rod. The system is rotating about a fixed axis through the centre of the rod and perpendicular to it at an angular speed of 9 rad/s. An impulsive force of average magnitude 10 N acts on one of the masses in the direction of its velocity for 0.20 s. Calculate the new angular velocity of the system.

एक निकाय में 1 m लम्बाई की हल्की छड़ के दोनों किनारों पर दो एकसमान प्रत्येक 2 kg की गेंद लगी हुई है। निकाय, छड़ के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली व इसके लम्बवत अक्ष के सापेक्ष 9 rad/s के कोणीय वेग से घूर्णन करता है। एक 10 N औसत परिमाण का आवेगी बल एक द्रव्यमान पर 0.20 s तक इसके वेग की दिशा में लगाया जाता है। निकाय का नया कोणीय वेग ज्ञात करो।

Ans. 10 rad/s

Sol. $\left[\vec{\tau}_{ext} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}\right]$

$$d\vec{L} = \left(\vec{\tau}_{ext}\, dt\right)$$



$$\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)=\frac{d\vec{L}}{dt},\ d\vec{L}=\left(\vec{r}\times\vec{F}\right)dt$$

$$(L_f-L_i)=\int (F\ r\ dt) \qquad (I\omega_f-I\omega_i)=(r\ F\ t)$$

$$I(\omega-9)=(0.5)(10)(0.20)$$

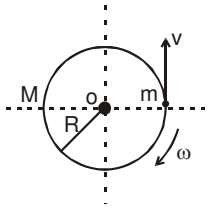
$$\omega-9=\frac{0.5\times10\times0.20}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

ω = 10 rad/s.

G-5. A uniform round board of mass M and radius R is placed on a fixed smooth horizontal plane and is free to rotate about a fixed axis which passes through its centre. A man of mass m is standing on the point marked A on the circumference of the board. At first the board & the man are at rest. The man starts moving along the rim of the board at constant speed v_o relative to the board. Find the angle of board's rotation when the man passes his starting point on the disc first time.
एक M द्रव्यमान व R त्रिज्या का वृत्ताकार बोर्ड एक दृढ़ चिकनी समतल सतह पर रखा जाता है तथा इसके केन्द्र से गुजरने वाली स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूमने के लिए स्वतंत्र है। एक m द्रव्यमान का व्यक्ति बोर्ड की परिधि पर चिन्हित बिन्दु A पर खड़ा है। प्रारम्भ में बोर्ड व आदमी विरामावस्था में है। आदमी बोर्ड की परिधि पर, बोर्ड के सापेक्ष एक नियत चाल v_o से गति प्रारम्भ करता है। जब व्यक्ति बोर्ड पर अपने प्रारम्भिक बिन्दु से पहली बार गुजरता है, तो बोर्ड द्वारा तय किया गया कोण ज्ञात करो।

Ans. $\frac{4\pi m}{M+2m}$

Sol.



Angular momentum conservation about O 'O' के सापेक्ष कोणीय संवेग संरक्षण से

$$I\omega = mvR$$

$$\frac{MR^2}{2}\omega = mvR,\quad MR\omega = 2mv$$

$$v=\left(\frac{MR\omega}{2\ m}\right)$$

With respect to bord man's rotation $v + \omega R$ velocity so in one rotation when velocity $v + \omega R$ angle taken by man (2π).
बोर्ड के सापेक्ष व्यक्ति का घूर्णन वेग $v + \omega R$ है अतः एक घूर्णन में जब वेग $v + \omega R$ है तब व्यक्ति द्वारा तय किया गया कोण (2π) होगा।

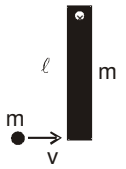
$$t=\left(\frac{2\pi R}{V+\omega R}\right)$$

Angular velocity bord is ω so at the same time angle covered by disc = $\omega\ .\ t=\left(\frac{2\pi}{\omega R+V}\omega R\right)$.

बोर्ड का कोणीय वेग ω है अतः समान समय में चकती द्वारा तय किया गया कोण = $\omega\ .\ t=\left(\frac{2\pi}{\omega R+V}\omega R\right)$.

$$\frac{2\pi\omega R}{\frac{MR\omega}{2m}+\omega R}=\left(\frac{4\pi m}{M+2m}\right)$$

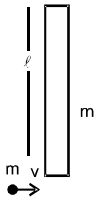
G-6. A point object of mass m moving horizontally hits the lower end of the uniform thin rod of length ℓ and mass m and sticks to it. The rod is resting on a horizontal, frictionless surface and pivoted at the other end as shown in figure.
एक बिन्दु द्रव्यमान m, एक समरूप पतली ℓ लम्बाई व m द्रव्यमान की छड़ के निचले सिरे पर क्षैतिज रूप से टकराता है तथा इससे चिपक जाता है, छड़ क्षैतिज चिकनी सतह पर रखी है एवं दर्शाये अनुसार इसका दूसरा सिरा कीलकित है।



Find out angular velocity of the system just after collision.
टक्कर के ठीक बाद निकाय का कोणीय वेग ज्ञात करो।

Ans. $3v / 4\ell$

Sol.



external torque about hinge is zero, so कीलंकीत बिन्दु के सापेक्ष बाह्य बलाघूर्ण शून्य है अतः

$\vec{L}$ = constant नियत

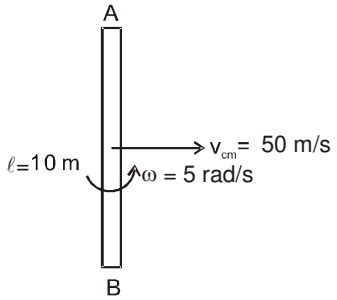
$L_i = L_f$

$mv\ell = I\omega$

$$\omega = \frac{mv\ell}{I} = \frac{mv\ell}{\frac{m\ell^2}{3} + m\ell^2} = \frac{3mv\ell}{4m\ell^2} = \left(\frac{3v}{4\ell}\right)$$

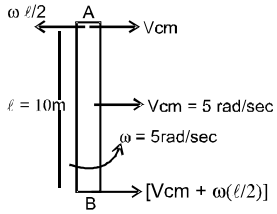
Section (H) : Combined Translational & Rotation Motion (Kinematics)
खण्ड (H) : संयुक्त स्थानांतरीय व घूर्णन गति (गतिकी)

H-1 The centre of mass of a uniform rod of length 10 meter is moving with a translational velocity of 50 m/sec. on a frictionless horizontal surface as shown in the figure and the rod rotates about its centre of mass with an angular velocity of 5 radian/sec. Find out V_A and V_B
चित्रानुसार एक 10 मीटर लम्बी समरूप छड़ का द्रव्यमान केन्द्र 50 m/sec. से घर्षणरहित क्षैतिज सतह पर स्थानान्तरीय गति कर रहा है एवं छड़ इसके द्रव्यमान केन्द्र के परितः 5 radian/sec. के कोणीय वेग से घूमती है। V_A व V_B ज्ञात करो।



Ans. $V_A = 25$ m/s , $V_B = 75$ m/s

Sol.



$V_A = (V_{cm} - \omega\, \ell/2)$

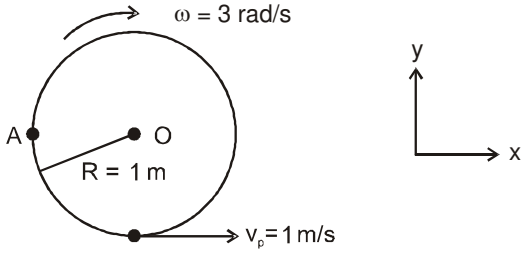
$= 50 - 5 \times 5 = 25$ m/s

$V_B = \left(V_{cm} + \omega\frac{\ell}{2}\right)$

$= 50 + 25 = 75$ m/s

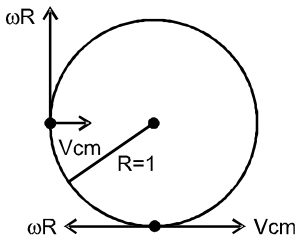
H-2 A ring of radius 1 m. performs combined translational and rotational motion on a frictionless horizontal surface with an angular velocity of 3 rad/sec as shown in the figure. Find out velocity of its centre and point A if the velocity of the lowest point V_P is 1 m/sec.

चित्रानुसार 1 m. त्रिज्या की एक वलय एक घर्षणरहित क्षैतिज सतह पर 3 rad/sec. के कोणीय वेग से संयुक्त स्थानान्तरीय व घूर्णन गति कर रही है। इसके केन्द्र व बिन्दु A का वेग ज्ञात करो यदि निम्नतम बिन्दु का वेग V_P, 1 m/sec. है।



Ans. $V_O = 4$ m/sec $\hat{i}$, $V_A = (4\hat{i} + 3\hat{j})$m/sec

Sol.



$V_{cm} - \omega R = V_P$

$V_{cm} - 3 \times 1 = 1$

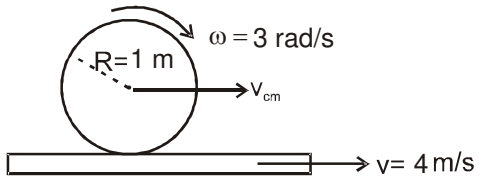
$V_{cm} = 4$ m/sec $\hat{i}$

$V_A = V_{cm}\,\hat{i} + \omega R\,\hat{j}$

$\Rightarrow \quad V_A = (4\hat{i} + 3\hat{j})$

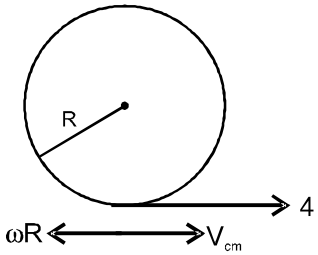
H-3 A plank is moving with a velocity of 4 m/sec. A disc of radius 1 m rolls without slipping on it with an angular velocity of 3 rad/sec as shown in figure. Find out the velocity of centre of the disc.

चित्रानुसार एक पट्टा 4 m/sec. के वेग से चल रहा हैं। त्रिज्या 1 m की एक चकती इस पर बिना फिसले लुढ़क रही है। इसकी कोणीय चाल 3 rad/sec. है। चकती के द्रव्यमान केन्द्र का वेग ज्ञात करो।



Ans. $V_{CM} = 7$ m/s.

Sol.



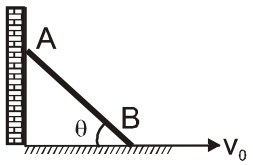
$V_{cm} - \omega R = V$

$V_{cm} = V + \omega R$

$V_{cm} = 4 + 3 \times 1 = 7 m/s$

H-4 The end B of uniform rod AB which makes angle θ with the floor is being pulled with a velocity v_0 as shown. Taking the length of the rod as ℓ, calculate the following at the instant when $\theta = 37^\circ$

समरूप छड़ AB का किनारा B जो फर्श से θ कोण बनाता है, इसे चित्रानुसार v_0 वेग से खींचा जाता है। छड़ की लम्बाई को ℓ मानते हुए, $\theta = 37^\circ$ के कोण की स्थिति पर निम्न का मान ज्ञात करो।



(a) The velocity of end A (b) The angular velocity of rod (c) Velocity of CM of the rod.

(a) किनारे A का वेग (b) छड़ का कोणीय वेग (c) छड़ के द्रव्यमान केन्द्र का वेग

Ans. (a) $\frac{4v_0}{3}$ (b) $\frac{5v_0}{3\ell}$ (c) $v_x = \frac{v_0}{2}$, $v_y = -\frac{2v_0}{3}$

Sol. (a) $v_A \sin\theta = v_0 \cos\theta$

$$v_A = \frac{v_0}{\tan\theta} = \frac{4v_0}{3}$$

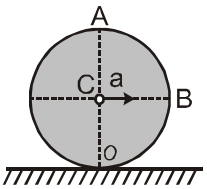
$$(b)\ \omega = \frac{v_0 \sin\theta + v_A \cos\theta}{\ell} = \frac{3v_0 + 4\left(\frac{4v_0}{3}\right)}{5\ell} = \frac{9v_0 + 16v_0}{15\ell} = \frac{5v_0}{3\ell}$$

$$(c)\ v_x = \frac{\ell}{2}\left(\frac{v_{Ax} + v_{Bx}}{\ell}\right) = \frac{v_0}{2}$$

$$v_y = \frac{1}{2}\left(v_{Ay} + v_{By}\right) = \frac{2v_0}{3}$$

H-5. A ball of radius R =10.0 cm rolls without slipping on a horizontal plane so that its centre moves with constant acceleration a = 2.50 cm/s^2; t = 2.00 s after the beginning of motion its position corresponds to that shown in Fig. Find :

एक गेंद की त्रिज्या R =10.0 cm है, जो क्षेतीज तल पर बिना फिसलन के लुढक रही है तथा इसका केन्द्र नियत त्वरण a = 2.50 cm/s^2 से गति करता है। गति शुरू होने के t = 2.00 s के बाद इसकी स्थिति चित्र में दर्शाए अनुसार है। बताओ :



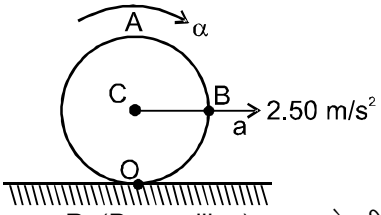
(a) the velocities of the points A, B and O (b) the accelerations of these points.

(a) बिन्दु A, B तथा O का वेग (b) इन बिन्दुओं का त्वरण

Ans : **(a) $v_A = 2at = 10.0$ cm/s, $v_B = \sqrt{2}\ at = 7.1$ cm/s, $v_0 = 0$; (b) $a_A = 2a\sqrt{1+\left(\frac{2t^2a}{R}\right)^2} = 5.6$ cm/s^2,**

$a_B = a = 2.5$ cm/s^2, $a_0 = a^2t^2 / R = 2.5$ cm/s^2

Sol.

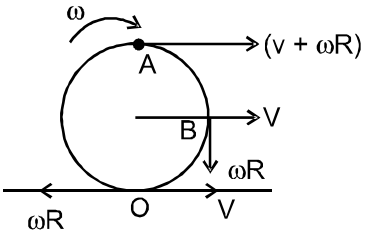


$a = \alpha R$ (Pure rolling) शुद्ध लोटनी गति

$v = u + at \quad \Rightarrow (v = at)$

For pure rolling = $(v = \omega R)$ शुद्ध लोटनी गति के लिये

(a) After 2 sec (a) 2 sec बाद

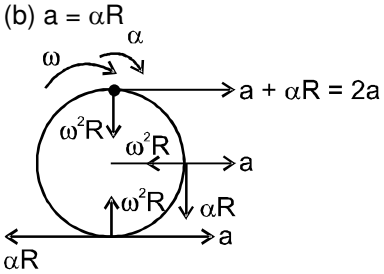


$V_A = V + \omega R = 2V = 2at$

$V_B = V_i + \omega R\,(-j) = (\sqrt{2}\ V) = \sqrt{2}\ at$

$V_0 = V - \omega R = 0$

(b) $a = \alpha R$



$a_A = 2a\ \hat{i} + \omega^2 R\,(-\hat{j})$

$a_A = 2a\ \hat{i} + \frac{\omega^2R^2}{R}\,(-\hat{j})$

$a_A = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{4a^2t^2}{R}\right)^2}\ ,\ \sqrt{4a^2 + \frac{16a^4t^4}{R^2}}$

$a_A = 2a\sqrt{1+\frac{4a^2t^4}{R^2}}$

$a_B = (a - \omega^2 R)\ \hat{i} + (\alpha R)\,(-\hat{j})$

$a_B = \left(a - \frac{4a^2t^2}{R}\right)\hat{i} + a\,(-\hat{j})$

$a_C = \omega^2 R$

$a_C = \frac{v^2}{R} = \left(\frac{a^2t^2}{R}\right)$

Section (I) : Combined translational & Rotational Motion (Dynamics)

खण्ड (I) : संयुक्त स्थानांतरीय व घूर्णन (बल गतिकी)

I-1. A small solid cylinder is released from a point at a height h on a rough as track shown in figure. assuming that it does not slip anywhere, calculates its linear speed when it rolls on the horizontal part of the track.
एक खुरदरे पथ पर एक छोटे ठोस बेलन को h ऊँचाई पर स्थित बिन्दु से चित्रानुसार छोड़ा जाता है। यह मानते हुए कि यह कहीं भी नहीं फिसलता है तो पथ के क्षैतिज भाग पर लुढ़कने पर इसकी रेखीय चाल ज्ञात करो।

Ans. $\sqrt{\frac{4gh}{3}}$

Sol. ($v = \omega R$)
Using energy conservation ऊर्जा सरंक्षण से

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh = \frac{3mv^2}{4} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

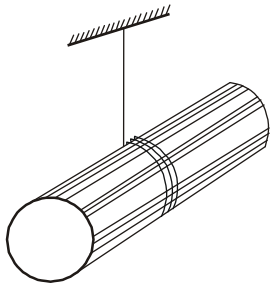
I-2. A uniform ball of mass 'm' rolls without sliding on a fixed horizontal surface. The velocity of the lowest point of the ball with respect to the centre of the ball is V. Find out the total kinetic energy of the ball.
m द्रव्यमान की एक समरूप ठोस गेंद एक स्थिर क्षैतिज धरातल पर बिना फिसले लुढ़कती है। गेंद के केन्द्र के सापेक्ष इसके निम्नतम बिन्दु का वेग V है। गेंद की कुल गतिज ऊर्जा होगी –

Sol. Total KE कुल गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega^2 \qquad 6$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

I-3. A string is wrapped over the curved surface of a uniform solid cylinder and the free end is fixed with rigid support. The solid cylinder moves down, unwinding the string. Find the downward acceleration of the solid cylinder.
एक समरूप ठोस बेलन की वक्रीय सतह पर एक डोरी लिपटी हुई है, तथा इसका दूसरा सिरा स्थिर दृढ़ आधार पर बंधा हुआ है। डोरी के खुलने से ठोस बेलन नीचे की ओर गतिशील है। ठोस बेलन का नीचे की ओर त्वरण ज्ञात कीजिये।



Ans. $\frac{2}{3}g$

Sol. For linear motion :
रेखीय गति के लिए

$$mg - T = ma \quad \text{.....(i)}$$

For angular motion :
धुर्णी गति के लिए

$$T.R. = \left(\frac{mR^2}{2}\right)\alpha$$

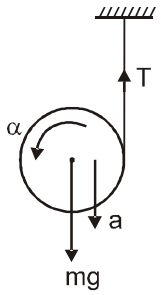
$$T = \frac{mR\alpha}{2} \quad \text{.....(ii)}$$

For no sliping :
कोई फिसलन नहीं है अतः

$$a = R\alpha \quad \text{.....(iii)}$$

From equation (i), (ii) & (iii)
समीकरण (i), (ii) तथा (iii) से

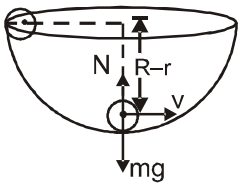
$$a = \frac{2}{3}g$$



I-4. A uniform disk of mass m is released from rest from the rim of a fixed hemispherical bowl so that it rolls along the surface. If the rim of the hemisphere is kept horizontal, find the normal force exerted by the bowl on the disk when it reaches the bottom of the bowl.
एक स्थिर अर्ध गोलाकार प्याले की परिधी के किनारे से m द्रव्यमान की एक समरूप चकती को इस प्रकार मुक्त किया जाता है कि यह सतह पर लुढ़कती हुई नीचे की ओर आती है। यदि प्याले की परिधि क्षैतिज रखी हुई है, तो जब चकती, प्याले के पैदें पर पहुंचती है, तो प्याले द्वारा चकती पर लगााया गया अभिलम्बवत् बल ज्ञात कीजिये।

Ans. $\frac{7}{3}mg$

Sol.



Let R & r be the radii of hemispherical bowl & disc respectively
From energy conservation,
R तथा r क्रमशः अर्द्धगोले तथा चकती की त्रिज्याएं है तो ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$mg(R - r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

For pure rolling,
शुद्ध लोटनी गति के लिए

$$v = r\omega$$

$$mg(R - r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$mg(R-r) = \frac{3}{4} mv^2$ .....(i)

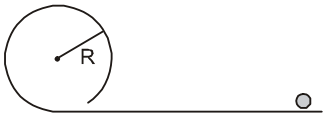
From FBD of bottom :
नीचे के लिए FBD से

$$N - mg = \frac{mv^2}{(R-r)} \quad .....(ii)$$

From equ. (i) & (ii),
समीकरण (i) व (ii) से

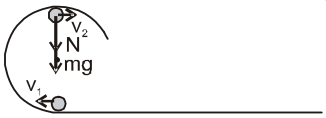
$$N = \frac{7}{3} mg$$

I-5. There is a rough track, a portion of which is in the form of a cylinder of radius R as shown in the figure. Find the minimum linear speed of a uniform ring of radius r with which it should be set rolling without sliding on the horizontal part so that it can complete round the circle without sliding on the cylindrical part.
चित्र में प्रदर्शित पथ खुरदरा है तथा इसका एक भाग बेलनाकार है, जिसकी त्रिज्या R है। इसके क्षेतिज भाग पर r त्रिज्या वाली एक समान वलय को किस न्यूनतम रेखीय चाल से बिना फिसले लुढकते हुए रखा जाये कि यह बेलनाकार भाग में वृत्ताकार पथ पर पूरा बिना फिसले चक्कर लगा सके?



Ans. $\sqrt{3g(R-r)}$

Sol. Let v_1 & v_2 be minimum speed of ring of bottom & top of cylindrical part
माना v_1 तथा v_2 बैलन के तलीय तथा उच्चतम बिन्दु पर वलय की चाल है।



At top of path
सबसे ऊपर के बिन्दु पर

$$N + mg = \frac{mv_2^2}{(R-r)}$$

for minimum speed न्यूनतम चाल के लिए N = 0

$v_2^2 = g(R-r)$ ..... (i)

From energy conservation between bottom & top point of cylindrical part
बैलनाकार भाग के उच्चतम व निम्नतम बिन्दु के मध्य ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$\frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} I\omega_1^2 = 2mg(R-r) + \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} I\omega_2^2$$

For pure rolling शुद्ध लोटनी गति के लिए $\omega_1 = \frac{v_1}{r}$, $\omega_2 = \frac{v_2}{r}$

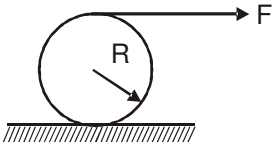
$$\Rightarrow \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} (mr^2) \frac{v_1^2}{r^2} = 2mg(R-r) + \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} (mr^2) \frac{v_2^2}{r^2}$$

$\Rightarrow mv_1^2 = 2mg(R-r) + mv_2^2$ ..... (ii)
from equation (i) & (ii) समीकरण (i) व (ii) से

$\Rightarrow mv_1^2 = 2mg(R-r) + mg(R-r)$

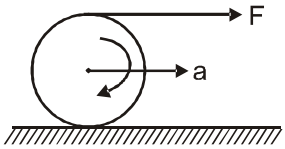
$\Rightarrow v_1 = \sqrt{3g(R-r)}$

I-6. A uniform solid sphere of radius R is placed on a smooth horizontal surface. It is pulled by a by constant force acting along the tangent from the highest point. Calculate the distance travelled by the centre of mass of the solid sphere during the time it makes one full revolution.
एक चिकनी क्षेतिज सतह पर R त्रिज्या का एक समान ठोस गोला स्थित है। चित्रानुसार यह इसके शीर्षतम बिन्दु पर स्पर्श रेखीय अचर बल द्वारा खींचा जाता है। गोला के द्वारा एक पूर्ण चक्कर तय करने में, लगे समय में इसके द्रव्यमान केन्द्र द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिये।



Ans. $4\pi R/5$

Sol.



For linear motion,

$F = ma$ .....(i)

For angular motion,

$$F.R. = \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\alpha$$

$$\alpha = \frac{5F}{2mR} \quad \text{.....(ii)}$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$2\pi = 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{5F}{2mR}\right)t^2$$

$$t^2 = \left[\frac{8\pi mR}{5F}\right]$$

Distance covered by sphere during one full rotation

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

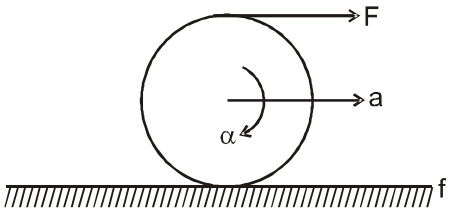
$$= 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m}\right)\left(\frac{8\pi mR}{5F}\right)$$

$$S = \frac{4\pi R}{5}$$

I-7. A uniform hollow sphere of mass m = 1 kg is placed on a rough horizontal surface for which the coefficient of static friction between the surfaces in contact is $\mu = 2/5$. Find the maximum constant force which can be applied at the highest point in the horizontal direction so that the sphere can roll without slipping. (Take $g = 10\ m/s^2$)
एक क्षेतिज सतह पर m = 1 किग्रा द्रव्यमान वाला एक एकसमान खोखला गोला रखा हुआ है। सम्पर्क सतहों के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक का मान $\mu = 2/5$ है। शीर्षतम बिन्दु पर क्षेतिज दिशा में अधिकतम कितना अचर बल लगाया जा सकता है कि गोला सतह पर बिना फिसले लुढ़के ? ($g = 10\ m/s^2$)

Ans. $5\ \mu mg$, 20 N

Sol.



For linear motion
रेखीय गति के लिए

$$F + f = ma \qquad \text{.....(i)}$$

for angular motion
घुर्णी गति के लिए

$$(F - f)\,R = \left(\frac{2}{3}mR^2\right)\alpha \qquad \text{..... (ii)}$$

for pure rolling $a = R\alpha$ ..... (iii)
शुद्ध लोटनी गति के लिए

From equation (i) (ii) & (iii) समीकरण (i) (ii) व (iii) से

$$\frac{F+f}{F-f} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ $F = 5f$

$F_{max} = 5f_{max}$

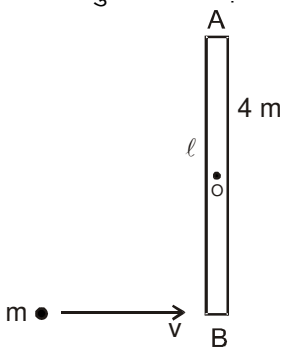
$F_{max} = 5\mu mg = 20$ N

Section (J) : Conservation of angular momentum (Combined translation & rotational motion)

खण्ड (J) : कोणीय संवेग संरक्षण (संयुक्त स्थानान्तरीय एवं घूर्णन गति)

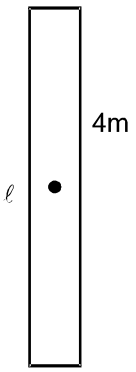
J-1 A uniform rod of length ℓ and mass 4m lies on a frictionless horizontal surface on which it is free to move anyway. A ball of mass m moving with speed v as shown in figure.collides with the rod at one of the ends. If ball comes to rest immediately after collision then find out angular velocity ω of rod just after collistion.

लम्बाई ℓ व द्रव्यमान 4m की एक समरूप छड़ एक घर्षणरहित क्षैतिज सतह पर रखी है। यह किसी भी तरफ जाने के लिए स्वतंत्र है। m द्रव्यमान की एक गेंद, v चाल से चित्रानुसार छड़ के एक सिरे पर टकराती है। यदि टक्कर के तुरन्त बाद गेंद विराम पर आ जाती है तो टक्कर के तुरन्त बाद छड़ का कोणीय वेग ω ज्ञात करो।



Ans. $\omega = 3\,v/2\ell$

Sol.



Torque about centre of mass of external force is zero. द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बाह्य बलो का बलाघूर्ण शून्य है।

$L_i = L_f$

$mv\ \frac{\ell}{2} = 4m\left(\frac{\ell^2}{12}\right).\ \omega$

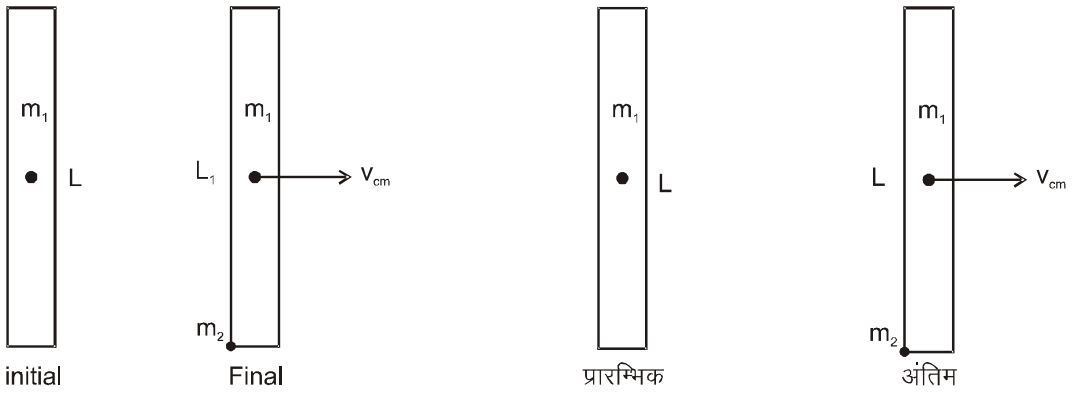
$\Rightarrow\ \left(\omega = \frac{3v}{2\ell}\right)$

J-2. A uniform rod having mass m_1 and length L lies on a smooth horizontal surface. A particle of mass m_2 moving with speed u on the horizontal surface strikes the free rod perpendicularly at an end and it sticks to the rod.
(a) Calculate the velocity of the com C of the system constituting "the rod plus the particle".
(b) Calculate the velocity of the particle with respect to C before the collision.
(c) Calculate the velocity of the rod with respect to C before the collision
(d) Calculate the angular momentum of the particle and of the rod about the com C before the collision.
(e) Calculate the moment of inertia of the rod plus particle about the vertical axis through the centre of mass C after the collision.
(f) Calculate the velocity of the com C and the angular velocity of the system about the centre of mass after the collision.
m_1 द्रव्यमान व L लम्बाई की एक समरूप छड़ क्षैतिज चिकनी सतह पर रखी गई है। m_2 द्रव्यमान का एक कण u चाल से गति करता हुआ छड़ के लम्बवत एक किनारे पर लम्बवत् टकराता है तथा चिपक जाता है। (a) छड़ व कण निकाय के द्रव्यमान केन्द्र C का वेग ज्ञात करो। (b) टक्कर से पहले कण का C के सापेक्ष वेग ज्ञात करो। (c) टक्कर से पहले छड़ का C के सापेक्ष वेग ज्ञात करो। (d) टक्कर से पहले कण व छड़ का C के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो। (e) टक्कर के पश्चात् निकाय का (छड़ तथा कण) द्रव्यमान केन्द्र C से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो (f) टक्कर के पश्चात् द्रव्यमान केन्द्र C का वेग तथा द्रव्यमान केन्द्र C के सापेक्ष निकाय का कोणीय वेग ज्ञात करो।

Ans. (a) $\frac{m_2u}{m_1+m_2}$ (b) $\frac{m_1u}{m_1+m_2}$ (c) $-\frac{m_2u}{m_1+m_2}$ (d) $\frac{m_1^2m_2uL}{2\ (m_1+m_2)^2}, \frac{m_1m_2^2uL}{2\ (m_1+m_2)^2}$

(e) $\frac{m_1(m_1+4m_2)L^2}{12\ (m_1+m_2)}$ (f) $\frac{m_2u}{m_1+m_2}, \frac{6\ m_2u}{(m_1+4m_2)\ L}$

Sol.



(a) $P_i = m_2v$

$P_f = (m_1 + m_2)\, V_{cm}$

$m_2v = (m_1 + m_2)\, V_{cm}$

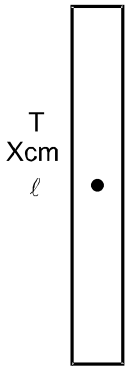
$$V_{cm} = \left(\frac{m_2 v}{m_1 + m_2}\right)$$

(b) $v^1 = (u - V_{cm})$

$$V^1 = v - \frac{m_2 u}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1 u}{m_1 + m_2}\right)$$

(c) $$V^1 = -V_{cm} = \left(\frac{-m_1 u}{m_1 + m_2}\right)$$

(d) $$X_{cm} = \frac{m_1(0) + m_2\left(\frac{L}{2}\right)}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_2 L}{2(m_1 + m_2)}$$



$$L^1 = \frac{L}{2} - \frac{m_2 L}{2(m_1 + m_2)} \quad \Rightarrow \quad L^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 L}{m_1 + m_2}\right)$$

momentum of particle कण का संवेग

$$\Rightarrow P_i = \left[m_2(u - V_{cm})L^1 = m_2 \frac{1}{2}\frac{m_1 L}{2(m_1 + m_2)}\left(u - \frac{m_2 u}{m_1 + m_2}\right)\right] = \left(\frac{m_2 m_1^2 u}{2(m_1 + m_2)}\right)$$

Momentum for rod छड के लिये संवेग $= m_1 V_{cm} \times L_{cm} = \frac{m_1 L}{2}\frac{m_2^2 u}{(m_1 + m_2)^2}$

(e) For particle : कण के लिये

$$I_1 = m_2 L^2 = \frac{m_2 m_1^2 L^2}{4(m_1 + m_2)^2}$$

$$I_2 = \frac{m_1L^2}{12} + m_1\left(\frac{m_2L}{2(m_1+m_2)}\right)^2$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{m_1(m_1+4m_2)L^2}{12(m_1+m_2)}$$

(f) Velocity of centre of mass द्रव्यमान केन्द्र का वेग

$$= \left(\frac{m_2v}{m_1+m_2}\right)$$

Using angular momentum conservation कोणीय संवेग सरंक्षण से

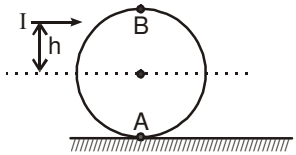
$$m_2v \times L_{cm} = I_{cm}\,\omega$$

$$= m_2u\frac{m_1L}{2(m_1+m_2)} = I_{cm}.\omega$$

$$= m_2u\frac{m_1L}{2(m_1+m_2)} = \frac{m_1(m_1+4m_2)L^2}{12(m_1+m_2)} \times \omega$$

$$\Rightarrow \qquad \omega = \frac{6m_2v}{(m_1+4m_2)L}$$

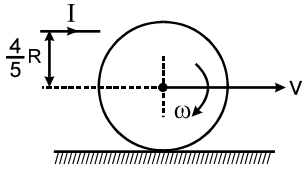
J-3. A uniform solid sphere is placed on a smooth horizontal surface. An impulse I is given horizontally to the sphere at a height h = 4R/5 above the centre line. m and R are mass and radius of sphere respectively.
एक समरूप ठोस गोला एक चिकने क्षैतिज सतह पर रखा है। केन्द्र की रेखा से h = 4R/5 ऊँचाई पर क्षैतिज दिशा में एक आवेग I दिया जाता हैं। m तथा R क्रमशः गोले के द्रव्यमान व त्रिज्या हैं।



(a) Find angular velocity of sphere & linear velocity of centre of mass of the sphere after impulse.
(b) Find the minimum time after which the highest point B will touch the ground,
(c) Find the displacement of the centre of mass during this interval.
(a) आवेग के बाद गोले का कोणीय वेग व गोले के द्रव्यमान केंद्र का रेखीय वेग ज्ञात करो ।
(b) वह न्यूनतम समय जिसके बाद गोले का उच्चतम बिन्दू B सतह को छूता है, ज्ञात करों
(c) इस अन्तराल के दौरान द्रव्यमान केन्द्र का विस्थापन

[Ans. : (a) $\frac{I}{m}, \frac{2I}{mR}$ **(b)** $\frac{\pi mR}{2I}$ **(c)** $\frac{\pi R}{2}$ **]**

Sol. V & ω are linear and angular velocity after giving impulse I.
V व ω क्रमशः आवेग I देने के बाद रेखिय और कोणिय वेग है।



Applying impulse momentum equuation
आवेग संवेग समीकरण में

$$I = mV$$

Applying angular momentum equation wrt centre →
केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग समीकरण लागू करने पर

$$I \times \frac{4}{5}R = \frac{2}{5}MR^2\omega \qquad \omega = \frac{2I}{MR}$$

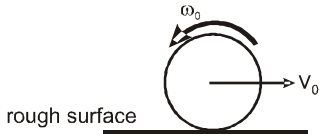
(a) Time taken लगा समय = $\frac{\text{angle tranversed}}{\text{angular velocity}}$ $\frac{\text{बना हुआ कोण}}{\text{कोणीय वेग}}$

$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi mR}{2I}$

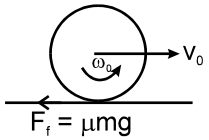
(b) Displacement of COM during same time = v.t
द्रव्यमान केन्द्र का समान समय में विस्थापन = v.t

$= \frac{I}{m} = \frac{\pi mR}{2I}$

J-4. A uniform disc of radius R = 0.2 m kept over a rough horizontal surface is given velocity v_0 and angular velocity ω_0 . After some time its kinetic energy becomes zero. If v_0 = 10 m/s, find ω_0.
एक समरूप चकती जिसकी त्रिज्या R = 0.2m है, को खुरदरे क्षेतिज धरातल पर वेग v_0 (=10 मी./सै.) तथा कोणीय वेग ω_0 प्रदान करके रखते है। कुछ समय पश्चात् इसकी गतिज ऊर्जा शून्य हो जाती है। प्रारम्भिक कोणीय वेग ω_0 ज्ञात करो।



Sol. Kinetic energy can become zero only for the case shown in figure ;
चित्रानुसार केवल निम्न स्थिति के लिए गतिज ऊर्जा शून्य होगी



Torque equation :
बलाघूर्ण समीकरण

$(\mu mg).R = \frac{MR^2}{2}.\alpha$

$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{2\mu g}{R}$

Therefore अतः , $t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 R}{2\mu g}$ .....(1)

For translational motion स्थानान्तरित गति के लिए :

$t = \frac{v_0}{\mu g}$ .....(2)

From (1) & (2) समीकरण (1) व (2) से : $\frac{\omega_0 R}{2\mu g} = \frac{v_0}{\mu g}$

$\Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2v_0}{R} = \frac{2(10)}{0.2} = 100$ rad/sec. **Ans.**

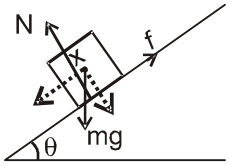
Section (K) : Toppling

खण्ड (K) : पलटना

K-1. A solid cubical block of mass m and side a slides down a rough inclined plane of inclination θ with a constant speed. Calculate the torque of the normal force acting on the block about its centre and the perpendicular distance 'x' from centre of mass at which it is acting.
एक m द्रव्यमान व a भुजा का ठोस घनाकार ब्लॉक खुरदरे θ कोण वाले तल पर नीचे की ओर नियत चाल से फिसलता है। इसके केन्द्र के परितः ब्लॉक पर लगने वाले अभिलम्ब बल का बल आघूर्ण तथा द्रव्यमान केन्द्र से लम्बवत् दूरी 'x' ज्ञात करो। जहां यह कार्यरत है।

Ans. $\frac{1}{2}$ mg a sinθ , $x = \frac{a\tan\theta}{2}$

Sol.



Force balance बल सन्तुलित करने पर

$N = mg \cos\theta$

$f = mg \sin\theta$

Torque balance (about centre of mass)

द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बलाघूर्ण सन्तुलित करने पर

$Nx = f \times \frac{a}{2} = \frac{amg\sin\theta}{2}$ and $x = \frac{a\ mg\sin\theta}{2mg\cos\theta} = \frac{a\tan\theta}{2}$

Torque of normal force अभिलम्ब बल का बलाघूर्ण $Nx = mg \sin\theta \frac{a}{2}$

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

Single Choice Objective, straight concept/formula oriented

Section (A) : Kinematics

खण्ड (A) : गतिकी

A-1. A fan is running at 3000 rpm. It is switched off. It comes to rest by uniformly decreasing its angular speed in 10 seconds. The total number of revolutions in this period.
एक पंखा 3000 rpm से घूम रहा है। यह बन्द किया जाता है, तो यह कोणीय वेग की एक समान हास दर से घूमता हुआ 10 सैकण्ड में रूक जाता है। इस अन्तराल में लगाये गये कुल चक्कर होगें।
(A) 150 (B*) 250 (C) 350 (D) 300

Sol. $\omega_0 = 3000$ rad/min

$\omega_0 = \frac{3000}{60}$ rad/sec = (50 rad/sec)

$t = 10$ sec

$\omega_f = 0$

$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$

$\theta = 50 - \alpha\ (10)$

$\alpha = 5$ rad/sec^2

$\theta = \omega_o\, t + \frac{1}{2}\ \alpha\ t^2$

$\theta = (50)\ (10) + \frac{1}{2}\ (-10)\ (10)^2$

$\theta = 500 - 250 = 250$ rad

A-2. A block hangs from a string wrapped on a disc of radius 20 cm free to rotate about its axis which is fixed in a horizontal position. If the angular speed of the disc is 10 rad/s at some instant, with what speed is the block going down at that instant?
एक लटका हुआ ब्लॉक, क्षैतिज अक्ष के परितः घूमने वाली 20 cm त्रिज्या की चकती पर लिपटी हुई डोरी से बंधा हुआ है। यदि किसी क्षण चकती की कोणीय चाल 10 rad/s हो तो नीचे की ओर गतिशील ब्लॉक की इस क्षण चाल होगी।
(A) 4 m/s (B) 3 m/s (C*) 2 m/s (D) 5 m/s

Sol. $V = \omega R$

$V = 10 \times 0.2 = 2$m /sec.

Section (B) : Moment of inertia

खण्ड (B) : जड़त्व आघूर्ण

B-1. A uniform circular disc A of radius r is made from a copper plate of thickness t and another uniform circular disc B of radius 2r is made from a copper plate of thickness t/2. The relation between the moments of inertia I_A and I_B is

एक r त्रिज्या की वृत्ताकार एक समान चकती a , t मोटाई की तांबे की प्लेट से बनाई गई है तथा दूसरी 2r त्रिज्या की वृत्ताकार एक समान चकती B, t/2 मोटाई की तांबे की प्लेट से ही बनाई गई है। जड़त्व आघूर्ण I_A व I_B के मध्य संबंध होगा—

(A) $I_A > I_B$ (B) $I_A = I_B$ (C*) $I_A < I_B$ (D) depends on the values of t and r.

(A) $I_A > I_B$ (B) $I_A = I_B$ (C) $I_A < I_B$ (D) r व t के मान पर निर्भर करता है।

Sol. $m_A = (\sigma.\pi r^2.t)$

$m_B = \sigma.\pi\ (2r)^2\ (t/2) = (\sigma 2\pi\rho^2 t)$

$m_B > m_A$

$R_B > R_A$

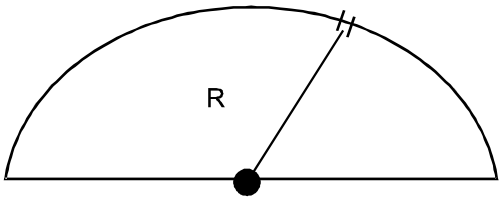
so, $I_B > I_A$

B-2. The moment of inertia of a non-uniform semicircular wire having mass m and radius r about a line perpendicular to the plane of the wire through the centre is

द्रव्यमान m व त्रिज्या r के एक असमरूप अर्द्धवृत्ताकार तार का इसके केन्द्र से गुजरने वाली व तार के तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण होगा—

(A*) mr^2 (B) $\frac{1}{2}mr^2$ (C) $\frac{1}{4}mr^2$ (D) $\frac{2}{5}mr^2$

Sol.



$I = \int dmr^2$

$I = r^2 \int dm = r^2 m = mr^2$

B-3. Let I_A and I_B be the moments of inertia of two solid cylinders of identical geometrical shape and size about their axes, the first made of aluminium and the second of iron.

यदि समरूप ज्यामितिय आकृति व आकार के दो ठोस बैलन का उनकी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I_A तथा I_B हैं। पहली एल्यूमिनियम व दूसरी लोहे से बनाई जाती है—

(A*) $I_A < I_B$ (B) $I_A = I_B$ (C) $I_A > I_B$

(D) relation between I_A and I_B depends on the actual shapes of the bodies.

I_A व I_B के मध्य संबंध इनकी वास्तविक आकृति पर निर्भर करता है।

Sol. $\sigma_B > \sigma_A$

$I_B > I_A$

so, If the axes are parallel अतः यदि अक्ष समान्तर है तो $I_A < I_B$

B-4. Let I_1 and I_2 be moments of inertia of a body about two axes 1 and 2 respectively, The axis 1 passes through the centre of mass of the body but axis 2 does not.
(A) $I_1 < I_2$ (B) If $I_1 < I_2$, the axes are parallel.
(C*) If the axes are parallel, $I_1 < I_2$ (D) If the axes are not parallel, $I_1 \geq I_2$.
यदि 1 व 2 दो अक्षों के परितः एक वस्तु के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः I_1 व I_2 है। अक्ष 1 वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती है। परन्तु अक्ष 2 नहीं—
(A) $I_1 < I_2$ (B) यदि $I_1 < I_2$, अक्ष समान्तर है।
(C) यदि अक्ष समान्तर है, $I_1 < I_2$ (D) यदि अक्ष समान्तर नहीं है $I_1 \geq I_2$.

Ans. C

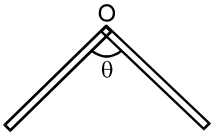
Sol. $I_2 = I_1 + Md^2$ Then अतः $I_2 > I_1$

B-5. The moment of inertia of an elliptical disc of uniform mass distribution of mass 'm', semi major axis 'r', semi minor axis 'd' about its axis is :
m द्रव्यमान की समरुप द्रव्यमान वितरण वाली अर्द्धदीर्घ अक्ष 'r' तथा अर्द्धलघु अक्ष 'd' की दीर्घ वृत्ताकार चकती का जड़त्व आघूर्ण इसकी अक्ष के परितः है ।

(A) $= \frac{mr^2}{2}$ (B) $= \frac{md^2}{2}$ (C) $> \frac{mr^2}{2}$ (D*) $< \frac{mr^2}{2}$

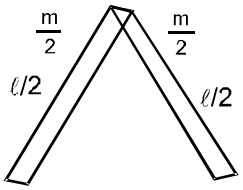
Sol. Moment of inertia of the elliptical disc should be less than that of a circular disc having radius equal to the major axis of the elliptical disc. Hence (D)
दीर्घ वृत्तीय चक्ती का जड़त्व आघूर्ण इसकी अर्द्धदीर्घ अक्ष के समान त्रिज्या वाली वृत्तीय चकती के जड़त्व आघूर्ण से कम होता है। Hence (D)

B-6. A unifrom thin rod of length L and mass M is bent at the middle point O as shown in figure. Consider an axis passing through its middle point O and perpendicular to the plane of the bent rod. Then moment of inertia about this axis is :
लम्बाई L व द्रव्यमान M की एक पतली छड़ मध्य बिन्दू O पर चित्रानुसार मुड़ी है। मध्य बिन्दू O से गुजरने वाली तथा मुड़ी छड़ के तल के लम्बवत एक अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है।



(A) $\frac{2}{3}$ mL^2 (B) $\frac{1}{3}$ mL^2
(C*) $\frac{1}{12}$ mL^2 (D) dependent on θ θ पर निर्भर करेगा

Sol.



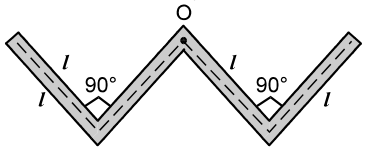
$I_0 = I_1 + I_2$

$$I_0 = \frac{(m/2)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{3} + \frac{(m/2)\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{3} = \frac{m\ell^2}{12}$$

B-7. The moment of inertia of a uniform circular disc about its diameter is 200 gm cm^2. Then its moment of inertia about an axis passing through its center and perpendicular to its circular face is
एक समरूप वृत्ताकार चकती का इसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण 200 gm cm^2 है तो इसके केन्द्र से पारित एवं वृत्ताकार फलक के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा—
(A) 100 gm cm^2 (B) 200 gm cm^2 (C*) 400 gm cm^2 (D) 1000 gm cm^2

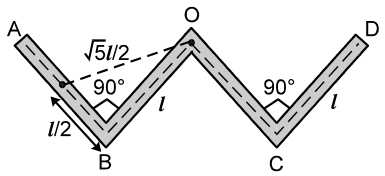
Sol. $I_x + I_y = I_z$
$2I_x = I_z$
$\therefore \quad I_l = 2 \times 200 = 400$ gm cm^2

B-8. A thin uniform rod of length 4 *l*, mass 4m is bent at the points as shown in the fig. What is the moment of inertia of the rod about the axis passing point O & perpendicular to the plane of the paper.
एक 4 *l* लम्बाई, 4m द्रव्यमान की पतली एकसमान छड़ को चित्रानुसार मोड़ा जाता है। छड़ का O से निकलने वाली तथा कागज के समतल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण क्या होगा ?



(A) $\frac{m\ell^2}{3}$ (B*) $\frac{10\ m\ell^2}{3}$ (C) $\frac{m\ell^2}{12}$ (D) $\frac{m\ell^2}{24}$

Sol. The given structure can be broken into 4 parts
दी गई सरंचना को 4 भागो में तोडने पर



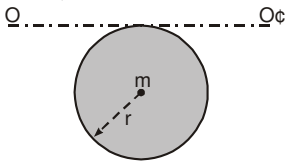
For AB के लिए $I = I_{CM} + m \times d^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{5m}{4}\ell^2$; $I_{AB} = \frac{4}{3}$ ml^2

For BO के लिए $I = \frac{m\ell^2}{3}$

$\therefore$ For composite frame : (by symmetry)
सम्पूर्ण निकाय के लिये : (सममिती से)

$I = 2[I_{AB} + I_{OB}] = 2\left[\frac{4m\ell^2}{3} + \frac{m\ell^2}{3}\right] = \frac{10}{3}$ ml^2]

B-9. Moment of inertia of a uniform disc about the axis O O′ is:
O O′ अक्ष के सापेक्ष चकती का जड़त्व आघूर्ण है :



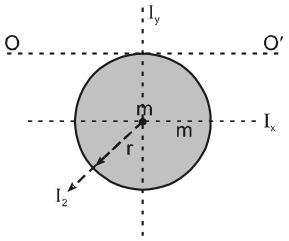
(A) $\frac{3\ m\ r^2}{2}$ (B) $\frac{m\ r^2}{2}$ (C) $\frac{5\ m\ r^2}{2}$ (D*) $\frac{5\ m\ r^2}{4}$

Sol. Pearpendicular axis theorem
लम्बवत् अक्ष प्रमेय $I_2 = I_x + I_y = \frac{mr^2}{2}$
from symmetry सममिति से $I_x = I_y$
$\Rightarrow \quad I_x = \frac{mr^2}{4}$

Perallel axis theorem समान्तर अक्ष पर

$I_{oo'} = I_x + mr^2$

$= \frac{mr^2}{4} + mr^2 = \frac{5}{4} mr^2$



B-10. The moment of inertia of a hollow cubical box of mass M and side a about an axis passing through the centres of two opposite faces is equal to

एक खोखले घनीय बक्से का द्रव्यमान M तथा भुजा a है। इसका, इसकी दो विपरीत फलकों के मध्य बिन्दुओं से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्वाघूर्ण होगा : –

(A) $\frac{5\ M\ a^2}{3}$ (B) $\frac{5\ M\ a^2}{6}$ (C) $\frac{5\ M\ a^2}{12}$ (D*) $\frac{5\ M\ a^2}{18}$

Sol. Taking mass of plate $m = \frac{M}{6}$ प्लेट का द्रव्यमान m है तो $= \frac{M}{6}$

Then MI of two plates through which the axis is passing $= \frac{m\ a^2}{6} \times 2 = \frac{m\ a^2}{3}$

अक्ष के सापेक्ष दो प्लेटो का जडत्व आर्घूण $= \frac{m\ a^2}{6} \times 2 = \frac{m\ a^2}{3}$

M.I of 4 plates having symmetrical position from the axis

सममित स्थिती के लिये 4 प्लेटो का अक्ष सापेक्ष जडत्व आर्घूण

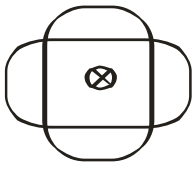
$= 4 \times \left[\frac{m\ a^2}{12} + m\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = 4 \times \left[\frac{m\ a^2}{3}\right]$

Total MI कुल जडत्व आर्घूण $= \frac{4\ m\ a^2}{3} + \frac{m\ a^2}{3} = \frac{5\ m\ a^2}{3}$

using $\frac{M}{6} = m$ के उपयोग से $= MI = \frac{5\ Ma^2}{18}$

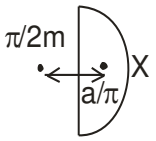
B-11. A uniform thin rod of length $(4a + 2\pi a)$ and of mass $(4m + 2\pi m)$ is bent and fabricated to form a square surrounded by semicircles as shown in the figure. The moment of inertia of this frame about an axis passing through its centre and perpendicular to its plane is

लम्बाई $(4a + 2\pi a)$ तथा द्रव्यमान $(4m + 2\pi m)$ की एक, एकसमान पतली छड़ को एक वर्ग के रूप में मोड़ा गया है। तथा यह वर्ग एक अर्द्धवृत्त द्वारा चित्रानुसार घिरा हुआ है। इस फ्रेम का इसके केन्द्र से गुजरने वाली तथा इसके तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आर्घूण होगा।



(A) $\frac{(4+2\pi)}{3} ma^2$ (B) $\frac{(4+\pi)}{2} ma^2$ (C) $\frac{(4+3\pi)}{3} ma^2$ (D*) $\frac{ma^2\{10+3\pi\}}{3}$

Sol. $I_{Rat} = \frac{ma^2}{12} + m\left(\frac{a}{2}\right)^2$



$= \frac{ma^2(1+3)}{12} = \frac{ma^2}{3}$

$I_{Ring} = \frac{\pi}{2}m\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{\pi}\right)^2\right\}$

$= \frac{\pi m}{2}$

$= \frac{\pi ma^2}{2}\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right\}$

$= \frac{\pi ma^2}{2}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right\}$

$I_{net.} = \frac{4ma^2}{3} + 2\pi ma^2\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right\}$

$= ma^2\left\{\frac{4}{3} + \pi + 2\right\} = \frac{ma^2\{10+3\pi\}}{3}$

Section (C) : Torque
खण्ड (C) : बल आघूर्ण

C-1. If a rigid body is subjected to two forces $\vec{F}_1 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ acting at (3,3,4) and $\vec{F}_2 = -2\hat{i}-3\hat{j}-4\hat{k}$ acting at (1, 0, 0) then which of the following is (are) true?
(A*) The body is in equilibrium.
(B) The body is under the influence of a torque only.
(C) The body is under the influence of a single force.
(D) the body is under the influence of a force together with a torque .

यदि एक दृढ़ वस्तु पर दो बल $\vec{F}_1 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, बिन्दु (3, 3, 4) पर तथा $\vec{F}_2 = -2\hat{i}-3\hat{j}-4\hat{k}$, बिन्दु (1, 0, 0) पर लगाए जाते हैं, तो निम्न में से कौनसा/कौनसे सत्य है।

(A) वस्तु साम्यावस्था में है।
(B) वस्तु केवल एक बलाघूर्ण के प्रभाव में है।
(C) वस्तु केवल एक बल के प्रभाव में है।
(D) वस्तु एक बल व एक बलाघूर्ण के प्रभाव में है।

Ans. A

Sol. $\vec{F}_1 = 2i + 3j + 4k$

$\vec{F}_2 = -2i - 3j - 4k$

Net force $\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ the body is in translational equilibrium.

कुल बल $\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ तो वस्तु स्थानान्तरण गति की साम्यवस्था में रहेगी।

$\vec{r}_1 = 3i + 3J + 4k \qquad \vec{r}_2 = i$

$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$

$= (3\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}) \times (2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$

$\vec{\tau}_1 = 9\hat{k} - 12\hat{j} - 6\hat{j} + 12\hat{i} + 8\hat{j} - 12\hat{i}$

$\vec{\tau}_1 = -4\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\hat{i}) \times (-2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$= -3\hat{k} + 4\hat{j}$

$\left(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = -4\hat{i} + 3\hat{k} - 3\hat{k} + 4\hat{j} = 0\right)$

body in rotational equilibrium वस्तु घूर्णन साम्यावस्था में है।

C-2. A force $\vec{F} = 4\hat{i} - 10\hat{j}$ acts on a body at a point having position vector $-5\hat{i} - 3\hat{j}$ relative to origin of co-ordinates on the axis of rotation . The torque acting on the body about the origin is:
एक बल $\vec{F} = 4\hat{i} - 10\hat{j}$, एक वस्तु पर एक बिन्दु पर जिसका घूर्णन अक्ष पर मूल बिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश $-5\hat{i} - 3\hat{j}$ है, कार्यरत है। मूल बिन्दु के सापेक्ष वस्तु पर कार्यरत बलाघूर्ण है :

(A) $38\,\hat{k}$ (B) $-25\hat{k}$

(C*) $62\hat{k}$ (D) none of these इनमें से कोई नहीं

Sol. $F = 4\hat{i} - 10\hat{j}$

$\vec{r} = (-5\hat{i} - 3\hat{j})$

$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$

$= (-5\hat{i} - 3\hat{j}) \times (4\hat{i} - 10\hat{j})$

$= 50\hat{k} + 12\hat{k} = 62\hat{k}$

C-3. In case of torque of a couple if the axis is changed by displacing it parallel to itself, torque will :
एक बल युग्म के बलाघूर्ण के लिए यदि अक्ष को इसके समान्तर विस्थापित किया जाये तो बलाघूर्ण :

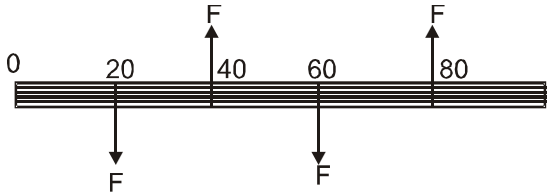
(A) increase (B) decrease (C*) remain constant (D) None of these

(A) बढ़ेगा (B) घटेगा (C) नियत रहता है (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. torque of a couple is always remains constant about any point
किसी बलयुग्म का बलाघूर्ण हमेशा किसी भी बिन्दु के सापेक्ष नियत रहता है।

Section (D) : RotationAL Equilibrium घूर्णन साम्यावस्था

D-1. Four equal and parallel forces are acting on a rod (as shown in figure) in horizontal plane at distances of 20 cm, 40 cm, 60 cm and 80 cm respectively from one end of the rod. Under the influence of these forces the rod :
चित्रानुसार क्षैतिज तल में, किसी छड़ पर चार समान व समान्तर बल छड़ के एक सिरे से क्रमशः 20 cm, 40 cm 60 cm व 80 cm की दूरीयों पर लगाये जाते हैं। इन बलों के प्रभाव में छड़ –



(A) is at rest (B*) experiences a torque

(C) experiences a linear motion (D) experiences a torque and also a linear motion

(A) स्थिर है (B) बलाघुर्ण अनुभव करती है

(C) रेखिय गति करती है (D) बलाघुर्ण अनुभव करती है व रेखिक गति भी करती है

Sol. Torque about O O के सापेक्ष बलाघूर्ण

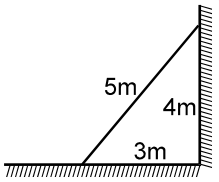
$F \times 40 + F \times 80 - (F \times 20 + F \times 60)$

In clockwise direction दक्षिणावर्त के दिशा में

$= F \times 40$

D-2. A uniform ladder of length 5m is placed against the wall in vertical plane as shown in the figure. If coefficient of friction μ is the same for both the wall and the floor then minimum value of μ for it not to slip is

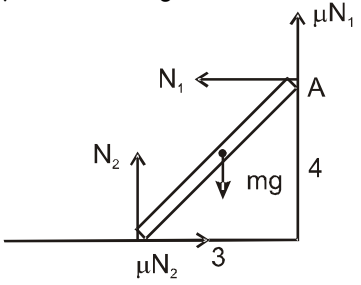
5m लम्बी एक समरुप सीढ़ी एक दीवार पर चित्रानुसार ऊर्ध्वाधर तल में लगी है। दीवार तथा फर्श के लिए घर्षण गुणांक μ समान है तो इसको फिसलने से रोकने के लिए μ का न्यूनतम मान क्या होना चाहिऐ।



(A) $\mu = 1/2$ (B) $\mu = 1/4$ (C*) $\mu = 1/3$ (D) $\mu = 1/5$

Sol. $N_1 = \mu N_2$,

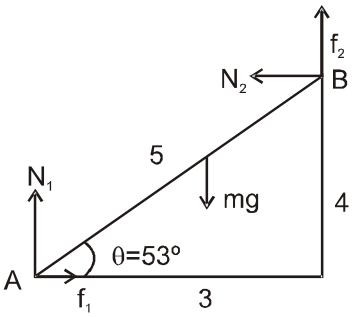
$\mu N_1 + N_2 = mg$, $\tau_A = o \Rightarrow$



$3 N_2 - 4 N_1 - \frac{3}{2} mg = o$

Hence अतः $\mu = \frac{1}{3}$ **Ans.**

Aliter



Using force balance बल सन्तुलन के उपयोग से

$f_1 = -\mu N_1$ $N_1 + f_2 = mg$ ——(1)

$f_2 = \mu N_2$ $N_2 = f_1$

$N_2 = \mu N_1$ ——(2)

Using aq (1) समीकरण (1) से

$N_1 + \mu N_2 = mg$

$N_1 + \mu N_1 = mg$

$N_1 + \left(\frac{mg}{1+\mu^2}\right)$

torque about point B $\Rightarrow \tau_B = 0$ For rotational equilibrium

बिन्दु B के सापेक्ष बलार्घूण $\Rightarrow \tau_B = 0$ घूर्णन साम्यावस्था के लिये

$f_1 \times 4 + mg\,(5/2 \cos 53^o) = 3N_1$

$4\mu N_1 + \frac{3mg}{2} = 3N_1$

$\frac{3mg}{2} = (3 - 4\mu)\, N_1$

$$\frac{3mg}{2} = (3-4\mu)\left(\frac{mg}{1+\mu^2}\right)$$

$$\frac{3}{2} = \left(\frac{3-4\mu}{1+\mu^2}\right) \quad 3 + 3\mu^2 = 6 - 8\mu$$

$3\mu^2 + 8\mu - 3 = 0$

$3\mu^2 + 9\mu - \mu - 3 = 0$

$3\mu(\mu + 3) - 1(\mu + 3) \Rightarrow (\mu = 1/3)$

D-3 A rod of weight w is supported by two parallel knife edges A & B and is in equilibrium in a horizontal position. The knives are at a distance d from each other. The centre of mass of the rod is at a distance *x* from A. The normal reactions at A and B will be :
w भार की एक छड़ दो समान्तर तीखे किनारो A तथा B पर उनके लम्बवत् क्षैतिज अवस्था में रखी हैं। किनारे एक दूसरे से d दूरी पर है तथा छड का द्रव्यमान केन्द्र A सिरे से x दूरी पर है। A तथा B पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल होगा।

(A) $N_A = 2w\,(1 - x/d)$, $N_B = wx/d$] (B*) $N_A = w\,(1 - x/d)$, $N_B = wx/d$]

(C) $N_A = 2w\,(1 - x/d)$, $N_B = 2wx/d$] (D) $N_A = w\,(2 - x/d)$, $N_B = wx/d$]

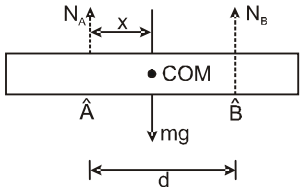
Sol. As shown in FBD $\rightarrow$ Equation in verticle direction $N_A + N_B = mg$
Taking moments about 'A'
FBD में $\rightarrow$ ऊर्ध्वाधर दिशा में $N_A + N_B = mg$
'A' के परितः आघूर्ण लेने पर

$$mg.x = d.N_B$$

$$N_B = \frac{mg.x}{d}$$

$$N_A = mg - N_B$$

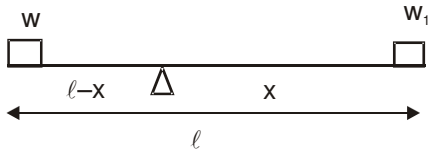
$$N_A = mg - \frac{mg\ x}{d} = mg\ .\ \left(\frac{d-x}{d}\right) = w\left(1-\frac{x}{d}\right)$$



D-4 The beam and pans of a balance have negligible mass. An object weighs W_1 when placed in one pan and W_2 when placed in the other pan. The weight W of the object is :
किसी तराजु का पलड़ा व छड़ द्रव्यमान रहित हैं। एक पलडे में रखने पर किसी वस्तु का भार W_1 व दूसरे पलड़े में रखने पर W_2 ज्ञात होता है। वस्तु का भार W है–

(A*) $\sqrt{W_1W_2}$ (B) $\sqrt{(W_1 + W_2)}$ (C) $W_1^2 + W_2^2$ (D) $(W_1^{-1} + W_2^{-1})/2$

Sol.



weight of object वस्तु का द्रव्यमान = w

$w(\ell - x) = w_1x$ .....(i)

If weight is kept in another pan then :
यदि द्रव्यमान दूसरे पात्र में रखा जाये तब

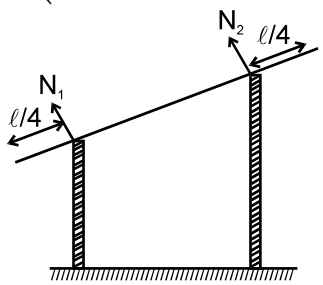
$w_2(\ell - x) = wx$ .....(ii)

By (i) & (ii) समीकरण (i) व (ii) से

$$\frac{w}{w_2} = \frac{w_1}{w} \Rightarrow w_2 = w_1\,w_2$$

$$w = \sqrt{w_1w_2}$$

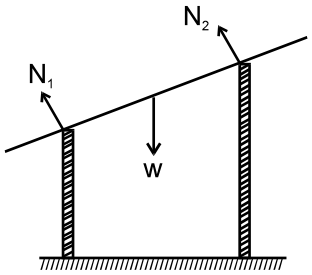
D-5. A uniform rod of length ℓ is placed symmetrically on two walls as shown in figure. The rod is in equilibrium. If N_1 and N_2 are the normal forces exerted by the walls on the rod then
ℓ लम्बाई की एक समान छड़ को दो दीवारों पर सममित रूप से चित्रानुसार रखा है। छड़ साम्यावस्था में है। यदि N_1 तथा N_2 दीवार द्वारा छड़ पर लगाये अभिलम्बवत् बल हों तब–



(A) $N_1 > N_2$ (B) $N_1 > N_2$ (C*) $N_1 = N_2$
(D) N_1 and N_2 would be in the vertical directions. N_1 तथा N_2 ऊर्ध्वाधर दिशा में होने चाहिये।

Sol. Balancing torque about the centre of the rod :
छड़ के केन्द्र के सापेक्ष बलार्घूण को सन्तुलित करने पर

$$N_1 \cdot \frac{\ell}{4} - N_2 \cdot \frac{\ell}{4} = 0 \Rightarrow N_1 = N_2.$$



Section (E) : Rotation about Fixed axis ($\tau_H = I_H\alpha$)
स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन ($\tau_H = I_H\alpha$)

E-1. A uniform circular disc A of radius r is made from a metal plate of thickness t and another uniform circular disc B of radius 4r is made from the same metal plate of thickness t/4. If equal torques act on the discs A and B, initially both being at rest. At a later instant, the angular speeds of a point on the rim of A and another point on the rim of B are ω_A and ω_B respectively. We have
एक r त्रिज्या की वृत्ताकार एक समान चकती A , t मोटाई की धातु की प्लेट से बनाई जाती है तथा दूसरी 4r त्रिज्या की एक समान चकती B, t/4 मोटाई की उसी धातु की प्लेट से बनाई जाती है। यदि दोनों प्रारम्भ में विरामअवस्था में है तथा दोनों पर समान बल आघूर्ण आरोपित किया जाए तो, कुछ समय पश्चात् A की परिधि पर स्थित बिन्दु तथा B की परिधी पर स्थित अन्य बिन्दु का कोणीय वेग क्रमशः ω_A तथा ω_B हो तो

(A*) $\omega_A > \omega_B$ (B) $\omega_A = \omega_B$ (C) $\omega_A < \omega_B$
(D) the relation depends on the actual magnitude of the torques.
संबंध बल आघूर्ण के वास्तविक मान पर निर्भर करता है।

Sol. $\tau = I\,\alpha$
$\tau_A = \tau_B$
$I_A\,\alpha_A = I_B\,\alpha_B$
$I_A < I_B$
$\alpha_A > \alpha_B$
$\omega_A > \omega_B$

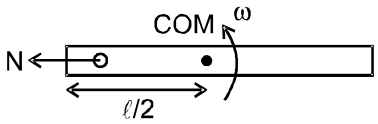
E-2. A body is rotating with constant angular velocity about a vertical axis fixed in an inertial frame. The net force on a particle of the body not on the axis is
(A) horizontal and skew with the axis (B) vertical
(C*) horizontal and intersecting the axis (D) none of these.
जड़त्वीय तंत्र में एक स्थिर ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष एक वस्तु एक समान कोणीय वेग से घूर्णन गति कर रही है। वस्तु के एक कण पर जो वस्तु की अक्ष पर स्थित नहीं है , पर परिणामी बल होगा—
(A) क्षैतिज तथा अक्ष से झुकाव पर (B) ऊर्ध्वाधर
(C*) क्षैतिज व अक्ष को काटता हुआ (D) उपरोक्त में से कोई नहीं

Sol. Body is rotating uniformly so resultant force on particale is centripetal force which is horizontal and intercecting the axis of rotation.
वस्तु एकसमान से घूर्णन कर रही है अतः कण पर लगने वाला परणामी बल अभिकेन्द्रीय बल है जो कि क्षैतिज है तथा घूर्णन अक्ष को काटता है।

E-3. One end of a uniform rod having mass m and length ℓ is hinged. The rod is placed on a smooth horizontal surface and rotates on it about the hinged end at a uniform angular velocity ω. The force exerted by the hinge on the rod has a horizontal component
एक m द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की समरूप छड़ का एक सिरा आलम्बित है। छड़ एक चिकने क्षैतिज तल पर रखी गई है तथा आलम्बित सिरे के सापेक्ष समान कोणीय वेग ω से घूर्णन करती है। दृढ़ आलम्ब द्वारा छड़ पर लगाए गए बल का क्षैतिज घटक होगा—

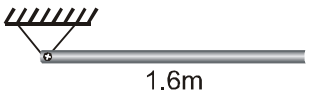
(A) $m\omega^2\ell$ (B) zero शून्य (C) mg (D*) $\frac{1}{2}m\omega^2\ell$

Sol.



$N = \left(m\omega^2 \frac{\ell}{2}\right)$

E-4. The uniform rod of mass 20 kg and length 1.6 m is pivoted at its end and swings freely in the vertical plane. Angular acceleration of rod just after the rod is released from rest in the horizontal position as shown in figure is
चित्रानुसार 20 kg द्रव्यमान तथा 1.6 m लम्बाई की एक एकसमान छड़ अपने एक सिरे के बिन्दु पर कीलकित है तथा ऊर्ध्वाधर तल में मुक्त रूप से झूल सकती है। छड़ को क्षैतिज स्थिति में, विराम से छोड़ने के तुरन्त बाद छड़ का कोणीय त्वरण होगा :

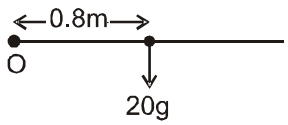


(A*) $\frac{15g}{16}$ (B) $\frac{17g}{16}$ (C) $\frac{16g}{15}$ (D) $\frac{g}{15}$

Sol. Initial velocity of each point onthe rod is zero so angular velocity of rod is zero.
Torque about O
$\tau = I\alpha$

$20g\,(0.8) = \frac{m\ell^2}{3}\alpha \Rightarrow 20g\,(0.8) = \frac{20(1.6)^2}{3}\alpha$

$\Rightarrow \frac{3\ g}{3.2} = \alpha$ = angular acceleration $\Rightarrow \alpha = \frac{15\ g}{16}$



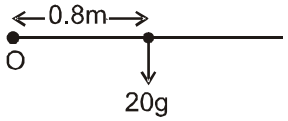
हलः छड़ पर प्रत्येक बिन्दु का प्रारम्भिक वेग शून्य है इसलिये छड़ का कोणीय वेग शून्य होगा।

O के परितः आघूर्ण

$\tau = I\alpha$

$20g\,(0.8) = \frac{m\ell^2}{3}\alpha \Rightarrow 20g\,(0.8) = \frac{20\ (1.6)^2}{3}\alpha$

$\Rightarrow \quad \frac{3\ g}{3.2} = \alpha =$ कोणीय त्वरण $\Rightarrow \quad \alpha = \frac{15\ g}{16}$



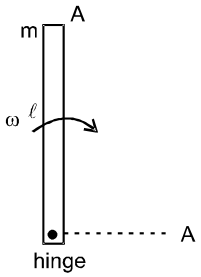
E-5. Two men support a uniform horizontal rod at its two ends. If one of them suddenly lets go, the force exerted by the rod on the other man just after this moment will:
(A) remain unaffected (B) increase (C*) decrease
(D) become unequal to the force exerted by him on the rod.
दो आदमी एक समरुप क्षैतिज छड़ को इसके दोनों किनारों पर से उठाते हैं। यदि उनमें से एक व्यक्ति छड़ को अचानक छोड़ देता है तो छड़ द्वारा दूसरे व्यक्ति पर आरापित बलः
(A) अपरिवर्तित रहेगा (B) बढ़ेगा (C*) घटेगा
(D) उसके द्वारा छड़ पर आरोपित बल से अलग होगा

Sol. Beam is not at rotational equilibrium, so force exerted by the rod (beam) decreases
छड घूर्णन साम्यावस्था में नही है अतः छड़ द्वारा लगने वाला बल घटेगा।

Section (F) : Rotation about fixed axis (energy conservation)
स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन (ऊर्जा संरक्षण)

F-1. A uniform metre stick is held vertically with one end on the floor and is allowed to fall. The speed of the other end when it hits the floor assuming that the end at the floor does not slip :
एक मीटर की एक समरूप छड़ ऊर्ध्वाधर रखी जाती है। इसका एक सिरा फर्श पर है और यह गिरने दी जाती है यह मानते हुऐ कि फर्श वाला सिरा फिसलता नहीं है। जब यह फर्श पर टकराती है तब दूसरे सिरे की चाल ज्ञात करो ।
(A) $\sqrt{4g}$ (B*) $\sqrt{3g}$ (C) $\sqrt{5g}$ (D) $\sqrt{g}$

Sol.



using energy conservation ऊर्जा सरंक्षण से

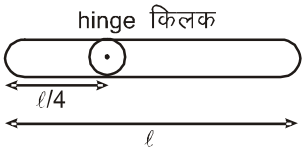
$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{m\ell^2}{3}\omega^2$$

$\ell = 1m \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$

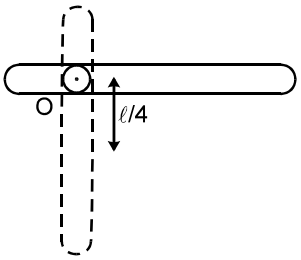
$V_A = \omega\ell = \sqrt{3g} = \left(\sqrt{3g}\right)$

F-2. A uniform rod is hinged as shown in the figure and is released from a horizontal position. The angular velocity of the rod as it passes the vertical position is: (axis is fixed, smooth and horizontal)
एक समरूप छड़ चित्रानुसार कीलकित की गयी है। इसे क्षैतिज अवस्था से छोड़ा जाता है। छड़ के ऊर्ध्वाधर अवस्था में पहुँचने पर इसका कोणीय वेग है : (अक्ष जड़वत्, घर्षणरहित और क्षैतिज है।)



(A) $\sqrt{\frac{12g}{3\ell}}$ (B) $\sqrt{\frac{2g}{3\ell}}$ (C*) $\sqrt{\frac{24g}{7\ell}}$ (D) $\sqrt{\frac{3g}{7\ell}}$

Sol. By energy conservation ऊर्जा सरंक्षण से :



$$mg\frac{\ell}{4} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{7}{48}m\ell^2\right)\omega^2 \qquad \left[I_{(\text{about O})} = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2\right]$$

$$I_0 = \frac{7}{48}m\ell^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{24g}{7\ell}} \qquad \textbf{Ans.}$$

Section (G) : Angular Momentum & its conservation कोणीय संवेग तथा कोणीय संवेग संरक्षण

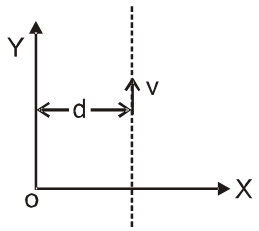
G-1. A constant torque actingon a uniform circular wheel changes its angular momentum from A_0 to $4A_0$ in 4 sec. the magnitude of this torque is:
एक नियत बलाघूर्ण एक समरुप वृत्ताकार पहिये का कोणीय संवेग 4 sec.में A_0 से $4A_0$ तक परिवर्तित करता है। इस बलाघूर्ण का परिमाण है:

(A) $4A_0$ (B) A_0 (C*) $3A_0/4$ (D) $12A_0$

Sol. $\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{4A_0 - A_0}{4} = \left(\frac{3A_0}{4}\right)$

G-2. A particle moves with a constant velocity parallel to the Y-axis. Its angular momentum about the origin.
(A) is zero (B*) remains constant (C) goes on increasing (D) goes on decreasing.
एक कण Y-अक्ष के समान्तर अचर वेग से गति करता है, मूल बिन्दु के सापेक्ष इसका कोणीय संवेग
(A) शून्य है (B) नियत रहता है (C) लगातार बढ़ता है। (D) लगातार घटता है

Sol.

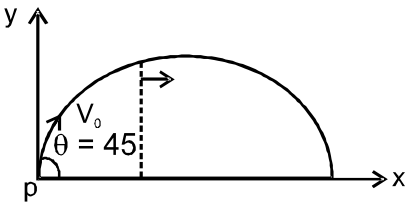


$\Rightarrow$ L = (mvd) = constant becouse v = const. and d = const.
$\Rightarrow$ L = (mvd) = नियत क्योकि v = नियत है तथा d = भी नियत है।

G-3. A particle is projected at time t = 0 from a point P on the ground with a speed V_0, at an angle of 45° to the horizontal. What is the magnitude of the angular momentum of the particle about P at time $t = v_0/g$.
एक कण t = 0 पर जमीन पर क्षैतिज से 45° के कोण पर बिन्दु P से v_0 चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। $t = v_0/g$ समय पर कण का P के सापेक्ष कोणीय संवेग का परिमाण क्या होगा

(A) $\frac{mv_0^2}{2\sqrt{2}\ g}$ (B) $\frac{mv_0^3}{\sqrt{2}\ g}$ (C) $\frac{mv_0^2}{\sqrt{2}\ g}$ (D*) $\frac{mv_0^3}{2\sqrt{2}\ g}$

Sol.



$x = v_0 \cos 45^\circ \times t = \frac{v_0 t}{\sqrt{2}}$

$\tau = mgx = \frac{mgv_0 t}{\sqrt{2}} = \frac{dL}{dt}$

$\Rightarrow L = \frac{mgv_0}{\sqrt{2}} \int_0^{v_0/g} t\ dt = \frac{mv_0^3}{2\sqrt{2}\ g}$

G-4. A uniform thin circular ring of mass 'M' and radius 'R' is rotating about its fixed axis passing through its centre perpendicular to its plane of rotation with a constant angular velocity ω. Two objects each of mass m, are attached gently to the opposite ends of a diameter of the ring. The ring now rotates with an angular velocity.
'M' द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक पतली एकसमान वलय इसकी स्थिर अक्ष जो केन्द्र से गुजरती है, तथा घुर्णन तल के लम्बवत् है, के सापेक्ष समान कोणीय वेग ω से घूर्णन करती है। दो वस्तुऐं प्रत्येक m द्रव्यमान की इसके व्यासतः विपरीत किनारों पर धीरे से रख दी जाती है। अब वलय का कोणीय वेग होगा -

(A) $\frac{\omega M}{(M+m)}$ (B*) $\frac{\omega M}{(M+2m)}$ (C) $\frac{\omega M}{(M-2m)}$ (D) $\frac{\omega(M+3m)}{M}$

Sol. No external torque so L = constant;
कोई बाह्य बलाघूर्ण नही है अतः L = नियत रहेगा।

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$(MR^2\omega) = (MR^2+2mR^2)\ \omega^2$

$\Rightarrow \quad \omega^2 = \left(\frac{M\omega}{M+2m}\right)$

G-5. A boy sitting firmly over a rotating stool has his arms folded. If he stretches his arms, his angular momentum about the axis of rotation
(A) increases (B) decreases (C*) remains unchanged (D) doubles
एक बच्चा घूर्णन कर रहे स्टूल पर भुजाएं सिकौडकर बैठा है। यदि यह अपनी भुजाऐं फैलादे, तो घूर्णन अक्ष के सापेक्ष इसका कोणीय संवेग
(A) बढ़ता है (B) घटता है (C*) अपरिवर्तित रहता है (D) दुगना हो जाता है

Sol. external torque बाह्य बलाघूर्ण $\vec{\tau}_{ext} = 0$

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

when he stretches his arms I
जब यह अपनी भुजा को फैलाता है, तो I बढ जाता है अतः,

so अतः $I_1 < I_2$

then तब $(\omega_1 > \omega_2)$

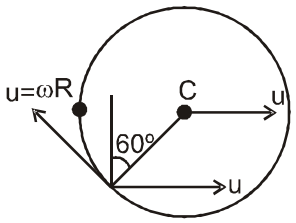
so, (L = constant) अतः (L = नियत रहेगा)

Section (H) : Combined Translational + Rotational Motion (Kinematics)
संयुक्त स्थानांतरीय गति + घूर्णन गति (गतिकी)

H-1. The centre of a disc rolling without slipping on a plane surface moves with speed u. A particle, on the lower half of the rim making an angle 60º with vertical, will be moving at speed
समतल सतह पर बिना फिसले लुढ़कने वाली चकती का केन्द्र u चाल से गति करता है। निम्न अर्धवृत्त पर स्थित ऊर्ध्वाधर से 60º के कोण पर, चकती की परिधी पर स्थित एक बिन्दु की चाल होगी

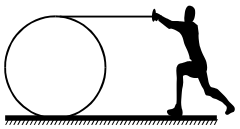
(A) zero शून्य (B*) u (C) $\sqrt{2}u$ (D) 2u

Sol.



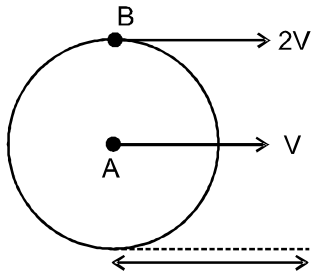
For pure rolling शुद्ध लोटनी गति के लिये $\omega R = u$, $v = \sqrt{u^2 + u^2 - 2uu\frac{1}{2}} = u$

H-2. A thin string is wrapped several times around a cylinder kept on a rough horizontal surface. A boy standing at a distance ℓ from the cylinder draws the string towards him as shown in figure. The cylinder rolls without slipping. The length of the string passed through the hand of the boy while the cylinder reaches his hand is
खुरदरे क्षैतिज तल पर रखे गए एक बेलन पर नगण्य मोटाई की एक रस्सी कई बार लपेटी गई है। चित्रानुसार ℓ दूरी पर खड़ा बच्चा इसको अपनी तरफ खींचता है। यदि बेलन बिना फिसले लुढकता है, तो जब बैलन उसके हाथ पर पहुचता है तो बच्चे के हाथ से गुजरने वाली रस्सी की लम्बाई होगी



(A) ℓ (B*) 2ℓ (C) 3ℓ (D) 4ℓ

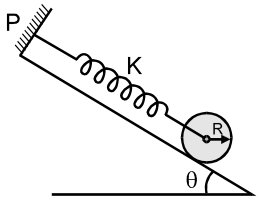
Sol.



When A point travels ℓ distance then B point 2ℓ so, 2ℓ length of string passes through the hand of the boy .
जब बिन्दु A ℓ दूरी तय करता है तब B 2ℓ दूरी तय करेगा अतः बच्चे के हाथ से 2ℓ लम्बाई की रस्सी गुजरेगी।

H-3. A uniform cylinder of mass M and radius R rolls without slipping down a slope of angle θ to the horizontal. The cylinder is connected to a spring constant K while the other end of the spring is connected to a rigid support at P. The cylinder is released when the spring is unstretched. The maximum displacement of cylinder is

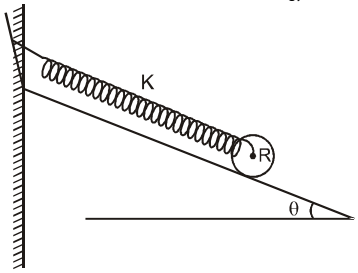
क्षैतिज के साथ θ कोण वाले नत तल पर M द्रव्यमान व R त्रिज्या का एकसमान बेलन बिना फिसले नीचे की ओर लुढ़कता है। बेलन K स्प्रिंग नियतांक वाली एक स्प्रिंग से जुड़ा हुआ है जबकि स्प्रिंग का दूसरा सिरा एक दृढ़ आधार P से जुड़ा हुआ है। जब स्प्रिंग अविस्तारित होती है तब बेलन को विराम से छोड़ा जाता है। बेलन का अधिकतम विस्थापन है–



(A) $\frac{3}{4}\frac{Mg\sin\theta}{K}$ (B) $\frac{Mg\sin\theta}{K}$ (C*) $\frac{2\ Mg\ \sin\theta}{K}$ (D) $\frac{4}{3}\ \frac{Mg\sin\theta}{K}$

Sol. Using Energy conservation, ऊर्जा संरक्षण से

(at maximum distance अधिकतम दूरी पर $V = 0\ V_0 = 0$)

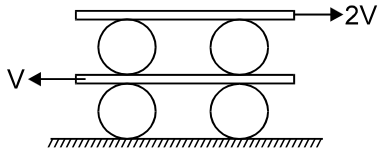


$\frac{1}{2}Kx^2 = (mg\ x\ \sin\theta)$

$x = \left(\frac{2mg\ \sin\ \theta}{K}\right)$

H-4. A system of uniform cylinders and plates is shown in figure. All the cylinders are identical and there is no slipping at any contact. Velocity of lower & upper plate is V and 2V respectively as shown in figure. Then the ratio of angular speed of the upper cylinders to lower cylinders is

समरूप बेलन व प्लेटों का निकाय चित्रानुसार है। सभी बेलन एक ही प्रकार के हैं तथा किसी भी सम्पर्क सतह पर फिसलन नहीं है। नीचे वाली तथा ऊपरी प्लेट का वेग क्रमशः V तथा 2V चित्रानुसार है तो ऊपर तथा नीचे वाले बेलनों के कोणीय वेग का अनुपात क्या होगा।



(A*) 3 (B) 1/3 (C) 1 (D) none of these इनमें से कोई नहीं

Sol. **(A)** Since there is no slipping at any interface, the velocities of bottom and upper most point of lower and upper cylinder are shown in figure.

क्योकि यहाँ किसी भी सम्पर्क सतह पर फिसलन नही है अतः निचे वाले और ऊपर वाले बेलन के निम्नतम और उच्चतम बिन्दु के लिए वेग चित्रानुसार होगे

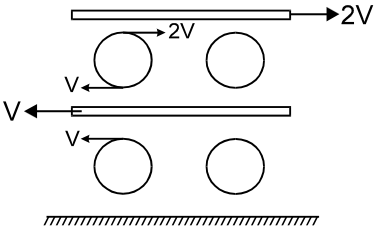
Angular velocity of upper cylinder = $\frac{2V+V}{2R} = \frac{3V}{2R}$

ऊपर वाले बेलन के लिए कोणीय वेग

Angular velocity of lower cylinder = $\frac{V-0}{2R} = \frac{V}{2R}$

निचे वाले बेलन के लिए कोणीय वेग

The ratio is $\frac{3}{1}$ अतः अनुपात $\frac{3}{1}$ है।



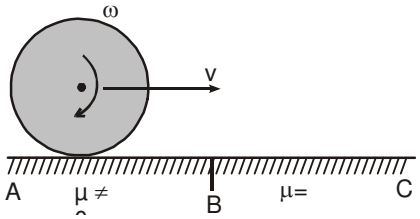
H-5. When a person throws a meter stick it is found that the centre of the stick is moving with a speed of 10 m/s vertically upwards & left end of stick with a speed of 20 m/s vertically upwards. Then the angular speed of the stick is:
जब एक आदमी ने एक मीटर छड़ को फैंका तो यह देखा गया कि उसके केन्द्र की चाल ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर 10 m/s है और बाईं ओर के सिरे की चाल 20 m/s ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर है तो छड़ की कोणीय चाल होगी :
(A*) 20 rad/ sec (B) 10 rad/sec (C) 30 rad/sec (D) none of these इनमें से कोई नही

Sol. $20 = V_{cm} + wR$

$20 = 10 + \omega\left(\frac{\ell}{2}\right)$ $10 = \frac{\omega}{2}$ $(\omega = 20 \text{ rad / se})$

Section (I) : Combined translational & Rotational Motion (Dynamics)
संयुक्त स्थानांतरीय गति तथा घूर्णन गति (गतिकी)

I-1. As shown in the figure, a uniform disc of mass m is rolling without slipping with a angular velocity ω. The portion AB is rough and BC is smooth. When it crosses point B disc will be in :
चित्रानुसार एक m द्रव्यमान की समरूप चकती ω कोणीय वेग से बिना फिसले लोटनी गति करती है। AB भाग खुरदरा व BC चिकना है। जब यह B को पार करती है, चकती में होगी :

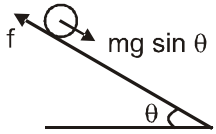


(A) translational motion only (B*) pure rolling motion
(C) rotational motion only (D) none of these
(A) केवल स्थानान्तरीय गति (B*) शुद्ध लोटनी गति
(C) केवल घूर्णन गति (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. Disc is in pure rolling and external forces are zero after smooth surface, so pure rolling continue.
चकती शुद्ध लौटनी गति कर रही है तथा बाह्य बल शून्य है अतः चिकनी सतह के बाद शुद्ध लौटनी चालू रहेगी।

I-2. A solid sphere, a hollow sphere and a ring, all having equal mass and radius, are placed at the top of an incline and released. The friction coefficients between the objects and the incline are equal but not sufficient to allow pure rolling. The greastest kinetic energy at the bottom of the incline will be achieved by
(A*) the solid sphere (B) the hollow sphere (C) the ring
(D) all will achieve same kinetic energy.
समान द्रव्यमान व त्रिज्या का एक ठोस गोला, खोखला गोला तथा वलय एक नत तल के शीर्ष से एक साथ छोड़े जाते हैं। वस्तु व नत तल के मध्य घर्षण गुणांक समान है तथा शुद्ध लोटनी गति के लिए पर्याप्त नहीं है। तली पर सबसे अधिक गतिज उर्जा प्राप्त करेगा—
(A*) ठोस गोला (B) खोखला गोला (C) वलय
(D) सभी समान गतिज ऊर्जा प्राप्त करेंगे

Sol.



$mg\sin\theta - f = ma$

$a = \left[\frac{mg\sin\theta - f}{m}\right]$ .....(i)

a is same for each body. (प्रत्येक वस्तु के लिए a समान है)

$f.R = I\alpha$

$\alpha = \frac{f.R}{mk^2}$

For solid sphere $k^2 = \frac{2}{5} R^2$ is minimum there fore α is maximum hence, k.E. for solid sphere will be max at bottom.

ठोस गोले के लिए $k^2 = \frac{2}{5} R^2$ न्यूनतम है अतः α अधिकतम होगा। अतः गतिज ऊर्जा भी ठोस गोले के लिए अधिकतम होगी।

I-3. A hollow sphere and a solid sphere having equal mass and equal radii are rolled down without slipping on a rough inclined plane.
(A) The two spheres reach the bottom simultaneously
(B*) The hollow sphere reaches the bottom with lesser speed.
(C) The solid sphere reaches the bottom with greater kinetic energy
(D) The two spheres will reach the bottom with same linear momentum
एक खोखला गोला व ठोस गोला जिनका द्रव्यमान व त्रिज्या समान है। एक खुरदरे नत तल पर बिना फिसलन के नीचे लुढ़काए जाते हैं, तो
(A) दोनो गोले तली पर एक साथ पहुँचेगे (B) खोखला गोला तली पर कम चाल से पहुँचेगा
(C) ठोस गोला तली पर अधिक गतिज उर्जा से पहुँचेगा (D) दोनों गोले तली पर समान रेखीय संवेग से पहुँचेगे

Sol. $a = \left(\frac{g\sin\theta}{1+\frac{k^2}{R^2}}\right)$

For solid sphere ठोस गोले के लिये $\Rightarrow \frac{k^2}{R^2} = \frac{2}{5}$

For hollow sphere खोखले गोले के लिये = $\frac{2}{3} mR^2 = mk^2$

$\frac{k^2}{R^2} = \frac{2}{3}$

so अतः $k_s < k_H$

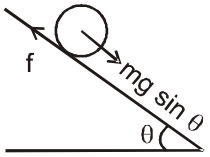
then तब $a_s > a_H$

(so speed of solid sphere is greater then hollow sphere)

(अतः ठोस गोले की चाल, खोखले गोले से ज्यादा होगी)

I-4. A solid sphere, a hollow sphere and a solid cylinder , all having equal mass and radius, are placed at the top of an incline and released. The friction coefficients between the objects and the incline are equal but not sufficient to allow pure rolling. Greastest time will be taken in reaching the bottom by
(A) the solid sphere (B) the hollow sphere (C) the solid cylinder (D*) all will take same time.
समान द्रव्यमान व त्रिज्या का एक ठोस गोला, खोखला गोला तथा ठोस बेलन एक नत तल के शीर्ष से छोड़े जाते हैं, वस्तु व नत तल के मध्य घर्षण गुणांक समान है तथा शुद्ध लोटनी गति के लिए पर्याप्त नहीं है। निम्न के द्वारा तली तक पहुँचने में लिया गया समय अधिकतम होगा -
(A) ठोस गोला (B) खोखला गोला (C) ठोस बेलन (D) सभी समान समय लेंगे

Sol.

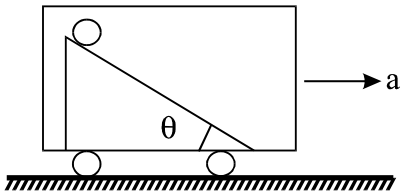


$mg \sin\theta - f = ma$

$$a = \frac{mg \sin\theta - f}{m}$$

a is equal for each body so all the object will reach at same time.
a सभी वस्तुओ के लिए समान है अतः सभी वस्तु समान समय में पहुचेगी।

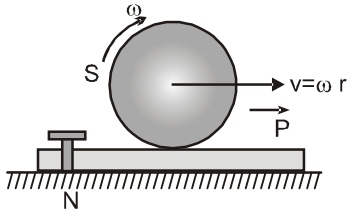
I-5. A rough inclined plane fixed in a car accelerating on a horizontal road is shown in figure. The angle of incline θ is related to the acceleration a of the car as $a = g \tan\theta$. If a rigid sphere is set in pure rolling on the incline
चित्र में एक चिकना नत तल दिखाया गया है जो एक कार में जड़वत किया गया है। कार क्षैतिज सड़क पर त्वरित होती है। नत तल का झुकाव कोण θ व कार का त्वरण निम्न प्रकार से संबंधित है $a = g \tan\theta$. यदि एक दृढ़ गोले को नत तल पर शुद्ध लोटनी गति दी जाए तो -



(A*) it will continue pure rolling (B) Friction will act on it
(C) its angular velocity will increase (D) its angular velocity will decrease.
(A) यह लगातार शुद्ध लोटनी गति करेगा (B) इस पर घर्षण बल कार्य करेगा
(C) इसका कोणीय वेग बढ़ेगा (D) इसका कोणीय वेग घटेगा

Sol. $a = (g \tan\theta)$ so net force along the indined plane is zero so it will continue in pure rolling with constant angular velocity.
$a = (g \tan\theta)$ अतः नततल के अनुदिश कुल बल शून्य है अतः यह शृद्ध लोटनी गति (अचर कोणीय वेग से) करता रहेगा।

I-6. A sphere S rolls without slipping, moving with a constant speed on a plank P. The friction between the upper surface of P and the sphere is sufficient to prevent slipping, while the lower surface of P is smooth and rests on the ground. Initially, P is fixed to the ground by a pin N. If N is suddenly removed:
एक गोला S एक प्लांक P पर बिना फिसले नियत चाल से चल रहा है। P की ऊपरी सतह व गोले के मध्य घर्षण फिसलन रोकने के लिऐ पर्याप्त है। जबकि P की निचली सतह चिकनी है व सतह पर विराम पर रखा है। प्रारम्भ में P सतह से एक पिन N द्वारा जुड़ा (fixed) है। यदि N अचानक हटा लिया जाये तो –



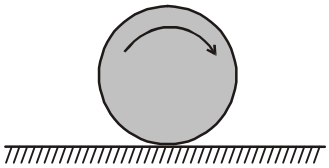
(A) S will begin to slip on P
(B) P will begin to move backwards
(C) the speed of S will decrease and its angular velocity will increase
(D*) there will be no change in the motion of S and P will still be at rest.
(A) S, P पर फिसलना प्रारम्भ करेगा
(B) P पीछे चलना प्रारम्भ करेगा
(C) S की चाल घटेगी व इसका कोणीय वेग बढ़ेगा
(D) S की गति में कोई परिवर्तन नहीं आयेगा व P अब भी विराम पर रहेगा

Sol. There is no relative motion between sphere and plank so friction force is zero then no any change in motion of sphere and plank.
यहाँ गोले और प्लांक के मध्य कोई सापेक्षिक गति नही है अतः घर्षण बल शून्य तथा गोले ओर प्लांक की गति में कोई परिवर्तन नही होगा।

I-7. A body is given translational velocity and kept on a surface that has sufficient friction. Then:
एक वस्तु को स्थानान्तरीय वेग दिया जाता है एवं पर्याप्त घर्षण वाली सतह पर रखा जाता है, तो :
(A*) body will move forward before pure rolling
(B) body will move backward before pure rolling
(C) body will start pure rolling immediately
(D) none of these
(A) शुद्ध घूर्णन से पहले वस्तु आगे की ओर गति करेगी
(B) शुद्ध घूर्णन से पहले वस्तु पीछे की ओर गति करेगी
(C) वस्तु तुरंत शुद्ध घूर्णन प्रारंभ करेगी
(D) इनमें से कोई नहीं

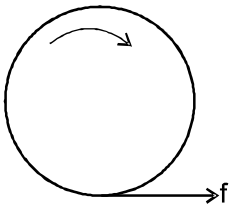
Sol. Due to linear velocity body will move forward before pure rolling.
रेखीय वेग के कारण वस्तु शुद्व लोटनी गति से पहले आगे की ओर गति करेगी।

I-8. A body of mass m and radius r is rotated with angular velocity ω as shown in the figure & kept on a surface that has sufficient friction then the body will move :
चित्रानुसार m द्रव्यमान व r त्रिज्या की एक वस्तु ω कोणीय वेग से घूर्णन करती है तथा एक सतह पर रखी जाती है जिसका पर्याप्त घर्षण है तो वस्तु गति करेगी :



(A) backward first and then move forward
(B) forward first and then move backward
(C*) will always move forward
(D) none of these
(A) पहले पीछे की ओर तथा बाद में आगे की ओर
(B) पहले आगे की ओर तथा बाद में पीछे की ओर
(C*) हमेशा आगे की ओर
(D) इनमें से कोई नहीं

Sol.



Friction will at forward dir so body will always move in forward dir.
घर्षण आगे की ओर लगेगा, अतः वस्तु हमेशा आगे की ओर गति करेगी।

I-9. A body of mass m and radius R rolling horizontally without slipping at a speed v climbs a ramp to a height $\frac{3v^2}{4g}$. The rolling body can be

(A) a sphere (B) a circular ring (C) a spherical shell (D*) a circular disc

v चाल से क्षेतिज सतह पर बिना फिसले लौटनी गति कर रही m द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की एक वस्तु ऊचाई $\frac{3v^2}{4g}$. के रेम्प पर चढ़ती है। वस्तु हो सकती है।

(A) एक गोला (B) एक वृत्ताकार वलय (C) एक गोलीय कोश (D) एक वृत्ताकार चकती

Sol. **(d)**

From energy conservation ऊर्जा संरक्षण से $\frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{k^2}{r^2}\right) = mgh = mg\left(\frac{3v^2}{4g}\right)$

$$K = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ Body is a disc वस्तु चकती है।

Section (J) : conservation of angular momentum (combined translation & rotational motion)
कोणीय संवेग संरक्षण (संयुक्त स्थानान्तरीय गति एवं घूर्णन गति)

J-1. A sphere is released on a smooth inclined plane from the top. When it moves down its angular momentum is:
एक चिकने नत तल के ऊपरी सिरे से एक गोला मुक्त रूप से छोड़ा जाता है। जब यह नीचे की ओर गति करता है तो इसका कोणीय सवेग

(A) conserved about every point प्रत्येक बिन्दु के सापेक्ष संरक्षित होगा।

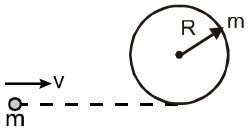
(B) conserved about the point of contact only केवल संपर्क बिन्दु के सापेक्ष संरक्षित होगा।

(C) conserved about the centre of the sphere only केवल गोले के केन्द्र के सापेक्ष संरक्षित होगा।

(D*)conserved about any point on a fixed line parallel to the inclined plane and passing through the centre of the ball.
गोले के केन्द्र से गुजरने वाली तथा नत तल के समानान्तर एक स्थिर रेखा पर स्थित किसी भी बिन्दु के सापेक्ष संरक्षित होगा।

Sol. **(D)** As the inclined plane is smooth, the sphere can never roll rather it will just slip down.
Hence, the angular momentum remains conserved about any point on a line parallel to the inclined plane and passing through the centre of the ball.
चूंकि नत समतल चिकना है अतः गोला घूर्णी गति न करके रेखीय गति करेगा, अतः कोणीय संवेग नतसमतल के समान्तर तथा किसी भी बिन्दु के परितः संरक्षित रहेगा।

J-2. A circular wooden loop of mass m and radius R rests flat on a horizontal frictionless surface. A bullet, also of mass m, and moving with a velocity V, strikes the loop and gets embedded in it. The thickness of the loop is much smaller than R. The angular velocity with which the system rotates just after the bullet strikes the loop is
m द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक वृत्ताकार लकड़ी की वलय समतलीय रूप से एक घर्षण रहित क्षेतिज तल पर स्थिर रखा हुआ है। समान द्रव्यमान m की एक गोली V वेग से गति करती हुई वलय से टकराकर इसमें धंस जाती है। वलय की मोटाई R की तुलना में बहुत कम है। गोली के वलय में धंस जाने के ठीक बाद निकाय का कोणीय वेग है।



(A) $\frac{V}{4R}$ (B*) $\frac{V}{3R}$ (C) $\frac{2V}{3R}$ (D) $\frac{3V}{4R}$

Sol. Conservation of angular momentum about C.O.M. of m and loop of mass m gives
m द्रव्यमान और m द्रव्यमान की वलय के द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग संरक्षण से

$$\frac{mVR}{2} = \left[\left\{m\ R^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right\} + m\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]\omega$$

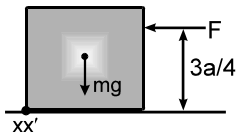
$\Rightarrow$ $V = 3\,\omega R$ $\Rightarrow$ $\omega = \frac{V}{3R}$ **Ans. (B)**

Section (K) : Toppling

K-1. A uniform cube of side a and mass m rests on a rough horizontal table. A horizontal force 'F' is applied normal to one of the faces at a point that is directly above the centre of the face, at a height $\frac{3a}{4}$ above the base. The minimum value of 'F' for which the cube begins to tilt about the edge is (assume that the cube does not slide).
a भुजा व m द्रव्यमान का एक समरूप घन खुरदरी क्षैतिज मेज पर रखा गया है। एक क्षैतिज बल 'F' केन्द्र के ठीक उपर आधार से $\frac{3a}{4}$ ऊँचाई पर लगाया जाता है। घन के भुजा के सापेक्ष लुढ़कने (tilt) के लिए 'F' का न्यूनतम मान क्या होगा? (माना कि घन फिसलता नहीं है)

(A*) $\frac{2}{3}mg$ (B) $\frac{4}{3}mg$ (C) $\frac{5}{4}mg$ (D) $\frac{1}{2}mg$

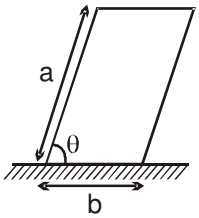
Sol.



For topling about edge xx′
xxके सापेक्ष पलटने के लिए

$F_{min.}\frac{3a}{4} = mg\frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ $F_{min.} = \frac{2mg}{3}$

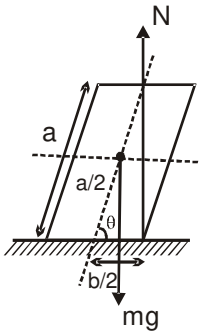
K-2. A homogenous block having its cross-section to be a parallelogram of sides 'a' and 'b' (as shown) is lying at rest and is in equilibrium on a smooth horizontal surface. Then for acute angle θ :
एक संमागी ब्लॉक जिसकी अनुप्रस्थ काट भुजा 'a' तथा 'b', चित्रानुसार है तथा यह एक समान्तर चतुर्भुज के रूप मे है। यदि यह साम्यवस्था में घर्षणहीन क्षैतिज सतह पर रखा है तो कोण θ (न्यूनकोण) का मान होगा :



(A*) $\cos\theta \le \frac{b}{a}$ (B) $\cos\theta \ge \frac{b}{a}$ (C) $\cos\theta < \frac{b}{a}$ (D) $\cos\theta > \frac{b}{a}$

(E) $\cos\theta > \frac{a}{b}$

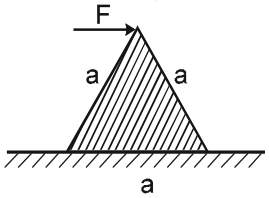
Sol.



The block will not topple if mg acts from within the base area of the block. So,
यदि ब्लॉक नही पलटता है तो mg सदैव आधार की लम्बाई के अन्दर से गुजरना चाहिए, अतः

$$\frac{a}{2}\cos\theta \le \frac{b}{2} \Rightarrow \cos\theta \le \frac{b}{a}$$

K-3. An equilateral uniform prism of mass m rests on a rough horizontal surface with coefficient of friction μ. A horizontal force F is applied on the prism as shown in the figure. If the coefficient of friction is sufficiently high so that the prism does not slide before toppling, then the minimum force required to topple the prism is :
m द्रव्यमान का एक समरूप समबाहु प्रिज्म घर्षण गुणांक μ के खुरदुरे समतल पर रखा है। इस पर क्षैतिज बल F चित्रानुसार आरोपित होता है यदि घर्षण गुणांक इतना पर्याप्त है कि वह पलटने (topple करने) से पहले खिसकता नहीं हैं तो प्रिज्म को पलटने (topple करने) के लिए आवश्यक न्यूनतम बल होगा।

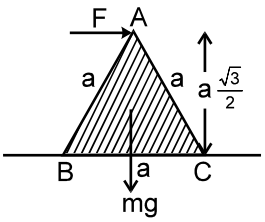


(A*) $\frac{mg}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{mg}{4}$ (C) $\frac{\mu mg}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\mu mg}{4}$

Sol. **(Moderate)** The tendency of rotating will be about the pont C. For minimum force, the torque of F about C has to be equal to the torque of mg about C.
प्रिज्म की बिन्दु C के प्रति घूर्णन गति करने की प्रवृति है। न्यूनतम बल के लिये F का बिन्दु C के परितः आघूर्ण mg का C के परितः आघूर्ण के बराबर होना चाहिए

$$\therefore \quad F\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = mg\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{mg}{\sqrt{3}} \qquad \textbf{Ans.}$$



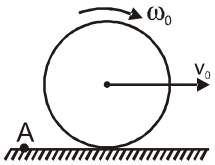
PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

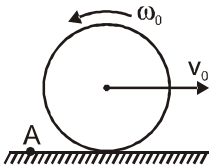
1. In each situation of column-I, a uniform disc of mass m and radius R rolls on a rough fixed horizontal surface as shown in the figure. At t = 0 (initially) the angular velocity of disc is ω_o and velocity of centre of mass of disc is v_o (in horizontal direction). The relation between v_o and ω_o for each situation and also initial sense of rotation is given for each situation in column-I . Then match the statements in column-I with the corresponding results in column-II .

प्रत्येक स्थिति में, एक एकसमान चकती जिसका द्रव्यमान m तथा त्रिज्या R है, घर्षणयुक्त स्थिर (fixed) क्षैतिज सतह पर लोटनी गति (roll) कर रही है। प्रारम्भ में t = 0 पर, चकती की कोणीय चाल ω_0 है तथा चकती के द्रव्यमान केन्द्र का वेग क्षैतिज दिशा में v_0 है। तथा v_0 एवम् ω_0 का सम्बन्ध प्रत्येक स्थिति में दिया गया है तथा घूर्णन की प्रारम्भिक प्रवृत्ति प्रत्येक स्थिति के लिए स्तम्भ -I में दी गई है तब स्तम्भ -I में दिये गये कथनों से सम्बन्धित स्तम्भ-II में दिये गये परिणामों को सुमेलित करिए।

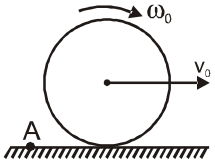
Column-I **Column-II**

(A) 

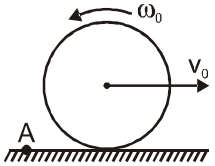
($v_o > R\,\omega_o$)

(B) 

($v_o > R\,\omega_o$)

(C) 

($v_o < R\,\omega_o$)

(D) 

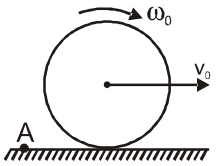
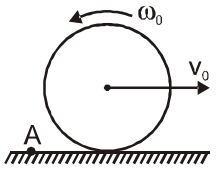
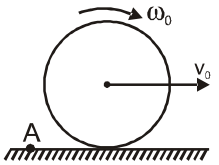
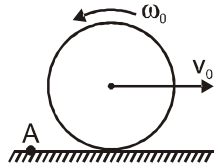
($v_o < R\,\omega_o$)

(p) The angular momentum of disc about point A (as shown in figure) remains conserved.

(q) The kinetic energy of disc after it starts rolling without slipping is less than its initial kinetic energy.

(r) In the duration disc rolls with slipping, the friction acts on disc towards left.

(s) In the duration disc rolls with slipping, the friction acts on disc for some time towards right and for some time towards left.

स्तम्भ- I		स्तम्भ - II
(A) 	($v_o > R\,\omega_o$)	(p) चित्रानुसार बिन्दु A के परितः चकती का कोणीय संवेग संरक्षित होता है।
(B) 	($v_o > R\,\omega_o$)	(q) चकती के बिना फिसले लोटनी गति (rolling) शुरू करने के बाद, चकती की गतिज ऊर्जा का मान इसकी प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा से कम होगा।
(C) 	($v_o < R\,\omega_o$)	(r) चकती जब फिसलने के साथ लोटनी गति करती है तो उस समयान्तराल में चकती पर घर्षण बांयी (left) ओर लगेगा।
(D) 	($v_o < R\,\omega_o$)	(s) जब चकती फिसलती हुई लोटनी गति (roll) करती है तो उस समयान्तराल के दौरान चकती पर कुछ समय के लिए घर्षण बल दांयी (right) ओर कुछ समय के बांयी (left) ओर होगा।

Ans. (A) p,q,r (B) p,q,r (C) p,q (D) p,q,r

Sol. Since all forces on disc pass through point of contact with horizontal surface, the angular momentum of disc about point on ground in contact with disc is conserved. Also the angular momentum of disc in all cases is conserved about any point on the line passing through point of contact and parallel to velocity of centre of mass.

The K.E. of disc is decreased in all cases due to work done by friction.

From calculation of velocity of lowest point on disc, the direction of friction in case A, B and D is towards left and in case C is towards right.

The direction of frictional force cannot change in any given case.

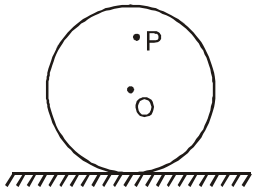
चूंकि चकती पर सभी बल क्षैतिज सतह से इसके सम्पर्क बिन्दु से गुजरते है, चकती के जमीन के साथ सम्पर्क बिन्दु के परितः कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। सम्पर्क बिन्दु से जाने वाली रेखा पर तथा द्रव्यमान केन्द्र के वेग के समान्तर, किसी बिन्दु के परितः सभी स्थितियों में चकती का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

सभी स्थितियों में घर्षण के द्वारा किये गये कार्य के कारण चकती की गतिज ऊर्जा घट जाती है। चकती पर न्यूनतम बिन्दु के वेग की गणना से, स्थिति A, B तथा D में घर्षण की दिशा बांयी ओर है तथा स्थिति C में दांयी ओर है।

किसी दी गई स्थिति में घर्षण बल की दिशा बदल नही सकती है।

2. A uniform disc rolls without slipping on a rough horizontal surface with uniform angular velocity. Point O is the centre of disc and P is a point on disc as shown in the figure. In each situation of column I a statement is given and the corresponding results are given in column-II. Match the statements in column-I with the results in column-II.

एक एकसमान चकती (disc) एक खुरदरी क्षैतिज सतह पर बिना फिसले एकसमान कोणीय वेग से लुढ़कती (roll) हुई गति करती है बिन्दु O चकती (disc) का केन्द्र है तथा P चित्रानुसार चकती पर एक बिन्दु है। स्तम्भ-I की प्रत्येक स्थिति में एक कथन दिया गया है तथा स्तम्भ-II में संगत परिणाम दिये गये हैं। स्तम्भ-I में दिये गये कथनों को स्तम्भ-II में दिये गये कथनों से सुमेलित कीजिए।



Column I	**Column II**
(A) The velocity of point P on disc	(p) Changes in magnitude with time.
(B) The acceleration of point P on disc	(q) is always directed from that point (the point on disc given in column-I) towards centre of disc.
(C) The tangential acceleration of point P on disc	(r) is always zero.
(D) The acceleration of point on disc which is in contact with rough horizontal surface	(s) is non-zero and remains constant in magnitude.

स्तम्भ I	**स्तम्भ II**
(A) चकती (disc) पर बिन्दु P का वेग	(p) समय के साथ परिमाण में परिवर्तित होता है।
(B) चकती (disc) पर बिन्दु P का त्वरण	(q) हमेशा उस बिन्दु जो स्तम्भ-I में चकती (disc) पर दिया गया है, से चकती के केन्द्र की ओर निर्देशित होता है।
(C) चकती (disc) पर बिन्दु P का स्पर्शरेखीय त्वरण	(r) हमेशा शून्य होता है।
(D) चकती पर स्थित बिन्दु, जो खुरदरी क्षैतिज सतह के साथ सम्पर्क है उस बिन्दु का त्वरण	(s) अशून्य (nonzero) है तथा परिमाण में नियत रहता है।

Ans. (A) p (B) q,s (C) p (D) q,s

Sol. (A) Speed of point P changes with time

(B) Acceleration of point P is equal to $\omega^2 x$ (ω = angular speed of disc and x = OP). The acceleration is directed from P towards O.

(C) The angle between acceleration of P (constant in magnitude) and velocity of P changes with time. Therefore, tangential acceleration of P changes with time.

(D) The acceleration of lowest point is directed towards centre of disc and remains constant with time

(A) बिन्दु P की चाल समय के साथ बदलती है।

(B) बिन्दु P का त्वरण $\omega^2 x$ (ω = डिस्क की कोणीय चाल तथा x = OP) के बराबर हो तो त्वरण P से O की दिशा में होगा।

(C) P के त्वरण (परिमाण में नियत) तथा P के वेग के बीच का कोण समय के साथ परिवर्तित होता है, इसलिये P का स्पर्शरेखीय त्वरण समय के साथ बदलता है।

(D) निम्नतम बिन्दु का त्वरण (disc) के केन्द्र की दिशा में होता है तथा समय के साथ स्थित रहता है।

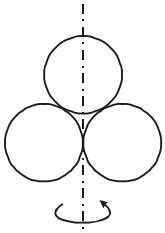
Exercise-2

Marked Questions can be used as Revision Questions.
चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

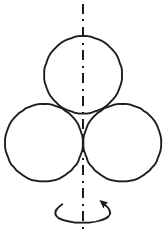
भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. Three rings each of mass m and radius r are so placed that they touch each other. The radius of gyration of the system about the axis as shown in the figure is :



(A) $\sqrt{\frac{6}{5}}\,r$ (B) $\sqrt{\frac{5}{6}}\,r$ (C) $\sqrt{\frac{6}{7}}\,r$ (D*) $\sqrt{\frac{7}{6}}\,r$

तीन वलय प्रत्येक का द्रव्यमान m व त्रिज्या r है, इस प्रकार रखी है कि वे एक–दूसरे को स्पर्श कर रही है। चित्र में दर्शाई गई अक्ष के सापेक्ष निकाय की घूर्णन त्रिज्या होगी –



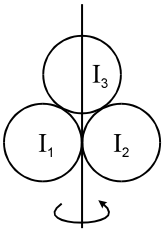
(A) $\sqrt{\frac{6}{5}}\,r$ (B) $\sqrt{\frac{5}{6}}\,r$ (C) $\sqrt{\frac{6}{7}}\,r$ (D*) $\sqrt{\frac{7}{6}}\,r$

Sol. $I = I_1 + I_2 + I_3$

$I_1 = I_2 = \frac{3}{2}mr^2$

$I_3 = \frac{mr^2}{2}$

$\therefore \quad I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{7}{2}mr^2$



Moment of inertia = $3mk^2$ where k is radius of gyration.
जडत्व आर्घूण = $3mk^2$ जहां k घूर्णन त्रिज्या है।

$3mk^2 = \frac{7}{2}mr^2$

$\Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{7}{6}}\,r$

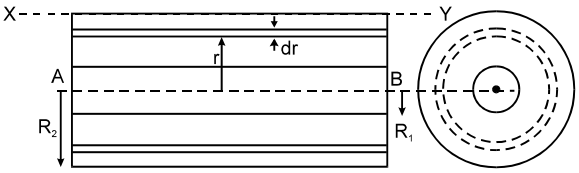
2. A hollow cylinder has mass M, outside radius R_2 and inside radius R_1. Its moment of inertia about an axis parallel to its symmetry axis and tangential to the outer surface is equal to :

(A) $\frac{M}{2}(R_2^2 + R_1^2)$ (B) $\frac{M}{2}(R_2^2 - R_1^2)$ (C) $\frac{M}{4}(R_2 + R_1)^2$ (D*) $\frac{M}{2}(3R_2^2 + R_1^2)$

एक खोखले बेलन का द्रव्यमान M, बाहरी एवं आन्तरिक त्रिज्यायें क्रमशः R_2 एवं R_1 हैं। सममिति अक्ष के समान्तर एवं बाहरी सतह के स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः इसका जड़त्व आघूर्ण है –

(A) $\frac{M}{2}(R_2^2 + R_1^2)$ (B) $\frac{M}{2}(R_2^2 - R_1^2)$ (C) $\frac{M}{4}(R_2 + R_1)^2$ (D*) $\frac{M}{2}(3R_2^2 + R_1^2)$

Sol.



Taking cylindrical element of radius r and thickness dr
r त्रिज्या तथा dr मोटाई का एक बेलनाकार अवयव लेने पर

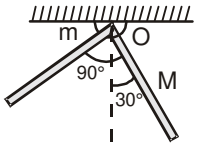
$$dm = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)\ \ell} \times (2\pi r\, \ell\, dr)$$

$$I_{AB} = \int dI_{e\ell} = \int dm\ r^2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2M}{(R_2^2 - R_1^2)} .r^3\ dr = \frac{1}{2}M\ (R_2^2 + R_1^2)$$

Using parallel axis theorem समान्तर अक्ष प्रेमय से

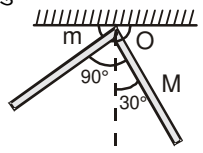
$$I_{XY} = \frac{1}{2}M\ (R_2^2 + R_1^2) + MR_2^2 = \frac{M}{2}(3R_2^2 + R_1^2)$$

3. Two uniform rods of equal length but different masses are rigidly joined to form an L–shaped body, which is then pivoted about O as shown in the figure. If in equilibrium the body is in the shown configuration, ratio M/m will be:



(A) 2 (B) 3 (C) $\sqrt{2}$ (D*) $\sqrt{3}$

समान लम्बाई तथा भिन्न–भिन्न द्रव्यमान की दो समरूप छड़ें L–आकार में दृढ़ जुड़ी हुई है तथा यह चित्रानुसार O पर निलम्बित है। यदि प्रदर्शित व्यवस्था में वस्तु सन्तुलन की साम्यावस्था में हो तो M/m अनुपात होगा :

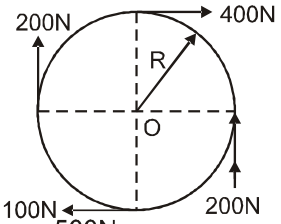


(A) 2 (B) 3 (C) $\sqrt{2}$ (D*) $\sqrt{3}$

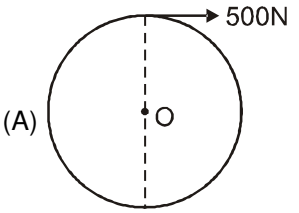
Sol. In equilibrium, torques of forces mg and Mg about an axis passing through O balance each other.
साम्यवस्था में, mg तथा Mg बलों का बलाघूर्ण O से पारित अक्ष के सापेक्ष एक दूसरे को सन्तुलित कर देता है अतः

$$mg.\ \frac{L}{2}\cos 30° = Mg\ \frac{L}{2}\cos 60° \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{m} = \sqrt{3}$$

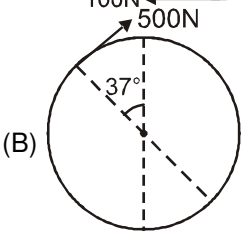
4. Four forces tangent to the circle of radius ‘R’ are acting on a wheel as shown in the figure. The resultant equivalent one force system will be :



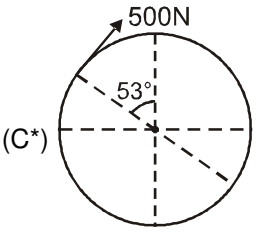
(A)



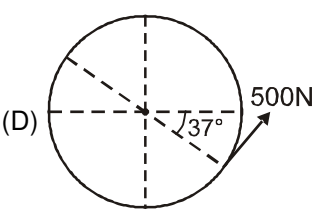
(B)



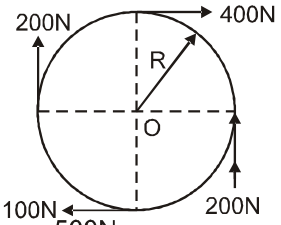
(C*)



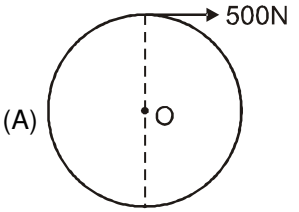
(D)



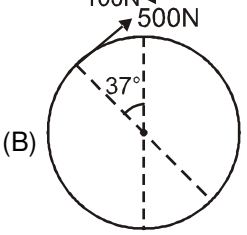
4. ‘R’ त्रिज्या के वृत्त के स्पर्श रेखीय, पहिये पर लगे चार बल चित्र में दर्शाये गये है। दिये गये बलो के परिणामी तुल्य एक बल निकाय होगा।



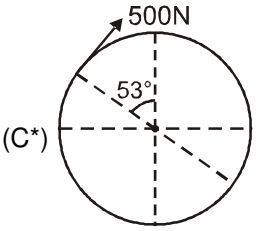
(A)



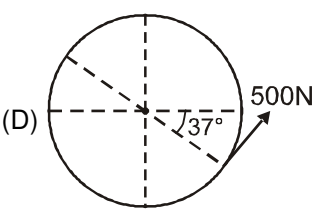
(B)



(C*)



(D)



Sol. $\vec{F}_{net} = (400-100)\hat{i} + (200+200)\hat{j} = 300\hat{i} + 400\hat{j} \Rightarrow |\vec{F}| = 500$ N

Angle made by $\vec{F}_{net}$ with the vertical is $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{400}\right) = 37°$

$\vec{F}_{net}$ द्वारा उर्ध्वाधर के साथ बनाया गया कोण $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{400}\right) = 37°$

also τ = 500 R therefore point of application of the resultant force is at a distance R from the centre. Hence (C).

तथा τ = 500 R है, अतः वह बिन्दु जहॉ पर परणामी बल का उपयोग किया जाये केन्द्र से R दूरी पर होगा।

Hence अतः (C) सही है।

5. A uniform thin rod of mass ‘m’ and length L is held horizontally by two vertical strings attached to the two ends. One of the string is cut. Find the angular acceleration soon after it is cut :

(A) $\frac{g}{2L}$ (B) $\frac{g}{L}$ (C*) $\frac{3g}{2L}$ (D) $\frac{2g}{L}$

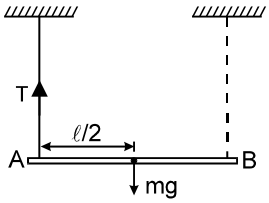
एक समरूपी ‘m’ द्रव्यमान व L लम्बाई की पतली छड़ सिरों पर दो ऊर्ध्व डोरियों से क्षैतिज लटकी हुई है। यदि एक रस्सी को काट दिया जाता है तो काटने के तुरन्त बाद छड़ का कोणीय त्वरण क्या होगा ?

(A) $\frac{g}{2L}$ (B) $\frac{g}{L}$ (C*) $\frac{3g}{2L}$ (D) $\frac{2g}{L}$

Sol. **(C)**

Immediately after string connected to end B is cut, the rod has tendency to rotate about point A.
Torque on rod AB about axis passing through A and normal to plane of paper is
B सिरे से जुडी रस्सी को काटने के तुरन्त बाद, छड की बिन्दु A के सापेक्ष घूर्णन करने की प्रवृत्ति होगी .
A से गुजरने वाली तथा कागज के तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष छड AB का बलार्घूण

$$\frac{m\ell^2}{3}\ \alpha\ =\ mg\frac{\ell}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{3g}{2\ell}$$



Aliter : Applying Newton's law on center of mass
वैकल्पिक हल : द्रव्यमान केन्द्र पर न्यूटन के नियम से

$mg - T = ma$ .....(i)

Writing $\tau = I\alpha$ about center of mass
$\tau = I\alpha$ द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष

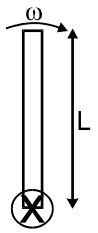
$$T\frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{12}\alpha$$ ....(ii)

Also तथा $a = \frac{\ell}{2}\alpha$ ....(iii)

From (i) , (ii) and (iii) सभी (i) , (ii) और (iii) से

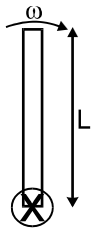
$$\alpha = \frac{3g}{2\ell}$$

6. A uniform rod hinged at its one end is allowed to rotate in vertical plane. Rod is given an angular velocity ω in its vertical position as shown in figure. The value of ω for which the force exerted by the hinge on rod is zero in this position is:



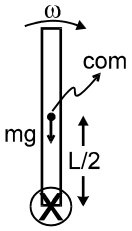
(A) $\sqrt{\frac{g}{L}}$ (B*) $\sqrt{\frac{2g}{L}}$ (C) $\sqrt{\frac{g}{2L}}$ (D) $\sqrt{\frac{3g}{L}}$

एक समान छड़, एक सिरे पर कीलकित है तथा ऊर्ध्वाधर तल में घूमने के लिए स्वतन्त्र है। छड़ को इसकी ऊर्ध्वाधर स्थिति से चित्रानुसार कोणीय वेग ω देते है। ω का वह मान ज्ञात करों जिसके लिये इस स्थिति में कीलकित बिन्दु द्वारा छड़ पर लगाया बल शून्य होगा–



(A) $\sqrt{\frac{g}{L}}$ (B*) $\sqrt{\frac{2g}{L}}$ (C) $\sqrt{\frac{g}{2L}}$ (D) $\sqrt{\frac{3g}{L}}$

Sol. For the circular motion of com : द्रव्यमान केन्द्र की वृत्तीय गति के लिए

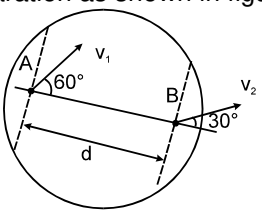


$$mg = m\left(\frac{L}{2}\right)\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

Note : Since the reaction at the end is zero, the gravitational force will have to provide the required centripetal force.

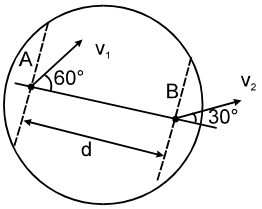
नोट : चूंकि सिरे पर प्रतिक्रिया शून्य है अतः गुरूत्वाकर्षण बल पर्याप्त अभिकेन्द्रीय बल देगा।

7. Two points A & B on a disc have velocities v_1 & v_2 at some moment. Their directions make angles 60° and 30° respectively with the line of separation as shown in figure. The angular velocity of disc is :



(A) $\frac{\sqrt{3}v_1}{d}$ (B) $\frac{v_2}{\sqrt{3}d}$ (C) $\frac{v_2 - v_1}{d}$ (D*) $\frac{v_2}{d}$

चकती पर स्थित दो बिन्दु A व B का वेग किसी क्षण पर v_1 व v_2 है। चित्रानुसार दोंनो बिन्दुओं को पृथक करने वाली रेखा से उनकी दिशाऐं क्रमशः 60° व 30° कोण बनाते है तो चकती का कोणीय वेग है।



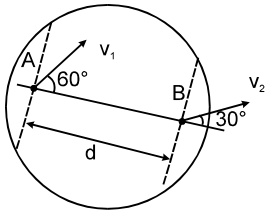
(A) $\frac{\sqrt{3}v_1}{d}$ (B) $\frac{v_2}{\sqrt{3}d}$ (C) $\frac{v_2 - v_1}{d}$ (D*) $\frac{v_2}{d}$

Sol. For rigid body separation between two point remains same.

द्रढ वस्तु के किन्ही दो बिन्दुओ के मध्य दूरी समान रहती है।

$v_1 \cos 60° = v_2 \cos 30°$

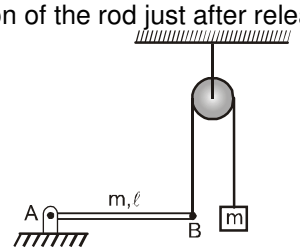
$$\frac{v_1}{2} = \frac{\sqrt{3}\ v_2}{2} \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{3}\, v_2$$



$$\omega_{disc} = \left|\frac{v_2 \sin 30° - v_1 \sin 60°}{d}\right| = \left|\frac{\frac{v_2}{2} - \frac{\sqrt{3}v_1}{2}}{d}\right| = \left|\frac{v_2 - \sqrt{3}\times\sqrt{3}v_2}{2d}\right| = \frac{2v_2}{2d} = \frac{v_2}{d}$$

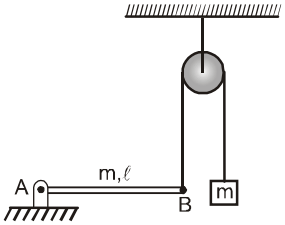
$$\omega_{disc} = \frac{v_2}{d}$$

8. Uniform rod AB is hinged at the end A in a horizontal position as shown in the figure (the hinge is frictionless, that is, it does not exert any friction force on the rod). The other end of the rod is connected to a block through a massless string as shown. The pulley is smooth and massless. Masses of the block and the rod are same and are equal to ' m '. Acceleration due to gravity is g. The tension in the thread, and angular acceleration of the rod just after release of block from this position



(A) $\frac{3mg}{8}, \frac{g}{8\ell}$ (B*) $\frac{5mg}{8}, \frac{3g}{8\ell}$ (C) $\frac{mg}{8}, \frac{5g}{8\ell}$ (D) $\frac{7mg}{8}, \frac{7g}{8\ell}$

8. चित्र में दिखाये अनुसार एक एकसमान छड़ AB, क्षैतिज स्थिति में A सिरे पर कीलकित (hinged) है। यहाँ कीलकीत खूंटी (hinge) घर्षणरहित है तथा यह छड़ पर कोई घर्षण बल नहीं लगाती है। छड़ का दूसरा सिरा एक द्रव्यमान रहित रस्सी द्वारा चित्रानुसार एक ब्लॉक से जुड़ा है। घिरनी द्रव्यमान रहित तथा चिकनी है। ब्लॉक तथा छड़ का द्रव्यमान समान तथा प्रत्येक का द्रव्यमान m हैं। गुरूत्वीय त्वरण g है। ब्लॉक को इस स्थिति से छोड़ने के तुरन्त बाद, रस्सी में तनाव तथा छड़ का कोणीय त्वरण होगा–



(A) $\frac{3mg}{8}, \frac{g}{8\ell}$ (B*) $\frac{5mg}{8}, \frac{3g}{8\ell}$ (C) $\frac{mg}{8}, \frac{5g}{8\ell}$ (D) $\frac{7mg}{8}, \frac{7g}{8\ell}$

Sol. **(a, b)** Let α be the angular acceleration of rod and a be acceleration of block just after its release.
माना छड़ का कोणीय त्वरण α है तथा इसके छोड़े जाने के तुरन्त बाद ब्लॉक का त्वरण a है।

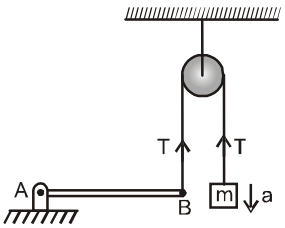
$\therefore$ $mg - T = ma$ ..... (1)

$T\ell - mg\frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{3}\alpha$ .... (2)

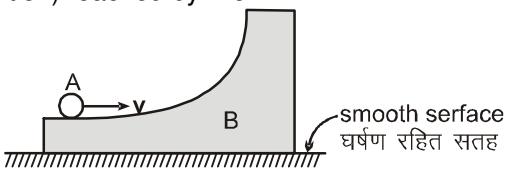
and तथा $a = \ell\alpha$ .... (3)

Solving we get हल करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$T = \frac{5}{8}mg$ and तथा $\alpha = \frac{3g}{8\ell}$

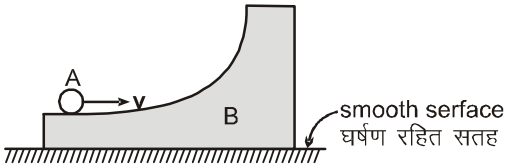


9. In the figure shown a ring A is rolling without sliding with a velocity v on the horizontal surface of the body B (of same mass as A). All surfaces are smooth. B has no initial velocity. What will be the maximum height (from initial position) reached by A on B.



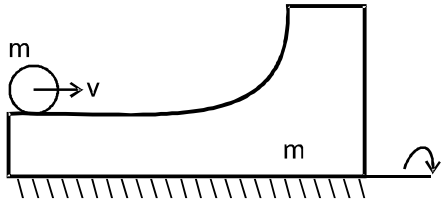
(A) $\frac{3v^2}{4g}$ (B*) $\frac{v^2}{4g}$ (C) $\frac{v^2}{2g}$ (D) $\frac{v^2}{3g}$

चित्रानुसार वलय A पिण्ड B की क्षैतिज सतह पर v वेग से बिना फिसले लुढ़क रही है। यदि A तथा B का द्रव्यमान समान है तथा सभी सतह चिकनी हो तथा B का प्रारम्भिक वेग शून्य है। A द्वारा B की सतह पर प्राप्त अधिकतम ऊचाँई (प्रारम्भिक स्थिति से)ज्ञात करो ?



(A) $\frac{3v^2}{4g}$ (B*) $\frac{v^2}{4g}$ (C) $\frac{v^2}{2g}$ (D) $\frac{v^2}{3g}$

Sol.



When ball at maximum height block and ball has equal velocity
जब गेंद ऊचॉई पर है तब ब्लॉक और गेंद का वेग समान होगा। अधिकतम

So Using momentum conservation
अतः संवेग सरंक्षण से

$P_i = mv$

$P_f = 2mv_0$ (v_0 final velocity) (v_0 अन्तिम वेग है)

$P_i = P_t$

$mv = 2mv_0$

$V_0 = \left(\frac{V}{2}\right)$

Using energy conservation ऊर्जा सरंक्षण से

$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}2mv_0^2 + mgh$

$(I = mR^2)$

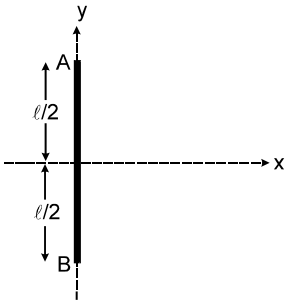
$v = \omega R$

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2mv_0^2 + 2mgh$

$v^2 - 2\frac{v^2}{4} = 2gh$

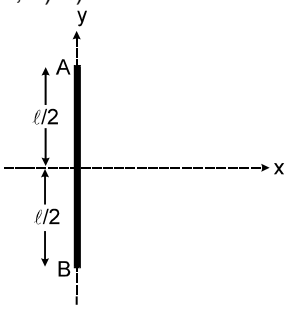
$\left(h` = \frac{v^2}{4g}\right)$

10. A uniform rod of mass m, length ℓ is placed over a smooth horizontal surface along y-axis and is at rest as shown in figure. An impulsive force F is applied for a small time Δt along x-direction at point A after this rod moves freely. The x–coordinate of end A of the rod when the rod becomes parallel to x–axis for the first time is (initially the coordinate of centre of mass of the rod is (0, 0)) :



(A) $\frac{\pi\ell}{12}$ (B) $\frac{\ell}{2}\left(1+\frac{\pi}{12}\right)$ (C) $\frac{\ell}{2}\left(1-\frac{\pi}{6}\right)$ (D*) $\frac{\ell}{2}\left(1+\frac{\pi}{6}\right)$

m द्रव्यमान एवं ℓ लम्बाई की एक समरूप छड़ y-अक्ष के अनुदिश चित्रानुसार चिकनी क्षैतिज सतह पर स्थिर अवस्था में रखी है। एक आवेगीय बल F को बिन्दु A पर x दिशा में अल्प समय Δt के लिए लगाते है जिसके पश्चात् यह छड़ स्वतन्त्रता पूर्वक गति करती है तो छड़ के सिरे A के x–निर्देशांक है जब छड़ प्रथम बार x–अक्ष के समान्तर होती है (प्रारम्भ में छड़ के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक (0, 0) हैं) :



(A) $\frac{\pi\ell}{12}$ (B) $\frac{\ell}{2}\left(1+\frac{\pi}{12}\right)$ (C) $\frac{\ell}{2}\left(1-\frac{\pi}{6}\right)$ (D*) $\frac{\ell}{2}\left(1+\frac{\pi}{6}\right)$

Sol. As torque = change in angular momentum
क्योकि बलार्घूण = कोणीय संवेग में परीर्वतन

$\therefore$ $F\Delta t = mv$ (Linear) (रेखीय) ..... (1)

and और $\left(F\cdot\frac{\ell}{2}\right)\Delta t = \frac{m\ell^2}{12}\cdot\omega$ (Angular) (कोणीय) ..... (2)

Dividing: (1) and (2) (1) और (2) करने पर

$$2 = \frac{12v}{\omega\ell} \Rightarrow \omega = \frac{6v}{\ell}$$

Using का उपयोग से $S = ut$:

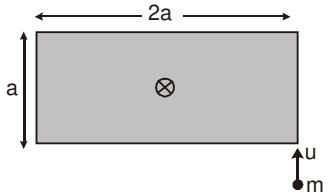
Displacement of COM is द्रव्यमान केन्द्र का विस्थापन $\frac{\pi}{2} = \omega t = \left(\frac{6v}{\ell}\right)t$ and और $x = vt$

Dividing भाग देने पर $\frac{2x}{\pi} = \frac{\ell}{6}$

$\Rightarrow$ $x = \frac{\pi\ell}{12} \Rightarrow$ Coordinate of A will be A के निर्देशांक निम्न होगे $\left[\frac{\pi\ell}{12}+\frac{\ell}{2},\ 0\right]$

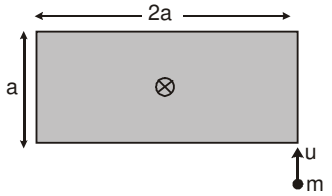
Hence (D). अतः (D) सही है।

11. A uniform rectangular plate of mass m which is free to rotate about the smooth vertical hinge passing through the centre and perpendicular to the plate, is lying on a smooth horizontal surface. A particle of mass m moving with speed 'u' collides with the plate and sticks to it as shown in figure. The angular velocity of the plate after collision will be :



(A) $\frac{12}{5}\frac{u}{a}$ (B) $\frac{12}{19}\frac{u}{a}$ (C) $\frac{3}{2}\frac{u}{a}$ (D*) $\frac{3}{5}\frac{u}{a}$

एक समरूप आयताकार m द्रव्यमान की प्लेट इसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली व प्लेट के लम्बवत् चिकने ऊर्ध्वाधर कीलक के सापेक्ष घूमने के लिए स्वतंत्र है। यह प्लेट चिकने क्षैतिज तल पर रखी गई है। m द्रव्यमान का एक कण चित्रानुसार 'u' चाल से गति करता हुआ प्लेट से टकराता है व इससे चिपक जाता है। टक्कर के बाद प्लेट का कोणीय वेग होगा :



(A) $\frac{12}{5}\frac{u}{a}$ (B) $\frac{12}{19}\frac{u}{a}$ (C) $\frac{3}{2}\frac{u}{a}$ (D*) $\frac{3}{5}\frac{u}{a}$

Sol. Conserving the angular momentum : about the hinge
किलक के परीतः कोणीय संवेग संरक्षित करने पर :

$$mua = \left[\frac{m(a^2+4a^2)}{12} + \frac{5}{4}ma^2\right]\omega$$

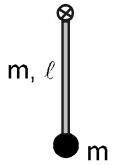
$\Rightarrow \quad \omega = \frac{3}{5}\frac{u}{a}$ Ans.

12. A rod can rotate about a fixed vertical axis. The mass is non-uniformly distributed along the length of the rod. A horizontal force of constant magnitude and always perpendicular to the rod is applied at the end. Which of the following quantity (after one rotation) will not depend on the information that through which end the axis passes ? (Assuming initial angular velocity to be zero)
(A) angular momentum (B*) kinetic energy
(C) angular velocity (D) none of these

एक छड़ एक स्थिर लम्बवत अक्ष के सापेक्ष घूर्णन कर सकती है। छड़ की लम्बाई के अनुदिश द्रव्यमान असमरूप तरीके से वितरित है। छड़ के एक सिरे पर नियत परिमाण का क्षैतिज बल हमेशा छड़ के लम्बवत कार्यरत है। एक चक्कर के बाद निम्न में से कौनसी राशि इस बात पर निर्भर नहीं करेगी कि अक्ष किस सिरे से गुजरता है (प्रारम्भिक कोणीय वेग शून्य मानिये)
(A) कोणीय संवेग (B*) गतिज उर्जा (C) कोणीय वेग (D) निम्न में से कोई नहीं

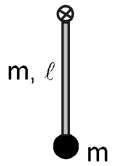
Sol. Since the work done is independent of the information about which point the rod is rotating, by work-energy theorem the kinetic energy will also be independent of the same. Hence (B)
क्योंकि किया गया कार्य इस सूचना पर निर्भर नहीं करता कि छड़ किस बिन्दु के सापेक्ष घूर्णन करती है। अतः कार्य ऊर्जा प्रमेय से गतिज ऊर्जा भी इस पर निर्भर नहीं करती। अतः (B) सही है।

13. A particle is attached to the lower end of a uniform rod which is hinged at its other end as shown in the figure. The minimum speed given to the particle so that the rod performs circular motion in a vertical plane will be : [length of the rod is ℓ, consider masses of both rod and particle to be same]



(A) $\sqrt{5g\ell}$ (B) $\sqrt{4g\ell}$ (C*) $\sqrt{4.5g\ell}$ (D) none of these

चित्र में दिखाये अनुसार एक छड़ एक सिरे पर कीलकित है तथा दूसरे निचले सिरे पर एक कण जुड़ा है। कण को दिया गया न्यूनतम वेग क्या होगा ताकि छड़ ऊर्ध्वाधर तल में वृत्तीय गति कर सके – [छड़ की लम्बाई ℓ है, छड़ व कण का द्रव्यमान दोनों m माने]



(A) $\sqrt{5g\ell}$ (B) $\sqrt{4g\ell}$ (C*) $\sqrt{4.5g\ell}$ (D) इनमें से कोई नहीं

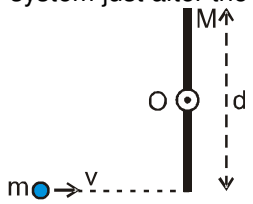
Sol. For (rod + particle) system :
(छड़ + कण) निकाय के लिए :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m\ \ell^2}{3}\right)\left(\frac{v^2}{\ell^2}\right)+\frac{1}{2}mv^2=2\ mg\left(\frac{3\ \ell}{2}\right)$$

[Since, com will finally reach a height $2\left(\frac{3\ell}{4}\right)$]

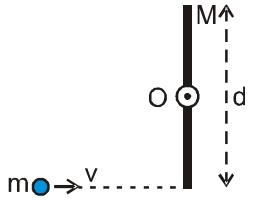
[क्योंकि, द्रव्यमान केन्द्र अन्त में $2\left(\frac{3\ell}{4}\right)$ ऊँचाई पर पहुँचेगा] $\Rightarrow v=\sqrt{4.5\ g\ell}$

14. A particle of mass m is moving horizontally at speed v perpendicular to a uniform rod of length d and mass M = 6m . The rod is hinged at centre O and can freely rotate in horizontal plane about a fixed vertical axis passing through its centre O. The hinge is frictionless.The particle strikes and sticks to the end of the rod. The angular speed of the system just after the collision :



(A*) 2v/3d (B) 3v/2d (C) v/3d (D) 2v/d

एक द्रव्यमान m, एक छड़ के लम्बवत् v चाल से क्षैतिजतः गति कर रहा है। दी गई एकसमान छड़ की लम्बाई d तथा द्रव्यमान M = 6m है। छड़ को केन्द्र O पर किलकीत किया हुआ है तथा यह केन्द्र O से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर स्थिर अक्ष के परितः क्षैतिज तल में मुक्त रूप से घूर्णन कर सकती है। किलकीत बिन्दु घर्षण रहित है। कण टकराता है व छड़ के सिरे से चिपक जाता है। टक्कर के ठीक बाद निकाय की कोणीय चाल होगी–



(A*) 2v/3d (B) 3v/2d (C) v/3d (D) 2v/d

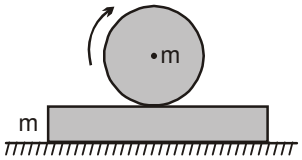
Sol. By conservation of angular momentum about hinge O.
किलकीत बिन्दु O के परितः कोणीय संवेग संरक्षणसे

$$L = I\omega$$

$$mv\frac{d}{2} = \left[\frac{Md^2}{12} + m\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{mvd}{2} = \left(\frac{md^2}{2} + \frac{md^2}{4}\right)\omega$$

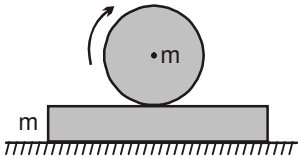
$$\frac{mvd}{2} = \frac{3}{4}md^2\omega \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{v}{d} = \omega$$

15. A uniform sphere of mass 'm' is given some angular velocity about a horizontal axis through its centre and gently placed on a plank of mass 'm'. The co-efficient of friction between the two is μ. The plank rests on a smooth horizontal surface. The initial acceleration of the centre of sphere relative to the plank will be :



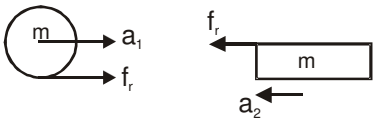
(A) zero (B) μg (C) (7/5) μg (D*) 2 μg

'm' द्रव्यमान के एक समरूप गोले को एक केन्द्र से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष कुछ कोणीय वेग दिया जाता है तथा धीरे से m द्रव्यमान के तख्ते पर रख दिया जाता हैं। दोनों के बीच घर्षण गुणांक μ है। तख्ता चिकने क्षैतिज तल पर रखा गया है। तख्ते के सापेक्ष गोले के केन्द्र का प्रारम्भिक त्वरण होगा :



(A) शून्य (B) μg (C) (7/5) μg (D*) 2 μg

Sol. FBD for sphere & block गोले और ब्लॉक के लिए FBD



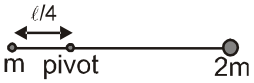
$$a_1 = \frac{f_r}{m} = \frac{\mu mg}{m} \qquad a_2 = \frac{f_r}{m} = \frac{\mu mg}{m}$$

$$\vec{a}_1 = \mu g\hat{i} \qquad \vec{a}_2 = -\mu g\hat{i}$$

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = 2\mu g\hat{i}$$

$$a_{rel} = 2\mu g.$$

16. A rod of negligible mass and length ℓ is pivoted at the point $\frac{\ell}{4}$ distance from the left end as shown. A particle of mass m is fixed to its left end & another particle of mass 2 m is fixed to the right end. If the system is released from rest and after sometime becomes vertical, the speed v of the two masses and angular velocity at that instant is



(A*) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}, \frac{3}{4}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}, \sqrt{\frac{40g}{19\ell}}$ (B) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}, \frac{3}{4}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}, \sqrt{\frac{20g}{19\ell}}$

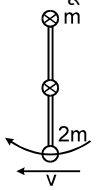
(C) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}, \frac{3}{4}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}, \sqrt{\frac{20g}{19\ell}}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}, \sqrt{\frac{40g}{19\ell}}$

16. ℓ लम्बाई तथा नगण्य द्रव्यमान की एक छड़ को बांये छोर से $\frac{\ell}{4}$ दूरी पर चित्रानुसार कीलकित कर दिया जाता है। एक m द्रव्यमान का कण इसके बांये सिरे पर तथा दूसरा 2 m द्रव्यमान का कण दांये सिरे पर बांध दिया जाता है। अगर निकाय को चित्रानुसार स्थिर अवस्था से छोड़ा जाता है तो दोंनो द्रव्यमान की चाल तथा कोणीय वेग क्या होगा जब निकाय ऊर्ध्वाधर स्थिति से गुजरता है।

(A*) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}$, $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}$, $\sqrt{\frac{40g}{19\ell}}$ (B) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}$, $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}$, $\sqrt{\frac{20g}{19\ell}}$

(C) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}$, $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}$, $\sqrt{\frac{20g}{19\ell}}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}$, $\sqrt{\frac{40g}{19\ell}}$

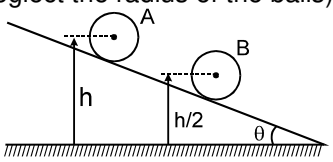
Sol. Decrease in PE = Increase in rotational K.E
स्थितिज ऊर्जा में कमी= घूर्णन गतिज ऊर्जा में वृद्धि



$$\Rightarrow \quad 2mg.\frac{3\ell}{4} - mg.\frac{\ell}{4} = \frac{1}{2} I.\omega^2 = \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + 2m\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2\right]\omega^2$$

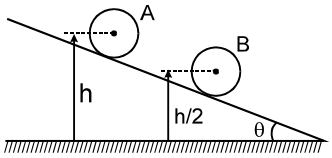
$$\omega = \sqrt{\frac{40g}{19\ell}} \quad \text{and} \quad v_1 = \frac{\ell}{4}\omega = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}} \text{ and } v_2 = \frac{3\ell}{4}\omega = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}$$

17. Two identical balls A & B of mass m each are placed on a fixed wedge as shown in figure. Ball B is kept at rest and it is released just before two balls collide. Ball A rolls down without slipping on inclined plane & collides elastically with ball B. The kinetic energy of ball A just after the collision with ball B is (Neglect friction between A and B, also neglect the radius of the balls) :



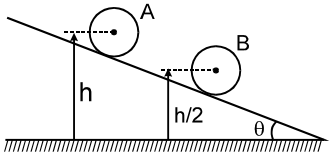
(A*) $\frac{mgh}{7}$ (B) $\frac{mgh}{2}$ (C) $\frac{2mgh}{5}$ (D) $\frac{7mgh}{5}$

दो एक समान ठोस गेंदे A व B प्रत्येक द्रव्यमान m, चित्र में दर्शाये अनुसार एक स्थिर वेज पर रखी जाती है। गेंद B विराम पर रखी है एवं गेंद B दोनों गेंदों के टकराने से ठीक पहले छोड़ी जाती है। गेंद A नत तल पर बिना फिसले लुढ़कती है और गेंद B से प्रत्यास्थ टक्कर करती है। गेंद B से टक्कर के तुरंत बाद गेंद A की गतिज ऊर्जा होगी : (A तथा B के मध्य घर्षण नगण्य माने तथा गेंदों की त्रिज्या को नगन्य माने)



(A*) $\frac{mgh}{7}$ (B) $\frac{mgh}{2}$ (C) $\frac{2mgh}{5}$ (D) $\frac{7mgh}{5}$

Sol.



Just before collision Between two Balls
दोनों गेदों के मध्य टक्कर के तुरन्त बाद
potential energy lost by Ball A = kinetic energy gained by Ball A.
गेंद A की स्थितिज ऊर्जा मे कमी = गेंद A गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{cm}^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}mR^2 \times \left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_{cm}^2$$

$$= \frac{1}{5}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}mv_{cm}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{7}mgh = mv_{cm}^2 \qquad \Rightarrow \quad \frac{mgh}{7} = \frac{1}{5}mv_{cm}^2$$

After collision only translational kinetic energy is transfered to ball B
टक्कर के बाद केवल स्थानान्तरण गतिज ऊर्जा गेंद B को स्थानान्तरित होगी।

So just after collision rotational kinetic energy of Ball A = $\frac{1}{5}mv_{cm}^2 = \frac{mgh}{7}$

अतः टक्कर के तुरन्त बाद गेंद A की गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{5}mv_{cm}^2 = \frac{mgh}{7}$

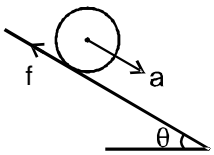
18. A solid uniform disc of mass m rolls without slipping down an inclined plane with an acceleration a. The frictional force on the disc due to surface of the plane is

(A) 2 ma (B) $\frac{3}{2}$ ma (C) ma (D*) $\frac{1}{2}$ ma

एक ठोस समरूप चकती जिसका द्रव्यमान m है, एक नततल पर a त्वरण से बिना फिसले लुढ़कती है। तल की सतह के कारण चकती पर घर्षण बल होगा।

(A) 2 ma (B) $\frac{3}{2}$ ma (C) ma (D*) $\frac{1}{2}$ ma

Sol.

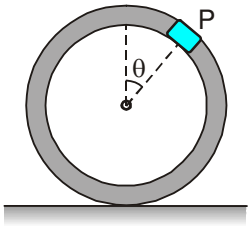


Torque about COM द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बलाघूर्ण

$f.R = I \cdot \alpha$ $(a = \alpha R)$

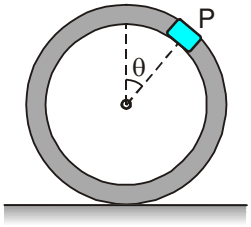
$$f.R = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R} = \left(\frac{mR^2}{2} \cdot R\right) \Rightarrow \left(f = \frac{ma}{2}\right)$$

19. A small block of mass 'm' is rigidly attached at 'P' to a ring of mass '3m' and radius 'r'. The system is released from rest at $\theta = 90°$ and rolls without sliding. The angular acceleration of ring just after release is



(A) $\frac{g}{4r}$ (B*) $\frac{g}{8r}$ (C) $\frac{g}{3r}$ (D) $\frac{g}{2r}$

एक 'm' द्रव्यमान का छोटा ब्लॉक एक वलय जिसका द्रव्यमान '3m' तथा त्रिज्या 'r' है पर दृढ़ रूप से लगा है। निकाय विराम से $\theta = 90^{\circ}$ पर मुक्त किया जाता है तथा बिना फिसले लुढ़कता है। विराम से मुक्त करने के तुरन्त बाद वलय का कोणीय त्वरण कितना होगा –



(A) $\frac{g}{4r}$ (B*) $\frac{g}{8r}$ (C) $\frac{g}{3r}$ (D) $\frac{g}{2r}$

Sol. $f = 4\,ma$ .... (1)

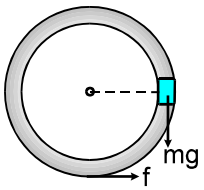
$(mg - f)r = (3\,mr^2 + mr^2)\,\alpha$

$mg - f = 4\,ma$ .... (2)

from (1) and (2)

$\Rightarrow 8\,ma = mg$

$\Rightarrow a = \frac{g}{8} \Rightarrow \alpha = \frac{g}{8\ r}$



20. A uniform ring of radius R is given a back spin of angular velocity $V_0/2R$ and thrown on a horizontal rough surface with velocity of center to be V_0. The velocity of the centre of the ring when it starts pure rolling will be

(A) $V_0/2$ (B*) $V_0/4$ (C) $3V_0/4$ (D) 0

R त्रिज्या की एक एकसमान वलय को $V_0/2R$ कोणीय वेग का पश्च चक्रण (back spin) कराके एक खुरदरे क्षेतिज तल पर फेंका जाता है। फेंकते समय केन्द्र का वेग V_0 है। शुद्ध लोटनी गति प्रारम्भ होने के बाद वलय के केन्द्र का वेग होगा।

(A) $V_0/2$ (B*) $V_0/4$ (C) $3V_0/4$ (D) 0

Sol. Here, $u = V_0$, $\omega_0 = -\frac{V_0}{2R}$

At pure rolling ; (शुद्ध घूर्णीय गति के लिए)

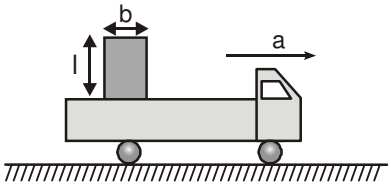
$$V = V_0 - \left(\frac{F_f}{m}\right)t$$

& $\frac{V}{R} = -\frac{V_0}{2R} + \left(\frac{F_f}{m.R}\right)t$ (In pure rolling $V = R\omega$) (शुद्ध घूर्णीय गति के लिए $V = R\omega$)$(\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{F_f.R}{mR^2})$

$\Rightarrow$ $V_0 - V = V + \frac{V_0}{2}$

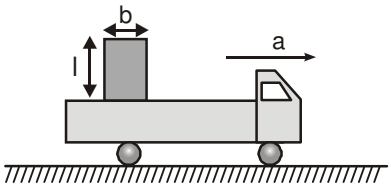
$\Rightarrow$ $2V = \frac{V_0}{2}$ $\Rightarrow$ $V = \frac{V_0}{4}$ **Ans.**

21. A box of dimensions ℓ and b is kept on a truck moving with an acceleration a. If box does not slide, maximum acceleration for it to remain in equilibrium (w.r.t.truck) is :



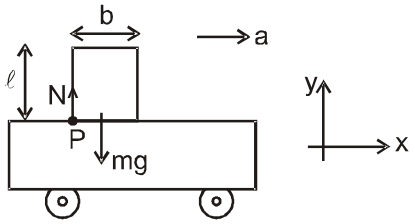
(A) $\frac{g\ell}{b}$ (B*) $\frac{gb}{\ell}$ (C) g (D) none of these

एक ℓ तथा b विमाओं का एक ब्लॉक a त्वरण से चल रहे ट्रक पर रखा है। यदि बॉक्स नहीं सरकता है और यह साम्यावस्था में रहे (ट्रक के सापेक्ष) तो ब्लॉक को अधिकतम कितना त्वरित कर सकते है।



(A) $\frac{g\ell}{b}$ (B*) $\frac{gb}{\ell}$ (C) g (D) इनमें से कोई नहीं

Sol. For maximum a, normal reaction will shift to left most position.
अधिकतम त्वरण के लिए अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल बांये किनारे पर स्थानान्तरित हो जायेगा

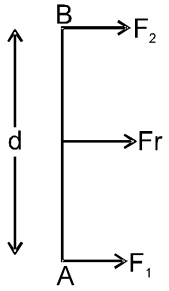


for rotational equilibrium $\tau_P = = 0$ [in frame of truck]
घूर्णन साम्य अवस्था के लिए $\tau_P = = 0$ [ट्रक के निर्देश तंत्र में]

$ma\frac{\ell}{2} = mg\frac{b}{2}$ $\Rightarrow$ $a = \frac{gb}{\ell}$

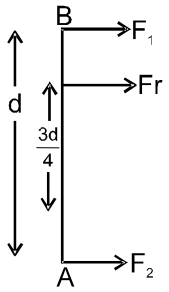
22. If the positions of two like parallel forces on a light rod are interchanged, their resultant shifts by one–fourth of the distance between them then the ratio of their magnitude is:
(A) 1: 2 (B) 2: 3 (C) 3: 4 (D*) 3: 5
यदि किसी हल्की छड़ पर, दो समान्तर (एक ही दिशा के) बलों की स्थिति परस्पर बदल दे, तो उनका परिणामी बल उनके बीच की दूरी के एक चौथाई से विस्थापित हो जाता है तो उनके परिमाणों का अनुपात होगा–
(A) 1: 2 (B) 2: 3 (C) 3: 4 (D*) 3: 5

Sol.



Torque about point A बिन्दु A के सापेक्ष बलाघूर्ण

$T_A = Fr\left(\frac{d}{2}\right) + F_2(d)$



$\tau_A^1 = Fr\left(\frac{3d}{4}\right) + F_1(d)$

$(F_1 + F_2)\frac{d}{2} + F_2 d = (F_1 + F_2)\left(\frac{3d}{4}\right) + F_1 d$

$\frac{F_1 + F_2}{2} + F_2 = \left(\frac{3}{4}F_1 + \frac{3}{4}F_2 + F_1\right)$

$\frac{F_1}{2} - \frac{3}{4}F_1 - F_1 = \left(\frac{3}{4}F_1 + F_2 - \frac{F_2}{2}\right)$

$\left(\frac{-F_1}{4} - F_1\right) = \left(\frac{-F_2}{4} - \frac{F_2}{2}\right)$

$\frac{5F_1}{4} = \frac{3F_2}{4}$

$5F_1 = 3F_2$

$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{3}{5}\right)$

23. Consider two point masses m_1 and m_2 connected by alight rigid rod of length r_0. The moment of inertia of the system about an axis passing through their centre of mass and perpendicular to the rigid rod is given by

दो बिन्दु द्रव्यमानों m_1 तथा m_2 को एक हल्की दृढ़ r_0 लम्बाई की छड़ द्वारा जुड़े हुए मानिये। दृढ़ छड़ के लम्बवत् तथा उनके द्रव्यमान केन्द्रों से गुजरने वाली एक अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण दिया जाता है

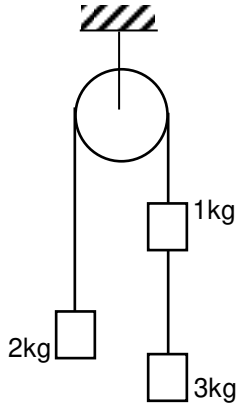
(A) $\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}r_0^2$ (B*) $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}r_0^2$ (C) $\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}r_0^2$ (D) $\frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1 + m_2}r_0^2$

Ans. **(B)**

Sol. μr_0^2

24. In the following arrangement the pulley is assumed to be light and the string inextensible. The acceleration of the system can be determined by considering conservation of a certain physical quantity. The physical quantity conserved and the acceleration respectively, are

निम्न व्यवस्था में घिरनी को हल्की तथा रस्सी अवितान्य मानिये। निकाय का त्वरण किसी एक भौतिक राशि को संरक्षित मानकर निर्धारित किया जा सकता है। संरक्षित भौतिक राशि तथा त्वरण क्रमशः है



(A*) energy and g/3 (B) linear momentum and g/2

(C) angular momentum and g/3 (D) mass and g/2

(A) ऊर्जा तथा g/3 (B) रेखीय संवेग तथा g/3

(C) कोणीय संवेग तथा g/3 (D) द्रव्यमान तथा g/3

Ans. **(A)**

Sol. No dissipative forces so total mech energy is conserved

$$(3 + 1)gx - 2gx = \frac{1}{2}(3+1+2)v^2$$

$$\Rightarrow \quad 2gx = 3v^2$$

$$\Rightarrow \quad 2gv = 6v\frac{dv}{2dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{3}$$

PART - II : SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE

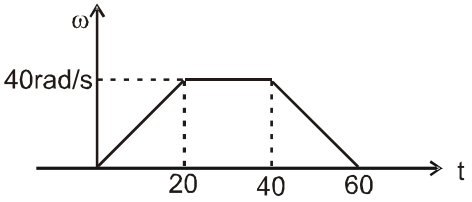
भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

1. A wheel starting from rest is uniformly accelerated at 2 rad/s^2 for 20 seconds. It rotates uniformly for the next 20 seconds and is finally brought to rest in the next 20 seconds. Total angular displacement of the wheel is $n \times 10^2$ radian where n is.

एक पहिया विरामावस्था से प्रारम्भ होकर 2 rad/s^2 के त्वरण से 20 सैकण्ड के लिए एक समान त्वरित होता है। इसको अगले 20 सैकण्ड के लिए एक समान रूप से घूमने दिया जाता है और अन्त में अगले 20 सैकण्ड बाद विरामावस्था में लाया जाता है। पहिये का कुल कोणीय विस्थापन $n \times 10^2$ radian है जहाँ n होगा

Ans. 16

Sol. $\omega_0 = 0$ $\alpha = 2rad/se^2$ $t = 20$ sec



$\omega = \omega_0 + \alpha t$

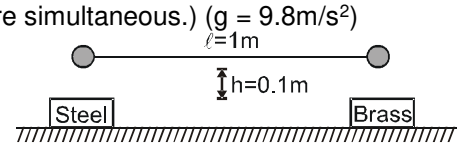
$\omega = 0 + 2 \times 20 = 40$

Area of graph is equal to total angular displacement

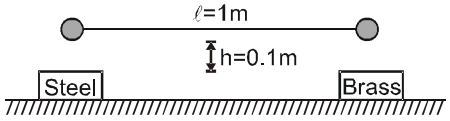
ग्राफ का क्षेत्रफल कुल कोणीय विस्थापन के तुल्य है।

$\theta = \frac{1}{2}(60 + 20) \times 40 = 1600$ rad

2. Two steel balls of equal diameter are connected by a rigid bar of negligible weight as shown & are dropped in the horizontal position from height h above the heavy steel and brass base plates . If the coefficient of restitution between the ball & steel base is 0.6 & that between the other ball & the brass base is 0.4. The angular velocity of the bar immediately after rebound is $n \times 10^{-2}$ rad/s where n is: (Assume the two impacts are simultaneous.) ($g = 9.8 m/s^2$)



एक समान व्यास की दो स्टील की गेंदें नगण्य द्रव्यमान की दृढ़ छड़ से चित्रानुसार जुड़ी है। इसे h ऊँचाई से स्टील तथा ब्रांस की प्लेट पर क्षैतिज स्थिति से छोड़ा जाता है। यदि स्टील तथा गेंद के बीच व ब्रांस तथा गेदे के बीच प्रत्यास्थ गुणांक क्रमशः0.6 तथा 0.4 है तो टक्कर के तुरन्त बाद वापस लौटते समय गेंद का कोणीय वेग $n \times 10^{-2}$ rad/s है जहाँ n होगा। (माना दोंनो टक्कर एक साथ होती है।) $(g = 9.8 m/s^2)$



Ans. 28

Sol. $e = \frac{v_{ss}}{\sqrt{2gh}}$, $v_{ss} = 0.6\sqrt{2gh}$

$v_{sb} = 0.4\sqrt{2gh}$

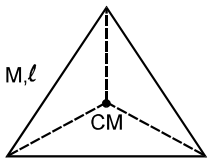
$\omega = \frac{v_{ss} - v_{sb}}{\ell} = \frac{0.2\sqrt{2 \times 9.8 \times 0.1}}{1} = 0.2 \times \sqrt{1.96} = 0.2 \times 1.4 = 0.28$ rad/sec.

3. Three identical uniform rods, each of length , are joined to form a rigid equilateral triangle. Its radius of gyration about an axis passing through a corner and perpendicular to the plane of the triangle is $\frac{\ell}{\sqrt{n}}$ where n is :

तीन समरूप छड़े, प्रत्येक की लम्बाई ℓ है, इन्हें जोड़कर एक दृढ़ समबाहु त्रिभुज बनाते है। एक शीर्ष से गुजरने वाली तथा त्रिभुज के तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष इसकी घूर्णन त्रिज्या $\frac{\ell}{\sqrt{n}}$ है जहाँ n होगा

Sol. **2**

MI of the system w.r.t an axis $\perp$ to plane & passing through one corner
तल के लम्बवत् तथा निकाय के एक किनारे से पास होती हुयी किसी अक्ष के सापेक्ष जडत्व आर्घूण।



$$= \frac{ML^2}{3} + \frac{ML^2}{3} + \left[\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{\sqrt{3}\ L}{2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{2ML^2}{3} + \left[\frac{ML^2}{12} + \frac{3ML^2}{4}\right]$$

$$= \frac{2ML^2}{3} + \frac{10\ ML^2}{12} = \frac{3ML^2}{3} = \frac{18ML^2}{12} = \frac{3}{2}ML^2$$

Now अब $\frac{3}{2}\ ML^2 = 3k^2M$

$k = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$

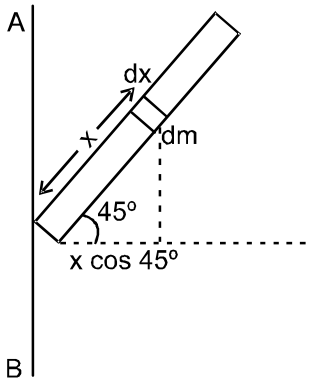
[Ans.: $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$ **]**

4. The moment of inertia of a thin uniform rod of mass m & length ℓ about an axis passing through one end & making angle $\theta = 45^\circ$ with its length is $\frac{m\ell^2}{n}$ where n is.

m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की एक पतली एकसमान छड़ का इसके एक सिरे से गुजरने वाली तथा इसकी लम्बाई के साथ $\theta = 45^\circ$ का कोण बनाने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $\frac{m\ell^2}{n}$ है जहाँ n होगा

Ans. **6**

Sol. linear density रेखीय घनत्व $\lambda = \frac{m}{\ell}$

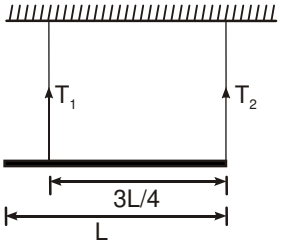


$$dm = \left(\frac{m}{\ell}dx\right)$$

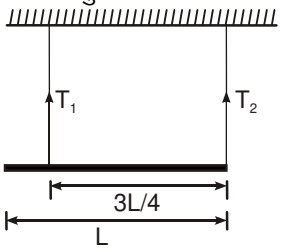
$$I_{AB} = \int dm \cdot x^2 = \int_0^{\ell} \frac{m}{\ell}dx \cdot (x\ \cos\ 45)^2$$

$$\frac{m}{\ell}\int_0^{\ell} \frac{x^2}{2}\ dx = \frac{m}{2\ell}\left(\frac{x^3}{3}\right)\int_0^{\ell} = \left(\frac{m\ell^2}{6}\right)$$

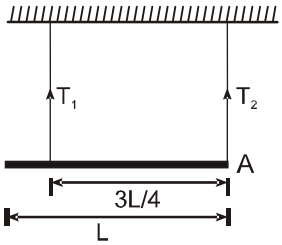
5. A uniform rod of mass m and length L is suspended with two massless strings as shown in the figure. If the rod is at rest in a horizontal position the ratio of tension in the two strings T_1/T_2 is:



m द्रव्यमान व L लम्बाई की समरूप छड़ दो द्रव्यमानहीन रस्सियों से चित्रानुसार लटकी हुई है। यदि छड़ क्षैतिज अवस्था में स्थिर हो तो दोंनो रस्सियों में तनावों का अनुपात T_1/T_2 होगा :



Sol. **2**



$\tau_A = 0$

$T_1 \times \frac{3L}{4} - mg\,\frac{L}{2} = 0$ ....(1)

$T_1 = \frac{2mg}{3}$

$T_1 + T_2 = mg$ ....(2)

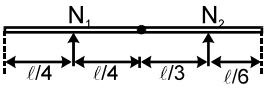
$T_2 = \frac{mg}{3}$

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{1}$ **Ans.**

6. Two persons of equal height are carrying a long uniform wooden beam of length ℓ. They are at distance $\ell/4$ and $\ell/6$ from nearest ends of the rod. The ratio of normal reactions at their heads is n : 3 where n is :

दो व्यक्ति जिनकी ऊँचाई समान है, एक लम्बे एक समान लकड़ी के गट्ठे (लम्बाई ℓ) को ले जो रहे हैं। वे गट्ठे के निकटतम सिरों से $\ell/4$ तथा $\ell/6$ की दूरी पर हैं। उनके सिरों (heads) पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बलो का अनुपात n : 3 है जहाँ n होगा –

Sol. **4**



For rotational equilibrium घूर्णन साम्यावस्था के लिये

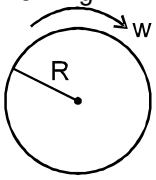
$N_1 \times \frac{\ell}{4} = N_2 \times \frac{\ell}{3}$

$N_1 : N_2 = 4 : 3$

7. A (i) ring and (ii) uniform disc both of radius R is given an angular velocity and then carefully placed on a horizontal surface such that its axis is vertical. If the coefficient of friction is μ for both cases then the ratio of the time taken by the ring and disk to come to rest is n : 3 where n is : (The pressure exerted by the disc and ring on the surface can be regarded as uniform).
एक (i) वलय, तथा (ii) एक समान चकती प्रत्येक की त्रिज्या R है, को कोणीय वेग से चक्रण गति प्रदान करते है, और तब इसे सावधानीपूर्वक क्षैतिज सतह पर रख देते हैं। इनकी अक्ष ऊर्ध्वाधर है। यदि दोनों स्थितियों में घर्षण गुणांक का मान μ है। तब वलय तथा चकती द्वारा विरामावस्था तक आने में लगे समय का अनुपात n : 3 है जहाँ n होगा (चकती तथा वलय द्वारा सतह पर लगाये गये दाब को एक समान मान सकते है)

Ans. **4**

Sol. For ring



$\tau = \mu mgR = mR^2\alpha$

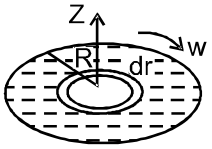
$\alpha = \dfrac{\mu g}{R}$

$\omega = \omega_0 - \alpha t$

$o = \omega_0 - \alpha t$

$t = \dfrac{\omega_0 R}{\mu g}$

For disc



$\sigma = \left(\dfrac{m}{\pi R^2}\right)$

For small ring friction force छोटी वलय के लिये घर्षण बल

$df_r = \mu(2\pi r dr\sigma)g$

Torque of the friction घर्षण का बलार्घूण

$\tau = (-rdf_r) = -2\pi\mu\sigma g r^2 dr$

$\tau = -2\pi\mu\sigma g \int_0^R r^2 dr = -\dfrac{2}{3}\pi\mu\sigma g R^3$

For rotation about z-axis z-अक्ष के सापेक्ष घूर्णन के लिये axis

$(\tau = I\alpha)$

$-\dfrac{2}{3}\pi\mu\sigma g R^3 = \dfrac{(\pi R^2)(\sigma)}{2} R^2\,\alpha$

$\alpha = \left(\dfrac{-4\mu g}{3R}\right)$

From equation of motion गति के समीकरण से

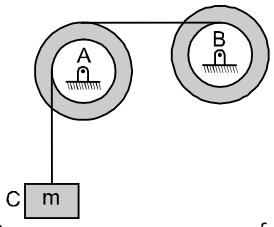
$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$0 = \omega_0 + \left(\dfrac{-4\mu g}{3R}\right)t \quad \Rightarrow \quad t = \left(\dfrac{3R\omega_0}{4\mu g}\right)$

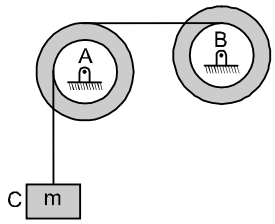
Ratio = 4:3

n = 4

8. Each of the double pulleys shown has a centroidal mass moment of inertia of 'mr²', inner radius r and an outer radius 2r. Assuming that the bearing friction of hinge at A and at B is equivalent to torque of magnitude $\frac{mgr}{4}$ then the tension (in N) in the string connecting the pulleys is : (m = 3kg, g = 10m/s², and r =0.1m)

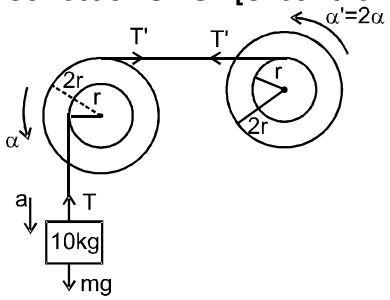


दर्शाई गई द्वि घिरनीयाँ प्रत्येक का केन्द्रीय द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण 'mr²', आन्तरिक त्रिज्या r व बाह्य त्रिज्या 2r है। माना A व B के अक्ष पर बियरीगं घर्षण (bearing friction) का बल आघूर्ण $\frac{mgr}{4}$ परिमाण के बराबर है तो घिरनीयों को जोडने वाली डोरी में तनाव न्यूटन में होगा (m = 3kg, g = 10m/s², तथा r =0.1m)



Ans. 10

Sol. Correction SR Sir [Check the numerical answer]



$mg - T = ma = m\alpha r$ ....(i)

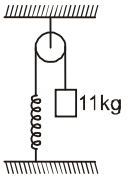
$\{a = \alpha r\}$

$T \times r - T' \times 2r - \frac{mgr}{4} = mr^2\alpha$ ... (ii)

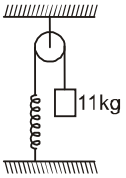
$T' \times r - \frac{mgr}{4} = mr^2(2\alpha)$ ....(iii)

Solivng $T' = \frac{mg}{3} = 10N$

9. The pulley shown in figure has a radius of 10 cm and moment of inertia 0.1 kg-m^2. The string going over it attached at one end to a vertical spring of spring constant 100 N/m fixed from below, and supports a 11 kg mass at the other end. The system is released from rest with the spring at its natural length. Find the speed (in m/s) of the block when it has descended through 10 cm. (Take g = 10 m/s^2 and assume that the there is no slipping between string and pulley).



चित्र में दर्शाई गई एक घिरनी की त्रिज्या 10 cm तथा जड़त्व आघूर्ण 0.1 kg-m^2 है। इससे जाती एक डोरी का एक सिरा 100 N/m स्प्रिंग नियतांक की एक ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग से जुड़ा हुआ है जो नीचे बंधी है तथा दूसरे सिरे पर 11 kg द्रव्यमान बंधा है। स्प्रिंग उसकी प्राकृतिक लम्बाई की स्थिति में है जब निकाय को विरामावस्था से मुक्त करते हैं। जब यह 10 cm से नीचे आ जाता है तब ब्लॉक की चाल मी/सै. में ज्ञात कीजिए। (g = 10 m/s^2 लेवे, तथा पुलि एवं डोरी के मध्य कोई फिसलन नही है।)

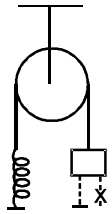


Ans. 1

Sol. Using energy conservation ऊर्जा सरंक्षण से

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

String does not slip रस्सी फिसलती नही है



So($V = \omega r$)

$$mg\,x = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}mv^2$$

$x = 0.1m$ $I = 0.1\ kg - m^2$ $r = 0.1\ m$ $K = 100\ N/m$

$m = 11\ kg$

$$11 \times 10 \times 0.1 = \frac{1}{2} \times 100 \times (0.1)^2 + \frac{1}{2} \times 0.1\ \frac{V^2}{(0.1)^2} + \frac{1}{2} \times 11 \times V^2$$

$22 = 1 + 10\ V^2 + 11\ V^2$

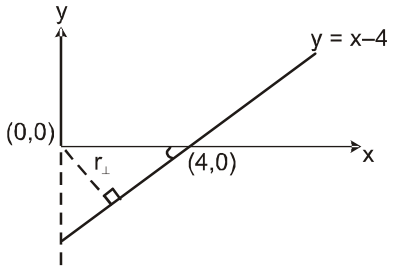
$21\ V^2 = 21$

$V = 1$ m/s

10. The angular momentum of a particle about origin is varying as $L = 4\sqrt{2}\,t + 8$ (SI units) when it moves along a straight line $y = x - 4$ (x,y in meters). The magnitude of force (in N) acting on the particle would be :

एक कण जब सरल रेखा $y = x - 4$ के अनुदिश गति करता है तो मूल बिन्दु के सापेक्ष इसका कोणीय संवेग $L = 4\sqrt{2}\,t + 8$ (SI मात्रक में है तथा x,y मीटर में है) के साथ परिवर्तित होता है। कण पर लग रहे बल का परिमाण न्यूटन में होगा –

Sol. **2**



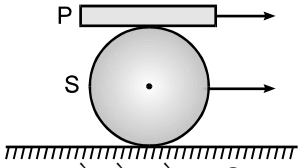
$\tau = \frac{dL}{dt} = 4\sqrt{2}$

from figure चित्र से $r_\perp = 2\sqrt{2}$ m

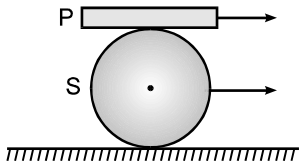
Hence अतः $\tau = r_\perp F$

$4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.F \quad \therefore \quad F = 2$ N **Ans.**

11. A plank P is placed on a solid cylinder S, which rolls on a horizontal surface. The two are of equal mass. There is no slipping at any of the surfaces in contact. The ratio of the kinetic energy of P to the kinetic energy of S is n : 3 where n is :



ब्लॉक P को क्षैतिज सतह पर घूर्णन गति कर रहे ठोस बेलन S पर रखा जाता है। दोनों के द्रव्यमान समान है। सम्पर्क बिन्दु के बीच कही पर भी फिसलन गति नहीं है तो P की गतिज ऊर्जा व S की गतिज ऊर्जा का अनुपात n : 3 है जहाँ n होगा



Ans. **8**

Sol. Let velocity of c.m. of sphere be v. The velocity of the plank = 2v.
माना गोले के द्रव्यमान केन्द्र का वेग v है। तथा प्लांक का वेग 2v है।

Kinetic energy of plank $= \frac{1}{2} \times m \times (2v)^2 = 2mv^2$

प्लांक की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} \times m \times (2v)^2 = 2mv^2$

Kinetic energy of cylinder $= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}mR^2\omega^2\right)$

बेलन की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}mR^2\omega^2\right)$

$$= \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}mv^2$$

$\therefore \quad \frac{\text{K.E. of plank}}{\text{K.E. of sphere}} \quad \frac{\text{प्लांक की गतिज ऊर्जा}}{\text{गोले की गतिज ऊर्जा}} = \frac{2mv^2}{\frac{3}{4}mv^2} = \frac{8}{3}$

12. A uniform rod of mass m = 5.0 kg and length ℓ = 90 cm rests on a smooth horizontal surface. One of the ends of the rod is struck with the impulse J = 3.0 N-s in a horizontal direction perpendicular to the rod and removed. As a result of which the rod gets angular velocity and linear velocity instantaneously. The force(in N) with which one half of the rod will act on the other in the process of motion later on.
m = 5.0 kg द्रव्यमान व ℓ = 90 cm लम्बाई की एक समान छड़ क्षैतिज चिकनी सतह पर विरामावस्था में रखी हुई है। छड़ के एक सिरे को छड़ के लम्बवत् क्षैतिज दिशा में J = 3.0 N-s आवेग देते हैं तथा फिर हटा लेते है। इसके परिणाम स्वरूप उसी क्षण, छड़ कोणीय तथा रेखीय वेग प्राप्त कर लेती है, तो ज्ञात करे कि गति की प्रक्रिया में छड़ का आधा भाग बचे हुए आधे भाग पर कितना बल न्यूटन में लगाएगा

Ans. **9**

Sol. due to hitting of the ball, the angular impulse received by the rod about the CM is equal to $\left(J\frac{\ell}{2}\right)$ If ω is the angular velocity then

गेंद की टक्कर के कारण छड़ पर कोणीय आवेग काम करेगा तथा छड के द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष इसका मान $\left(J\frac{\ell}{2}\right)$ होगा। यदि कोणीय वेग ω है तो

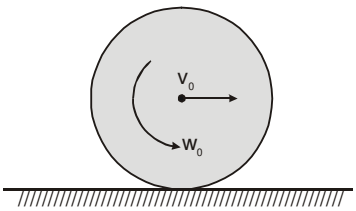
$$\frac{m\ell^2}{12} \cdot \omega = \left(J\frac{\ell}{2}\right)$$

$$\omega = \left(\frac{6J}{m\ell}\right)$$

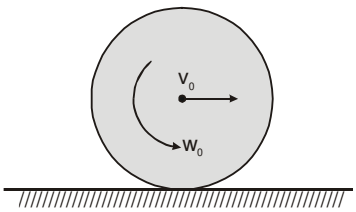
Hence the force exerted by one half on the other half = $\left(\frac{m}{2}\right)a_c = \left(\frac{m\omega^2\ell}{8}\right) = \frac{9J^2}{2m\ell} = (9N)$

अतः आधे भाग द्वारा दूसरे आधे भाग पर लगाया गया बल = $\left(\frac{m}{2}\right)a_c = \left(\frac{m\omega^2\ell}{8}\right) = \frac{9J^2}{2m\ell} = (9N)$

13. A uniform solid sphere of mass m and radius r is projected along a rough horizontal surface with the initial velocity v_0 and angular velocity ω_0 as shown in the figure. If the sphere finally comes to complete rest then $\frac{2\omega_0 r}{v_0}$ is equal to:

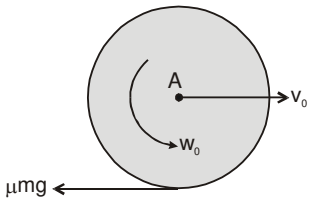


m द्रव्यमान व r त्रिज्या का एक एकसमान ठोस गोला खुरदरे समतल सतह पर दिखाए अनुसार प्रारम्भिक वेग v_0 तथा कोणीय वेग ω_0 से प्रक्षेपित किया जाता है। यदि गोले का अन्तिम वेग शून्य हो तो $\frac{2\omega_0 r}{v_0}$ किसके बराबर होगा



Ans. **5**

Sol.



Torque about point A बिन्दु A के सापेक्ष बल–आघूर्ण

$(\mu\ mg)\ R = \frac{2}{5}mR^2.\alpha$

$\alpha = \left(\frac{5\ \mu g}{2\ R}\right)$

$v = u + at$

$0 = v_0 - \mu gt$

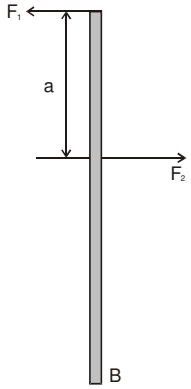
$t = \left(\frac{v_0}{\mu g}\right)$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

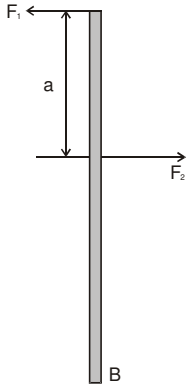
$0 = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2P} \cdot \frac{v_0}{\mu g}$

$\omega_0 = \frac{5v_0}{2R}$

14. A thin uniform rod AB of mass m = 1.0 kg moves translationally with acceleration w = 2.0 m/s^2 due to two antiparallel forces F_1 and F_2 (Fig.) . The distance between the points at which these forces are applied is equal to a = 20 cm. Besides, it is known that F_2 = 5.0.N. Find the length (in m) of the rod.



चित्रानुसार एक पतली एक समान छड़ AB जिसका द्रव्यमान m = 1.0 kg है, दो प्रतिसमान्तर (antiparallel) बलों F_1 व F_2 के कारण w = 2.0 m/s^2 के त्वरण से स्थानान्तरीय गति करती है। जिन बिन्दुओं पर यह बल लगते हैं, उनके मध्य की दूरी a = 20 cm है। यद्यपि यह ज्ञात है कि बल F_2 = 5.0.N. है तो छड़ की लम्बाई मीटर में ज्ञात करो।



Ans. 1

Sol. Motion of rod is purely translational net torque about C.M of the rod should be equal to zero
छड़ की गति शुद्ध स्थानान्तरित गति है तथा छड़ के द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कुल बलार्घुल शून्य है अतः

$$F_1 \frac{\ell}{2} = F_2 \left(\frac{\ell}{2} - a\right)$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(1 - \frac{a}{\ell/2}\right)$$

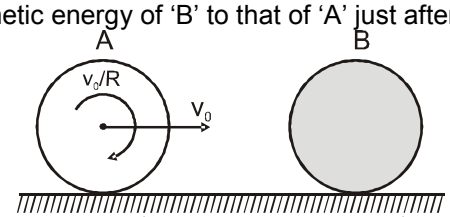
For translational motion of rod छड़ की स्थानान्तरित गति के लिये

$$F_2 - F_1 = ma'$$

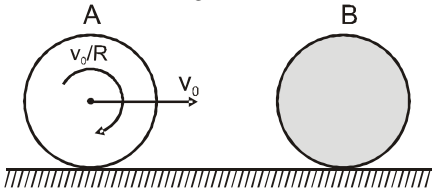
$$1 - \frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{ma'}{F_2}\right)$$

$$2a/\ell = \frac{ma'}{F_2} \Rightarrow \ell = \frac{2aF_2}{ma'} = (1m)$$

15. A hollow smooth uniform sphere A of mass 'm' rolls without sliding on a smooth horizontal surface. It collides elastically and headon with another stationary smooth solid sphere B of the same mass m and same radius. The ratio of kinetic energy of 'B' to that of 'A' just after the collision is 3 : n where n is :



एक 'm' द्रव्यमान का चिकना खोखला समरूप गोला A एक समतल चिकने धरातल पर बिना फिसले लुढ़कता है। यह एक अन्य समान त्रिज्या व समान द्रव्यमान वाले चिकने ठोस स्थिर गोले 'B' से सम्मुख प्रत्यास्थ रूप से टक्कर करता है। टक्कर के ठीक बाद B तथा A की गतिज ऊजाओं का अनुपात 3 : n है जहाँ n होगा–



Ans. **2**

Sol. Since the two bodies have same mass and collide head-on elastically, the linear momentum gets interchanged.
Hence just after the collision 'B' will move with velocity 'v_0' and 'A' becomes stationary but continues to rotate at the same initial angular velocity $\left(\frac{v_0}{R}\right)$. Hence, after collision.

क्योंकि दोनों वस्तुओं का द्रव्यमान बराबर है और दोनों सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर करते हैं, इसलिए उनका संवेग आपस में बदल जाता है। अतः संवेग आपस में बदल जाता है।

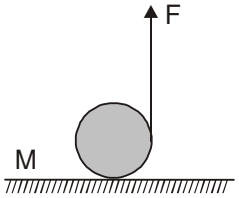
अतः टक्कर के ठीक बाद 'B' , 'v_0' वेग से गति करता है तथा 'A' रूक जाता है, परन्तु उसी कोणीय वेग $\left(\frac{v_0}{R}\right)$ से घूर्णन करता है। अतः टक्कर के बाद

$$(K.E.)_B = \frac{1}{2}mv_0^2$$

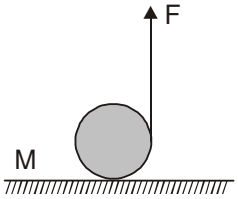
and और $(K.E.)_A = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR^2\right) \cdot \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 \Rightarrow \frac{(K.\ E.)_B}{(K.\ E.)_A} = \frac{3}{2}$

Note : Sphere 'B' will not rotate, because there is no torque on 'B' during the collision as the collision is head-on.
नोट : गोला 'B' घूर्णन नहीं करेगा, क्योंकि 'B' पर टक्कर के दौरान बल आघूर्ण नहीं है, क्योंकि टक्कर सम्मुख है ,

16. The free end of the string wound on the surface of a solid cylinder of mass M = 1kg & radius R = $\frac{2}{3}$ m is pulled up by a force F as shown. If there is sufficient friction between cylinder & floor then the upper limit to the angular acceleration(in rad/s^2) of the cylinder for which it rolls without slipping is: (g = 10m/s^2)

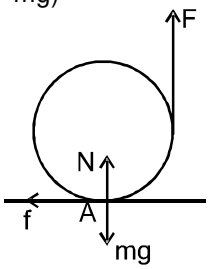


एक रस्सी का मुक्त सिरा M = 1kg द्रव्यमान व R = $\frac{2}{3}$ m त्रिज्या के ठोस बेलन की सतह पर बांधकर F बल से चित्रानुसार खींचा जाता है। यदि बेलन व फर्श के मध्य इतना पर्याप्त घर्षण है, तब बेलन के कोणीय त्वरण की अधिकतम सीमा रेडियन/सै^{2} में क्या होगी जिससे यह बिना फिसले लोटनी गति कर सके। (g = 10m/s^2)



Ans. 10

Sol. (F + N = mg) ——(i)



$\tau_A = F.R = \frac{3mR^2}{2}\alpha$ ——(ii)

For maximum α

अधिकतम α के लिये

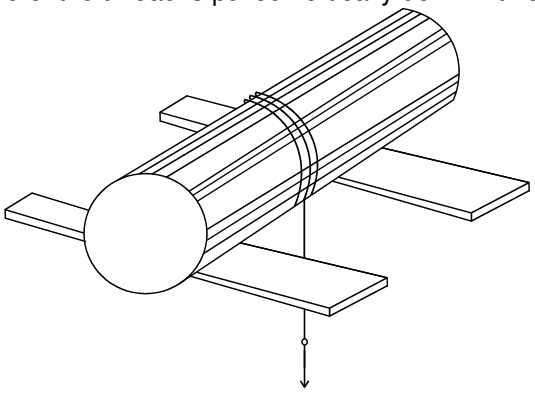
N = 0

(F = mg)

$mg \cdot R = \frac{3}{2} mR^2 \alpha$

$\Rightarrow \quad \left[\alpha = \left(\frac{2g}{3R}\right)\right]$

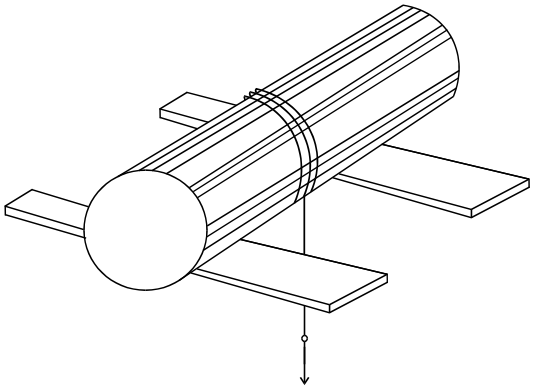
17. A uniform solid cylinder of mass m = 1kg rests on two horizontal planks. A thread is wound on the cylinder. The hanging end of the thread is pulled vertically down with a constant force F.



(a) Find the maximum magnitude of the force F(in N) which still does not bring about any sliding of the cylinder, if the coefficient of friction between the cylinder and the planks is equal to $\mu = \frac{1}{3}$.

(b)The acceleration a_{max} of the axis of the cylinder rolling on the planks is $\frac{n}{3}$ m/s^2 where n is:

m=1kg द्रव्यमान का एक समान ठोस बेलन दो क्षैतिज तख्तों पर विराम में है। बेलन के चारों ओर एक धागा लपेटा गया है। धागे के स्वतंत्रतापूर्णक नीचे लटके हुए सिरे को एक नियत बल F से खींचा जाता है

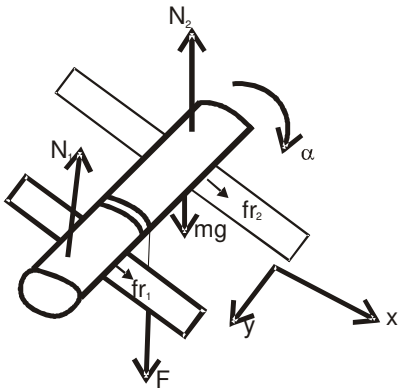


(a) बल F का वह अधिकतम परिमाण (न्यूटन में) ज्ञात कीजिए जिससे बेलन में किसी भी प्रकार की फिसलन नहीं हो, यदि बेलन और तख्ते के मध्य घर्षण गुणांक $\mu = \frac{1}{3}$ के बराबर है

(b) तख्तो पर लुढ़कने में बेलन की अक्ष का अधिकतम त्वरण a_{max}, $\frac{n}{3}$ m/s^2 है जहाँ n होगा।

Ans. **(a) 10 (b) 20**

Sol.



Using Newten`s second law in y and x dir.

x और y दिशा में न्यूटन के द्वितीय नियम से

$fr_1 + fr_2 = (mw_c)$ ——→ x dir ——(i)

$N_1 + N_2 - mg - F = 0$ ——→ y dir

$N_1 + N_2 = mg + F$ ——(ii)

Torque about axis of cylinder बेलन की अक्ष के सापेक्ष बलार्घूण

$$FR - (fr_1 + fr_2)\, R = \frac{mR^2}{2}\ \alpha = \frac{mR^2}{2}\left(\frac{w_c}{R}\right)$$

pure rolling शुद्ध लोटनी गति $\left(\frac{w_c}{R} = \alpha\right)$

$fr_1 + fr_2 \le \mu\,(N_1 + N_2)$ ——(i)

from eq[1] सभी 1 से

$$F \le \left(\frac{3\mu gm}{2-3K}\right)$$

$$F_{max} = \left(\frac{3\mu gm}{2-3K}\right) = 10\ N$$

$$w_{c\,max} = \frac{\mu(N_1+N_2)}{m}$$

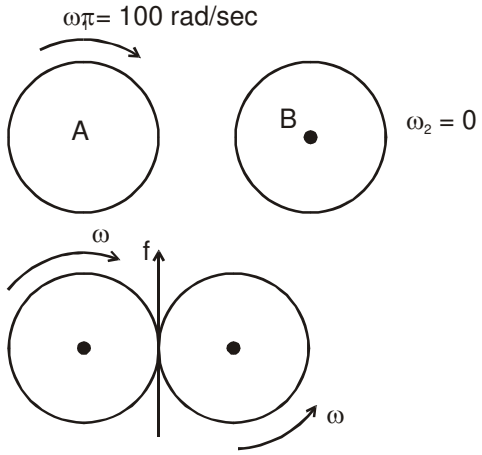
$$= \frac{\mu}{m}\ (mg + F_{max}) = \frac{\mu}{m}\ (mg + \left(\frac{3\mu mg}{2-3K}\right) = \left(\frac{2\mu g}{2-3\mu}\right) = \frac{20}{3}\ m/s^2$$

18. A cylinder rotating at an angular speed of 50 rev/s is brought in contact with an identical stationary cylinder. Because of the kinetic friction, torques act on the two cylinders, accelerating the stationary one and decelerating the moving one. If the common magnitude of the angular acceleration and deceleration be1 rev/s^2, then how much time (ins) will it take before the two cylinders have equal angular speed ?

50 चक्कर/सैकण्ड कोणीय चाल से घूम रहा एक बेलन स्थिर अवस्था में स्थित एक अन्य एक समान बेलन के सम्पर्क में लाया जाता है। गतिज घर्षण के कारण, दोंनो बेलनों पर बल आघूर्ण लगते है, स्थिर वाला त्वरित होता है तथा गतिशील अवमंदित होता है। यदि कोणीय त्वरण तथा कोणीय अवमंदन का उभयनिष्ठ परिमाण 1 rev/s^2 है, तो दोनों बेलनों की कोणीय चाल एक समान होने में कितना समय सैकण्ड में लगेगा ?

Ans. 25

Sol.



$(a_1 = a_2)$

$fR = I\alpha_1$ $\quad fR = I\alpha_2$

$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad = 2\pi\ rad/sec^2$

For A cylinder बेलन A के लिए : $\omega = \omega_0 - \alpha t$

$\omega = 100\pi - 2\pi t$ ...(i)

For B cylinder बेलन B के लिए $\omega = \omega_0 - \alpha t$ $\omega_0 = 0$

$\omega = \alpha t$

$\omega = 2\pi t$ ....(ii)

From (i) and (ii) समीकरण (i) तथा (ii) से $\omega = 100\pi - \omega$

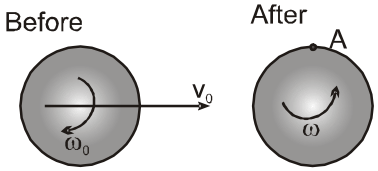
$2\omega = 100\pi$

$\omega = 50\pi$

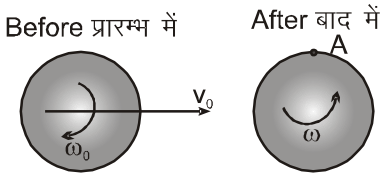
From (ii) equation समीकरण (ii) से $50\pi = 2\pi t$

$t = 25$ sec

19. A uniform disc of mass M = 1kg, radius R = 1m is moving towards right on smooth horizontal surface with velocity v_0 = 20 m/s & having angular velocity ω_0 = 4 rad/s about the perpendicular axis outward the plane of disc passing through centre of disc. Suddenly top point of the disc gets hinged about a fixed smooth axis. The angular velocity (in rad/s) of disk about new rotation axis is:



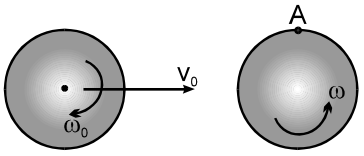
द्रव्यमान M = 1kg, त्रिज्या R = 1m की एक समरुप चकती दांयी ओर v_0 = 20m/s वेग से चिकनी क्षैतिज सतह पर गतिशील है एवं चकती के केन्द्र से पारित इसके तल के लम्बवत् अक्ष के परितः इसका कोणीय वेग ω_0 = 4 rad/s है। अचानक चकती का शीर्ष बिन्दु स्थिर चिकनी अक्ष के परितः किलकीत कर दिया जाता है। नयी घूर्णन अक्ष के परितःचकति का कोणीय वेग रेडियन/सैकण्ड में क्या होगा :



Ans. 12

Sol. Conserving angular momentum about A

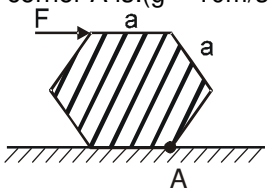
A के सापेक्ष कोणीय सवेग सरक्षण से



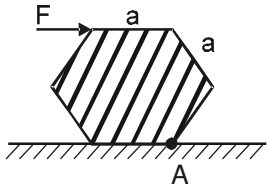
$$Mv_0R - \frac{MR^2}{2}\omega_0 = \left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2}{3}\left(\frac{v_0}{R} - \frac{\omega_0}{2}\right) = 12 \text{ rad/s}$$

[Ans.: $\frac{2}{3}\left(\frac{v_0}{R} - \frac{\omega_0}{2}\right)$ **]**

20. A regular hexagonal uniform block of mass $m = 4\sqrt{3}$ kg rests on a rough horizontal surface with coefficient of friction μ as shown in figure. A constant horizontal force is applied on the block as shown. If the coefficient of friction is sufficient to prevent slipping before toppling, then the minimum force(in N) required to topple the block about its corner A is:($g = 10m/s^2$)

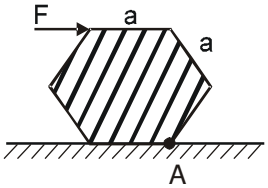


चित्रानुसार समषटभुज के रूप में $m = 4\sqrt{3}$ kg द्रव्यमान का बना एक समरूप ब्लॉक μ घर्षण गुणांक वाली क्षैतिज खुरदरी सतह पर रखा गया है तथा इस पर चित्रानुसार एक अचर क्षैतिज बल लगाते है। यदि,पलटने से पूर्व फिसलन रोकने के लिए आवश्यक घर्षण गुणांक का मान पर्याप्त है तो सिरे A के परितः इसे पलटने के लिए कितना न्यूनतम बल न्यूटन में आवश्यक होगा।($g = 10m/s^2$)



Ans. **20**

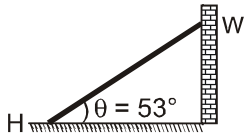
Sol. For toppling of block about A ; A के परितः ब्लॉक को पलटने के लिए



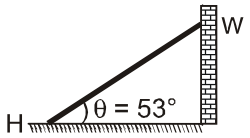
$\Rightarrow \quad \tau_{net} = 0$

$\Rightarrow \quad F.\sqrt{3}\,a = mg.\frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg}{2\sqrt{3}} = 20\ N$

21. A uniform rod of length ℓ = 1m is kept as shown in the figure. H is a horizontal smooth surface and W is a vertical smooth wall. The rod is released from this position. The angular acceleration (in radian/sec^2) of the rod just after the release is :

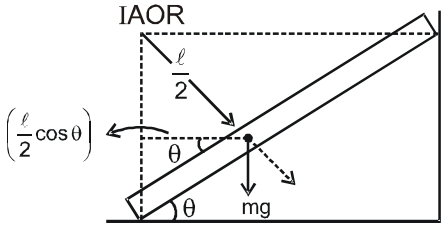


'ℓ'= 1m लम्बाई की एक समरूप छड़ को चित्रानुसार रखा गया है। H क्षैतिज चिकनी सतह है तथा W चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार है। छड़ को दर्शाई गई स्थिति में छोड़ा जाता है। छोड़ने के ठीक बाद छड़ का कोणीय त्वरण रेडियन/सै^{2} में ज्ञात करो।



Ans. 9

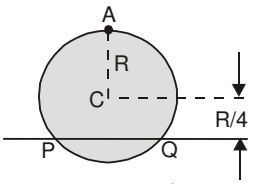
Sol. $(mg)\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta\right) = I\alpha$



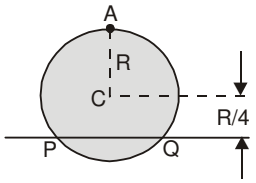
$$mg\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta\right) = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{3}\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \left(\frac{3g\ell\cos\theta}{2}\right) = 9 \text{ rad/s}^2$$

22. A uniform circular disc has radius R & mass m. A particle also of mass m is fixed at a point A on the edge of the disc as shown in the figure. The disc can rotate freely about a fixed horizontal chord PQ that is at a distance R/4 from the centre C of the disc. The line AC is perpendicular to PQ. Initially the disc is held vertical with the point A at its highest position. It is then allowed to fall so that it starts rotating about PQ. The linear speed of the particle as it reaches its lowest position is $\sqrt{ngR}$, where n is an integer. Find the value of n

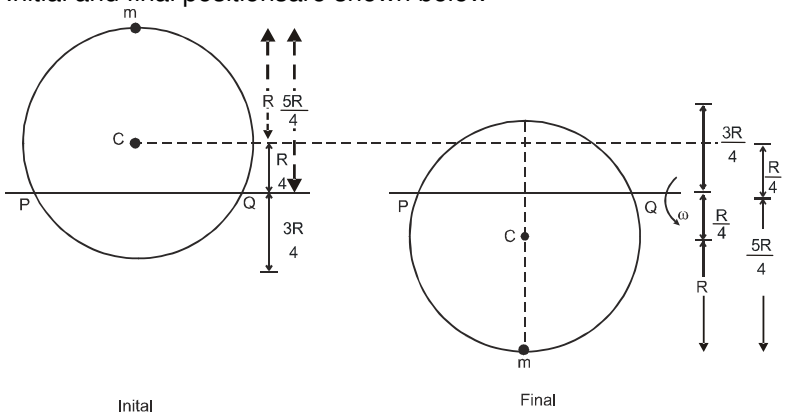


एक समरूप वृत्ताकार चकती की त्रिज्या R तथा द्रव्यमान m है। एक कण, जिसका द्रव्यमान भी m है, चित्रानुसार चकती के किनारे पर बिन्दु A पर जुड़ा हुआ है। चकती एक स्थिर क्षैतिज जीवा PQ के परितः घूमने के लिए स्वतंत्र है, जिसकी चकती के केन्द्र C से दूरी R/4 है। रेखा AC, PQ के लम्बवत् है। आरंभ में चकती को इस प्रकार ऊर्ध्वाधर रखते हैं ताकि बिन्दु A उसकी उच्चतम स्थिति में होता है। अब इसको गिरने देते हैं, जिससे यह PQ के परितः घूमना आरंभ कर देती है। जिस क्षण कण निम्नतम् स्थिति में पहुंचता है, उस क्षण कण की रेखीय चाल $\sqrt{ngR}$ है। जहां n एक पूर्णकं है। n का मान ज्ञात कीजिए।



Ans. 5

Sol. Initial and final positionsare shown below



Decrease in potential energy of mass 'm' = $mg\left\{2\times\frac{5R}{4}\right\} = \frac{5mgR}{2}$

Decrease in potential energy of disc = $mg\left\{2\times\frac{R}{4}\right\} = \frac{mgR}{2}$

Therefore, total decrease in potential energy of system

$= \frac{5mgR}{2} + \frac{mgR}{2} = 3\,mgR$

Gain in kinetic energy of system $= \frac{1}{2} I\,\omega^2$

Where I = moment of inertia of system (disc + mass) about axis PQ.

= moment of inertia of disc + moment of inertia of mass

$$= \left[\frac{mR^2}{4} + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right] + m\left(\frac{5R}{4}\right)^2$$

$$I = \frac{15mR^2}{8}$$

From conservation of mechanical energy -

Decrease in potential energy = Gain in kinetic energy

$$\therefore \quad 3\,mgR = \frac{1}{2}\left(\frac{15mR^2}{8}\right)\omega^2$$

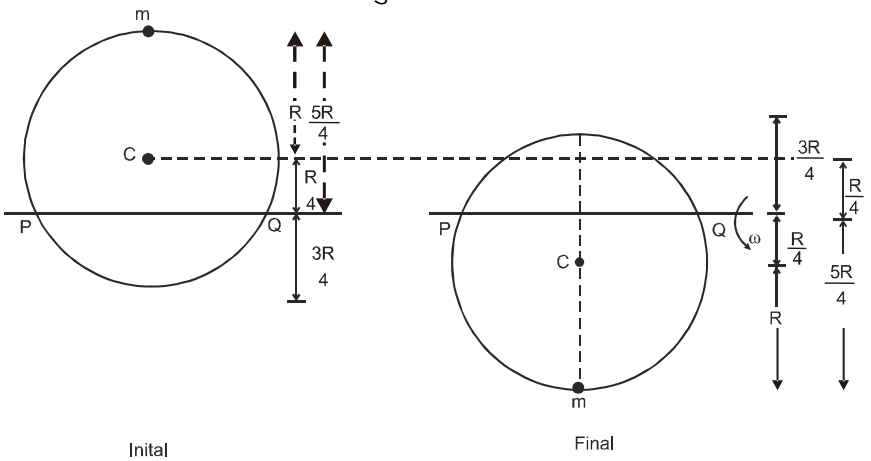
$$\omega = \sqrt{\frac{16g}{5R}}$$

Therefore, linear speed of particle at its lowest point

$$v = \left(\frac{5R}{4}\right)\omega = \frac{5R}{4}\sqrt{\frac{16g}{5R}}$$

or $v = \sqrt{5\ gR}$ **Ans.**

Sol. प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थितियाँ नीचे दर्शाये अनुसार है।



Inital Final

'm' द्रव्यमान की स्थितिज ऊर्जा में कमी $= mg\left\{2\times\frac{5R}{4}\right\} = \frac{5mgR}{2}$

चकती की स्थितिज ऊर्जा में कमी $= mg\left\{2\times\frac{R}{4}\right\} = \frac{mgR}{2}$

अतः निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा घटती है –

$= \frac{5mgR}{2} + \frac{mgR}{2} = 3\,mgR$

गतिज ऊर्जा में वृद्धि $= \frac{1}{2} I \omega^2$

यहाँ I = निकाय (चकती + द्रव्यमान) PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है।

= चकती का जड़त्व आघूर्ण + द्रव्यमान का जड़त्व आधूर्ण

$$= \left[\frac{mR^2}{4} + m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right] + m\left(\frac{5R}{4}\right)^2$$

$$I = \frac{15mR^2}{8}$$

यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण से -

स्थितिज ऊर्जा में कम = गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$\therefore \quad 3\,mgR = \frac{1}{2}\left(\frac{15mR^2}{8}\right)\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{16g}{5R}}$$

इसलिए, बिन्दु का कण की रेखीय चाल

$$v = \left(\frac{5R}{4}\right)\omega = \frac{5R}{4}\sqrt{\frac{16g}{5R}} \quad \text{या} \quad v = \sqrt{5\ gR}$$ **Ans.**

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE

भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1*. A rigid body is in pure rotation.

एक दृढ़ पिण्ड शुद्ध घूर्णन गति कर रहा है।

(A) You can find two points in the body in a plane perpendicular to the axis of rotation having same velocity.

(B) You can find two points in the body in a plane perpendicular to the axis of rotation having same acceleration.

(C*) Speed of all the particles lying on the curved surface of a cylinder whose axis coincides with the axis of rotation is same.

(D*) Angular speed of the body is same as seen from any point in the body.

एक दृढ़ पिण्ड शुद्ध घूर्णन गति कर रहा है।

(A) घूर्णन अक्ष के लम्बवत् तल में पिण्ड में दो ऐसे बिन्दु हो सकते है जिनका वेग समान है।

(B) घूर्णन अक्ष के लम्बवत् तल में पिण्ड में दो ऐसे बिन्दु हो सकते है जिनका त्वरण समान है।

(C*) एक बेलन जिसकी अक्ष , घूर्णन अक्ष के सम्पाती है, के वक्रीय पृष्ठ पर स्थित सभी बिन्दुओं की चाल समान है।

(D*) पिण्ड पर स्थित किसी भी बिन्दु के सापेक्ष पिण्ड की कोणीय चाल समान है।

Sol. All points in the body, in plane perpendicular to the axis of rotation revolve in concentric circles. All points lying on circle of same radius have same speed (and also same magnitude of acceleration) but different directions of velocity (also different directions of acceleration)

Hence there cannot be two points in the given plane with same velocity or with same acceleration.

As mentioned above, points lying on circle of same radius have same speed.

Angular speed of body at any instant w.r.t. any point on body is same by definition.

वस्तु में घूर्णन अक्ष के लम्बवत् तल पर सभी बिन्दु संकेन्द्रीय वृत्तों में परिभ्रमण करते हैं। समान त्रिज्या के वृत्त पर सभी बिन्दुओं की समान चाल (तथा त्वरण का भी समान परिमाण) हैं लेकिन वेग की दिशा (त्वरण की दिशा भी) भिन्न हैं।

इसलिये दिये गये तल में दो ऐसे बिन्दु संभव नही है जिनका वेग (तथा त्वरण भी समान) समान हो।

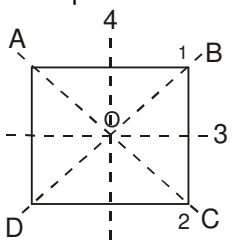
ऊपर यह बताया गया है कि समान त्रिज्या की वृत्त पर बिन्दुओं की समान चाल है।

किसी क्षण पर वस्तु की कोणीय चाल वस्तु पर स्थित किसी बिन्दु के सापेक्ष परिभाषा से समान होती है।

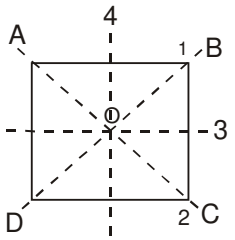
2.* A sphere is rotating uniformly about a fixed axis passing through its centre then:
(A*) The particles on the surface of the sphere do not have any angular acceleration.
(B*) The particles on the axis do not have any linear acceleration
(C*) Different particles on the surface have same angular speeds.
(D) All the particles on the surface have same linear speed
एक गोला इसके केन्द्र से गुजरने वाली स्थिर अक्ष के सापेक्ष एक समान घूर्णन करता है
(A) गोले की सतह पर स्थित कण का कोई कोणीय त्वरण नहीं होगा।
(B) ऊपर वर्णित अक्ष पर स्थित कणों का रेखीय त्वरण नहीं होगा।
(C) सतह पर स्थित अलग–अलग कणों का कोणीय वेग समान होगा।
(D) सतह पर स्थित सभी कणों की रेखीय चाल समान होगी।

Sol. Sphere is rotating about a diameter
गोला, व्यास के सापेक्ष घूर्णन कर रहा हैं अतः
so अतः, $a = \alpha R$
but, R is zero for particles on the diameter.
लेकिन व्यास पर स्थित बिन्दुओ के लिये R शून्य होगा

3*. The moment of inertia of a thin uniform square plate ABCD of uniform thickness about an axis passing through the centre O and perpendicular to the plate is -

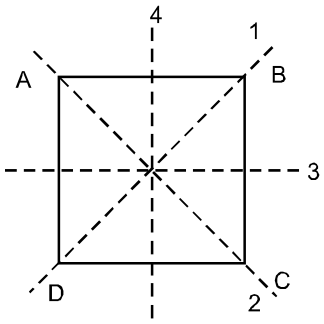


(A*) $I_1 + I_2$ (B*) $I_3 + I_4$ (C*) $I_1 + I_3$ (D) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$
where I_1 , I_2 , I_3 , and I_4 are respectively the moments of inertia about axes 1, 2, 3, and 4 which are in the plane of the plate.
एक पतली एकसमान मोटाई की समरूप वर्गाकार प्लेट ABCD का प्लेट के तल के लम्बवत् व इसके केन्द्र O से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण होगा -



(A*) $I_1 + I_2$ (B*) $I_3 + I_4$ (C*) $I_1 + I_3$ (D) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$
जहाँ I_1 , I_2 , I_3 , तथा I_4 क्रमशः अक्ष 1, 2, 3, व 4 के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है, जो तल में स्थित है।

Ans. A, B, C
Sol.



Using perpendicular theorem लम्बवत् अक्ष प्रमेस से

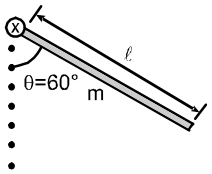
$I_0 = I_4 + I_3$ $\quad I_3 = I_4$

$I_0 = I_1 + I_2$ $\quad I_2 = I_1$

$I_3 = I_2$

so, $(I_0 = I_1 + I_3)$

4*. In the figure shown a uniform rod of mass m and length ℓ is hinged. The rod is released when the rod makes angle $\theta = 60°$ with the vertical.



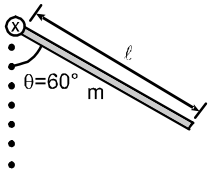
(A*) The angular acceleration of the rod just after release is $\frac{3\sqrt{3}g}{4\ell}$

(B*) The normal reaction due to the hinge just after release is $\frac{\sqrt{19}mg}{8}$

(C*) The angular velocity of the rod at the instant it becomes vertical is $\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$

(D*)The normal reaction due to the hinge at the instant the rod becomes vertical is $\frac{7}{4}mg$

4*. दर्शाये गये चित्र में m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की एक समरूप छड़ को कीलकित किया जाता है। जब छड़ ऊर्ध्वाधर से $\theta = 60°$ कोण बनाती है, तब छड़ को विराम से छोड़ा जाता है।



(A*) छोडने के ठीक पश्चात् छड का कोणीय त्वरण $\frac{3\sqrt{3}g}{4\ell}$ है।

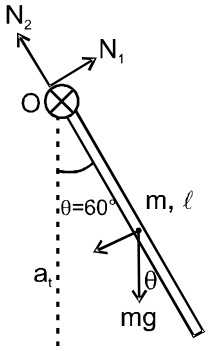
(B*) छोडने के ठीक पश्चात् कीलक के कारण अभिलम्ब प्रतिक्रिया $\frac{\sqrt{19}mg}{8}$ है।

(C*) छड का कोणीय वेग जब यह ऊर्ध्वाधर हो जाती है, $\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$ है।

(D*) उस क्षण पर कीलक के कारण अभिलम्ब प्रतिक्रिया जब यह ऊर्ध्वाधर हो जाती है, $\frac{7}{4}mg$ है।

Ans. (A), (B), (C), (D)

Sol.



(A) $mg\ \frac{\ell}{2}\ \sin 60° = \frac{m\ell^2}{3}\alpha$

$\alpha = \frac{3\sqrt{3}g}{4\ell}$

(B) $N_2 - mg\cos 60° = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{mg}{2}$

$mg\sin 60 - N_1 = m\frac{\alpha\ell}{2}$

$mg\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{m}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}g}{4} = N_1$

$N_1 = \frac{mg\sqrt{3}}{8}$

$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{\left(\frac{mg\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{mg}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}mg}{8}$

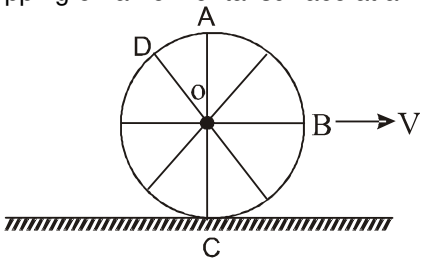
(C) $mg\frac{\ell}{2}\ (1 - \cos 60°) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m\ell^2}{3}\omega^2$

$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$

(D) $N - mg = \frac{m\omega^2\ell}{2}$

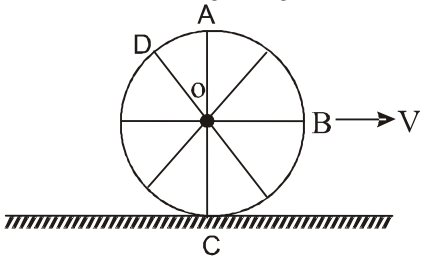
$N = \frac{7}{4}\ mg$

5*. Consider a disc rolling without slipping on a horizontal surface at a linear speed V as shown in figure



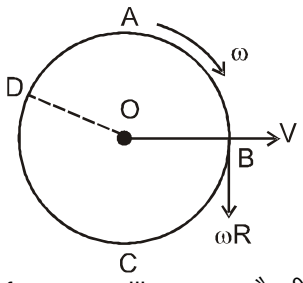
(A*) the speed of the particle A is 2V
(B) the speed of B, C and D are all equal to V
(C*) the speed of C is zero and speed of B is $\sqrt{2}V$
(D*) the speed of O is less than the speed of B

एक समान चकती क्षैतिज सड़क पर रेखीय वेग V से चित्रानुसार शुद्ध लोटनी गति करती है



(A) कण A की चाल 2V होगी
(B) B, C तथा D की चाल V समान होगी
(C) C की चाल शून्य है, तथा B की चाल $\sqrt{2}V$ है
(D) O की चाल B की चाल से कम है

Sol.

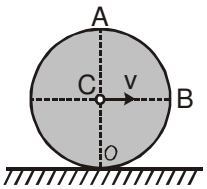


for pure rolling शुद्ध लौटनी गति के लिए

$V = \omega R$ $V_A = 2V$

$V_B = \sqrt{2}\,V$ $(V_C = 0)$

6*. A cylinder rolls without slipping over a horizontal plane with constant velocity. The radius of the cylinder is equal to r. At this moment



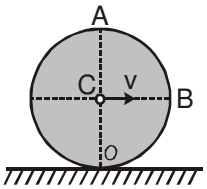
(A) The speed of B is $\sqrt{2}$ times the speed of A.

(B*) The radius of curvature of trajectory traced out by A is 4r.

(C*) The radius of curvature of trajectory traced out by B is $2\sqrt{2}$ r.

(D) The radius of curvature of trajectory traced out by C is r .

एक बेलन क्षैतिज तल पर बिना फिसले अचर वेग से लुढ़कता है। बेलन की त्रिज्या r है। इस क्षण पर



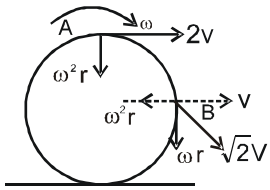
(A) B की चाल A की चाल की $\sqrt{2}$ गुना है।

(B*) A द्वारा बनाये गये पथ की वक्रता त्रिज्या 4r है

(C*) B द्वारा बनाये गये पथ की वक्रता त्रिज्या $2\sqrt{2}$ r. है

(D) C द्वारा बनाये गये पथ की वक्रता त्रिज्या r है

Sol.



$$R_A = \frac{(2v)^2}{\omega^2 r} = \frac{4v^2}{\omega^2 r} = \frac{4v^2 r}{v^2} = 4r$$

$$R_B = \frac{(\sqrt{2}V)^2}{\left(\frac{\omega^2 r}{\sqrt{2}}\right)} = \left(\frac{2v^2}{\omega^2 r}\sqrt{2}\right)$$

$$R_B = \frac{2v^2\sqrt{2}r}{\omega^2 r^2} = \frac{2\sqrt{2}r\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = (2\sqrt{2}r)$$

7*. A uniform solid sphere is released from rest from the top of an inclined plane of inclination θ. Then choose the correct option(s).

(A*) The minimum coefficient of friction between sphere and the incline to prevent slipping is $\frac{2}{7}\tan\theta$.

(B*) The kinetic energy of solid sphere as it moves down a distance S on the incline is mgSsinθ if $\mu \geq \frac{2}{7}\tan\theta$.

(C*) The magnitude of work done by friction on the solid sphere is less than μmgScosθ as it moves down a distance S on the incline if $\mu \geq \frac{2}{7}\tan\theta$.

(D) The magnitude of work done by friction on the solid sphere is equal to μmgScosθ as it moves down a distance S on the incline if $\mu \geq \frac{2}{7}\tan\theta$.

7*. θ कोण के नत तल के शीर्ष से एक समरूप ठोस गोला छोड़ा जाता है। तब सही विकल्पों का चयन कीजिए।

(A*) गोले तथा नततल के मध्य न्यूनतम घर्षण गुणांक फिसलन रोकने के लिए $\frac{2}{7}\tan\theta$ है .

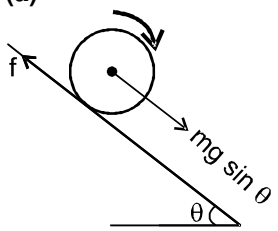
(B*) जब ठोस गोला नत तल पर नीचे की ओर S दूरी तक गति करता है तब उसकी गतिज ऊर्जा mgS sinθ है यदि $\mu \geq \frac{2}{7}\tan\theta$

(C*) जब ठोस गोला नततल पर नीचे की ओर S दूरी तक गति करता है तब ठोस गोले पर घर्षण बल द्वारा किये गये कार्य का परिमाण μmgScosθ से कम है यदि $\mu \geq \frac{2}{7}\tan\theta$.

(D) जब ठोस गोला नततल नीचे की ओर S दूरी तक गति करता है तब ठोस गोले पर घर्षण बल द्वारा किये गये कार्य का परिमाण μmgScosθ के बराबर है यदि $\mu \geq \frac{2}{7}\tan\theta$.

Ans. (a) $\frac{2}{7}\tan\theta$ (b) $\frac{11}{12}$ mgℓsinθ

Sol. **(a)**



mg sin θ – f = ma –(i)

Torque about com द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बलाघूर्ण

fR = Iα

fR = $\frac{2}{5}$ mR^2 . α For pure rolling शुद्ध लोटनी गति के लिये a = αR

f = $\frac{2}{5}$m (αR)

f = $\frac{2}{5}$ m (αR) = $\left(\frac{2}{5}ma\right)$

mg sin θ – $\frac{2}{5}$ma = ma

mg sin θ = $\frac{2}{5}$ ma + ma = $\frac{7ma}{5}$

$a = \left(\frac{5g \sin\theta}{7}\right)$

$f = \frac{2}{5} m \left(\frac{5g \sin\theta}{7}\right) = \left(\frac{2mg \sin\theta}{7}\right)$

$f = \mu N$

$\mu = \frac{f}{N} = \frac{2mg \sin\theta}{7mg \cos\theta} = \left(\frac{2}{7}\tan\theta\right)$

(b) torque about com द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बलाघूर्ण

$f.R = \frac{2}{5} mR^2 .\alpha$

$\mu NR = \frac{2}{5} mR^2 . \alpha$

$\left(\frac{1}{7}\tan\theta\right) (mg \cos\theta) R = \frac{2}{5} mR^2 \alpha$

$\alpha = \frac{5g \sin\theta}{14R}$

$mg \sin\theta - f = ma$

$mg \sin\theta - \frac{1}{7}\tan\theta . mg \cos\theta = ma$

$mg \sin\theta - \frac{1}{5} mg \sin\theta = ma$

$a = \left(\frac{6}{7}g \sin\theta\right)$

$\left[K.E = \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right)\right]$

$v^2 = u^2 + 2as$

$v^2 = 0 + 2 \frac{6}{7} g \sin\theta \ell$

$v^2 = \left(\frac{12}{7}g \sin\theta \ell\right)$

$s = ut + \frac{1}{2} at^2$

$\ell = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{6}{7} g \sin\theta t^2$

$t = \left(\frac{7\ell}{3g\sin\theta}\right)^{1/2}$

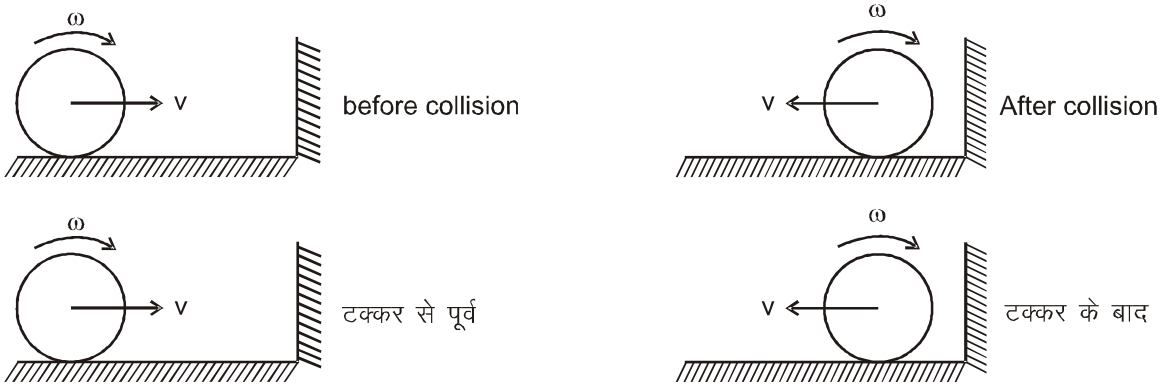
$K.E. = \frac{1}{2}m \left(\frac{12}{7}g\sin\theta\ell\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right) \left(\frac{5g\sin\theta}{14R}\right)^2 \left(\frac{7\ell}{3g\sin\theta}\right)$

$K.E. = \frac{6}{7}mg\sin\theta\ell + \frac{5}{84} mg\sin\theta \ell$

$K.E. = \frac{11}{12}mg\sin\theta\ell .$

8.* A uniform solid cylinder rolls without slipping on a rough horizontal floor, its centre of mass moving with a speed v. It makes an elastic collision with smooth vertical wall. After impact:
(A*) its centre of mass will move with a speed *v* initially
(B) its motion will be rolling without slipping immediately
(C*) its motion will be rolling with slipping initially and its rotational motion will stop momentarily at some instant
(D*) its motion will be rolling without slipping only after some time.
एक बेलन खुरदरे क्षैतिज फर्श पर बिना फिसले लुढ़कता है। इसका द्रव्यमान केन्द्र v चाल से चल रहा है। यह चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार से प्रत्यास्थ टक्कर करता है। टक्कर के बाद :
(A) प्रारंभ में इसका द्रव्यमान केन्द्र v चाल से गति करेगा।
(B) उसी क्षण से, इसकी गति बिना फिसले लोटनी गति होगी।
(C) प्रारंभ में इसकी गति फिसलने के साथ लोटनी गति होगी और किसी क्षण इसकी घूर्णन गति एक क्षण के लिए रुक जायेगी।
(D) केवल कुछ समय बाद इसकी गति बिना फिसले लोटनी गति होगी।

Sol.



velocity of COM after collision is V friction will act such that ω = o at some intant after some time (V = ωR)
टक्कर के बाद, द्रव्यमान केन्द्र का वेग V है तथा घर्षण इस तरह लगता है कि कुछ समय बाद किसी क्षण पर ω = o अर्थात (V = ωR) होगा।

9*. If $\vec{\tau} \times \vec{L} = 0$ for a rigid body, where $\vec{\tau}$ = resultant torque & $\vec{L}$ = angular momentum about a point and both are non - zero. Then :

(A) $\vec{L}$ may be constant
(B) $|\vec{L}|$ = constant
(C*) $|\vec{L}|$ may decrease
(D*) $|\vec{L}|$ may increase

यदि किसी दृढ़ पिण्ड के लिए $\vec{\tau} \times \vec{L} = 0$ है, जहाँ किसी बिन्दु के सापेक्ष $\vec{\tau}$ = परिणामी बलाघूर्ण तथा $\vec{L}$ = कोणीय संवेग है तथा दोनों का मान अशून्य हैं तो :

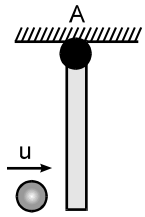
(A) $\vec{L}$ = नियतांक
(B) $|\vec{L}|$ = नियतांक
(C*) $|\vec{L}|$ घट सकता हैं
(D*) $|\vec{L}|$ बढ़ सकता है

Sol. $\vec{\tau} \times \vec{L}$
then तब
angle between $\vec{\tau}$ and $\vec{L}$ may be 0° or 180°
so अतः $\left(\vec{L}\right)$ may increase or decrease का मान बढ या घट सकता है।

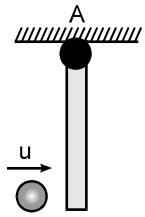
10. In absence of external forces on a rigid system, which of the following quantities must remain constant?
(A*) angular momentum
(B*) linear momentum
(C*) moment of inertia about fixed axis through any point on body
(D*) kinetic energy
यदि एक दृढ़ निकाय पर बाह्य बल नहीं है, तो कौनसी राशियाँ स्थिर रहनी चाहिए -
(A) कोणीय संवेग
(B) रेखीय संवेग
(C) वस्तु की किसी बिन्दु से गुजरने वाली जड़वत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण
(D) गतिज उर्जा

Sol. In absence of external force linear momentum and angular momentum remains const.
बाह्य बल की अनुपस्थिती में रेखीय संवेग और कोणीय संवेग नियत रहता है।

11.* In the given figure a ball strikes a rod elastically and rod is smoothly hinged at point A. Then which of the statement(s) is/are correct for the collision?



(A) linear momentum of system (ball + rod) is conserved
(B*) angular momentum of system about hinged point A is conserved
(C*) initial KE of the system is equal to final KE of the system
(D) linear momentum of ball is conserved.
दिये गये चित्र में एक गेंद एक छड़ पर प्रत्यास्थ रूप से टकराती है और छड़ बिन्दु A पर घर्षण रहित कीलकित है तो टक्कर के लिए कौनसा/से कथन सत्य है/हैं ?



(A) निकाय (गेंद + छड़) का रेखीय संवेग संरक्षित है।
(B) कीलकित बिन्दु A के परितः निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित है।
(C) निकाय की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा तथा अन्तिम गतिज ऊर्जा समान है।
(D) गेंद का रेखीय संवेग संरक्षित है।

Sol. External force will act at hinge so linear momentum of system will not remain const. but torque of external force is zero about hinge so $\vec{L}$ = const., collision is elastic so K.E = const.
बाह्य बल कीलकीत (hinge) पर कार्य करता है अतः निकाय का रेखीय संवेग नियत नही रहेगा लेकिन बाह्य बल का बलाघूर्ण शून्य है अतः $\vec{L}$ = नियत रहेगा। तथा टक्कर प्रत्यास्थ है अतः गतिज ऊर्जा नियत होगी।

12.* A horizontal disc rotates freely about a vertical fixed axis through its centre. A ring, having the same mass and radius as the disc, is now gently placed on the disc coaxially. After some time. the two rotate with a common angular velocity:
(A*) some friction exists between the disc and the ring before achieving common angular velocity
(B*) the angular momentum of the 'disc plus ring' about axis of rotation is conserved
(C) the final common angular velocity is 2/3rd of the initial angular velocity of the disc
(D*) The final common angular velocity is 1/3rd of the initial angular velocity of the disc

एक क्षैतिज चकती इसके केन्द्र से पारित एक ऊर्ध्वाधर स्थिर अक्ष के परितः मुक्त रुप से घूम रही है। समान द्रव्यमान व त्रिज्या की एक वलय, चकती पर धीरे से समाक्षीय रूप से रख दी जाती है। कुछ समय बाद, दोंनों एक समान कोंणीय वेग से घूमने लगती है।

(A) उभयनिष्ट कोणीय वेग प्राप्त करने के पहले, चकती व वलय के मध्य कुछ घर्षण है।

(B) चकती तथा वलय का घुर्णन अक्ष के परीतः कोणीय संवेग संरक्षित है।

(C) अंतिम उभयनिष्ठ कोणीय वेग, चकती के प्रारंभिक कोणीय वेग का 2/3rd है।

(D) अंतिम उभयनिष्ठ कोणीय वेग, चकती के प्रारंभिक कोणीय वेग का 1/3rd है।

Sol. at the moment when ring is placed friction will act between them due to relative motion. Friction is internal force between them so angular momentum of system is conserved.

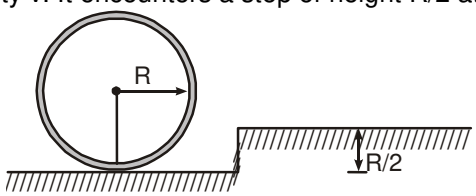
जब वलय को रखा जाता है उस समय उनके मध्य सापेक्षिक ग ति के कारण घर्षण बल लगता है तथा इनके मध्य घर्षण आन्तरिक बल है अतः निकाय का कोणीय संवेग नियत रहेगा।

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$$\frac{mR^2}{2}\ \omega_0 = \left(\frac{mR^2}{2} + mR^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{3}$$

13*. A wheel (to be considered as a ring) of mass m and radius R rolls without sliding on a horizontal surface with constant velocity v. It encounters a step of height R/2 at which it ascends without sliding.



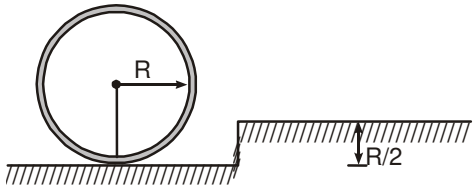
(A*) the angular velocity of the ring just after it comes in contact with the step is 3v/4R

(B*) the normal reaction due to the step on the wheel just after the impact is $\frac{mg}{2} - \frac{9mv^2}{16R}$

(C*) the normal reaction due to the step on the wheel increases as the wheel ascends

(D) the friction will be absent during the ascent.

m द्रव्यमान व R त्रिज्या (वलय की तरह माना जा सकता है) का पहियाँ बिना फिसले क्षैतिज तल में v नियत वेग से लुढ़क रहा है। जिस क्षण ये बिना फिसले R/2 ऊचाँई की सिढी पर चढता है उस क्षण



(A*) सीढ़ी के सम्पर्क में आने के ठीक बाद वलय का कोणीय वेग 3v/4R है।

(B*) पहिये द्वारा सीढ़ी पर आवेग के ठीक बाद अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल $\frac{mg}{2} - \frac{9mv^2}{16R}$ है।

(C*) जब पहिया चढ़ता है तो पहिये द्वारा सीढ़ी पर लगाया गया अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल बढ़ता है।

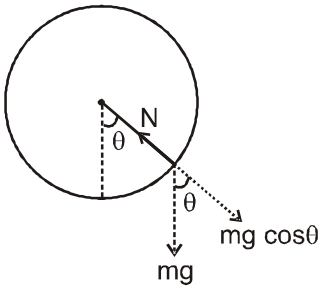
(D) चढ़ाई के दौरान घर्षण बल अनुपस्थित होगा।

Sol. By angular momentum conservation ;
कोणीय संवेग सरंक्षण से

$L = I\,\omega \Rightarrow mv\frac{R}{2} + mvR = 2mR^2\omega$

$\frac{3}{2}mvR = 2mR^2\omega$

$\omega = \frac{3v}{4R}$



Also at the time of contact ;
सम्पर्क के समय पर

$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$

$\therefore N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}$

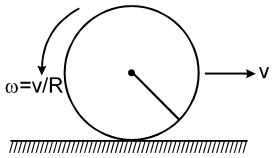
when it ascends θ decreases so $\cos\theta$ increases and v decreases.
जब यह बढ़ता है तो θ कम होता है अतः $\cos\theta$ बढ़ेगा और v घटेगा।

$\therefore mg\cos\theta$ is increasing and $\frac{mv^2}{R}$ is decreasing

$\therefore mg\cos\theta$ बढ़ेगा और $\frac{mv^2}{R}$ घटेगा।

$\therefore$ we can say N increases as wheel ascends.
$\therefore$ जैसे ही पहिया निचे आयेगा N बढ़ेगा।

14*. A hollow sphere is set into motion on a rough horizontal surface with a speed v in the forward direction and an rotational speed v/R in the anticlockwise direction as shown in figure. Find the translational speed of the sphere (a) when it stops rotating and (b) when slipping finally ceases and pure rolling starts.



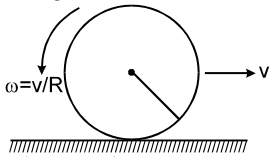
(A) The angular momentum of the sphere about its centre of mass is conserved.

(B*) The speed of the sphere at the instant it stops rotating momentarily is $\frac{v}{3}$

(C*) The speed of the sphere after pure rolling starts is $\frac{v}{5}$

(D) Work done by fricition upto pure rolling starts is zero.

एक खुरदरी क्षैतिज सतह पर एक खोखला गोला आगे की ओर रेखिक चाल v से तथा वामावर्ती दिशा में v/R कोणीय चाल से चित्रानुसार गतिशील किया जाता है। गोले की रेखिक चाल ज्ञात कीजिये। (a) जब यह घूर्णन बंद कर दे तथा (b) जब अंतिम रूप से फिसलना बंद हो जाये तथा शुद्ध लोटनी गति प्रारम्भ हो जाये।



(A) गोले के द्रव्यमान केन्द्र के परितः गोले का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

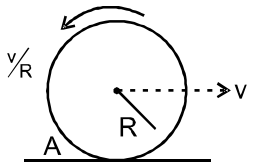
(B*) जब यह घूर्णन करना बन्द कर देता है तब उस क्षण पर गोले की चाल $\frac{v}{3}$ है

(C*) शुद्ध लोटनी गति प्रारम्भ करने के पश्चात् गोले की चाल $\frac{v}{5}$ है।

(D) शुद्ध लोटनी गति प्रारम्भ होने तक घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य शून्य है।

Ans. (a) $\frac{v}{3}$ (b) $\frac{v}{5}$

Sol.



If we take moment at A then external torque will be zero, initial angular momentem = final angular momentum.

यदि किसी क्षण A पर बाह्य बलाघूर्ण शून्य है तो प्रारिम्भक कोणीय संवेग = अन्तिम कोणीय संवेग

$MvR - I\omega = Mv_0R$

$MvR - \frac{2}{3} MR^2 \frac{v}{R} = Mv_0R$

$v_0 = \left(\frac{v}{3}\right)$

(b) Again after some time pure rolling starts

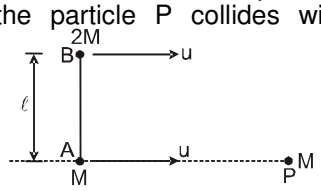
पुनः कुछ समय बाद शुद्ध लोटनी गति शुरू हो जाती है।

$Mv_0R = \frac{2}{3}MR^2 \times \frac{v'}{R} + Mv'R$

$M\left(\frac{v}{3}\right) R = \frac{2}{3}MR^2 + \frac{v'}{R} Mv'R$

$v' = \left(\frac{v}{5}\right)$

15*. Two small particles A and B of masses M and 2M respectively, are joined rigidly to the ends of a light rod of length ℓ as shown in the figure. The system translates on a smooth horizontal surface with a velocity u in a direction perpendicular to the rod. A particle P of mass M kept at rest on the surface sticks to the particle A as the particle P collides with it. Then choose the correct option(s)



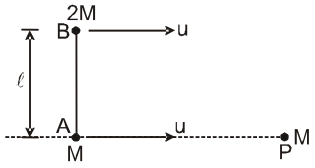
(A*) The speed of particle A just after collision is $\frac{u}{2}$

(B) The speed of particle B just after collision is $\frac{u}{2}$

(C*) The velocity of centre of mass of system A+B+P is $\frac{3u}{4}$

(D*) The angular speed of the system A+B+P after collision is $\frac{u}{2\ell}$

दो कण A तथा B, जिनके द्रव्यमान क्रमशः M तथा 2M है, एक ℓ लम्बाई की हल्की छड़ से दृढ़तापूर्वक चित्रानुसार जुड़ी है। यह निकाय एक घर्षणरहित क्षैतिज तल पर u वेग से छड़ के लम्बवत् दिशा में गति करता है। सतह पर रखा M द्रव्यमान का एक कण P विरामावस्था में इस प्रकार रखा है कि वह कण A से चिपक जाता है, जब कण P इससे टकराता है, तो सही विकल्पों का चयन कीजिए।



(A*) टक्कर के ठीक पश्चात् कण A की चाल $\frac{u}{2}$ है।

(B) टक्कर के ठीक पश्चात् कण B की चाल $\frac{u}{2}$ है।

(C*) निकाय A+B+P के द्रव्यमान केन्द्र का वेग $\frac{3u}{4}$ है।

(D*) टक्कर के पश्चात् निकाय A+B+P की कोणीय चाल $\frac{u}{2\ell}$ है।

Sol. **[Hint :** The light rod will exert a force on the particle B only along its lengths]
[Hint : हल्की छड़ कण B पर केवल उसकी लम्बाई के अनुदिश बल लगाएगी**]**
before collision angular momentum about COM :
टक्कर से पूर्व द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग

$$L_i = 2mu\frac{\ell}{2} - mu\frac{\ell}{2} = \frac{mu\ell}{2}$$

$$L_f = 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\omega + 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\omega = m\ell^2\omega$$

$$L_i = L_f \quad \Rightarrow \omega = \frac{u}{2\ell}$$

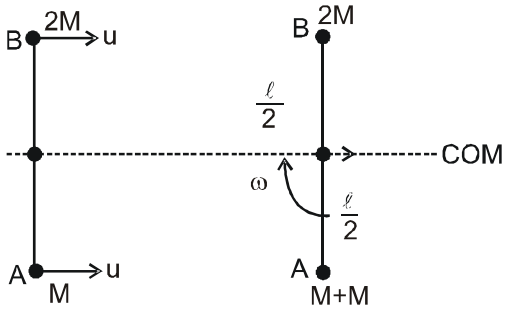
Linear momentum रेखीय संवेग

$P_i = 3Mu \qquad P_t = 4MV$

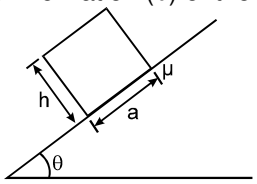
$$P_i = P_f \Rightarrow V = \frac{3}{4}u$$

$$V_A = V - \omega\frac{\ell}{2} = \frac{3u}{4} - \frac{u}{2\ell}\frac{\ell}{2} = \frac{u}{2}$$

$$V_B = V + \omega\frac{\ell}{2} = u$$



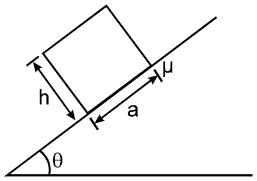
16*. A block with a square base measuring a × a and height h, is placed on an inclined plane. The coefficient of friction is μ. The angle of inclination (θ) of the plane is gradually increased. The block will:



(A*) topple before sliding if $\mu > \frac{a}{h}$ (B) topple before sliding if $\mu < \frac{a}{h}$

(C) slide before toppling if $\mu > \frac{a}{h}$ (D*) slide before toppling if $\mu < \frac{a}{h}$

a × a माप का वर्गाकार आधार व h ऊँचाई वाला एक गुटका एक नत तल पर रखा है। घर्षण गुणांक μ है। नततल का झुकाव कोण (θ) धीरे से बढ़ाया जाता है तो गुटका :–



(A) यदि $\mu > \frac{a}{h}$ है तो फिसलने से पहले पलट जायेगा

(B) यदि $\mu < \frac{a}{h}$ है तो फिसलने से पहले पलट जायेगा

(C) यदि $\mu > \frac{a}{h}$ है तो पलटने से पहले फिसल जायेगा

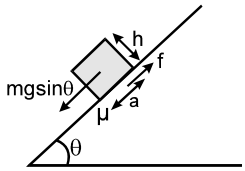
(D) यदि $\mu < \frac{a}{h}$ है तो पलटने से पहले फिसल जायेगा

Sol. For no slipping फिसलन न होने के लिए

$$\mu mg\cos\theta \geq mg\sin\theta \quad \text{.....(1)}$$

For toppling लुढ़कने के लिए

$$mg\sin\theta\,\frac{h}{2} \geq mg\cos\theta\,\frac{a}{2} \quad \text{.....(2)}$$

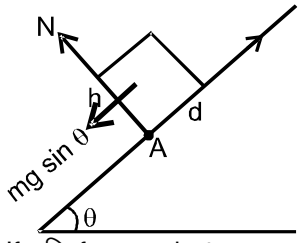


for minimum μ (by dividing) न्यूनतम μ के लिए (भाग देने पर)

$$\mu.\frac{2}{a} = \frac{2}{h} \qquad \mu_{min} = \frac{a}{h}$$

[Ans.: a/h]

Sol.



If यदि $f > mg \sin\theta$

$\mu mg \cos\theta > mg \sin\theta$

($\mu > \tan\theta$) block will topple before sliding अतः फिसलने से पहले ब्लांक पलट जोयगा।

torque about point A $\tau_A = 0$ बिन्दु A के सापेक्ष बलार्घूण $\tau_A = 0$

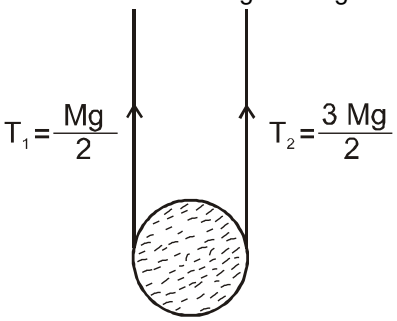
$mg \sin\theta \left(\frac{h}{2}\right) = mg \cos\theta \frac{a}{2}$

$\tan\theta = \left(\frac{a}{h}\right)$

$\mu > \left(\frac{a}{h}\right)$

If यदि $\mu > \tan\theta$ (block will slide) (ब्लॉक फिसलेगा)

17. A uniform disc of mass M and radius R is lifted using a string as shown in the figure. Then,



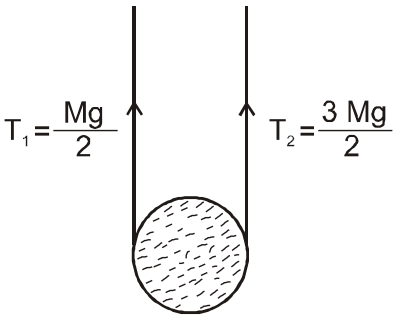
(A*) its linear acceleration is g upward

(B) its linear acceleration is g downward

(C*) its angular acceleration is $\frac{2g}{R}$.

(D*) its rate of change of angular momentum is MgR.

M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की एक एकसमान चकती को डोरी के द्वारा चित्रानुसार उठाया जाता है, तब



(A*) इसका रेखीय त्वरण g ऊपर की ओर है।

(B) इसका रेखीय त्वरण g नीचे की ओर है।

(C*) इसका कोणीय त्वरण $\frac{2g}{R}$. है।

(D*) इसके कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर MgR है।

Sol. **(acd)**

$$\frac{3Mg}{2}+\frac{Mg}{2}-Mg=Ma$$

$$a=g\uparrow$$

$$\tau=I\propto$$

$$\frac{3Mg}{2}R-\frac{Mg}{2}R=\frac{MR^2}{2}\cdot\propto$$

$$2Mg \quad \propto=\frac{2g}{R}$$

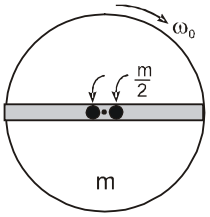
$$\frac{dL}{dt}=\tau=MgR$$

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

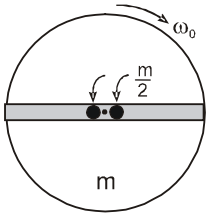
Comprehension # 1

A uniform disc of mass 'm' and radius R is free to rotate in horizontal plane about a vertical smooth fixed axis passing through its centre. There is a smooth groove along the diameter of the disc and two small balls of mass $\frac{m}{2}$ each are placed in it on either side of the centre of the disc as shown in fig. The disc is given initial angular velocity ω_0 and released.



अनुच्छेद # 1

एक एकसमान चकती जिसका द्रव्यमान m तथा त्रिज्या R है, यह क्षैतिज तल में केन्द्र से पारित तथा ऊर्ध्वाधर चिकनी स्थिर अक्ष के परितः, क्षैतिज तल में घूमने के लिए स्वतन्त्र है। यहाँ एक चिकना खाँचा (groove) है जो कि चकती के व्यास के अनुदिश है तथा इसमें दो छोटी गेंदे, प्रत्येक का द्रव्यमान $\frac{m}{2}$ है, इनको चकती के केन्द्र पर दोनों तरफ चित्रानुसार रखा जाता है। चकती को आरम्भिक कोणीय चाल ω_0 देकर इनको मुक्त कर दिया जाता है।



1. The angular speed of the disc when the balls reach the end of the disc is :

(A) $\frac{\omega_0}{2}$ (B*) $\frac{\omega_0}{3}$ (C) $\frac{2\omega_0}{3}$ (D) $\frac{\omega_0}{4}$

जब गेंदे चकती के किनारे पर पहुँच जाती है उस समय चकती की कोणीय चाल होगी –

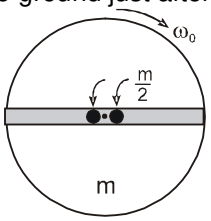
(A) $\frac{\omega_0}{2}$ (B*) $\frac{\omega_0}{3}$ (C) $\frac{2\omega_0}{3}$ (D) $\frac{\omega_0}{4}$

Sol. Let the angular speed of disc when the balls reach the end be ω. From conservation of angular momentum

जब गेंद चकती के किनारे पर पहुँच जाती है उस समय उसकी कोणीय चाल ω है। कोणीय संवेग संरक्षण से

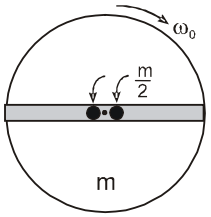
$$\frac{1}{2}mR^2\,\omega_0 = \frac{1}{2}\,mR^2\,\omega + \frac{m}{2}R^2\;\omega + \frac{m}{2}\,R^2\;\omega \qquad \text{or} \qquad \omega = \frac{\omega_0}{3}$$

2. The speed of each ball relative to ground just after they leave the disc is :



(A) $\frac{R\omega_0}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{R\omega_0}{\sqrt{2}}$ (C*) $\frac{2R\omega_0}{3}$ (D) $\frac{R\omega_0}{3}$

प्रत्येक गेंद जब चकती को ठीक छोड़ती ही है (अलग होती है) उस समय प्रत्येक गेंद की जमीन के सापेक्ष चाल क्या होगी



(A) $\frac{R\omega_0}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{R\omega_0}{\sqrt{2}}$ (C*) $\frac{2R\omega_0}{3}$ (D) $\frac{R\omega_0}{3}$

Sol. The angular speed of the disc just after the balls leave the disc is

$$\omega = \frac{\omega_0}{3}$$

Let the speed of each ball just after they leave the disc be v.
From conservation of energy

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v^2$$

Solving we get

$$v = \frac{2R\omega_0}{3}$$

NOTE : $v = \sqrt{(\omega R)^2 + v_r^2}$; v_r = radial velocity of the ball

हल: जब गेंद चकती को ठीक छोड़ने वाली होती है उस समय चकती की कोणीय चाल $\omega = \frac{\omega_0}{3}$ है।

तथा चकती को छोड़ने के ठीक बाद गेंद की चाल v है तब ऊर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v^2$$

हल करने पर

$$v = \frac{2R\omega_0}{3}$$

NOTE : $v = \sqrt{(\omega R)^2 + v_r^2}$; v_r = गेंद का त्रिज्य वेग

3. The net work done by forces exerted by disc on one of the ball for the duration ball remains on the disc is

(A) $\frac{2mR^2\omega_0^2}{9}$ (B) $\frac{mR^2\omega_0^2}{18}$ (C) $\frac{mR^2\omega_0^2}{6}$ (D*) $\frac{mR^2\omega_0^2}{9}$

उस समय के लिए जब गेंद चकती पर ही रहती है तब चकती द्वारा एक गेंद पर आरोपित बल के कारण किया गया कार्य कितना होगा।

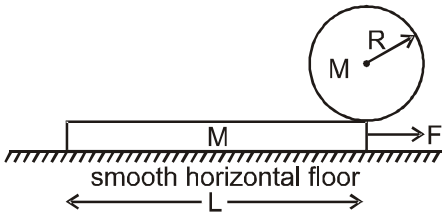
(A) $\frac{2mR^2\omega_0^2}{9}$ (B) $\frac{mR^2\omega_0^2}{18}$ (C) $\frac{mR^2\omega_0^2}{6}$ (D*) $\frac{mR^2\omega_0^2}{9}$

Sol. Workdone by all forces equal $K_f - K_i = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v^2 = \frac{mR^2\omega_0^2}{9}$

सभी बलों द्वारा किया गया कार्य $K_f - K_i = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right)v^2 = \frac{mR^2\omega_0^2}{9}$

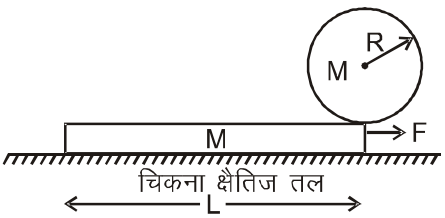
Comprehension # 2

A uniform disc of mass M and radius R initially stands vertically on the right end of a horizontal plank of mass M and length L, as shown in the figure.
The plank rests on smooth horizontal floor and friction between disc and plank is sufficiently high such that disc rolls on plank without slipping. The plank is pulled to right with a constant horizontal force of magnitude F.



अनुच्छेद # 2

M द्रव्यमान की व R त्रिज्या की एक एकसमान चकती प्रारम्भ में एक क्षैतिज तख्ते के दाहिने सिरे पर ऊर्ध्वाधर खड़ी है। तख्ते का द्रव्यमान M तथा लम्बाई L चित्रानुसार है।
तख्ता एक चिकने क्षैतिज धरातल पर है तथा चकती तथा तख्ते के मध्य घर्षण इतना पर्याप्त है कि चकती बिना फिसले तख्ते पर लौटनी गति कर सकती है। तख्ते को दाहिनी तरफ एक नियत क्षैतिज बल लगाया जाता है जिसका परिमाण F है।



4. The magnitude of acceleration of plank is

(A) $\frac{F}{8M}$ (B) $\frac{F}{4M}$ (C) $\frac{3F}{2M}$ (D*) $\frac{3F}{4M}$

तख्ते के त्वरण का परिमाण है–

(A) $\frac{F}{8M}$ (B) $\frac{F}{4M}$ (C) $\frac{3F}{2M}$ (D*) $\frac{3F}{4M}$

5. The magnitude of angular acceleration of the disc is -

(A) $\frac{F}{4mR}$ (B) $\frac{F}{8mR}$ (C*) $\frac{F}{2mR}$ (D) $\frac{3F}{2mR}$

चकती के कोणीय त्वरण का परिमाण है –

(A) $\frac{F}{4mR}$ (B) $\frac{F}{8mR}$ (C*) $\frac{F}{2mR}$ (D) $\frac{3F}{2mR}$

6. The distance travelled by centre of disc from its initial position till the left end of plank comes vertically below the centre of disc is

(A*) $\frac{L}{2}$ (B) $\frac{L}{4}$ (C) $\frac{L}{8}$ (D) L

प्रारम्भिक स्थिति से जब तक तख्ते के बांये सिरे के ऊर्ध्वाधर ठीक नीचे चकती का केन्द्र आता है उस दौरान तक चकती के केन्द्र द्वारा तय की गई दूरी होगी। –

(A*) $\frac{L}{2}$ (B) $\frac{L}{4}$ (C) $\frac{L}{8}$ (D) L

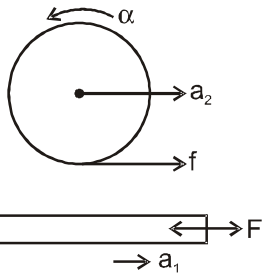
Sol. The free body diagram of plank and disc is

Applying Newton's second law

$F - f = Ma_1$ .... (1)

$f = Ma_2$ .... (2)

$FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$ .... (3)



from equation 2 and 3

$$a_2 = \frac{R\alpha}{2}$$

From constraint $a_1 = a_2 + R\alpha$

$\therefore a_1 = 3a_2$ .... (4)

Solving we get $a_1 = \frac{3F}{4M}$ and $\alpha = \frac{F}{2MR}$

If sphere moves by x the plank moves by L + x. The from equation (4)

$$L + x = 3x \quad \text{or} \quad x = \frac{L}{2}$$

तख्ते व चकती का FBD न्यूटन के द्वितीय नियम से

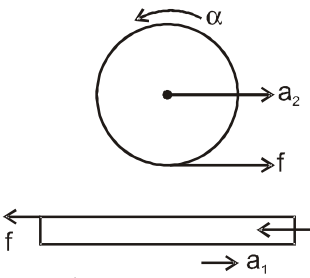
$F - f = \frac{1}{2}Ma_1$ .... (1)

$f = Ma_2$ .... (2)

$FR = MR^2\alpha$ .... (3)

समीकरण 2 व 3 से

$$a_2 = \frac{R\alpha}{2}$$



प्रतिबन्धित गति से $a_1 = a_2 + R\alpha$

$\therefore \quad a_1 = 3a_2 \qquad .... (4)$

हल करने पर $a_1 = \frac{3F}{4M}$ and तथा $\alpha = \frac{F}{2MR}$

यदि गोला x चलता है तो तख्ता L + x चलता है तो समीकरण (4) से

$$L + x = 3x \quad \text{या} \quad x = \frac{L}{2}$$

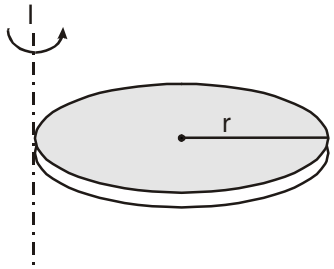
Exercise-3

✍ Marked Questions can be used as Revision Questions.
✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।
*** Marked Questions may have more than one correct option.**
*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -**

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

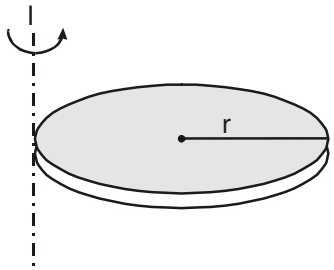
भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1.✍ A solid sphere of radius R has moment of inertia I about its geometrical axis. If it is melted into a disc of radius r and thickness t. If it's moment of inertia about the tangential axis (which is perpendicular to plane of the disc), is also equal to I, then the value of r is equal to : **[JEE 2006 , 3/184]**



(A*) $\frac{2}{\sqrt{15}}R$ (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}R$ (C) $\frac{3}{\sqrt{15}}R$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}R$

R त्रिज्या का एक ठोस गोला अपने ज्यामितीय अक्ष के परित I जड़त्व आघूर्ण रखता है। यदि इसे r त्रिज्या व t मोटाई की एक चकती के रूप में पिघलाया जाता है। यदि इसका स्पर्शज्या अक्ष के परितः (जो चकती के तल के लम्बवत् है) जड़त्व आघूर्ण भी I के बराबर है, तब r का मान बराबर है - :



(A*) $\frac{2}{\sqrt{15}}R$ (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}R$ (C) $\frac{3}{\sqrt{15}}R$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}R$

Ans. **(A)**

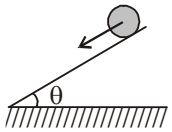
Sol. $2/5\ MR^2 = 1/2\ Mr^2 + Mr^2$

$\therefore \quad 2/5\ MR^2 = 3/2\ Mr^2$

$r^2 = \frac{4}{15}R^2$

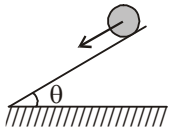
$r = \frac{2R}{\sqrt{15}}$

2.* A solid sphere is in pure rolling motion on an inclined surface having inclination θ.



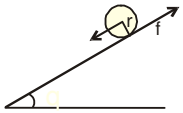
(A) frictional force acting on sphere is $f = \mu mg \cos\theta$.
(B) f is dissipative force.
(C*) friction will increase its angular velocity and decreases its linear velocity.
(D*) If θ decreases, friction will decrease.

2.* एक ठोस गोला θ नति कोण वाले आनत तल पर शुद्ध लौटनी गति कर रहा है - **[JEE 2006 , 5/184]**



(A) गोले पर कार्यरत घर्षण बल $f = \mu mg \cos\theta$ है।
(B) f क्षयित बल है।
(C*) घर्षण इसका कोणीय वेग बढ़ायेगा तथा इसका रेखीय वेग घटायेगा।
(D*) यदि θ घटेगा, घर्षण भी घटेगा

Sol.



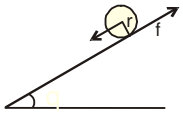
necessary torque for rolling $\tau = fr$, (frictional force provides this torque)
as $mg\sin\theta - f = ma$
but $a = r\alpha \Rightarrow mg\sin\theta - f = mr\alpha$
as $\tau = fr = I\alpha \Rightarrow \alpha = fr/I$

$\therefore$ $mg\sin\theta - f = mrfr/I = 5f/2$ $\left(I = \frac{2mr^2}{5}\right)$

$\therefore$ $mg\sin\theta = \frac{7f}{2}$

thus friction increases the torque in hence the angular velocity and decreases the linear velocity.
If θ decreases friction will decrease.

Sol.



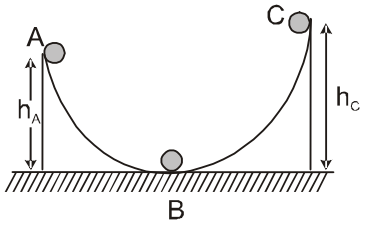
लुढ़कने के लिए आवश्यक बलाघूर्ण $\tau = fr$, (घर्षण बल यह बलाघूर्ण प्रदान करता है)
क्योंकि $mg\sin\theta - f = ma$
परन्तु $a = r\alpha \Rightarrow mg\sin\theta - f = mr\alpha$
क्योंकि $\tau = fr = I\alpha \Rightarrow \alpha = fr/I$

$\therefore$ $mg\sin\theta - f = mrfr/I = 5f/2$ $\left(I = \frac{2mr^2}{5}\right)$

$\therefore$ $mg\sin\theta = \frac{7f}{2}$

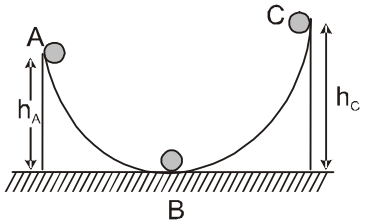
इस प्रकार घर्षण बलाघूर्ण के द्वारा कोणीय वेग को बढ़ाता है व रेखीय वेग को घटाता है।
यदि θ घटता है घर्षण घटेगा।

3*. A ball moves over a fixed track as shown in the figure. From A to B the ball rolls without slipping. If surface BC is frictionless and K_A, K_B and K_C are kinetic energies of the ball at A,B and C respectively, then : **[JEE 2006 , 5/184]**



(A*) $h_A > h_C$; $K_B > K_C$ (B*) $h_A > h_C$; $K_C > K_A$
(C) $h_A = h_C$; $K_B = K_C$ (D) $h_A < h_C$; $K_B > K_C$

एक गेंद चित्रानुसार स्थिर पथ पर गति करती है। A से B तक गेंद बिना फिसले लुढ़कती है। यदि BC सतह घर्षण रहित हो तथा K_A, K_B व K_C गेंद की क्रमशः A,B व C पर गतिज ऊर्जाऐं हो, तब –



(A*) $h_A > h_C$; $K_B > K_C$ (B*) $h_A > h_C$; $K_C > K_A$
(C) $h_A = h_C$; $K_B = K_C$ (D) $h_A < h_C$; $K_B > K_C$

Sol. As total mechanical energy at points A,B and C will be constant

$\therefore \quad \varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon_C$

$\Rightarrow \quad mgh_A + K_A = K_B = mgh + K_C$

$\therefore \quad K_B > K_A \qquad (mgh_A + K_A = K_B)$

and $\quad K_B > K_C \qquad (mgh_C + K_C = K_B)$

Also $\quad h_A - h_C = \dfrac{K_C - K_A}{mg} \qquad$ when $\quad mgh_A + K_A = mgh_C + K_C$

if $\quad h_A > h_C \quad \Rightarrow \quad K_C > K_A \qquad$ (if LHS is positive then RHS have to be positive)

Sol. क्योंकि कुल यांत्रिक ऊर्जा बिन्दु A,B व C पर नियत होगी।

$\therefore \quad \varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon_C \quad \Rightarrow \quad mgh_A + K_A = K_B = mgh + K_C$

$\therefore \quad K_B > K_A \qquad (mgh_A + K_A = K_B)$

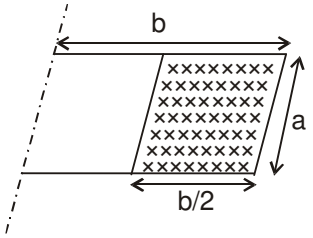
तथा $\quad K_B > K_C \qquad (mgh_C + K_C = K_B)$

यदि $\quad h_A - h_C = \dfrac{K_C - K_A}{mg} \qquad$ जब $\quad mgh_A + K_A = mgh_C + K_C$

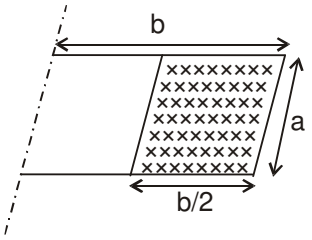
यदि $\quad h_A > h_C \quad \Rightarrow \quad K_C > K_A$

(यदि LHS धनात्मक है तो RHS भी धनात्मक होना चाहिए)

4. A rectangular plate of mass M of dimensions (a × b) is hinged along one edge. The plate is maintained in horizontal position by colliding a ball of mass m, per unit area, elastically 100 times per second this ball is striking on the right half shaded region of the plate as shown in figure. Find the required speed of the ball (ball is colliding in only half part of the plate as shown). (It is given M = 3 kg, m = 0.01 kg, b = 2 m, a = 1 m, g = 10 m/s^2) **[JEE 2006, 6/184]**



4. M द्रव्यमान की एक प्लेट जिसकी विमाऐं (a × b) है, को इसके एक किनारे से निलम्बित किया जाता है। प्लेट के इकाई क्षेत्रफल पर m द्रव्यमान की गेदें 100 गेंदें/सैक० की दर से प्रत्यास्थ रूप से टकराती है। जिससे प्लेट क्षैतिज रूप में चित्रानुसार बनी रहती है। गेंद की आवश्यक चाल क्या होगी? (गेंदें प्लेट के आधे भाग पर टकराती है।). (दिया गया है M = 3 kg, m = 0.01 kg, b = 2 m, a = 1 m, g = 10 m/s^2) **[JEE 2006, 6/184]**



Ans. V = 10 m/s

Sol. (As collision is elastic)

$\therefore \quad F = \frac{dP}{dt} = \frac{2mV}{1} = 2mV$

$\therefore \quad$ torque about hinge $= 2mV \times \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{4}\right) \times 100$

$= 2mV \ \frac{3b}{4} \times 100 = Mg\frac{b}{2}$

$\therefore \quad V = 10$ m/s

Sol. क्योंकि टक्कर प्रत्यास्थ है

$\therefore \quad F = \frac{dP}{dt} = n \ x \ \left(a \ x \ \frac{b}{2}\right) \times \ 2mV$

कीलक के परितः बलाघूर्ण को संतुलित करने पर,

$\therefore \quad$ कीलक के परितः बलाघूर्ण $= n \times \left(a \ \times \ \frac{b}{2}\right) \times (2mv) \ \frac{3b}{4} = Mg \times \frac{b}{2}$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर हम पाते है,

$\therefore \quad V = 10$ m/s

Paragraph for Question Nos. 5 to 7

Two discs A and B are mounted coaxially on a vertical axle. The discs have moments of inertia I and $2I$ respectively about the common axis. Disc A is imparted an initial angular velocity 2ω using the entire potential energy of a spring compressed by a distance x_1. Disc B is imparted an angular velocity ω by a spring having the same spring constant and compressed by a distance x_2. Both the discs rotate in the clockwise direction. **[JEE-2007, 12/162]**

प्रश्न 16 से 18 के लिए अनुच्छेद

दो चकतियाँ A एवं B एक ऊर्ध्वाधर धुरी पर समाक्ष रूप से व्यवस्थित (mount) की गई है। उभयनिष्ठ अक्ष (common axis) के परितः उन चकतियों के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः I तथा $2I$ है। एक स्प्रिंग को x_1 दूरी से दबाकर उसकी सम्पूर्ण स्थितिज ऊर्जा का उपयोग कर चकती A को 2ω प्रारम्भिक कोणीय वेग दिया जाता है। उतने ही स्प्रिंग गुणांक वाले एक दूसरे स्प्रिंग को x_2 दूरी से दबाकर चकती B को ω कोणीय वेग दिया जाता है। दोंनो चकतियाँ दक्षिणावर्ती (clockwise) दिशा में घूम रही है।

5. The ratio x_1/x_2 is अनुपात x_1/x_2 है

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C*) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

अनुपात x_1/x_2 है

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C*) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ans. (C)

Sol. $\frac{1}{2}\times I\times(2\omega)^2=\frac{1}{2}kx_1^2$

$\frac{1}{2}\times 2I\times\omega^2=\frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2}=\sqrt{2}$

6. When disc B is brought in contact with disc A, they acquire a common angular velocity in time t. The average frictional torque on one disc by the other during this period is

(A*) $\frac{2I\omega}{3t}$ (B) $\frac{9I\omega}{2t}$ (C) $\frac{9I\omega}{4t}$ (D) $\frac{3I\omega}{2t}$

जब चकती B को चकती A के साथ सम्पर्क में लाया जाता है तो वे t समय में समान कोणीय वेग प्राप्त कर लेते है। इस अवधि में एक चकती पर दूसरी के द्वारा लगाया गया औसत घर्षण बल आघूर्ण है

(A*) $\frac{2I\omega}{3t}$ (B) $\frac{9I\omega}{2t}$ (C) $\frac{9I\omega}{4t}$ (D) $\frac{3I\omega}{2t}$

Ans. **(A)**

Sol. Apply conservation of angular momentum

रेखीय संवेग संरक्षण नियम लगाने पर

$(I\times 2\omega)+(2I\times\omega)=(I+2I)\,\omega'$

$\Rightarrow \quad \omega'=\frac{4\omega}{3}$

For Disc A चकती A के लिये

$\tau t=I\times(2\omega-\omega')$

$\Rightarrow \quad \tau=\frac{2I\omega}{3t}$

7. The loss of kinetic energy during the above process is

(A) $\frac{I\omega^2}{2}$ (B*) $\frac{I\omega^2}{3}$ (C) $\frac{I\omega^2}{4}$ (D) $\frac{I\omega^2}{6}$

उपरोक्त प्रक्रिया में होने वाला गतिज ऊर्जा का ह्रास (loss) है

(A) $\frac{I\omega^2}{2}$ (B*) $\frac{I\omega^2}{3}$ (C) $\frac{I\omega^2}{4}$ (D) $\frac{I\omega^2}{6}$

Ans. **(B)**

Sol. Initial Kinetic Energy $k_1=\frac{1}{2}\times I\times(2\omega)^2+\frac{1}{2}\times 2I\times\omega^2$

Final Kinetic Energy $k_2=\frac{1}{2}\times I\times\omega'^2+\frac{1}{2}\times 2I\,\omega'^2$

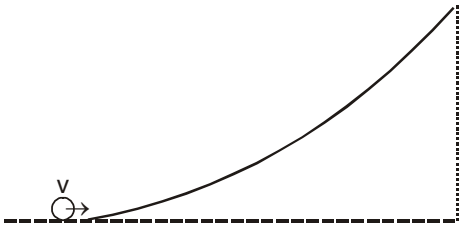
Loss of Kinetic Energy $=k_1-k_2=\frac{I\omega^2}{3}$

Sol. प्रारम्भिक गतिज उर्जा $k_1=\frac{1}{2}\times I\times(2\omega)^2+\frac{1}{2}\times 2I\times\omega^2$

अन्तिम गतिज उर्जा $k_2=\frac{1}{2}\times I\times\omega'^2+\frac{1}{2}\times 2I\,\omega'^2$

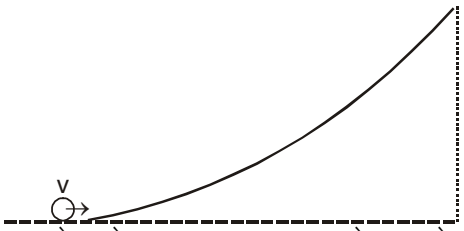
गतिज उर्जा में ह्रास $=k_1-k_2=\frac{I\omega^2}{3}$

8. A small object of uniform density rolls up a curved surface with an initial velocity v. It reaches up to a maximum height of $\frac{3v^2}{4g}$ with respect to the initial position. The object is **[JEE-2007, 3/162]**



(A) ring (B) solid sphere (C) hollow sphere (D*) disc

एक समान घनत्व वाली एक छोटी वस्तु वेग v से प्रारम्भ कर एक वक्र सतह पर ऊपर की ओर लुढ़कती (rolls) है। आरम्भिक स्थिति की अपेक्षा यह $\frac{3v^2}{4g}$ की अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचती है। वस्तु है।



(A) वलय (ring) (B) ठोस गोला (C) खोखला गोला (D*) चकती (disc)

Sol. From the conservation of energy
loss in KE of body = Gain in potential energy

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 = mg\frac{3}{4}\frac{v^2}{g}$$

on solving

$$I = \frac{mr^2}{2} \qquad \therefore \text{ The body is a disc}$$

Sol. ऊर्जा संरक्षण नियम से
वस्तु की गतिज उर्जा में ह्रास = स्थितिज उर्जा में वृद्धि

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}\frac{v^2}{g}mg$$

हल करने पर $I = \frac{mr^2}{2}$ $\therefore$ वस्तु चकती है

9. **STATEMENT – 1 :** If there is no external torque on a body about its centre of mass, then the velocity of the center of mass remains constant. **[JEE-2007, 3/162]**
because
STATEMENT – 2 : The linear momentum of an isolated system remains constant.
(A) Statement-1 is True, Statement-2 is True; Statement-2 **is** a correct explanation for Statement-1
(B) Statement-1 is True, Statement-2 is True; Statement-2 **is NOT** a correct explanation for Statement1
(C) Statement-1 is True, Statement-2 is False
(D*) Statement-1 is False, Statement-2 is True

वक्तव्य - 1 : यदि किसी वस्तु पर उसके द्रव्यमान केन्द्र के परितः कोई बाह्य बल आघूर्ण नहीं है, तो द्रव्यमान केन्द्र का वेग अचर रहेगा। क्योंकि

वक्तव्य - 2: एक विलगित निकाय (isolated system) का रेखीय संवेग अचर रहता है।

(A) वक्तव्य-1 सत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है; वक्तव्य-2 वक्तव्य -1 का सही स्पष्टीकरण है।

(B) वक्तव्य-1 सत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है ; वक्तव्य-2 वक्तव्य-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।

(C) वक्तव्य -1 सत्य है, वक्तव्य-2 असत्य है।

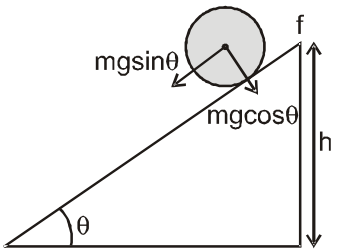
(D*) वक्तव्य -1 असत्य है , वक्तव्य-2 सत्य है।

Sol. If torque external = 0, then angular momentum = constant **=** $I\omega$
यदि बाह्य बलाघूर्ण = 0, तो कोणीय संवेग = नियत **=** $I\omega$

10. **STATEMENT -1 :** Two cylinders, one hollow (metal) and the other solid (wood) with the same mass and identical dimensions are simultaneously allowed to roll without slipping down an inclined plane from the same height. The hollow cylinder will reach the bottom of the inclined plane first. **[JEE-2008, 3/163]**
and
STATEMENT -2 : By the principle of conservation of energy, the total kinetic energies of both the cylinders are identical when they reach the bottom of the incline.
(A) STATEMENT -1 is True, STATEMENT -2 is True; STATEMENT -2 is a correct explanation for STATEMENT -1
(B) STATEMENT -1 is True, STATEMENT -2 is True; STATEMENT -2 is NOT a correct explanation for STATEMENT -1
(C) STATEMENT -1 is True, STATEMENT -2 is False
(D*) STATEMENT -1 is False, STATEMENT -2 is True.

10. **वक्तव्य -1 :** समान द्रव्यमान एवं समरूप विमाओं के दो बेलन, जिनमें से एक खोखला (धातु) और दूसरा ठोस (लकड़ी का) है, एक नत समतल (Inclined plane) पर समान ऊचाँई से, बिना फिसले, एक साथ लुढ़काये जाते है। खोखला बेलन नत समतल की तली पर पहले पहुँचेगा। **[JEE-2008, 3/163]**
तथा
वक्तव्य -2: ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त के अनुसार, जब दोंनो बेलन नत समतल की तली पर पहुँचेंगे, उनकी गतिज–ऊर्जा समान होगी।
(A) वक्तव्य -1 सत्य है , वक्तव्य-2 सत्य है; वक्तव्य-2 वक्तव्य -1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) वक्तव्य -1 सत्य है , वक्तव्य-2 सत्य है; वक्तव्य-2 वक्तव्य-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) वक्तव्य -1 सत्य है, वक्तव्य-2 असत्य है।
(D*) वक्तव्य-1 असत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है।

Sol.

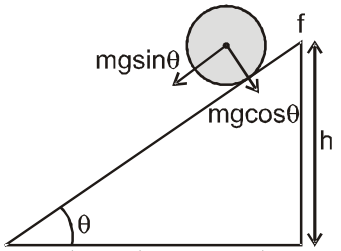


The acceleration of centre of mass of either cylinder

$a = \dfrac{g\sin\theta}{1+\dfrac{K^2}{R^2}}$ where K is radius of gyration.

So acceleration of centre of hollow cylinder
is less than that of solid cylinder.
Hence time taken by hollow cylinder will be more.
So statement-1 is wrong.
Ans. (D)

Sol.



किसी बेलन के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण

$a = \dfrac{g\sin\theta}{1+\dfrac{K^2}{R^2}}$ जहाँ K घूर्णन त्रिज्या है।

इसलिये खोखले बेलन के केन्द्र का त्वरण ठोस बेलन के केन्द्र के त्वरण से कम है। अतः खोखले बेलन द्वारा लिया गया समय अधिक है। इसलिये कथन -1 असत्य है।

Ans. (D)

11. If the resultant of all the external forces acting on a system of particles is zero, then from an inertial frame, one can surely say that **[JEE 2009, 4/160, –1]**

(A*) linear momentum of the system does not change in time

(B) kinetic energy of the system does not changes in time

(C) angular momentum of the system does not change in time

(D) potential energy of the system does not change in time

कणों के एक निकाय पर लग रहे बाहरी बलों का परिणामी बल यदि शून्य हो, तो किसी जडत्वीय फ्रेम से यह निश्चित रूप से कहा जा सकता है कि

(A) निकाय का रेखीय संवेग समय के साथ नहीं बदलता

(B) निकाय की गतिज ऊर्जा समय के साथ नहीं बदलती

(C) निकाय का कोणीय संवेग समय के साथ नहीं बदलता

(D) निकाय की स्थितिज ऊर्जा समय के साथ नहीं बदलती

Sol. (A) Since there in no resultant external force, linear momentum of the system remains constant.

(B) Kinetic energy of the system may change.

(C) Angular momentum of the system may change as in case of couple, net force is zero but torque is not zero. Hence angular momentum of the system is not constant.

(D) Potential energy may also change.

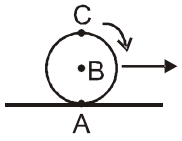
(A) चुंकि परिणामी बाह्य बल नही है निकाय का रेखीय संवेग नियत रहेगा,

(B) निकाय की गतिज ऊर्जा परिवर्तित हो सकती है।

(C) निकाय का कोणीय संवेग परिवर्तित हो सकता है जैसा कि बल युग्म की स्थिति में, कुल बल शून्य होता है किन्तु बल आघूर्ण शून्य नही होता है। अतः निकाय का कोणीय संवेग नियत नही होता है।

(D) स्थितिज ऊर्जा भी परिवर्तित हो सकती है।

12*. A sphere is rolling without slipping on a fixed horizontal plane surface. In the figure, A is the point of contact, B is the centre of the sphere and C is its topmost point. Then, **[JEE 2009, 4/160, –1]**



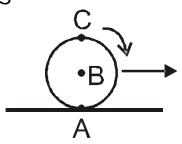
(A) $\vec{V}_C - \vec{V}_A = 2\left(\vec{V}_B - \vec{V}_C\right)$

(B*) $\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

(C*) $\left|\vec{V}_C - \vec{V}_A\right| = 2\ \left|\vec{V}_B - \vec{V}_C\right|$

(D) $\left|\vec{V}_C - \vec{V}_A\right| = 4\ \left|\vec{V}_B\right|$

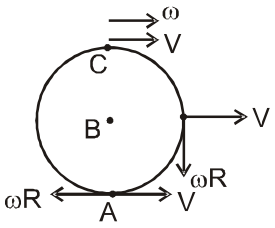
एक स्थिर क्षैतिज समतल पृष्ठ पर एक गोला बिना फिसले लुढ़क रहा है। चित्र में, A तल से सम्पर्क बिन्दु, B गोले का केन्द्र तथा C उसका सबसे ऊपरी बिन्दु है। तब **[JEE 2009, 4/160, –1]**



(A) $\vec{V}_C - \vec{V}_A = 2\left(\vec{V}_B - \vec{V}_C\right)$ (B*) $\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

(C*) $\left|\vec{V}_C - \vec{V}_A\right| = 2\ \left|\vec{V}_B - \vec{V}_C\right|$ (D) $\left|\vec{V}_C - \vec{V}_A\right| = 4\ \left|\vec{V}_B\right|$

Sol. (B, C)



$\vec{V}_A = V(\hat{i}) + \omega R(-\hat{i})$; $\vec{V}_B = V\hat{i}$; $\vec{V}_C = V\hat{i} + \omega R\hat{i}$

$\vec{V}_C - \vec{V}_A = 2\omega R\hat{i}$

$2\left[\vec{V}_B - \vec{V}_C\right] = 2\ [\ V(\hat{i}) - V(\hat{i}) - \omega R(\hat{i})] = -2\omega R(\hat{i})$

Hence अतः $\vec{V}_C - \vec{V}_A = -2(\vec{V}_B - \vec{V}_C)$

so इसलिए $|\vec{V}_C - \vec{V}_A| = |2(\vec{V}_B - \vec{V}_C)|$

$\vec{V}_C - \vec{V}_B = \omega R(\hat{i})$

$\vec{V}_B - \vec{V}_A = \omega R(\hat{i})$

$\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

Hence अतः $\vec{V}_C - \vec{V}_A = 2\omega R(\hat{i})$

$\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$; $4\vec{V}_B = 4V(\hat{i}) = 4\omega R(\hat{i})$

Hence अतः $\vec{V}_C - \vec{V}_A = 2(\vec{V}_B)$

13. A block of base 10 cm × 10 cm and height 15 cm is kept on an inclined plane. The coefficient of friction between them is $\sqrt{3}$. The inclination θ of this inclined plane from the horizontal plane is gradually increased from 0º. Then **[JEE 2009, 3/160, –1]**

(A) at θ = 30º, the block will start sliding down the plane

(B*) the block will remain at rest on the plane up to certain θ and then it will topple

(C) at θ = 60º, the block will start sliding down the plane and continue to do so at higher angles

(D) at θ = 60º, the block will start sliding down the plane and on further increasing θ, it will topple at certain θ

13. 10 cm × 10 cm आधार व 15 cm ऊँचाई का एक गुटका एक नततल पर रखा है। तल और गुटके के बीच घर्षण गुणांक $\sqrt{3}$ है। इस नततल और क्षैतिज तल के बीच कोण θ को 0º से धीरे–धीरे बढ़ाया जाता है। तब **JEE 2009, 3/160, –1]**

(A) θ = 30º पर गुटका नीचे सरकने लगता है

(B) θ के किसी विशेष मान तक गुटका तल पर स्थिर रहता है और उसके बाद पलट जाता है

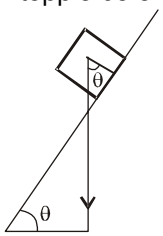
(C) θ = 60º पर गुटका नीचे सरकने लगता है, θ का मान ओर बढ़ाने पर भी गुटका सरकता रहता है

(D) θ = 60º पर गुटका नीचे सरकने लगता है, θ का मान ओर अधिक बढ़ाने पर किसी विशेष θ पर यह पलट जाता है

Solution : Angle of repose $\theta_0 = \tan^{-1}\mu = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60^\circ$

$\tan\theta = \dfrac{5}{15/2} = \dfrac{2}{3}$. $\theta < 45^\circ$.

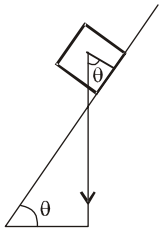
Block will topple before it starts slide down.



Solution : विश्रान्ति कोण $\theta_0 = \tan^{-1}\mu = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60^\circ$

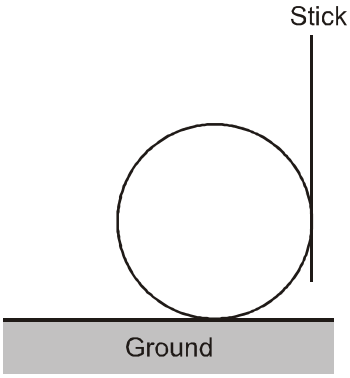
$\tan\theta = \dfrac{5}{15/2} = \dfrac{2}{3}$. $\theta < 45^\circ$.

ब्लॉक के नीचे फिसलने से पहले यह पलट जायेगा



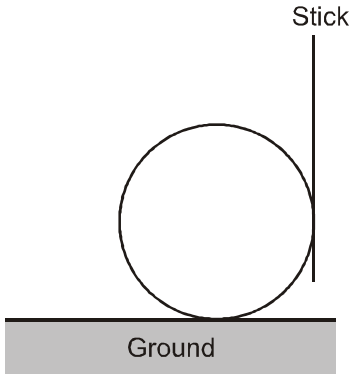
14. A boy is pushing a ring of mass 2 kg and radius 0.5 m with a vertical stick as shown in the figure. The stick applies a normal force of 2 N on the ring and rolls it without slipping with an acceleration of 0.3 m/s^2. The coefficient of friction between the ground and the ring is large enough that rolling always occurs and the coefficient of friction between the stick and the ring is (P/10). The value of P is

[JEE 2011, 4/160]



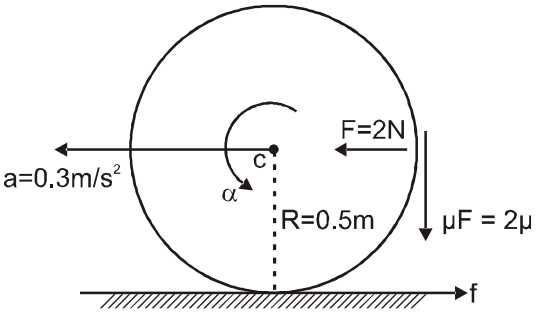
14. एक लड़का छड़ी से एक रिंग को 2N अभिलम्ब बल लगाकर धकेल रहा है (चित्र देखिये)। रिंग का द्रव्यमान 2 kg और त्रिज्या 0.5 m है। रिंग बिना फिसले 0.3 m/s^2 के त्वरण से लुढ़क रही है। रिंग और जमीन के बीच घर्षण गुणांक इतना है कि लुढ़कना हमेशा संभव है। यदि छड़ी और रिंग के बीच घर्षण गुणांक (P/10) हो, तब P का मान है

[JEE 2011, 4/160]



Ans. **P = 4**

Sol.



II द्वितिय नियम Law $\Rightarrow$ $2 - f = 2\,[0.3]$

$\Rightarrow$ $f = 2 - 0.6$

$f - 1.4$ Nx ...(i)

$a = R\alpha$

$\Rightarrow$ $0.3 = \alpha\,[0.5]$

$\Rightarrow$ $\alpha = \frac{3}{5}$ rad/s ....(ii)

$\tau_c = I_c\,\alpha$

$\Rightarrow$ $fR - 2\mu R = mR^2\,\alpha$

$f - 2\mu = mR\alpha$

$1.4 - 2\mu = \frac{2}{2}\left(\frac{3}{5}\right)$

$1.4 - 0.6 = 2\mu$

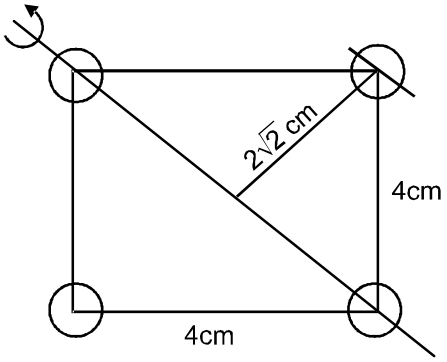
$0.8 = 2\mu \Rightarrow \mu = 0.4 = \frac{P}{10}$ $\therefore$ $P = 4$ **Ans.**

15. Four solid spheres each of diameter $\sqrt{5}$ cm and mass 0.5 kg are placed with their centers at the corners of a square of side 4cm. The moment of inertia of the system about the diagonal of the square is N × 10^{-4} kg-m^2, then N is **[JEE 2011, 4/160]**

$\sqrt{5}$ cm व्यास के चार ठोस गोलों, प्रत्येक का द्रव्यमान 0.5 kg है, को एक 4cm भुजा के वर्ग के कोनों पर क्रमशः रखा गया है। वर्ग के कर्ण पर इस निकाय का जड़त्व–आघूर्ण यदि N × 10^{-4} kg-m^2, हो, तब N का मान है–

Ans. **9**

Sol.



$$I = \left(\frac{2}{5}MR^2\right) 2 + \left(\frac{2}{5}MR^2 + Mx^2\right) \quad 2$$

$$= \left(\frac{2}{5}MR^2\right) \quad 2 + \left(\frac{2}{5}MR^2\right) \quad 2 + (Mx^2)\,2$$

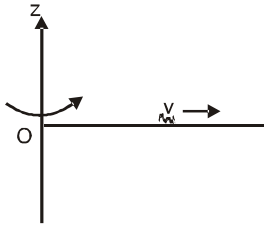
$$= 4\left(\frac{2}{5}MR^2\right) \quad + 2mx^2 = \frac{8}{5}MR^2 + 2mx^2$$

$$= \left[\frac{8}{5}\times 0.5\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2\times(0.5)\times(4\times 2)\right]10^{-4}$$

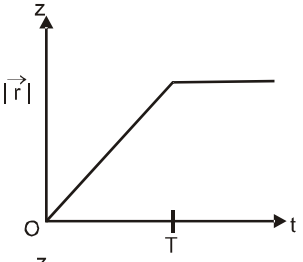
$$= \left[\frac{5}{5}+8\right] \times 10^{-4} = 9 \times 10^{-4} = N \times 10^{-4}$$

So, N = 9 **Ans.**

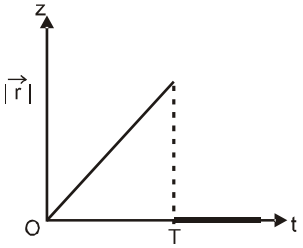
16. A thin uniform rod, pivoted at O, is rotating in the horizontal plane with constant angular speed ω, as shown in the figure. At time, t = 0, a small insect starts from O and moves with constant speed v with respect to the rod towards the other end. It reaches the end of the rod at t = T and stops. The angular speed of the system remains ω throughout. The magnitude of the torque ($|\vec{\tau}|$) on the system about O, as a function of time is best represented by which plot ?



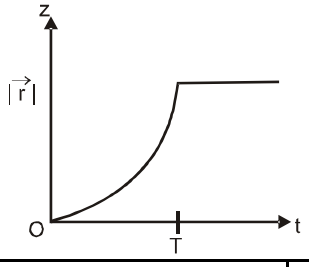
(A)



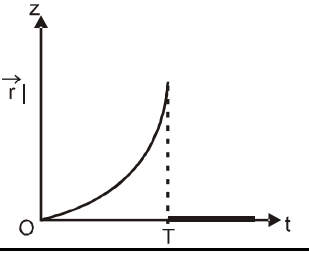
(B*)



(C)

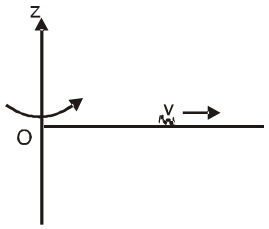


(D)

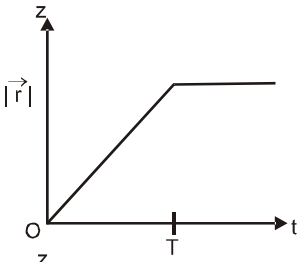


16. एक पतली एकसमान छड़ बिन्दु O पर कीलकित है और क्षैतिज तल में एकसमान कोणीय चाल ω से घूम रही है (चित्र देखिये)। $t = 0$ पर एक छोटा कीड़ा O से चलना शुरू करके छड़ के अंतिम सिरे पर $t = T$ समय पर पहुँच कर रूक जाता है। कीड़ा छड़ के सापेक्ष एकसमान चाल v से चलता है। निकाय की कोणीय चाल पूरे समय ω बनी रहती है। O के परितः निकाय पर लगने वाले बल–आघूर्ण का मान ($|\vec{\tau}|$) समय के साथ जिस प्रकार बदलता है उसका सर्वोत्तम वर्णन किस ग्राफ में है? **[IIT-JEE-2012, Paper-1; 3/70, –1]**

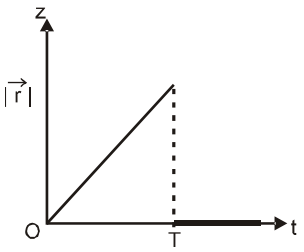
(A)



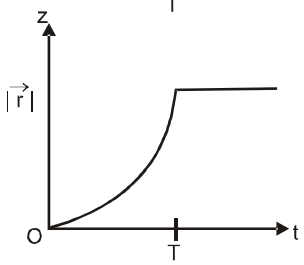
(B*)

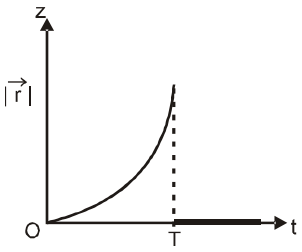


(C)



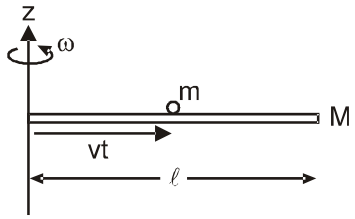
(D)





Ans. **(B)**

Sol.



$L = [m(vt)^2]\omega$

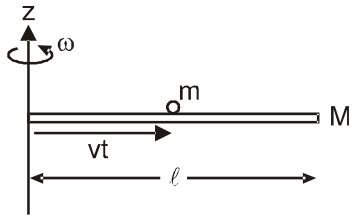
$L = mv^2\omega t^2$

So $\tau = \dfrac{dL}{dt} = 2mv^2\omega t$

$\tau \propto t$

$\Rightarrow$ straight line passing through (0, 0)

Sol.



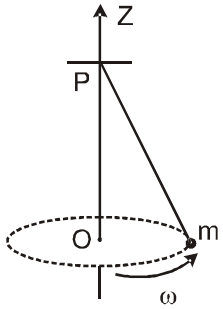
$L = [m(vt)^2]\omega$

$L = mv^2\omega t^2$

So $\tau = \dfrac{dL}{dt} = 2mv^2\omega t$

$\tau \propto t$ $\Rightarrow$ straight line passing through (0, 0)

17. A small mass m is attached to a massless string whose other end is fixed at P as shown in the figure. The mass is undergoing circular motion is the x-y plane with centre at O and constant angular speed ω. If the angular momentum of the system, calculated about O and P are denoted $\vec{L}_O$ by $\vec{L}_P$ and respectively, then **[IIT-JEE-2012, Paper-1; 3/70, –1]**



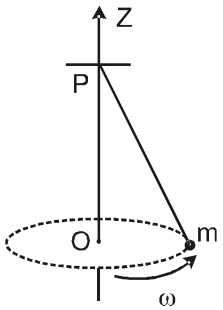
(A) $\vec{L}_O$ and $\vec{L}_P$ do not vary with time.

(B) $\vec{L}_O$ varies with time while $\vec{L}_P$ remains constant.

(C*) $\vec{L}_O$ remains constant while $\vec{L}_P$ varies with time.

(D) $\vec{L}_O$ and $\vec{L}_P$ both vary with time.

m द्रव्यमान का एक छोटा पिंड द्रव्यमान–रहित धागे से जुड़ा है। धागे का दूसरा सिरा P पर बंधित हैं (चित्र देखिये।) पिंड x – y तल में एकसमान कोणीय चाल ω से वृत्तीय गति कर रहा है। वृत्त का केन्द्र O पर है। यदि O और P बिन्दूओं के सापेक्ष निकाले गये इस निकाय के कोणीय संवेग क्रमशः $\vec{L}_0$ और $\vec{L}_P$ है, तब



(A) $\vec{L}_0$ और $\vec{L}_P$ समय के साथ नही बदलते है।

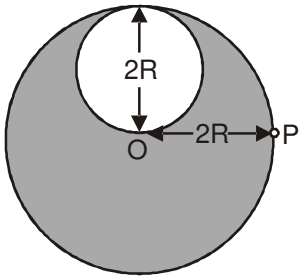
(B) $\vec{L}_0$ समय के साथ बदलता है, जबकि $\vec{L}_P$ एकसमान है।

(C) $\vec{L}_0$ एकसमान रहता है, जबकि $\vec{L}_P$ समय के साथ बदलता है।

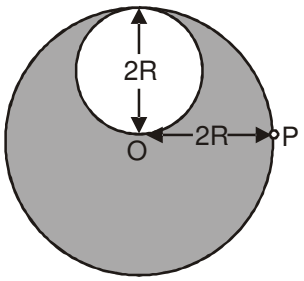
(D) $\vec{L}_0$ और दोनों $\vec{L}_P$ समय के साथ बदलते है।

Ans. (C)

18. A lamina is made by removing a small disc of diameter 2R from a bigger disc of uniform mass density and radius 2R, as shown in the figure. The moment of inertia of this lamina about axes passing through O and P is I_O and I_P, respectively. Both these axes are perpendicular to the plane of the lamina. The ratio $\frac{I_P}{I_O}$ to the nearest integer is : **[IIT-JEE-2012, Paper-1; 4/70]**

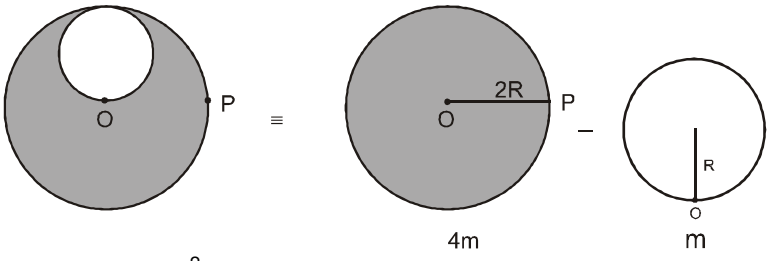


एक एकसमान द्रव्यमान घनत्व की 2R त्रिज्या की गोल डिस्क में से एक 2R व्यास की छोटी गोल डिस्क निकालकर एक पटल (lamina) बनाया गया है (चित्र देखिए)। इस पटल का जड़त्व–आघूर्ण O और P से जानेवाले अक्षों के परितः क्रमशः I_0 एवं I_1 हैं। दोनों अक्ष पटल के तल के लम्बवत् हैं। तब अनुपात $\frac{I_P}{I_O}$ निकटतम पूर्णांक में क्या है ?



Ans. 3

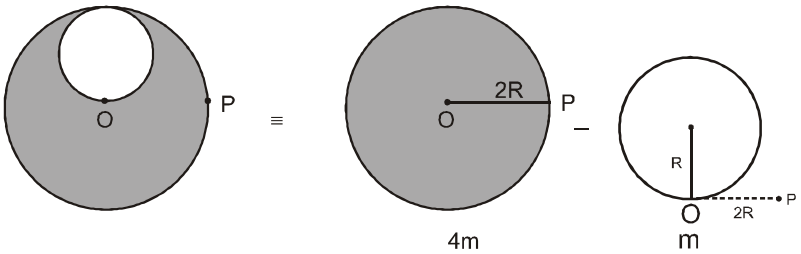
Sol.



$$I_0 = \frac{(4m)\ (2R)^2}{2} - \frac{3}{2}mR^2$$

$$= mR^2\left[8 - \frac{3}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}mR^2$$



$$I_P = \frac{3}{2}\ (4m)\ (2R)^2 - \left[\frac{mR^2}{2} + m[(2R)^2 + R^2]\right]$$

$$= 24\ mR^2 - \frac{11}{2}mR^2$$

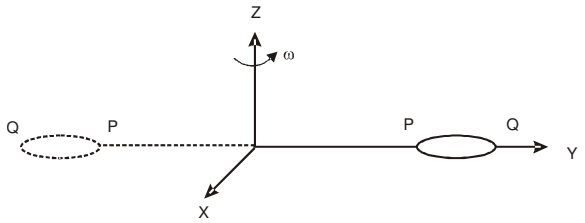
$$= \frac{37}{2}mR^2$$

$$\frac{I_P}{I_O} = \frac{\frac{37}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{37}{13} \approx 3$$

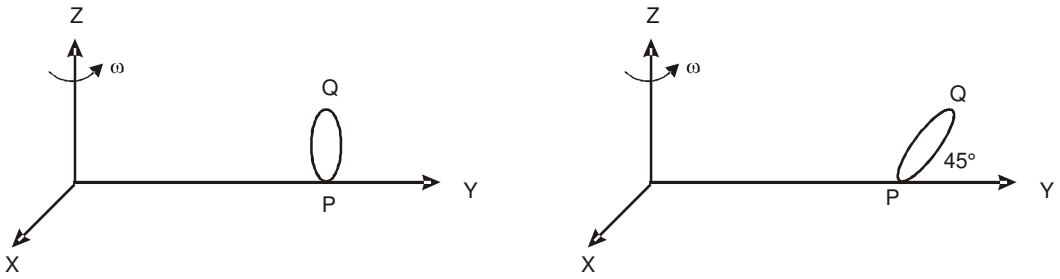
Ans. 3

Paragraph for Q. No. 19-20

The general motion of a rigid body can be considered to be a combination of (i) a motion of its centre of mass about an axis, and (ii) its motion about an instantanneous axis passing through center of mass. These axes need not be stationary. Consider, for example, a thin uniform welded (rigidly fixed) horizontally at its rim to a massless stick, as shown in the figure. Where disc-stick system is rotated about the origin ona horizontal frictionless plane with angular speed ω, the motion at any instant can be taken as a combination of (i) a rotation of the centre of mass the disc about the z-axis, and (ii) a rotation of the disc through an instantaneous vertical axis passing through its centre of mass (as is seen from the changed orientation of points P and Q). Both the motions have the same angular speed ω in the case.

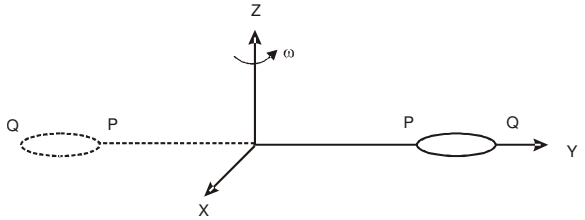


Now consider two similar systems as shown in the figure: case (a) the disc with its face vertical and parallel to x-z plane; Case (b) the disc with its face making an angle of 45° with x-y plane its horizontal diameter parallel to x-axis. In both the cases, the disc is welded at point P, and systems are rotated with constant angular speed ω about the z-axis.

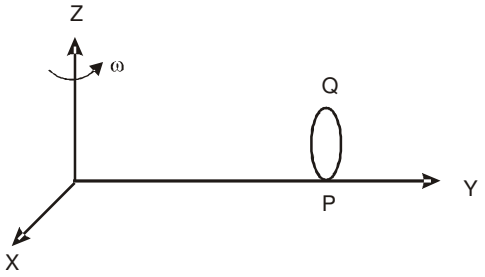


प्रश्न 19 से 20 के लिए अनुच्छेद

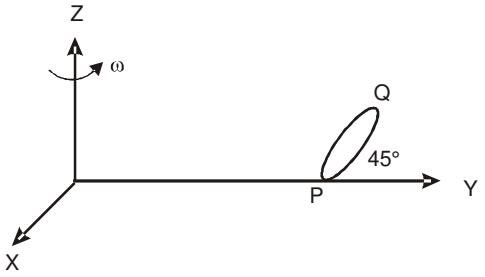
व्यापक रूप से किसी दृढ़ पिण्ड की गति को हम दो अलग–अलग गतियों के संयुक्त रूप में देख सकते हैं : (i) उसके संहति–केन्द्र की किसी अक्ष के परितः गति, और (ii) उसके संहति–केन्द्र से गुजरने वाले किसी तात्क्षणिक–अक्ष के परितः उसकी गति। यह आवश्यक नहीं है कि दोनों अक्ष स्थिर हों। उदाहरण के लिए हम क्षैतिज तल में रखी एक समान डिस्क को लेते हैं जो अपनी परिधि पर पर एक द्रव्यमान रहित छड़ से दृढ़ता से जुड़ी है (चित्र देखिये)। यह डिस्क–छड़ निकाय उद्गम के परितः ω कोणीय चाल से घर्षण–रहित क्षैतिज तल में घूम रहा है। तब किसी भी क्षण डिस्क की गति को दो भिन्न गतियों के अध्यारोपण के रूप में देख सकते हैं (i) डिस्क के संहति केन्द्र का z- अक्ष के सापेक्ष घूर्णन, और (ii) डिस्क का अपने संहति केन्द्र से गुजर रहे ऊर्ध्वाधर तात्क्षणिक–अक्ष पर घूर्णन (जो कि बिन्दुओं P और Q के आपस में स्थान बदलने के रूप में दिखता है)। इस उदाहरण में इन दोनों घूर्णनों की कोणीय चाल ω है।



अब चित्र में दर्शाये गये उसी प्रकार के निकाय के दो भिन्न स्वरूपों (cases) पर ध्यान दें। Case (a) : डिस्क का पृष्ठ ऊर्ध्वाधर है और x-z तल के समांतर है ; Case (b) : डिस्क का पृष्ठ x-y तल में 45° कोण बनाता है एवं उसका क्षैतिज व्यास x–अक्ष के समांतर है। दोनों cases में डिस्क बिन्दु P पर जड़ित है तथा यह निकाय z- अक्ष के परितः ω कोणीय चाल से घूर्णन करता है।



Case (a)



Case (b)

19. Which of the following statement regarding the angular speed about the istantaneous axis (passing through the centre of mass) is correct? **[IIT-JEE-2012, Paper-2; 3/66, –1]**

(A) It is $\sqrt{2}\omega$ for both the cases (B) it is ω for case (a); and $\frac{\omega}{\sqrt{2}}$ for case (b).

(C) It is ω for case (a); and $\sqrt{2}\omega$ for case (b) (D*) It is ω for both the cases

तात्क्षणिक–अक्ष (जो संहति–केन्द्र से गुजर रहा है) के परितः घूर्णन की कोणीय चाल के बारे में कौन सा प्रकथन सही है ?

(A) दोनों cases के लिये यह $\sqrt{2}\omega$ है।

(B) Case (a) के लिये यह ω है ; Case (b) के लिये यह $\frac{\omega}{\sqrt{2}}$ है।

(C) Case (a) के लिये यह ω है ; Case (b) के लिये यह $\sqrt{2}\omega$ है।

(D) दोनों cases के लिये यह ω है।

Ans. (D)

Sol. Angular Velocity of rigid body about any axes which are parallel to each other is same . So angular velocity is ω .

Angular Velocity of rigid body about any axes which are parallel to each other is same . So angular velocity is ω.

20. Which of the following statements about the instantaneous axis (passing through the centre of mass) is correct? **[IIT-JEE-2012, Paper-2; 3/66, –1]**

(A*) It is vertical for both the cases (a) and (b).

(B) It is verticle for case (a); and is at 45° to the x-z plane and lies in the plane of the disc for case (b)

(C) It is horizontal ofr case (a); and is at 45° to the x - z plane and is normal to the plane of the disc for case (b).

(D) It is vertical of case (a); and is at 45° to the x - z plane and is normal to the plane of the disc for case (b).

तात्क्षणिक–अक्ष (जो संहति–केन्द्र से गुजर रहा है) के बारे में कौन सा प्रकथन सही है ?

(A) यह दोनों स्थितियों (a) तथा (b) के लिये ऊर्ध्वाधर है।

(B) Case (a) के लिये ऊर्ध्वाधर है ; Case (b) के लिये x-z तल से 45° कोण पर एवं डिस्क के पृष्ठ में है।

(C) Case (a) के लिये क्षैतिज है ; Case (b) के लिये x-z तल से 45° कोण पर एवं डिस्क–पृष्ठ के लम्बवत् है।

(D) Case (a) के लिये ऊर्ध्वाधर है ; Case (b) के लिये x-z तल से 45° कोण पर एवं डिस्क–पृष्ठ के लम्बवत है।

Ans. (A)

Sol. Since z- coordinate of any particle is not changing with time so axis must be parellel to z axis.

चूकि किसी कण का z निर्देशांक समय के साथ परिवर्तित नहीं होता है अतः अक्ष z-अक्ष के समान्तर होगी

21. Two solid cylinders P and Q of same mass and same radius start rolling down a fixed inclined plane form the same height at the same time. Cylinder P has most of its mass concentrated near its surface, while Q has most of its mass concentrated near the axis. Which statement (s) is (are) correct?
(A) Both cylinders P and Q reach the ground at the same time
(B) Cylinder P has larger linear acceleration than cylinder Q.
(C) Both cylinder reaches the ground with same translational kinetic energy.
(D*) Cylinder Q reaches the ground with larger angular speed. **[IIT-JEE-2012, Paper-2; 4/66]**

समान द्रव्यमान और समान त्रिज्या के दो ठोस बेलन P और Q एक जड़ आनत तल पर समान ऊँचाई से एक ही समय लुढ़कना शुरू करते हैं। बेलन P का अधिकतम द्रव्यमान उसकी सतह की ओर केन्द्रित है और बेलन Q का अधिकतम द्रव्यमान उसके अक्ष की ओर केन्द्रित है। तब कौन प्रकथन सही है/हैं ?
(A) दोनों बेलन P तथा Q एक साथ जमीन पर पहुँचेंगे।
(B) बेलन P का रेखीय त्वरण बेलन Q से ज्यादा है।
(C) दोनों बेलन जमीन पर समान स्थानांतरण गतिज–ऊर्जा के साथ पहुँचते हैं।
(D) बेलन Q जमीन पर ज्यादा कोणीय–गति से पहुँचता है।

Ans. **(D)**

Sol. $I_P > I_Q$

$$a_P = \frac{g\ \sin\theta}{I_P + mR^2},\ a_Q = \frac{g\ \sin\theta}{I_Q + mR^2}$$

$$a_P < a_Q \Rightarrow V = u + at \Rightarrow t \propto \frac{1}{a}$$

$t_P > t_Q$

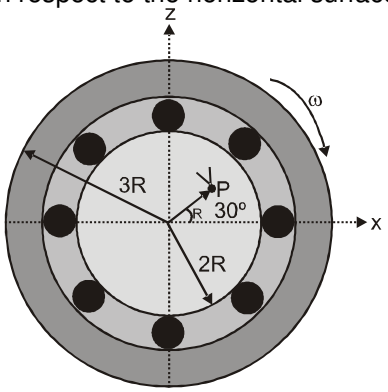
$V^2 = u^2 + 2as \Rightarrow v \propto a \Rightarrow V_P < V_Q$

Translational K.E. $= \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow$ TR $KE_P <$ TR KE_Q

स्थान्तरित गतिज ऊर्जा K.E. $= \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow$ TR $KE_P <$ TR KE_Q

$V = \omega R \Rightarrow \omega \propto V \Rightarrow \omega_P < \omega_Q$

22.* The figure shows a system consisting of (i) a ring of outer radius 3R rolling clockwise without slipping on a horizontal surface with angular speed ω and (ii) an inner disc of radius 2R rotating anti-clockwise with angular speed $\omega/2$. The ring and disc are separated frictionaless ball bearings. The system is in the x-z plane. The point P on the inner disc is at distance R from the origin O, where OP makes an angle of 30º with the horizontal. Then with respect to the horizontal surface, **[IIT-JEE-2012, Paper-2; 4/66]**



(A*) the point O has linear velocity $3R\omega\,\hat{i}$.

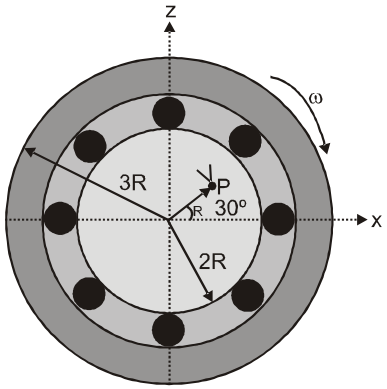
(B*) the point P has a linear velocity $\frac{11}{4}R\omega\,\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}R\omega\,\hat{k}$

(C) the point P has linear velocity $\frac{13}{4}Rw\,\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}R\omega\,\hat{k}$

(D) The point P has a linear velocity $\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)Rw\,\hat{i} + \frac{1}{4}Rw\,\hat{k}$.

22.* चित्र में दिखाये निकाय के हिस्से हैं : (i) 3R बाहरी–त्रिज्या की रिंग, जो क्षैतिज सतह पर ω कोणीय चाल से दक्षिणावर्त बिना फिसले लुढ़क रही है, और (ii) 2R त्रिज्या की भीतरी डिस्क जो $\omega/2$ कोणीय चाल से वामावर्त घूम रही है। घर्षण –रहित बॉल–बियरिंग (गोलियाँ) रिग और डिस्क को एक दूसरे से अलग रखते हैं। निकाय x-z तल में है। भीतरी डिस्क पर बिन्दु P उद्‌गम O से R दूरी पर है और OP क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है। तब क्षैतिज सतह के सापेक्ष

[IIT-JEE-2012, Paper-2; 4/66]



(A) बिन्दु O का रेखीय वेग $3R\omega\hat{i}$ है।

(B) बिन्दु P का रेखीय वेग $\frac{11}{4}R\omega\hat{i}+\frac{\sqrt{3}}{4}R\omega\hat{k}$ है।

(C) बिन्दु P का रेखीय वेग $\frac{13}{4}R\omega\hat{i}-\frac{\sqrt{3}}{4}R\omega\hat{k}$

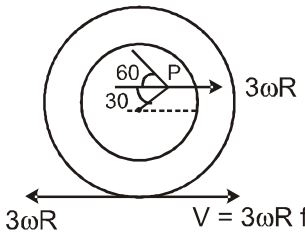
(D) बिन्दु P का रेखीय वेग $\left(3-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R\omega\hat{i}+\frac{1}{4}R\omega\hat{k}$ है।

Ans. **(A,B)**

Sol. $V_0 = 3\omega R\,\hat{i}$

$V_P\ (3\omega R \frac{\omega R}{2} - \cos 60^{º})\ \hat{i}\ + \frac{\omega R}{2}\ \sin 60\ \hat{j}$

$= \frac{11\omega R}{4}\hat{i}+\frac{\sqrt{3}\omega R}{4}\hat{i}$

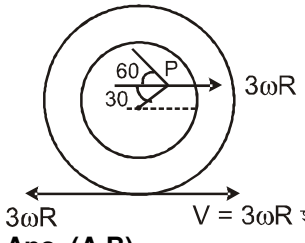


3ωR V = 3ωR for pure rolling

Sol. $V_0 = 3\omega R\,\hat{i}$

$V_P\ (3\omega R - \frac{\omega R}{2}\ \cos 60^{º})\ \hat{i}\ + \frac{\omega R}{2}\ \sin 60\ \hat{j}$

$= \frac{11\omega R}{4}\hat{i}+\frac{\sqrt{3}\omega R}{4}\hat{i}$



3ωR V = 3ωR शुद्ध लोटनी गति

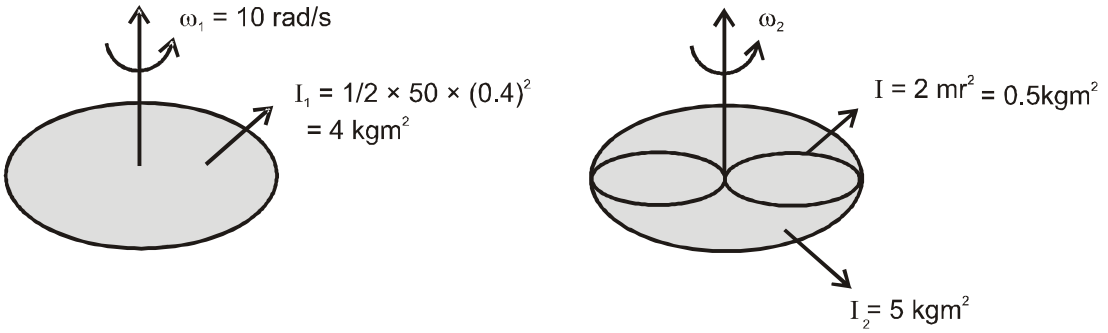
Ans. (A,B)

23. A uniform circular disc of mass 50kg and radius 0.4 m is rotating with an angular velocity of 10 rad/s^{-1} about its own axis, which is vertical. Two uniform circular rings, each of mass 6.25 kg and radius 0.2 m, are gently placed symmetrically on the disc in such a manner that they are touching each other along the axis of the disc and are horizontal. Assume that the friction is large enough such that the rings are at rest relative to the disc and the system rotates about the original axis. The new angular velocity (in rad s^{-1}) of the system is : **[JEE (Advanced)-2013; 4/60]**

एक 50 kg व 0.4 m त्रिज्या की एकसमान डिस्क अपनी ऊर्ध्वाधर अक्ष के गिर्द 10 rad/s^{-1} के कोणीय वेग से घूम रही है। दो एकसमान वृत्ताकार छल्ले धीर से डिस्क पर सममित तरीके से एक दूसरे को छूते हुए इस प्रकार डिस्क तल पर रखे जाते है कि वे डिस्क के अक्ष को भी स्पर्श करें। प्रत्येक छल्ले का द्रव्यमान 6.25 kg व त्रिज्या 0.2 m है। इस निकाय का नया कोणीय वेग (rad s^{-1} में) निम्न होगा (मान लीजिए कि डिस्क एवम् छल्ले के बीच घर्षण इतना है कि डिस्क व छल्ले के बीच सापेक्ष गति शून्य है और निकाय मूल अक्ष पर घूर्णन कर रहा है)

Ans. **8**

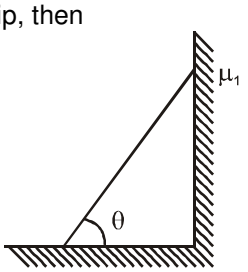
Sol.



$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{4}{5} \times 10 \text{ rad/s} = 8 \text{ rad/s}$

24.* In the figure, a ladder of mass m is shown leaning against a wall. It is in static equilibrium making an angle θ with the horizontal floor. The coefficient of friction between the wall and the ladder is μ_1 and that between the floor and the ladder is μ_2. The normal reaction of the wall on the ladder is N_1 and that of the floor is N_2. If the ladder is about to slip, then **[JEE (Advanced)-2014,P-1, 3/60]**



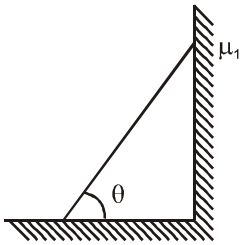
(A) $\mu_1 = 0 \quad \mu_2 \neq 0$ and $N_2 \tan\theta = \frac{mg}{2}$

(B) $\mu_1 \neq 0 \quad \mu_2 = 0$ and $N_1 \tan\theta = \frac{mg}{2}$

(C*) $\mu_1 \neq 0 \quad \mu_2 \neq 0$ and $N_2 = \frac{mg}{1+\mu_1\mu_2}$

(D*) $\mu_1 = 0 \quad \mu_2 \neq 0$ and $N_1 \tan\theta = \frac{mg}{2}$

24.* द्रव्यमान m वाली एक सीढ़ी दीवार के सहारे तिरछी खड़ी है, जैसा चित्र में दर्शाया गया है। क्षैतिज फर्श से θ कोण बनाते हुए यह स्थैतिक साम्यावस्था में है। दीवार व सीढ़ी के बीच घर्षण गुणांक μ_1 है। तथा फर्श व सीढ़ी के बीच घर्षण गुणांक μ_2 है। दीवार द्वारा सीढ़ी पर लगाया गया अभिलम्बित प्रतिक्रिया बल N_1 तथ फर्श द्वारा सीढ़ी पर लगाया गया अभिलम्बित प्रतिक्रिया बल N_2 है। जब सीढ़ी सरकने वाली हो, तब



(A) $\mu_1 = 0$ $\mu_2 \neq 0$ तथा $N_2 \tan\theta = \frac{mg}{2}$

(B) $\mu_1 \neq 0$ $\mu_2 = 0$ तथा $N_1 \tan\theta = \frac{mg}{2}$

(C*) $\mu_1 \neq 0$ $\mu_2 \neq 0$ तथा $N_2 = \frac{mg}{1+\mu_1\mu_2}$

(D*) $\mu_1 = 0$ $\mu_2 \neq 0$ तथा $N_1 \tan\theta = \frac{mg}{2}$

Ans. **(C, D)**

Sol. Since rod is about to slip so both friction will be limiting

$f_1 = \mu_1 N_1$

$f_2 = \mu_2 N_2$

In option (A) (D) $\mu_1 = 0$

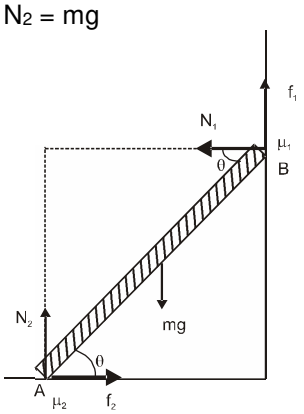
Net torque about A should be zero

$$mg\cos\theta \frac{\ell}{2} = N_1 \sin\theta\, \ell$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = \frac{mg\cot\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad N_1\tan\theta = \frac{mg}{2}$$

and $N_2 = mg$



(B) $\mu_2 = 0$

There is no force to balance N_1 so rod can not remain in equilibrium

(C) $N_1 = \mu_2 N_2$

$N_2 + \mu_1 N_1 = mg$

$N_2 + \mu_1 \mu_2 N_2 = mg$

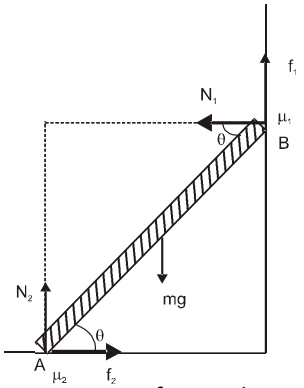
$$N_2 = \frac{mg}{1+\mu_1\mu_2}$$

Hindi चूंकि छड़ फिसलती है अतः दोनों घर्षण सीमान्त होंगे

$f_1 = \mu_1 N_1$

$f_2 = \mu_2 N_2$

विकल्प (A)(D) में $\mu_1 = 0$



A के सापेक्ष कुल बलाघूर्ण शून्य होना चाहिये

$$mg\cos\theta\ \frac{\ell}{2} = N_1 \sin\theta\ \ell$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = \frac{mg\cot\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad N_1\tan\theta = \frac{mg}{2}$$

तथा $N_2 = mg$

(B) $\mu_2 = 0$

यहाँ N_1 को संतुलित करने के लिये कोई बल नहीं है अतः छड़ साम्यावस्था में नहीं रह सकती है।

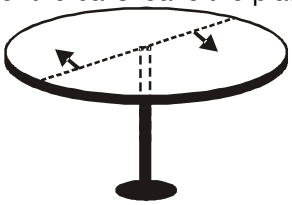
(C) $N_1 = \mu_2 N_2$

$N_2 + \mu_1 N_1 = mg$

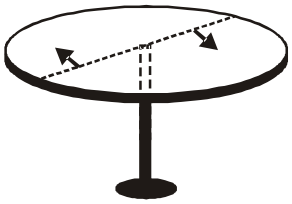
$N_2 + \mu_1 \mu_2 N_2 = mg$

$$N_2 = \frac{mg}{1+\mu_1\mu_2}$$

25. A horizontal circular platform of radius 0.5 m and mass 0.45 kg is free to rotate about its axis. Two massless spring toy-guns, each carrying a steel ball of mass 0.05 kg are attached to the platfrom at a distance 0.25 m from the centre on its either sides along its diameter (see figure).Each gun simultaneously fires the balls horizontally and perpendicular to the diameter in opposite directions. After leaving the platfrom, the balls have horizontal speed of $9ms^{-1}$ with respect to the ground. The rotational speed of the platfrom in rad^{-1} after the balls leave the platform is **[JEE (Advanced)-2014,P-1, 3/60]**

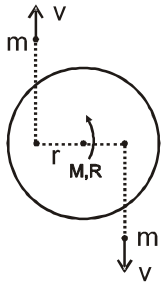


चित्र में दिखाया गया 0.5 m त्रिज्या तथा 0.45 kg द्रव्यमान वाला एक क्षैतिज वृत्तीय प्लेटफार्म अपने अक्ष के परितः घूमने के लिए स्वतंत्र है। दो द्रव्यमान रहित कमानी वाली खिलौना बन्दूके (toy-guns), जिन पर 0.05 kg द्रव्यमान वाली स्टील की गेंद लगी है, प्लेटफार्म के व्यास पर केन्द्र से 0.25 m की दूरी पर, केन्द्र के दोनों ओर स्थित हैं। दोनों बन्दूके एक साथ गोलियों के व्यास के लंबवत्, क्षैतिज तल में विपरीत दिशाा में दागती हैं। प्लेटफार्म को छोड़ने के पश्चात् गोलियों की भूमि के सापेक्ष क्षैतिज दिशा में गति 9ms^{-1} है। गोलियों के प्लेटफार्म छोड़ने के पश्चात् प्लेटफार्म की घूर्णीय गति rad^{-1} में है:



Ans. **4**

Sol. Applying conservation of angular momentum. कोणीय संवेग संरक्षण लगाने पर

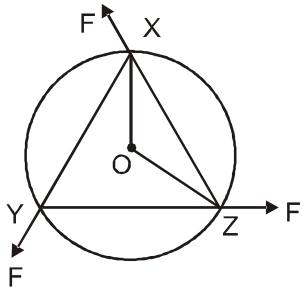


$$2mvr - \frac{MR^2}{2}\ \omega = 0$$

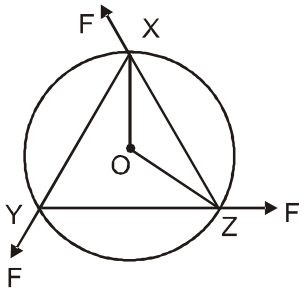
$$\omega = \frac{4mvr}{MR^2}$$

$$\omega = \frac{(4)\ (5\times10^{-2})\ (9)\left(\frac{1}{4}\right)}{45\times10^{-2}\times\frac{1}{4}} \Rightarrow \omega = 4 \text{ rad/s}$$

26. A uniform circular disc of mass 1.5 kg and radius 0.5m is initially at rest on a horizontal frictionless surface. Three forces of equal magnitude F = 0.5 N are applied simultaneously along the three sides of an equilateral triangle XYZ its vertices on the perimeter of the disc (see figure). One second after applying the forces, the angular speed of the disc in rad s^{-1} is : **[JEE (Advanced)-2014,P-1, 3/60]**

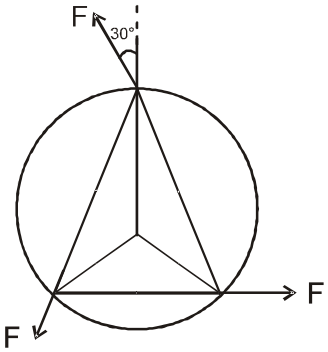


एक एकसमान वृत्ताकार डिस्क जिसका द्रव्यमान 1.5 kg तथा त्रिज्या 0.5 m है, प्रारम्भ में घर्षण रहित क्षैतिज सतह पर विरामावस्था में है। बराबर परिमाण F = 0.5 N वाले तीन बल एक साथ t = 0 चित्र में दिखाये गये समबाहु त्रिभुज XYZ, जिसके शीर्ष बिंदु डिस्क की परिधि पर स्थित है, की भुजाओं के अनुदिश लगाये जाते हैं। बलों को लगाने के 1 सैकण्ड पश्चात् डिस्क की कोणिय गति, rad s^{-1} में है :



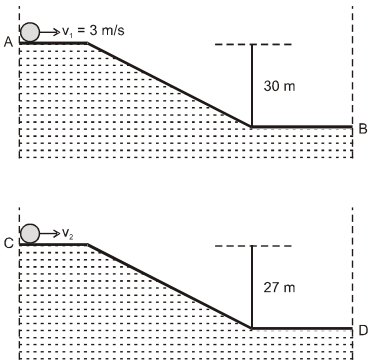
Ans. 2

Sol.



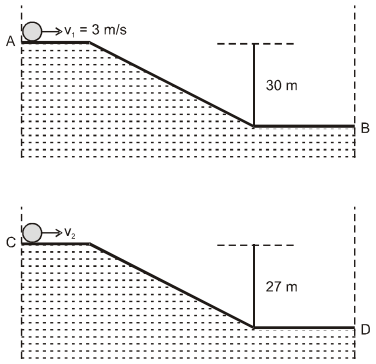
$$\omega = \frac{\int \tau dt}{\tau} = \frac{\int_0^t 3F\sin 30^\circ R \quad dt}{I} = \frac{3. \quad (0.5) \quad (0.5) \quad (0.5) \quad (1)}{\frac{1.5(0.5)^2}{2}} = 2 \text{ rad/s}$$

27. Two identical uniform discs roll without slipping on two different surfaces AB and CD (see figure) starting at A and C with linear speeds v_1 and v_2, respectively, and always remain in contact with ths surfaces. If they reach B and D with the same linear speed and v_1 = 3 m/s, then v_2 in m/s is (g = 10 m/s^2) **[JEE(Advanced) 2015 ; P-1, 4/88]**



27. चित्रानुसार दो भिन्न सतहों AB व CD पर समान वृत्ताकार चक्रिकाएं (डिस्क) A तथा C से क्रमशः v_1 तथा v_2 प्रारम्भिक रेखीय वेगों से बिना फिसलते हुए लुढ़कना शूरू करती हैं तथा सदैव सतहों के संपर्क में रहती है। यदि B तथा D बिन्दुओं पर पहुँचकर दोनों चक्रिकाओं के रेखीय वेग बराबर हैं तथा $v_1 = 3$ m/s है, तब m/s में v_2 का मान है। ($g = 10$ m/s^2)

[JEE(Advanced) 2015 ; P-1, 4/88]



Ans. **7**

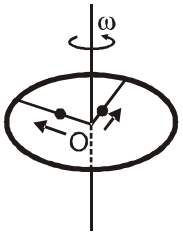
Sol. Final kinetic energy of both discs is same

$$\left[\frac{3}{2}\right]\frac{1}{2}m(3)^2 + mg\,(30) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}mv_2^2 + mg(27)$$

$$\frac{3}{4}.\,9 + 300 = \frac{3}{4}v_2^2 + 270$$

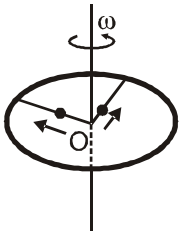
$$\frac{27}{4} + 30 = \frac{3}{4}v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = 9 + 40 \Rightarrow v_2 = 7$$

28. A ring of mass M and radius R is rotating with angular speed ω about a fixed vertical axis passing through its centre O with two point masses each of mass $\frac{M}{8}$ at rest at O. These masses can move radially outwards along two massless rods fixed on the ring as shown in the figure. At some instant the angular speed of the system is $\frac{8}{9}\omega$ and one of the masses is ata distance of $\frac{3}{5}R$ from O. At this instant the distance of the other mass from O is :



(A) $\frac{2}{3}R$ (B) $\frac{1}{3}R$ (C) $\frac{3}{5}R$ (D*) $\frac{4}{5}R$

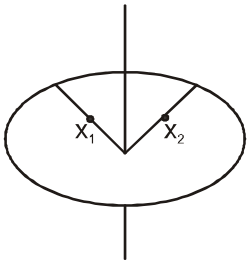
28. एक द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R का छल्ला अपने केन्द्र O से होकर जाने वाली स्थिर ऊर्ध्वाधर अक्ष के चारों ओर ω कोणीय गति से घूम रहा है। इस समय पर $\frac{M}{8}$ द्रव्यमान के दो बिन्दु द्रव्यमान छल्ले के केन्द्र O पर विराम स्थिति में हैं। वो दर्शाये चित्रानुसार छल्ले पर लगी द्रव्यमान रहित दो छड़ों पर त्रिज्यतः बाहर की ओर गति कर सकते हैं। किसी एक क्षण पर निकाय की कोणीय गति $\frac{8}{9}\omega$ है तथा एक बिन्दु द्रव्यमान O से $\frac{3}{5}R$ की दूरी पर है। इस क्षण दूसरे बिन्दु द्रव्यमान की O से दूरी होगी : **[JEE(Advanced) 2015 ; P-1, 4/88, –2]**



(A) $\frac{2}{3}R$ (B) $\frac{1}{3}R$ (C) $\frac{3}{5}R$ (D*) $\frac{4}{5}R$

Ans. (D)

By conservation of angular momentum
कोणीय संवेग संरक्षण से



$$MR^2\,\omega = \left(MR^2 + \frac{M}{8}\frac{9R^2}{25} + \frac{Md^2}{8}\right)\frac{8\omega}{9}$$

$$R^2 = \left(\frac{200R^2 + 9R^2 + 25d^2}{8\times 25}\right)\frac{8}{9}$$

$225\,R^2 - 209\,R^2 = 25\,d^2$

$$d = \frac{16R^2}{25}$$

$$d = \frac{4R}{5}$$

29. The dinsities of two solid spheres A and B of the same radii R vary with radial distance r as $\rho_A(r) = k\left(\frac{r}{R}\right)$ and $\rho_B(r) = k\left(\frac{r}{R}\right)^5$, respectively, where k is a contant. The moments of inertia of the individual spheres about axes passing through their centres are I_A and I_B, respectively, If $\frac{I_B}{I_A} = \frac{n}{10}$, the value of n is : **[JEE(Advanced) 2015 ; P-2,4/88]**

R त्रिज्या के दो ठोस गोलों A और B के घनत्वों का त्रिज्य दूरी r के साथ संबंध क्रमशः $\rho_A(r) = k\left(\frac{r}{R}\right)$ तथा $\rho_B(r) = k\left(\frac{r}{R}\right)^5$ हैं, जहॉ k एक स्थिरांक है। गोलों के अपने–अपने केन्द्र से होकर जाने वाली अक्षों के परितः जड़त्वाघूर्ण क्रमशः I_A तथा I_B है। यदि $\frac{I_B}{I_A} = \frac{n}{10}$ है, तब n का मान है।

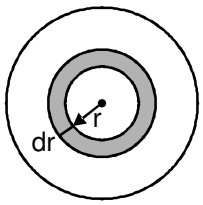
Ans. 6

Sol. Consider a shell of radius r and thickness dr

$dI = \frac{2}{3}(\rho.4\pi r^2 dr)r^2$

$I = \int dI$

$$\frac{I_B}{I_A} = \frac{\int_0^R \frac{2}{3}k\frac{r^5}{R^5}.4\pi r^2 dr \quad r^2}{\int_0^R \frac{2}{3}k\frac{r}{R}4\pi r^2 dr \quad r^2} = \frac{6}{10}$$



30. A uniform wooden stick of mass 1.6 kg and length ℓ rests in an inclined manner on a smooth, vertical wall of height h ($< \ell$) such that a small portion of the stick extends beyond the wall. The reaction force of the wall on the stick is perpendicular to the stick. The stick makes an angle of 30° with the wall and the bottom of the stick is on a rough floor. The reaction of the wall on the stick is equal in magnitude to the reaction of the floor on the stick. The ratio $\frac{h}{l}$ and the frictional force f at the bottom of the stick are ($g = 10\ ms^{-2}$) **[JEE (Advanced) 2016 ; P-1, 3/62, –1]**

(A) $\frac{h}{l} = \frac{\sqrt{3}}{16}, f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$

(B) $\frac{h}{l} = \frac{3}{16}, f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$

(C) $\frac{h}{l} = \frac{3\sqrt{3}}{16}, f = \frac{8\sqrt{3}}{3}N$

(D*) $\frac{h}{l} = \frac{3\sqrt{3}}{16}, f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$

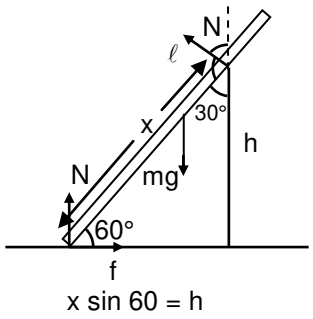
1.6 kg द्रव्यमान और ℓ लम्बाई की एकसमान लकड़ी की एक डंडी एक चिकनी खड़ी दीवार, जिसकी ऊंचाई h(< ℓ) है, पर आनत तरीके से इस तरह से रखी गयी है कि डंडी का एक छोटा सा भाग दीवार से ऊपर निकला हुआ है। डंडी पर दीवार का प्रतिक्रिया बल डंडी के लम्बरूप में है। डंडी दीवार के साथ 30° का कोण बना रही है और डंडी का आधार एक घर्षण वाली ज़मीन पर है। दीवार से डंडी पर प्रतिक्रिया तथा ज़मीन से डंडी पर प्रतिक्रिया की मात्रा समान है। $\frac{h}{l}$ का अनुपात एवं डंडी के आधार पर घर्षण बल f है (g = 10 ms^{-2}) **[JEE (Advanced) 2016 ; P-1, 3/62, –1]**

(A) $\frac{h}{l}=\frac{\sqrt{3}}{16}, f=\frac{16\sqrt{3}}{3}N$ (B) $\frac{h}{l}=\frac{3}{16}, f=\frac{16\sqrt{3}}{3}N$

(C) $\frac{h}{l}=\frac{3\sqrt{3}}{16}, f=\frac{8\sqrt{3}}{3}N$ (D*) $\frac{h}{l}=\frac{3\sqrt{3}}{16}, f=\frac{16\sqrt{3}}{3}N$

Ans. (D)

Sol. balancing torque about lowest point
निम्नतम बिन्दु के परितः बलाघूर्ण संतुलन के द्वारा



$N\frac{h}{\sin 60^\circ} = mg\frac{\ell}{2}\cos 60^\circ$ .....(1)

$N+\frac{N}{2}=mg$

$\frac{3}{2}N=mg \Rightarrow N=\frac{2mg}{3}$

$\frac{2mg}{3\sqrt{3}}$ $2h=\frac{mg\ell}{4}$

$\frac{h}{\ell}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$

$f = N\sin 60^\circ = \frac{2mg}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{mg}{\sqrt{3}}=\frac{1.6\times 10}{\sqrt{3}}$

x sin 60 = h

31.* The position vector $\vec{r}$ of particle of mass m is given by the following equation

$$\vec{r}(t)=\alpha t^3\hat{i}+\beta t^2\hat{j}$$

Where $\alpha=\frac{10}{3}$ m s^{-3}, β = 5 m s^{-2} and m = 0.1 kg. At t = 1 s, which of the following statement(s) is (are) true about the particle. **[JEE (Advanced) 2016 ; P-1, 4/62, –2]**

(A*) The velocity $\vec{v}$ is given by $\vec{v}=\left(10\hat{i}+10\hat{j}\right)ms^{-1}$

(B*) The angular momentum $\vec{L}$ with respect to the origin is given by $\vec{L}=-(5/3)\hat{k}$ N ms

(C) The force $\vec{F}$ is given by $\vec{F}=\left(\hat{i}+2\hat{j}\right)$ N

(D*) The torque $\vec{\tau}$ with respect to the origin is given by $\vec{\tau}=-\frac{20}{3}\hat{k}$ Nm.

31.* m द्रव्यमान के एक कण का स्थिति–सदिश $\vec{r}$ नीचे समीकरण में दिया गया है।

$$\vec{r}(t) = \alpha t^3 \hat{i} + \beta t^2 \hat{j},$$

जिसमें $\alpha = \frac{10}{3}$ m s^{-3}, β = 5 m s^{-2} एवं m = 0.1 kg. है। समय t = 1 s पर, निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं ? **[JEE (Advanced) 2016 ; P-1, 4/62, –2]**

(A*) वेग का मान $\vec{v} = \left(10\hat{i} + 10\hat{j}\right) ms^{-1}$ है

(B*) मूल बिन्दु के गिर्द कोणीय संवेग का मान $\vec{L} = -(5/3)\hat{k}$ N ms है

(C) बल का मान $\vec{F} = \left(\hat{i} + 2\hat{j}\right)$ N है

(D*) मूल बिन्दु के गिर्द घूर्णन का मान $\vec{\tau} = (20/3)\hat{k}$ Nm है

Ans. (ABD)

Sol. $\vec{r} = \alpha t^3 \hat{i} + \beta t^2 \hat{j}$

$\vec{v} = \alpha 3t^2 \hat{i} + \beta 2t\hat{j}$

$\vec{v} = \frac{10}{3} \times 3 \times 1^2 \hat{i} + 5 \times 2 \times 1\ \hat{j}$

$\vec{v} = 10\ \ \hat{i} + 10\ \ \hat{j}$

$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$

$\vec{L} = 0.1\ \ [\alpha\hat{i} + \beta\hat{j}] \times\ \ [10\hat{i} + 10\hat{j}]$

$\vec{L} = 0.1[10 \times \hat{k} - 10\beta\hat{k}]$

$\vec{L} = 0.1\ \ [10 \times \frac{10}{3} - 10 \times 5]\ \ \hat{k}$

$\vec{L} = 0.1\ \ \frac{100}{3} - 50]\ \ \hat{k}$

$= 0.1\left[\frac{-50}{3}\right]\hat{k}$

$\vec{a} = \alpha 6t\hat{i} + \beta 2\hat{j}$

$\vec{F} = m\vec{a} = [0.1][\frac{10}{3} \times 6\ \ \hat{i}\ \ +\ \ 5 \times 2\ \ \hat{j}]$

$\vec{F} = 0.1[20\hat{i} + 10\hat{j}] = 2\hat{i} + \hat{j}$

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (\alpha\hat{i} + \beta\hat{j}) \times (2\hat{i} + \hat{j})$

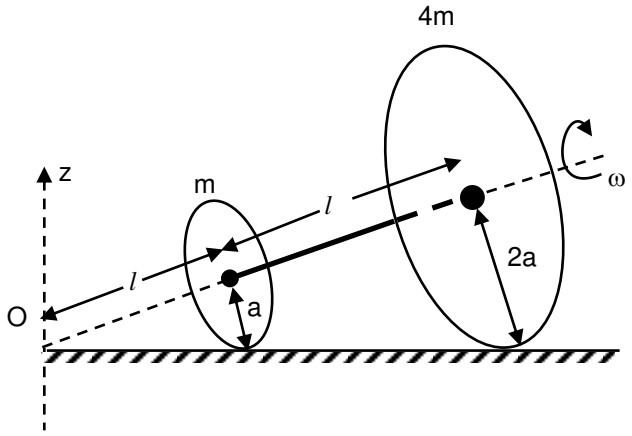
$= a\hat{k} - 2\beta\hat{k}$

$= \frac{10}{3}\hat{k} - 10\hat{k} = \frac{-20}{3}\hat{k}$

32.* Two thin circular discs of mass m and 4m, having radii of a and 2a, respectively , are rigidly fixed by a massless, rigid rod of length $l = \sqrt{24}a$ through their centers. This assembly is laid on a firm and flat surface, and set rolling without slipping on the surface so that the angular speed about the axis of the rod is ω. The angular momentum of the entire assembly about the point 'O' is $\vec{L}$ (see the figure). Which of the following statement (s) is (are) true ?

m तथा 4m द्रव्यमान वाली दो पतली वृताकार चत्रिकाएँ (discs), जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः a तथा 2a हैं, के केन्द्रों को $l = \sqrt{24}a$ लम्बाई की द्रव्यमान–रहित द्रढ़ (rigid) डंडी से जोड़ा गया है। इस समूह को एक मजबूत समतल सतह पर लिटाया गया है और फिसलाये बिना इस तरह से घुमाया गया है कि इस कोणीय गति डंडी के अक्ष के गिर्द ω है। पूरे समूह का बिन्दु 'O' के गिर्द कोणीय संवेग $\vec{L}$ है (चित्र देखियें)। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं।

[JEE (Advanced) 2016 ; P-2, 4/62, –2]



(A) The magnitude of the z-component of $\vec{L}$ is 55 $ma^2\,\omega$.

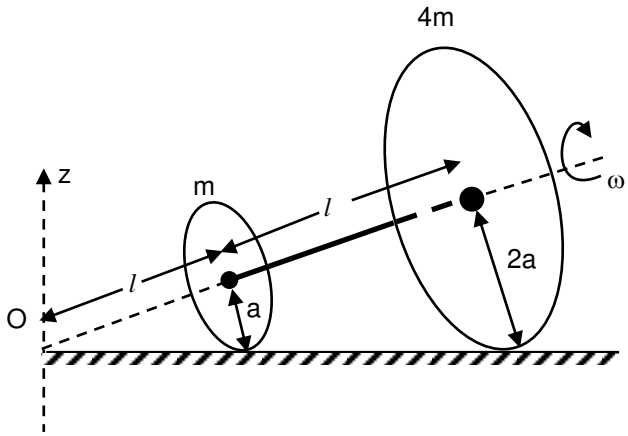
(B) The magnitude of angular momentum of the assembly about its centre of mass is 17 $ma^2\,\frac{\omega}{2}$.

(C)The magnitude of angular momentum of centre of mass of the assembly about the point O is 81ma^2 ω.

(D*) The centre of mass of the assembly rotates about the z-axis with an angular speed of $\frac{\omega}{5}$.

32.* m तथा 4m द्रव्यमान वाली दो पतली वृताकार चत्रिकाएँ (discs), जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः a तथा 2a हैं, के केन्द्रों को $l = \sqrt{24}a$ लम्बाई की द्रव्यमान–रहित द्रढ़ (rigid) डंडी से जोड़ा गया है। इस समूह को एक मजबूत समतल सतह पर लिटाया गया है और फिसलाये बिना इस तरह से घुमाया गया है कि इस कोणीय गति डंडी के अक्ष के गिर्द ω है। पूरे समूह का बिन्दु 'O' के गिर्द कोणीय संवेग $\vec{L}$ है (चित्र देखियें)। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं।

[JEE (Advanced) 2016 ; P-2, 4/62, –2]



(A) $\vec{L}$ के z-घटक का परिमाण $55\ ma^2\ \omega$ है

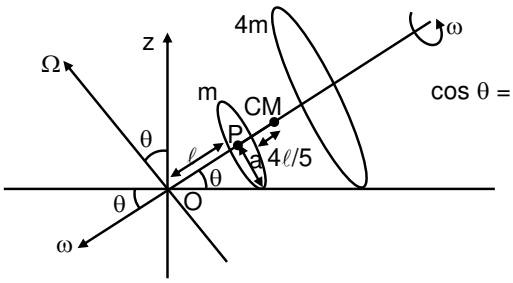
(B) पूरे समूह का उसके संहति–केन्द्र के गिर्द कोणीय संवेग का परिमाण $17\ ma^2\ \frac{\omega}{2}$ है

(C) पूरे समूह का संहति–केन्द्र का बिन्दु O के गिर्द कोणीय संवेग का परिमाण $81ma^2\ \omega$ है

(D*) पूरे समूह के संहति–केन्द्र z-अक्ष के गिर्द कोणीय वेग $\frac{\omega}{5}$ से घूम रहा है

Ans. **(D) (IIT has given answer D or B,D. In our sheet we have given answer BD)**

Sol.



$$\cos\theta = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

(D) Velocity of point P : $a\omega = \ell\Omega$ then
बिन्दू P का वेग : $a\omega = \ell\Omega$ तो

$\Omega = \frac{a\omega}{\ell}$ = Angular velocity of C.M. w.r.t point O.

$\Omega = \frac{a\omega}{\ell}$ = द्रव्यमान केन्द्र का बिन्दु O के सापेक्ष कोणीय वेग

Angular velocity of C.M. w.r.t z axis = $\Omega\cos\theta$
द्रव्यमान केन्द्र को z अक्ष के सापेक्ष कोणीय वेग = $\Omega\cos\theta$

$$\omega_{C.M.-z} = \frac{a\omega}{\ell}\frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{a\omega}{\sqrt{24}a}\frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\omega_{CM-z} = \frac{\omega}{5}$$

$$(B)\ L_{D-CM} = \frac{ma^2}{2}\omega + \frac{4m(2a)^2}{2}\omega = \frac{17ma^2\omega}{2}$$

(C) $L_{CM-O} = (5m)\left[\frac{9\ell}{5}\Omega\right]\frac{9\ell}{5} = \frac{81m\ell^2\Omega}{5} = \frac{81m\ell^2}{5}\times\frac{a\omega}{\ell}$

$L_{CM-O} = \frac{81m\ell a\omega}{5} = \frac{81\sqrt{24}a^2m\omega}{5}$

(A) $L_Z = L_{CM-0}\cos\theta - L_{D-CM}\sin\theta$

$= \frac{81\sqrt{24}}{5}a^2m\omega\times\frac{\sqrt{24}}{5} - \frac{17ma^2\omega}{2}\times\frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{81\times24ma^2\omega}{25} - \frac{17ma^2\omega}{2\sqrt{24}}$

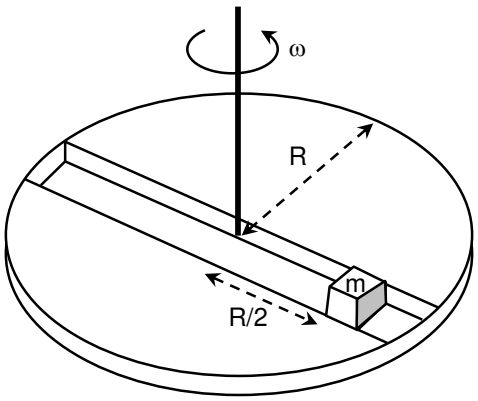
Paragraph for Question Nos. 33 to 34

A frame of reference that is accelerated with respect to an inertial frame of reference is called a non-inertial frame of reference. A coordinate system fixed on a circular disc rotating about a fixed axis with a constant angular velocity ω is an example of a non-inertial frame of reference. The relationship between the force $\vec{F}_{rot}$ experienced by a particle of mass m moving on the rotating disc and the force $\vec{F}_{in}$ experienced by the particle in an inertial frame of reference is,

$$\vec{F}_{rot} = \vec{F}_{in} + 2m\left(\vec{v}_{rot}\times\vec{\omega}\right) + m\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\omega},$$

Where $\vec{v}_{rot}$ is the velocity of the particle in the rotating frame of reference and $\vec{r}$ is the position vector of the particle with respect to the centre of the disc.

Now consider a smooth slot along a diameter of a disc of radius R rotating counter-clockwise with a constant angular speed ω about its vertical axis through its center. We assign a coordinate system with the origin at the center of the disc, the x-axis along the slot, the y-axis perpendicular to the slot and the z-axis along the rotation axis $\left(\vec{\omega} = \omega\hat{k}\right)$. A small block of mass m is gently placed in the slot at $\vec{r} = (R/2)\hat{i}$ at t = 0 and is constrained to move only along the slot.



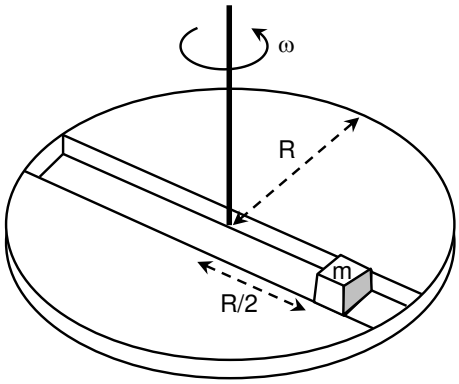
प्रश्न 33 और 34 के लिए अनुच्छेद

एक निर्देश तंत्र जो एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र की तुलना में त्वरित हो, अजड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है। स्थिर कोणीय वेग ω से घूमती हुई डिस्क पर बद्ध (fixed) निर्देश तंत्र अजड़त्वीय तंत्र का एक उदाहरण है। m द्रव्यमान का एक कण घूमती हुई डिस्क पर गतिमान है। गतिमान कण डिस्क पर बद्ध निर्देश तंत्र के सापेक्ष बल $\vec{F}_{rot}$ तथा एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र के सापेक्ष बल $\vec{F}_{in}$ को महसूस करता है। $\vec{F}_{rot}$ और $\vec{F}_{in}$ के बीच का संबंध निम्नलिखित समीकरण में दिया गया है

$$\vec{F}_{rot} = \vec{F}_{in} + 2m\left(\vec{v}_{rot}\times\vec{\omega}\right) + m\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\times\vec{\omega},$$

यहाँ पर $\vec{v}_{rot}$ घूमते हुए निर्देश तंत्र में कण का वेग है तथा $\vec{r}$ कण का डिस्क के मध्य बिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश (position vector) है।

मानिए कि R त्रिज्या की एक डिस्क, जिसमें व्यास के समानान्तर एक घर्षणरहित खाँचा है, एक स्थिर कोणीय गति ω से अपने अक्ष पर वामावर्त दिशा में घूम रही है। एक निर्देश तंत्र मानिए जिसका मूलबिन्दू डिस्क के मध्य बिन्दु पर है एवं x-अक्ष खाँचे के समानान्तर है, y-अक्ष खाँचे के अभिलम्ब पर है एवं z-अक्ष घूमने वाली अक्ष के समानान्तर है $\left(\vec{\omega} = \omega\hat{k}\right)$। m द्रव्यमान वाले एक छोटे गुटके को समय t = 0 पर $\vec{r} = (R/2)\hat{i}$ बिन्दु पर धीरे से इस तरह से रखा जाता है कि वो सिर्फ खाँचे में ही चल सके।



33. The distance r of the block at time t is : **[JEE (Advanced) 2016 ; P-2, 3/62, –1]**

(A) $\frac{R}{2}\cos 2\omega t$ (B) $\frac{R}{4}\left(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t}\right)$ (C) $\frac{R}{2}\cos \omega t$ (D*) $\frac{R}{4}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$

समय t पर गुटके की दूरी r का मान है :

(A) $\frac{R}{2}\cos 2\omega t$ (B) $\frac{R}{4}\left(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t}\right)$ (C) $\frac{R}{2}\cos \omega t$ (D*) $\frac{R}{4}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$

Ans. **(D)**

Sol. $mr\omega^2 = ma \qquad a = r\omega^2$

$$\frac{vdv}{dr} = r\omega^2$$

$$\int_0^v vdv = \omega^2 \int_{R/2}^r rdr$$

$$v = \omega\sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}}$$

$$\int_{R/2}^r \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \frac{R^2}{4}}} = \int_0^t \omega dt \qquad .....(1)$$

Assume माना : $r = \frac{R}{2}\sec\theta$

$$dr = \frac{R}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{\frac{R}{2}\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{\frac{R^2}{4}\tan^2\theta}} = \int_0^t \omega dt \ ; \ \omega t = \ell n\left[\frac{2r}{R} + \frac{\sqrt{4r^2 - R^2}}{R}\right] \ ; \quad r = \frac{R}{4}\left[e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right]$$

34. The net reaction of the disc on the block is : **[JEE (Advanced) 2016 ; P-2, 3/62, –1]**

(A) $m\omega^2 R\sin\omega t\,\hat{j} - mg\hat{k}$ (B) $-m\omega^2 R\cos\omega t\,\hat{j} - mg\hat{k}$

(C*) $\frac{1}{2}m\omega^2 R\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)\hat{j} + mg\hat{k}$ (D) $\frac{1}{2}m\omega^2 R\left(e^{2\omega t} - e^{-2\omega t}\right)\hat{j} + mg\hat{k}$

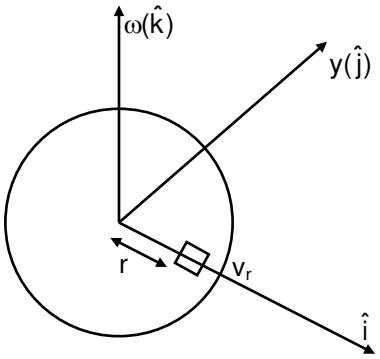
गुटके पर डिस्क की नेट प्रतिक्रिया (net reaction) है :

(A) $m\omega^2 R\sin\omega t\,\hat{j} - mg\hat{k}$ (B) $-m\omega^2 R\cos\omega t\,\hat{j} - mg\hat{k}$

(C*) $\frac{1}{2}m\omega^2 R\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)\hat{j} + mg\hat{k}$ (D) $\frac{1}{2}m\omega^2 R\left(e^{2\omega t} - e^{-2\omega t}\right)\hat{j} + mg\hat{k}$

Ans. (C)

Sol.



$$\vec{F}_{rot} = \vec{F}_{in} + 2m(v_{rot}\hat{i}) \times \omega\hat{k} + m(\omega\hat{k} \times r\hat{i}) \times \omega\hat{k}$$

$$mr\omega^2\hat{i} = \vec{F}_{in} + 2mv_{rot}\omega(-\hat{j}) + m\omega^2 r\hat{i}$$

$$\vec{F}_{in} = 2mv_r\omega\hat{j} \qquad .....(1)$$

$$r = \frac{R}{4}\left[e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right]$$

$$\frac{dr}{dt} = v_r = \frac{R}{4}\left[\omega e^{\omega t} - \omega e^{-\omega t}\right]; \qquad \vec{F}_{in} = 2m\frac{R\omega}{4}\left[e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right]\omega\hat{j}$$

$$\vec{F}_{in} = \frac{mR\omega^2}{2}\left[e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right]\hat{j}$$

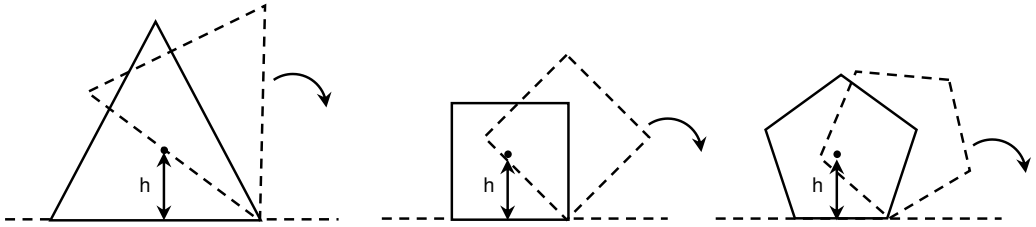
Also reaction is due to disc surface then

इस प्रकार चकती की सतह द्वारा भी प्रतिक्रिया आरोपित हो तो

$$\vec{F}_{reaction} = \frac{mR\omega^2}{2}\left[e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right]\hat{j} + mg\hat{k}$$

35. Consider regular polygons with number of sides n = 3, 4, 5 ..... as shown in the figure. The centre of mass of all the polygons is at height h from the ground. They roll on a horizontal surface about the leading vertex without slipping and sliding as depicted. The maximum increase in height of the locus of the center of mass for each polygon is Δ. Then Δ depends on n and h as

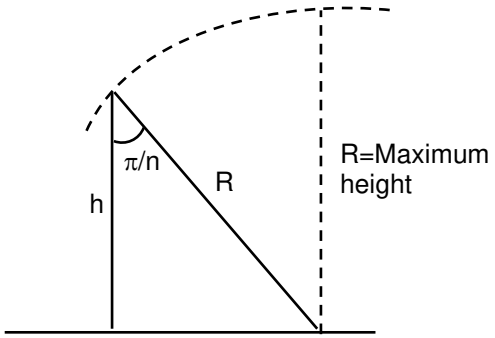
चित्र द्वारा दर्शाये समबहुभुजों की भुजाओं की संख्या n = 3, 4, 5 ..... है। सभी बहुभुजों का संहति केन्द्र (centre of mass) अनुभूमिक तल से h ऊँचाई पर है। ये बिना फिसले क्षितिज तल पर प्रतिगामी शीर्ष (leading vertex) के चारों ओर घूर्णन कर अग्रसरित हो रहे है। प्रत्येक बहुभुज के संहति केन्द्र के रेखापथ (locus) की ऊँचाई की अधिकतम वृद्धि Δ है। तब Δ की h और n पर निर्भरता निम्न में से दी जाएगी **[JEE (Advanced) 2017 ; P-2, 3/61, –1]**



(A) $\Delta = h\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ (B) $\Delta = h\tan^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ (C) $\Delta = h\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$ (D*) $\Delta = h\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right)$

Ans. **(D)**

Sol.



$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{h}{R}$$

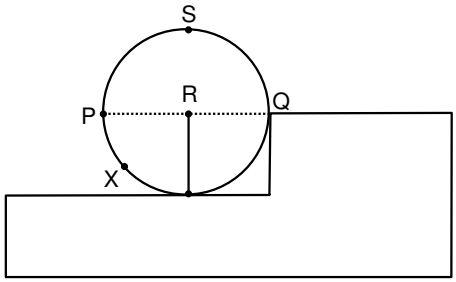
$$\Delta = R - h = \frac{h}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} - h$$

$$= h\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1}\right]$$

36. A wheel of radius R and mass M is placed at the bottom of a fixed step of height R as shown in the figure. A constant force is continuously applied on the surface of the wheel so that it just climbs the step without slipping. Consider the torque τ about an axis normal to the plane of the paper passing through the point Q. Which of the following options is/are correct ?

एक त्रिज्या R एवं द्रव्यमान M का पहिया (wheel) एक R ऊँचाई वाले दृढ़ सोपान (step) के तल पर रखा है (जैसे चित्र में दिखाया गया है)। पहिये को सोपान चढ़ाने मात्र के लिए एक अचर बल पहिये के पृष्ठपर सतत् (continuous constant force) कार्यरत है। कागज के पृष्ठ से अभिलम्ब दिशा में (perpendicular to the plane of the paper) बिन्दु Q से जाने वाली अक्ष के सापेक्ष बलआघूर्ण τ मानिये। निम्न में से कौन(सा) से प्रकथन सही है/हैं ?

[JEE (Advanced) 2017 ; P-2, 4/61, –2]



(A*) If the force is applied normal to the circumference at point P then τ is zero

(B) If the force is applied tangentially at point S then $\tau \neq 0$ but the wheel never climbs the step

(C) If the force is applied at point P tangentially then τ decreases continuously as the wheel climbs

(D) If the force is applied normal to the circumference at point X then τ is constant

(A*) यदि बिन्दु P पर पहिये की परिधि से अभिलंब दिशा में बल लगाया जाय तब τ शून्य रहेगा।

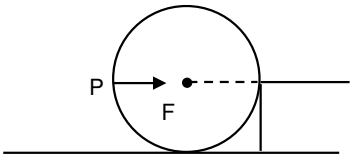
(B) यदि बिन्दु S पर स्पर्शीय बल लगाया जाए तब $\tau \neq 0$ है किन्तु पहिया सोपान पर कभी भी नहीं चढ़ेगा

(C) यदि बिन्दु P पर स्पर्शीय बल (tangential force) लगाया जाए तब जैसे पहिया सोपान पर चढ़ेगा वैसे τ सतत् घटेगा।

(D) यदि बिन्दु X पर पहिये की परिधि से अभिलंब दिशा (normal direction) में बल लगाया जाए तब τ अचर रहेगा।

Ans. **(A) (IIT has given answer A or AB. In our sheet we have given answer C)**

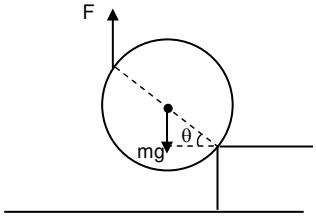
Sol.



$\tau = 0$, it can never climb, so option (A) is incorrect.

(B) Wheel can climb, so option (B) is incorrect.

(C) $\tau = F(2R\cos\theta) - mgR\cos\theta$

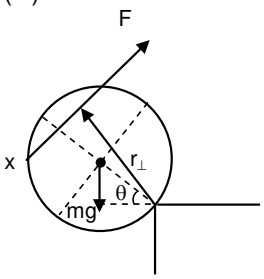


$\tau \propto \cos\theta$

since when θ increases, τ decreases.

So its correct.

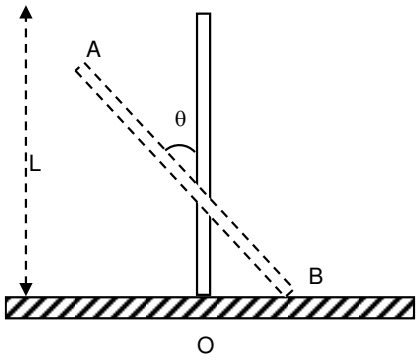
(D)



$\tau = Fr_{\perp} - mgR\cos\theta$; τ increases with θ

37. A rigid uniform bar AB of length L is slipping from its vertical position on a frictionless floor (as shown in the figure). At some instant of time, the angle made by the bar with the vertical is θ. Which of the following statements about its motion is/are correct?

एक L लम्बाई का द्रढ दंड (rigid bar) AB अपनी उर्ध्वाधर स्थिति से घर्षणहीन अनुभूमिक तल (frictionless horizontal surface) पर चित्रानुसार फिसल रहा है। समय के किसी क्षण पर दंड उर्ध्वाधर से बनाया कोण θ है। निम्न में से कौनसा (से) प्रकथन सही है/हैं?



(A) The trajectory of the point A is a parabola

(B*) Instantaneous torque about the point in contact with the floor is proportional to sin θ.

(C*) When the bar makes an angle θ with the vertical, the displacement of its midpoint from the initial position is proportional to $(1-\cos\theta)$

(D*) The midpoint of the bar will fall vertically downward.

(A) बिन्दु A का प्रपथ परवलयिक (parabolic path) है।

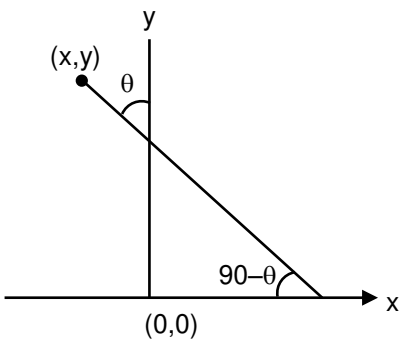
(B*) दंड और भूतल के स्पर्श बिन्दु के चारों तरफ तात्क्षणिक बलयाघूर्ण (Instantaneous torque) sin θ के समानुपाती है।

(C*) जब दंड उर्ध्वाधर से θ कोण बनाता है तब दंड के मध्य बिन्दु का विस्थापन उसके आरंभिक स्थिति $(1-\cos\theta)$ के समानुपाती है।

(D*) दंड का मध्य बिन्दु उर्ध्वाधर नीचे की ओर (vertically downward) गिरेगा।

Ans. **(BCD) (IIT has given answer BCD. In our sheet we have given answer CD)**

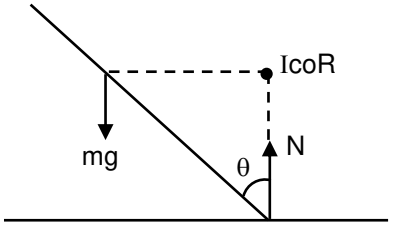
Sol.



$x = -\frac{\ell}{2}\sin\theta$, $y = \ell\cos\theta$

$$\frac{y^2}{\ell^2}+\frac{4x^2}{\ell^2}=1$$

Path of A is ellipse A का पथ दीर्घ वृत्त है।



$$mg\frac{\ell}{2}\sin\theta=\left(\frac{m\ell^2}{12}+m\frac{\ell^2}{4}\sin^2\theta\right)\alpha=\frac{m\ell^2}{12}\left(1+3\sin^2\theta\right)\alpha$$

$$\alpha=\frac{6g\sin\theta}{\ell(1+3\sin^2\theta)}$$

torque w.r.t. B के सापेक्ष बल आघूर्ण $=\frac{m\ell^2}{3}\alpha$

$$=\frac{m\ell^2}{3}\left(\frac{6g\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}\right)$$

(c) $y_{cm}=\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$

(D) midpoint will fall vertically downwards मध्य बिन्दु ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर गिरेगा।

Paragraph for Question Nos. 38 to 39
प्रश्न 38 और 39 के लिए अनुच्छेद

One twirls a circular ring (of mass M and radius R) near the tip of one's finger as shown in Figure-1. In the process the finger never loses contact with the inner rim of the ring. The finger traces out the surface of a cone, shown by the dotted line. The radius of the path traced out by the point where the ring and the finger is in contact is r. The finger rotates with an angular velocity ω_0. The rotating ring *rolls without slipping* on the outside of a smaller circle described by the point where the ring and the finger is in contact (Figure-2). The coefficient of friction between the ring and the finger is μ and the acceleration due to gravity is g.

एक वृत्ताकार वलय (circular ring) (द्रव्यमान M एवं त्रिज्या R) एक उंगली के परित ध्रुतघूर्णन करता है (जैसा चित्र 1 (Figure 1) में दर्शाया गया है)। इस प्रक्रम में उंगली वलय के अंतरिक पृष्ठ से हमेशा स्पर्श करती है। उंगली एक शंकु (cone) के पृष्ठ का अनुरखिय पथ का अनुसरण करती है जैसे की बिन्दुकित रेखा द्वारा दर्शाया गया है। उंगली एवं वलय के स्पर्श बिन्दु के अनुरेखिय पथ की त्रिज्या r है। उंगली कोणीय वेग ω_0 से घूर्णन कर रही है। वलय r त्रिज्यावाले वृत्त के बाहरी पृष्ठ पर फिसलन रहित घूर्णन (rolls without slipping) करता है। जैसा चित्र 2 (Figure 2) में वलय एवं उंगली के स्पर्श बिन्दु द्वारा दर्शाया गया है। वलय एवं उंगली के बीच घर्षण गुणांक (coefficient of friction) μ, एवं गुरूत्वीय त्वरण g है।

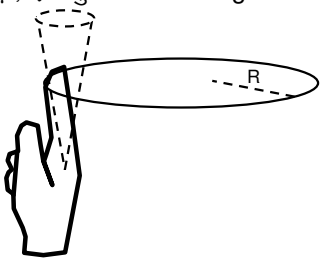


Figure-1

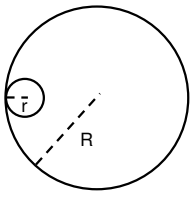


Figure-2

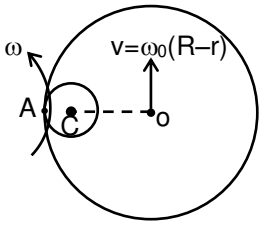
38. The total kinetic energy of the ring is : **[JEE (Advanced) 2017 ; P-2, 3/61]**
वलय की कुल गतिज उर्जा है

(A) $\frac{1}{2}M\omega_0^2(R-r)^2$ (B) $\frac{3}{2}M\omega_0^2(R-r)^2$ (C) $M\omega_0^2R^2$ (D) $M\omega_0^2(R-r)^2$

Ans. **Bonus (IIT has given Bonus marks for this question. In our sheet we have given answer D)**

Sol. **Finger and ring will have same ω.**

Point C is instantanious axis of rotation



$KE = \frac{1}{2}\left[\frac{MR^2}{2} + M(R-r)^2\right]\omega_0^2$

39. The minimum value of ω_0 below which the ring will drop down is: **[JEE (Advanced) 2017 ; P-2, 3/61]**

न्यूनतम ω_0 जिसके कम होते ही वलय गिर जायेगा, वह है

(A*) $\sqrt{\frac{g}{\mu(R-r)}}$ (B) $\sqrt{\frac{g}{2\mu(R-r)}}$ (C) $\sqrt{\frac{3g}{2\mu(R-r)}}$ (D) $\sqrt{\frac{2g}{\mu(R-r)}}$

Ans. **(A)**

40*. Consider a body of mass 1.0 kg at rest at the origin at time t = 0. A force $\vec{F} = (\alpha t\hat{i} + \beta\hat{j})$ is applied on the body, where α = 1.0 Ns^{-1} and β = 1.0 N. The torque acting on the body about the origin at time t = 1.0s is $\vec{\tau}$. Which of the following statements is (are) true? **[JEE (Advanced) 2018 ; P-1, 4/60]**

1.0 kg द्रव्यमान (mass) की एक वस्तु समय t = 0 पर मूल बिन्दु (origin) पर विरामावस्था में है। इस वस्तु पर एक बल $\vec{F}$ = (at $\hat{i}$ + β) लगाया जाता है, जहाँ α = 1.0 Ns^{-1} और β = 1.0 N है। समय t = 1.0s पर मूल बिन्दु के सापेक्ष वस्तु पर लगने वाला बल आघूर्ण (torque) $\vec{\tau}$ है। निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सही है (है) ?

(A) $|\tau| = \frac{1}{3}$Nm

(B) The torque $\vec{\tau}$ is in the direction of the unit vector $+\hat{k}$

बल आघूर्ण $\vec{\tau}$ मात्रक सदिश (unit vector) $+\hat{k}$ की दिशा में है।

(C) The velocity of the body at t = 1 s is $\vec{v} = \frac{1}{2}(\hat{i} + 2\hat{j})ms^{-1}$

समय t = 1s पर वस्तु का वेग $\vec{v} = \frac{1}{2}(\hat{i} + 2\hat{j})ms^{-1}$ है।

(D) The magnitude of displacement of the body at t = 1 s is $\frac{1}{6}$m

समय t = 1s पर वस्तु के विस्थापन का परिमाण $\frac{1}{6}$m है।

Ans. **(A,C)**

Sol. $m = 1kg$

$m\vec{a} = \vec{F} = t\hat{i} + \hat{j}$

(1) $\vec{a} = t\hat{i} + \hat{j}$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = t\hat{i} + \hat{j}$

$\vec{v} = \frac{t^2}{2}\hat{i} + t\hat{j} = \frac{1}{2}\hat{i} + \hat{j}$

$\vec{s} = \frac{t^3}{6}\hat{i} + \frac{t^2}{2}\hat{j}$

$\vec{s}(t = 1) = \frac{1}{6}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$= \left[\frac{1}{6}\hat{i} + \frac{1}{2}j\right] \times \left[\hat{i} + \hat{j}\right]$

$= \frac{1}{6}(\hat{i} \times \hat{j}) + \frac{1}{2}(\hat{j} \times \hat{i}) = \frac{1}{6}\hat{k} - \frac{1}{2}\hat{k} = \frac{-2}{6}\hat{k} = -\frac{1}{3}\hat{k}$

$|\tau| = \frac{1}{3}$ at t = 1 sec

$|\tau| = \frac{1}{3}$, t = 1 sec पर

41. A ring and a disc are initially at rest, side by side, at the top of an inclined plane which makes an angle 60° with the horizontal. They start to roll without slipping at the same instant of time along the shortest path. If the time difference between their reaching the ground is $(2-\sqrt{3})/\sqrt{10}$ s, then the height of the top of the inclined plane, in metres, is _____. Take g = 10 ms^{-2}.

एक वृत्ताकार वलय (ring) और एक वृत्ताकार चकती (disc), एक आनत बल (inclined plane) के शीर्ष पर अगल–बगल (side by side) विरामावस्था में है। आनत तल, क्षैतिज तल (horizontal plance) से 60° का कोण बनाता है। दोनों वस्तुए एक ही पल, न्यूनतम दूरी वाले पथ पर बिना फिसले लोटना (rolling without slipping) आरम्भ करती है। यदि दोनों वस्तुओं के क्षैतिज तल पर पहुँचने का समयान्तर $(2-\sqrt{3})/\sqrt{10}$ s, हो तो आनत तल के शीर्ष की ऊँचाई _____ मीटर है। g = 10 ms^{-2} लें। **[JEE (Advanced) 2018 ; P-1, 3/60]**

Ans. **0.75**

Sol. $a_{cm} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}g}{2}}{1+\frac{K^2}{R^2}}$

$a_{ring} = \frac{\frac{\sqrt{3}g}{2}}{1+1} = \frac{\sqrt{3}g}{4}$

$a_{disc} = \frac{\frac{\sqrt{3}g}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{g}{\sqrt{3}}$

$$t_{ring} = \sqrt{\frac{2.\frac{2h}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}g}{4}}} = \sqrt{\frac{4h}{\sqrt{3}}\frac{4}{\sqrt{3}g}} = \sqrt{\frac{16h}{3g}}$$

$$t_{disc} = \sqrt{\frac{2.\frac{2h}{\sqrt{3}}}{\frac{g}{\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{4h}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{g}} = \sqrt{\frac{4h}{g}}$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{16h}{3g}} - \sqrt{\frac{4h}{g}} = \sqrt{\frac{h}{g}}\left(\sqrt{\frac{16}{3}} - \sqrt{4}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{h}{g}}\left(\frac{4}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{h}{g}}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{h}{3}} = 1$$

$$= \sqrt{\frac{h}{3}} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{3}{4} = 0.75m$$

42. In the List-I below, four different paths of a particle are given as functions of time. In these functions, α and β are positive constants of appropriate dimensions and $\alpha \neq \beta$. In each case, the force acting on the particle is either zero or conservative. In List-II, five physical quantities of the particle are mentioned: $\vec{p}$ is the linear momentum, $\vec{L}$ is the angular momentum about the origin, K is the kinetic energy, U is the potential energy and E is the total energy. Match each path in List-I with those quantities in List-II, which are **conserved for that path**. **[JEE (Advanced) 2018 ; P-2, 3/60, –1]**

List-I		**List-II**	
P.	$\vec{r}(t) = \alpha t\hat{i} + \beta t\hat{j}$	1.	$\vec{p}$
Q.	$\vec{r}(t) = \alpha\cos\omega t\hat{i} + \beta\sin\omega t\hat{j}$	2.	$\vec{L}$
R.	$\vec{r}(t) = \alpha(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j})$	3.	K
S.	$\vec{r}(t) = \alpha t\hat{i} + \frac{\beta}{2}t^2\hat{j}$	4.	U
		5.	E

नीचे दी गयी सूची-I में, एक कण के चार विभिन्न पथ, समय के विभिन्न फलनों (functions) के रूप में दिये गये हैं। इन फलनों में α तथा β उचित विमाओं वाले धनात्मक नियतांक (positive constants) हैं, जहाँ $\alpha \neq \beta$। प्रत्येक पथ में कण पर लगने वाला बल या तो शून्य है या संरक्षी (conservative) है। सूची-II में कण की पाँच भौतिक राशियों का विवरण दिया गया है : $\vec{p}$ रेखीय संवेग (linear momentum) है, $\vec{L}$ मूल बिंदु (origin) के सापेक्ष कोणीय संवेग (angular momentum) है, K गतिज ऊर्जा (kinetic energy) है, U स्थितिज ऊर्जा (potential energy) है और E कुल ऊर्जा (total energy) है। सूची-I के प्रत्येक पथ का सूची-II में दिये गये उन राशियों से सुमेल कीजिये, जो उस पथ के लिए संरक्षी (conserved) हैं।

कॉलम-I		कॉलम-II	
P.	$\vec{r}(t) = \alpha t\hat{i} + \beta t\hat{j}$	1.	$\vec{p}$
Q.	$\vec{r}(t) = \alpha\cos\omega t\hat{i} + \beta\sin\omega t\hat{j}$	2.	$\vec{L}$
R.	$\vec{r}(t) = \alpha(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j})$	3.	K
S.	$\vec{r}(t) = \alpha t\hat{i} + \frac{\beta}{2}t^2\hat{j}$	4.	U
		5.	E

(A) P → 1, 2, 3, 4, 5; Q → 2, 5; R → 2, 3, 4, 5; S → 5
(B) P → 1, 2, 3, 4, 5; Q → 3, 5; R → 2, 3, 4, 5; S → 2, 5
(C) P → 2, 3, 4; Q → 5; R → 1, 2, 4; S → 2, 5
(D) P → 1, 2, 3, 5; Q → 2, 5; R → 2, 3, 4, 5; S → 2, 5

Ans. **(A)**

Sol. (P) $\vec{V}$ = constant नियत $\vec{a} = 0$ P → 1, 2, 3, 4, 5

(Q) $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$ path of the particle is elliptical कण का पथ दीर्घवृताकार है Q → 2, 5;

(R) $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$ path of the particle is circular कण का पथ वृताकार है R → 2, 3, 4, 5

$|\vec{V}|$ = constant नियत

(S) $\vec{a}$ = constant नियत S → 5

PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. A thin circular ring of mass m and radius R is rotating about its axis with a constant angular velocity ω. Two objects each of mass M are attached gently to the opposite ends of a diameter of the ring. The ring now rotates with an angular velocity ω' : **[AIEEE-2006, 4½/180]**

(1*) $\frac{\omega m}{(m+2M)}$ (2) $\frac{\omega(m+2M)}{m}$ (3) $\frac{\omega(m-2M)}{(m+2M)}$ (4) $\frac{\omega m}{(m+M)}$

m द्रव्यमान और R त्रिज्या का एक पतला वृत्तीय वलय अपने अक्ष पर एक स्थिर कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रहा है। वलय के व्यास के विपरीत सिरों पर प्रत्येक M द्रव्यमान की दो वस्तुएँ धीरे से जोड़ी जाती है। वलय अब जिस कोणीय वेग ω' से घूर्णन करेगा वह है :

(1*) $\frac{\omega m}{(m+2M)}$ (2) $\frac{\omega(m+2M)}{m}$ (3) $\frac{\omega(m-2M)}{(m+2M)}$ (4) $\frac{\omega m}{(m+M)}$

Sol. $L_i = L_r$

$mR^2\omega = (mR^2 + 2MR^2)\omega'$

$\omega' = \left(\frac{m\omega}{m+2M}\right)$

2. Four point masses, each of value m, are placed at the corners of a square ABCD of side ℓ. The moment of inertia about an axis passing through A and parallel to BD is : **[AIEEE-2006, 4½/180]**

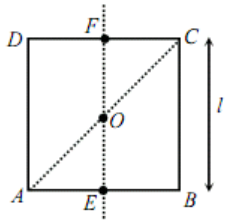
(1) $m\ell^2$ (2) $2m\ell^2$ (3) $\sqrt{3}\,m\ell^2$ (4*) $3m\ell^2$

ℓ भुजा के एक वर्ग ABCD के चारों कोनो पर प्रत्येक m द्रव्यमान के चार बिन्दु द्रव्यमान रखे है। A से गुजरने वाले और BD के समान्तर अक्ष के परितः इस निकाय का जड़त्व आघूर्ण है :

(1) $m\ell^2$ (2) $2m\ell^2$ (3) $\sqrt{3}\,m\ell^2$ (4*) $3m\ell^2$

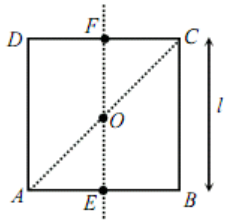
Sol. $I = 2m\,(\ell/\sqrt{2})^2 + m(\sqrt{2}\ell)^2 = 3m\ell^2$

3. For the given uniform square lamina ABCD, whose centre is O, **[AIEEE 3/120 2007]**



(1) $\sqrt{2}I_{AC} = I_{EF}$ (2) $I_{AD} = 2I_{EF}$ (3*) $I_{AC} = I_{EF}$ (4) $I_{AC} = \sqrt{2}I_{EF}$

3. दी गई एकसमान वर्गाकार पटल ABCD के लिए, जिसका केन्द्र O है : **[AIEEE 3/120 2007]**



(1) $\sqrt{2}I_{AC} = I_{EF}$ (2) $I_{AD} = 2I_{EF}$ (3*) $I_{AC} = I_{EF}$ (4) $I_{AC} = \sqrt{2}I_{EF}$

Sol. $I_{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{M\ell^2}{6}\right) = \frac{M\ell^2}{12}$, $I_{EF} = \frac{M\ell^2}{12}$, $I_{AC} = I_{EF}$

4. A round uniform body of radius R, mass M and moment of inertia I rolls down (without slipping) an inclined plane making an angle θ ? with the horizontal. Then its acceleration is : **[AIEEE 3/120 2007]**

(1*) $\frac{g\sin\theta}{1+I/MR^2}$ (2) $\frac{g\sin\theta}{1+MR^2/I}$ (3) $\frac{g\sin\theta}{1-I/MR^2}$ (4) $\frac{g\sin\theta}{1-MR^2/I}$

त्रिज्या R, द्रव्यमान M व जड़त्व आघूर्ण I का एक एकसमान गोल पिण्ड क्षैतिज से θ कोण पर झुके समतल पर बीना फिसलन के लुढ़कता है। इसका त्वरण है –

(1*) $\frac{g\sin\theta}{1+I/MR^2}$ (2) $\frac{g\sin\theta}{1+MR^2/I}$ (3) $\frac{g\sin\theta}{1-I/MR^2}$ (4) $\frac{g\sin\theta}{1-MR^2/I}$

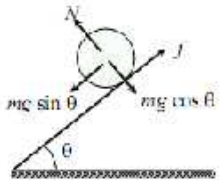
Sol. $mg\sin\theta - f = ma_{CM}$ .....(i)

$f.R = I\alpha$ .....(ii)

$a_{CM} = R\alpha$ .....(iii)

On solving (i),(ii) & (iii)

$a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{MR^2}}$



5. Angular momentum of the particle rotating with a central force is constant due to : **[AIEEE 3/120 2007]**

(1) constant force (2) constant linear momentum
(3*) zero torque (4) constant torque

केन्द्रीय बल के साथ घूमते एक कण का कोणीय संवेग नियत रहता है। इसका कारण है

(1) नियत बल (2) नियत रैखिक संवेग
(3*) शून्य बल आघूर्ण (4) नियत बल आघूर्ण

Sol. Central force is directed towards a point, therefore torque of the central force is zero.

6. Consider a uniform square plate of side 'a' and mass 'm'. The moment of inertia of this plate about an axis perpendicular to its plane and passing through one of its corners is : **[AIEEE 3/105 2008]**

(1) $\frac{1}{12}ma^2$ (2) $\frac{7}{12}ma^2$ (3*) $\frac{2}{3}ma^2$ (4) $\frac{5}{6}ma^2$

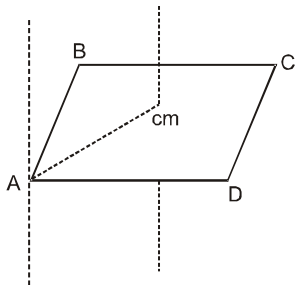
भुजा 'a' तथा द्रव्यमान 'm' की किसी एकसमान वर्गाकार प्लेट पर विचार कीजिए। इस प्लेट का उस अक्ष के परितः जो इसके तल के लम्बवत् है तथा इसके किसी एक कोने से गुजरती है, जड़त्व आघूर्ण

(1) $\frac{1}{12}ma^2$ (2) $\frac{7}{12}ma^2$ (3*) $\frac{2}{3}ma^2$ (4) $\frac{5}{6}ma^2$

Sol. $I_A = I_{cm} + m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= \frac{ma^2}{6} + \frac{ma^2}{2}$

$= \frac{2}{3}ma^2$



7. A thin uniform rod of length ℓ and mass m is swinging freely about a horizontal axis passing through its end. Its maximum angular speed is ω. Its centre of mass rises to a maximum height of : **[AIEEE 4/144 2009]**

(1) $\frac{1}{6}\frac{\ell\omega}{g}$ (2) $\frac{1}{2}\frac{\ell^2\omega^2}{g}$ (3*) $\frac{1}{6}\frac{\ell^2\omega^2}{g}$ (4) $\frac{1}{3}\frac{\ell^2\omega^2}{g}$

लम्बाई ℓ और द्रव्यमान m की एक पतली एकसमान छड़ अपने एक सिरे से गुजर रही क्षैतिज अक्ष पर स्वतंत्र रूप से दोलायमान है। इसकी अधिकतम कोणीय चाल ω है। इसका द्रव्यमान केन्द्र इस महत्तम ऊँचाई तक उठेगा :

(1) $\frac{1}{6}\frac{\ell\omega}{g}$ (2) $\frac{1}{2}\frac{\ell^2\omega^2}{g}$ (3*) $\frac{1}{6}\frac{\ell^2\omega^2}{g}$ (4) $\frac{1}{3}\frac{\ell^2\omega^2}{g}$

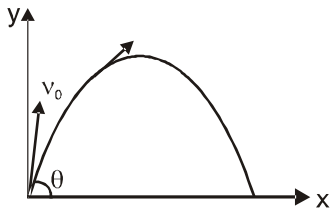
Ans. **(3)**

Sol. $\frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$

$\frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)\omega^2 = mgh$

$h = \frac{\omega^2\ell^2}{6g}$

8. A small particle of mass m is projected at an angle θ with the x-axis with an initial velocity v_0 in the x-y plane as shown in the figure. At a time $t < \frac{v_0 \sin\theta}{g}$, the angular momentum of the particle is

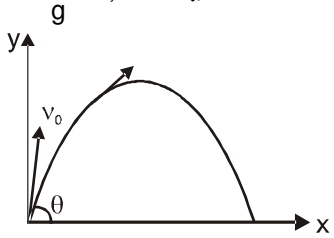


(1) $-mg\, v_0\, t^2 \cos\theta\, \hat{j}$ (2) $mg\, v_0\, t \cos\theta\, \hat{k}$

(3*) $-\frac{1}{2}\, mg\, v_0\, t^2 \cos\theta\, \hat{k}$ (4) $\frac{1}{2} mg\, v_0\, t^2 \cos\theta\, \hat{i}$

where $\hat{i}$, $\hat{j}$ and $\hat{k}$ are unit vectors along x, y and z-axis respectively.

8. x-अक्ष से θ कोण पर द्रव्यमान m के एक छोटे कण को एक प्रारम्भिक वेग v_0 से x-y तल में प्रक्षेपित किया जाता है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। समय $t < \frac{v_0 \sin\theta}{g}$, के लिए, कण का कोणीय संवेग है— **[AIEEE 4/144 2010]**

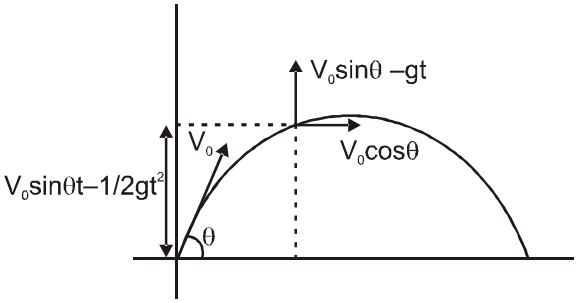


(1) $-mg\, v_0\, t^2 \cos\theta\, \hat{j}$ (2) $mg\, v_0\, t \cos\theta\, \hat{k}$

(3*) $-\frac{1}{2}\, mg\, v_0\, t^2 \cos\theta\, \hat{k}$ (4) $\frac{1}{2} mg\, v_0\, t^2 \cos\theta\, \hat{i}$

जहाँ $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ क्रमशः x, y और z-अक्ष पर इकाई सदिश है

Sol.



कोणीय संवेग angular momentum = $m\left\{(v_0\sin\theta - gt)(V_0\cos\theta t) - (V_0\cos\theta)\left(V_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2\right)\right\}$

$= -\frac{1}{2} mg\, V_0\, t^2 \cos\theta_0\, \hat{k}$

9. A thin horizontal circular disc is rotating about a vertical axis passing through its centre. An insect is at rest at a point near the rim of the disc. The insect now moves along a diameter of the disc to reach its other end. During the journey of the insect, the angular speed of the disc :**[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

(1) remains unchanged (2) continuously decreases

(3) continuously increases (4*) first increases and then decreases

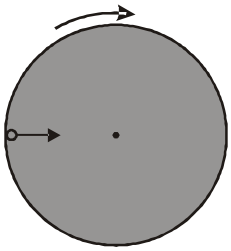
एक पतली क्षैतिज वृत्तीय चकती अपने केन्द्र से गुजर रही ऊर्ध्वाधर अक्ष पर घूर्णन कर रही है। चकती की धुरी के समीप बिन्दु पर एक कीड़ा विराम अवस्था में है। कीड़ा अब एक व्यास पर एक सिरे से दूसरे सिरे तक गतिशील होता है। कीड़े की यात्रा के दौरान, चकती की कोणीय चाल :

(1) अपरिवर्तित रहती है (2) लगातार घटती है

(3) लगातार बढ़ती है (4*) पहले बढ़ती है और फिर घटती है

Ans. **(4)**

Sol.



From angular momentum conservation about vertical axis passing through centre. When insect is coming from circumference to center. Moment of inertia first decrease then increase. So angular velocity inecrease then decrease.

केन्द्र से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग संरक्षण से जब कीड़ा परिधि से केन्द्र की ओर आ रहा है। जड़त्व आघूर्ण पहले घटता है तथा फिर बढ़ता है। अतः कोणीय वेग पहले बढ़ेगा तथा फिर घटेगा।

10. A mass m hangs with the help of a string wrapped around a pulley on a frictionless bearing. The pulley has mass m and radius R. Assuming pulley to be a perfect uniform circular disc, the acceleration of the mass m, if the string does not slip on the pulley, is : **[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

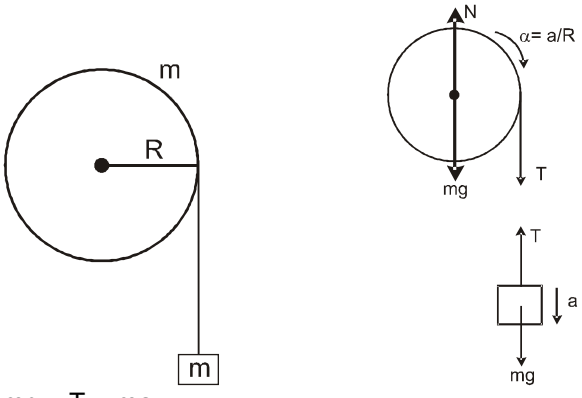
(1) $\frac{3}{2}g$ (2) g (3*) $\frac{2}{3}g$ (4) $\frac{g}{3}$

एक घर्षणहीन बेयरिंग पर एक घिरनी के चारों ओर एक डोरी को लपेट कर द्रव्यमान m लटकाया गया है। घिरनी का द्रव्यमान m और त्रिज्या R है। यह मान लें कि घिरनी एक पूर्ण एक समान वृत्तीय चकती है। यदि डोरी घिरनी पर फिसलती नहीं है, तब द्रव्यमान m का त्वरण है :

(1) $\frac{3}{2}g$ (2) g (3*) $\frac{2}{3}g$ (4) $\frac{g}{3}$

Ans. **(3)**

Sol.



$mg - T = ma$

$TR = \frac{mR^2\alpha}{2}$

$$T = \frac{mR\alpha}{2} = \frac{ma}{2}$$

$$mg - \frac{ma}{2} = ma$$

$$\frac{3ma}{2} = mg$$

$$a = \frac{2g}{3}$$ **Ans.**

11. A pulley of radius 2m is rotated about its axis by a force $F = (20t - 5t^2)$ newton (where t is measured in seconds) applied tangentially. If the moment of inertia of the pulley about its axis of rotation is 10 kg m^2, the number of rotations made by the pulley before its direction of motion if reversed, is:

[AIEEE - 2011, 4/120, –1]

(1) less than 3 (2*) more than 3 but less than 6

(3) more than 6 but less than 9 (4) more than 9

स्पर्शरेखीय लगाये गये बल $F = (20t - 5t^2)$ न्यूटन (जहाँ t सेकण्ड में नापा गया है) के कारण 2m त्रिज्या की एक घिरनी अपनी अक्ष पर घूर्णन करती है। यदि घूर्णन अक्ष के इर्द–गिर्द, घिरनी का जड़त्व आघूर्ण 10 kg m^2 है, तब घिरनी की गति की दिशा प्रतिलोमित होने से पहले घिरनी द्वारा किये गये चक्करों की संख्या है :

(1) 3 से कम (2) 3 से अधिक परन्तु 6 से कम

(3) 6 से अधिक परन्तु 9 से कम (4) 9 से अधिक

Ans. (2)

Sol. To reverse the direction $\int \tau d\theta = 0$ (work done is zero)

दिशा के व्युत्क्रम के लिए $\int \tau d\theta = 0$ (किया गया कार्य शून्य है)

$\tau = (20\,t - 5t^2)\,2 = 40t - 10t^2$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{40t - 10t^2}{10} = 4t - t^2$$

$$\omega = \int_0^t \alpha dt = 2t^2 - \frac{t^3}{3}$$

ω is zero at ω शून्य है

$$2t^2 - \frac{t^3}{3} = 0$$

$t^3 = 6t^2$

t = 6 sec. पर

$$\theta = \int \omega \; dt$$

$$= \int_0^6 (2t^2 - \frac{t^3}{3})dt$$

$$\left[\frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{12}\right]_0^6 = 216\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] = 36 \text{ rad.}$$

No of revolution $\frac{36}{2\pi}$ Less than 6

चक्करों की संख्या $\frac{36}{2\pi}$, 6 से कम है।

12. A particle of mass 'm' is projected with a velocity υ making an angle of 30º with the horizontal. The magnitude of angular momentum of the projectile about the point of projection when the particle is at its maximum height 'h' is : **[AIEEE 2011, 11 May; 4/120, –1]**

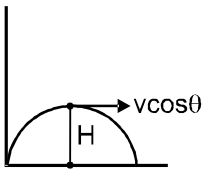
(1) zero (2) $\frac{m\upsilon^3}{\sqrt{2}g}$ (3*) $\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{m\upsilon^3}{g}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m\upsilon^2}{g}$

क्षैतिज से 30º के कोण पर वेग υ से द्रव्यमान 'm' के एक कण को प्रक्षेपित किया जाता है। जब कण अपनी अधिकतम ऊँचाई 'h' पर है, तब प्रक्षेप बिन्दु के सापेक्ष कण के कोणीय संवेग का परिमाण है:

(1) शून्य (2) $\frac{m\upsilon^3}{\sqrt{2}g}$ (3*) $\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{m\upsilon^3}{g}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m\upsilon^2}{g}$

Ans. **(3)**

Sol.



$L_0 = Pr_\perp$

$L_0 = mv\cos\theta\, H$

$= mg\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{v^2\sin^2 30º}{2g} = \frac{\sqrt{3}mv^3}{16g}$

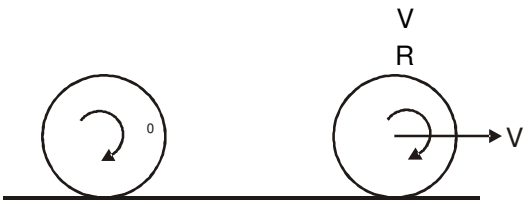
13. A hoop of radius r and mass m rotating with an angular velocity ω_0 is placed on a rough horizontal surface. The initial velocity of the centre of the hoop is zero. What will be the velocity of the centre of the hoop when it ceases to slip ? **[AIEEE 2013, 4/120, –1]**

(1) $\frac{r\omega_0}{4}$ (2) $\frac{r\omega_0}{3}$ (3*) $\frac{r\omega_0}{2}$ (4) $r\omega_0$

कोणीय वेग ω_0 से घूर्णन कर रहे द्रव्यमान m और त्रिज्या r के एक हूप को एक खुरदूरे क्षैतिज तल पर रखा है। हूप के केन्द्र का प्रारम्भिक वेग शून्य है। जब यह स्लिप करना बन्द कर दे, तब हूप के केन्द का वेग क्या होगा ?

(1) $\frac{r\omega_0}{4}$ (2) $\frac{r\omega_0}{3}$ (3*) $\frac{r\omega_0}{2}$ (4) $r\omega_0$

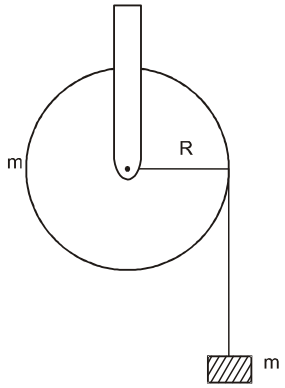
Sol.



$mr^2\omega_0 = mvr + mr^2 \times \frac{v_0}{r}$

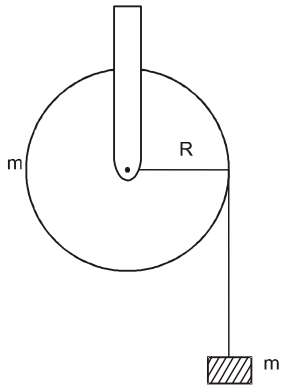
14. A mass 'm' supported by a massless string wound around a uniform hollow cylinder of mass m and radius R. If the string does not slip on the cylinder, with what acceleration will the mass fall on release ?

[JEE (Main) 2014, 4/120, –1]



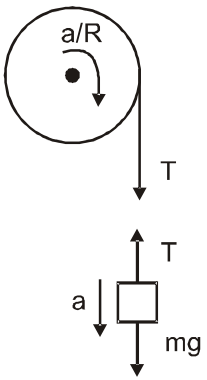
(1) $\frac{2g}{3}$ (2*) $\frac{g}{2}$ (3) $\frac{5g}{6}$ (4) g

त्रिज्या R एवं द्रव्यमान m के एक एकसमान खोखले बेलन के चारों तरफ एक द्रव्यमानविहीन डोरी से एक द्रव्यमान 'm' अवलंबित हैं। यदि डोरी बेलन पर फिसलती नहीं है, तब छोड़े जाने पर द्रव्यमान किस त्वरण से गिरेगा ?



(1) $\frac{2g}{3}$ (2*) $\frac{g}{2}$ (3) $\frac{5g}{6}$ (4) g

Sol.



$mg - T = ma$ .....(1)

$T.R = mR^2\frac{a}{R}$ .....(2)

$\frac{g}{2} = a$

Ans (2)

15. A bob of mass m attached to an inextensible string of length *l* is suspended from a vertical support. The bob rotates in a horizontal circle with a angular speed ω rad/s about the vertical. About the point of suspension :

(1) angular momentum is conserved. **[JEE (Main) 2014, 4/120, –1]**

(2) angular momentum changes in magnitude but not in direction

(3*) angular momentum changes in direction but not in magnitude.

(4) angular momentum changes both in direction and magnitude.

लम्बाई *l* की एक अवितान्य ड़ोरी से बँधे द्रव्यमान m के एक बॉब को एक ऊर्ध्वाधर आधार से लटकाया जाता है। बॉब ऊर्ध्वाधर पर कोणीय चाल ω rad/s से एक क्षैतिज वृत्त में घूर्णन करता है। निलंबन बिन्दु पर:

(1) कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

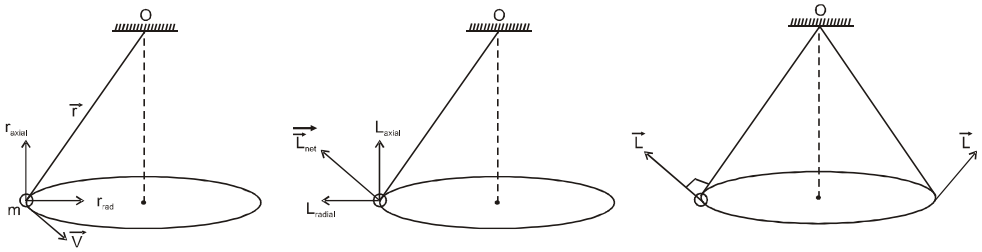
(2) कोणीय संवेग परिमाण में परिवर्तनशील हैं परन्तु दिशा में नहीं।

(3) कोणीय संवेग दिशा में परिवर्तनशील है परन्तु परिमाण में नहीं।

(4) कोणीय संवेग दोनों दिशा एवं परिमाण में परिवर्तनशील है।

Ans. (3)

Sol.



Angular momentum of the pendulum about the suspension point 'O' is

$\vec{L} = m\ (\vec{r} \times \vec{v})$

Then $\vec{r}$ can be resolved into two components, radial component r_{rad}, and axial component r_{axial}. Due to r_{rad}, L will be axial and due to r_{axial}, L will be radially outwards as shown.

So net angular momentum will be as shown in figure whoose value will be constant ($|L| = mv\ell$). But its direction will change as shown in the figure.

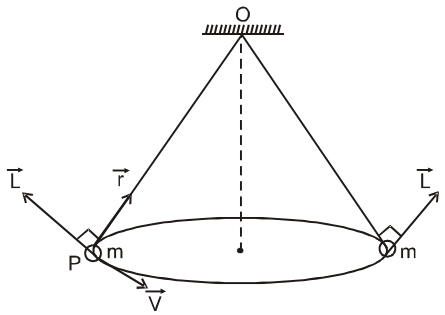
बिन्दु 'O' के सापेक्ष पेंडुलम का कोणीय संवेग

$\vec{L} = m\ (\vec{r} \times \vec{v})$

$\vec{r}$ को दो घटक में वियोजित किया जा सकता है। जो क्रमशः त्रिज्यीय r_{rad}, अक्षीय r_{axial} होंगे। r_{rad} के कारण L अक्ष के अनुदिश होगा जबकि r_{axial} के कारण L त्रिज्यीय दिशा में बाहर की ओर होगा।

चित्र में प्रदर्शित है अतः कोणीय संवेग का कोई परिमाण ($|L| = mv\ell$) नियत रहेगा किन्तु इसकी दिशा परिवर्तित होगी।

Sol.



Angular momentum of the pendulum about the suspension point 'O' will have a constant magnitude : (L) = mv (op) but its direction will change as shown in the figure.

बिन्दु 'O' के सापेक्ष कोणीय संवेग का परिमाण नियत (L) = mv (op) है लेकिन इसकी दिशा लगातार चित्रानुसार बदलेगी।

16. Form a solid sphere of mass M and radius R a cube of maximum possible volume is cut. Moment of inertia of cube about an axis passing through its centre and perpendicular to one of its faces is

[JEE(Main)-2015; 4/120, –1]

(1) $\frac{MR^2}{32\sqrt{2}\pi}$ (2) $\frac{MR^2}{16\sqrt{2}\pi}$ (3*) $\frac{4MR^2}{9\sqrt{3}\pi}$ (4) $\frac{4MR^2}{3\sqrt{3}\pi}$

किसी ठोस गोले का द्रव्यमान M तथा इसकी त्रिज्या R है। इसमें से अधिकतम सम्भव आयतन का एक क्यूब (घन) काट लिया जाता है। इस क्यूब का जड़त्व आघूर्ण कितना होगा, यदि इसकी घूर्णन अक्ष इसके केन्द्र से होकर गुजरती है तथा इसके किसी एक फलक के लम्बवत् है ?

(1) $\frac{MR^2}{32\sqrt{2}\pi}$ (2) $\frac{MR^2}{16\sqrt{2}\pi}$ (3*) $\frac{4MR^2}{9\sqrt{3}\pi}$ (4) $\frac{4MR^2}{3\sqrt{3}\pi}$

Ans. **(3)**

Sol. AB = 2R

$a\sqrt{3} = 2R$

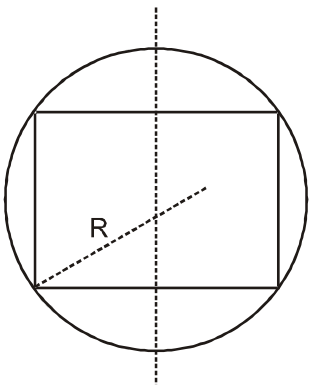
$a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

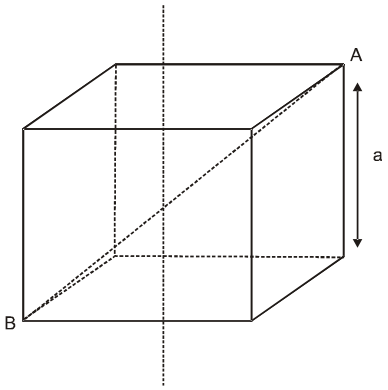
Mass of cube घन का द्रव्यमान = $\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3$

$= \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2M}{\sqrt{3}\pi}$

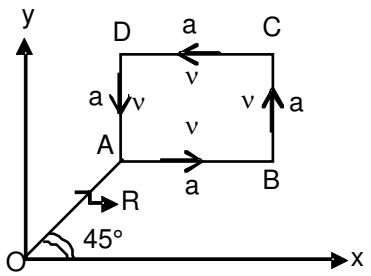
Moment of inertia of cube about given axis is
दी गई अक्ष के परितः घन का जड़त्व आघूर्ण

$= \frac{ma^2}{6}$





17. A particle of mass m is moving along the side of square of side 'a' with a uniform speed v in the x-y plane as shown in the figure : **[JEE Main 2016, 4/120, –1]**



Which of the following statements is false for the angular momentum about the origin ?

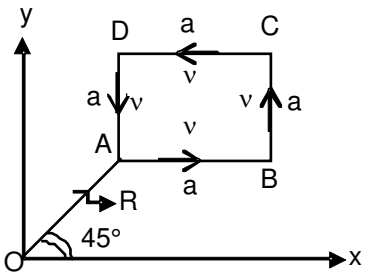
(1) $\vec{L} = mv\left[\frac{R}{\sqrt{2}} - a\right]\hat{k}$ when the particle is moving from C to D.

(2) $\vec{L} = mv\left[\frac{R}{\sqrt{2}} + a\right]\hat{k}$ when the particle is moving from B to C.

(3) $\vec{L} = \frac{mv}{\sqrt{2}}R\ \hat{k}$ when the particle is moving from D to A.

(4) $\vec{L} = -\frac{mv}{\sqrt{2}}R\ \hat{k}$ when the particle is moving from A to B.

चित्र में भुजा 'a' का वर्ग x-y तल में है। m द्रव्यमान का एक कण एकसामन गति v से इस वर्ग की भुजा पर चल रहा है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।



तब निम्न में कौनसा कथन, इस कण के मूल बिन्दु के गिर्द कोणीय आघूर्ण के लिये, गलत है।

(1) $\vec{L} = mv\left[\frac{R}{\sqrt{2}} - a\right]\hat{k}$ जब कण C से D की ओर चल रहा है।

(2) $\vec{L} = mv\left[\frac{R}{\sqrt{2}} + a\right]\hat{k}$ जब कण B से C की ओर चल रहा है।

(3) $\vec{L} = \frac{mv}{\sqrt{2}}R\ \hat{k}$ जब कण D से A की ओर चल रहा है।

(4) $\vec{L} = -\frac{mv}{\sqrt{2}}R\ \hat{k}$ जब कण A से B की ओर चल रहा है।

Ans. (1, 3)

From C to D

C से D तक

$\vec{L}_0 = mv\left[\frac{R}{\sqrt{2}} + a\right]\ \hat{k}$

from B to C

B से C तक

$\vec{L}_0 = mv\left[\frac{R}{\sqrt{2}} + a\right]\ \hat{k}$

from D to A

D से A तक

$\vec{L}_0 = \frac{mv}{\sqrt{2}}R\left(-\ \hat{k}\right)$

from A to B

A से B तक

$\vec{L}_0 = \frac{mv}{\sqrt{2}}R\left(-\ \hat{k}\right)$

18. The moment of inertia of a uniform cylinder of length *l* and radius R about its perpendicular bisector is I. What is the ratio *l*/R such that the moment of inertia is minimum? **[JEE (Main) 2017 ; 4/120, –1]**

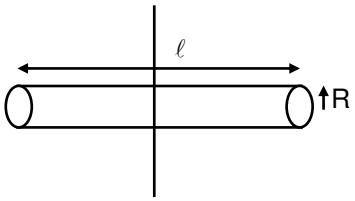
(1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (2*) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) 1

एक त्रिज्या R तथा लम्बाई *l* के एक समान बेलन का उसके अभिलम्ब द्विभाजक के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है। जड़त्व आघूर्ण के निम्नतम् मान के लिए अनुपात *l*/R क्या होगा ?

(1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (2*) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) 1

Ans. (2)

Sol. $I = \frac{M\ell^2}{12} + \frac{MR^2}{4}$



$= \frac{M\ell^2}{12} + \frac{M}{4} \times \frac{M}{\rho\pi\ell}$; $M = (\pi R^2\ell)\rho \Rightarrow \frac{M}{\rho\pi\ell} = R^2$

$\frac{dI}{d\ell} = \frac{M}{12}(2\ell) - \frac{M^2}{4\rho\pi}\left(\frac{1}{\ell^2}\right) = 0$

$\frac{\ell}{6} = \frac{M}{4\rho\pi\ell^2}$

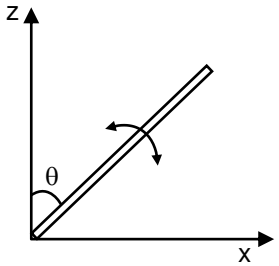
$\ell^3 = \frac{3M}{2\rho\pi} = \frac{3}{2\rho\pi} \times \pi R^2\ell\rho$

$\frac{\ell^2}{R^2} = \frac{3}{2}$

$\frac{\ell}{R} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

19. A slender uniform rod of mass M and length *l* is pivoted at one end so that it can rotate in a vertical plane (see figure). There is negligible friction at the pivot. The free end is held vertically above the pivot and then released. the angular acceleration of the rod when it makes an angle θ with the vertical is.

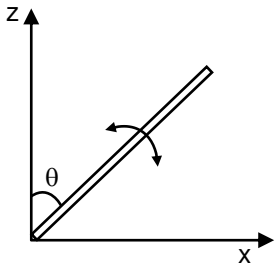
[JEE (Main) 2017; 4/120, –1]



(1) $\frac{2g}{3l}\cos\theta$ (2*) $\frac{3g}{2l}\sin\theta$ (3) $\frac{2g}{3l}\sin\theta$ (4) $\frac{3g}{2l}\cos\theta$

19. एक द्रव्यमान M एवं लम्बाई *l* की पतली एवं एक समान छड़ का एक सिरा धुराग्रस्त है जिससे कि वह एक ऊर्ध्वाधर समतल में घूम सकती है। (चित्र देखिये)। धूरी का घर्षण नगण्य है। छड़ के दूसरे सिरे को धुरी के ऊपर ऊर्ध्वाधर रखकर छोड़ दिया जाता है। जब छड ऊर्ध्व से θ कोण बनाती है तो उसका कोणीय त्वरण होगा।

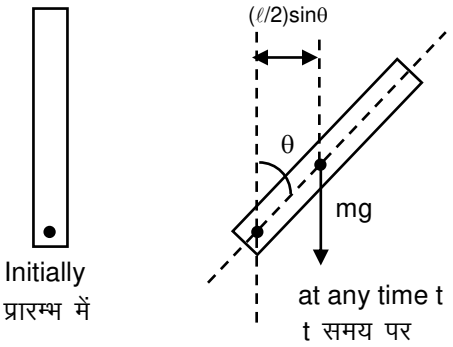
[JEE (Main) 2017; 4/120, –1]



(1) $\frac{2g}{3l}\cos\theta$ (2*) $\frac{3g}{2l}\sin\theta$ (3) $\frac{2g}{3l}\sin\theta$ (4) $\frac{3g}{2l}\cos\theta$

Ans. (2)

Sol.

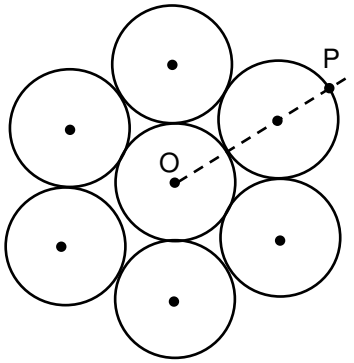


$$mg\sin\theta\frac{\ell}{2}=\frac{m\ell^2}{3}\alpha$$

$$\frac{3g}{2\ell}\sin\theta=\alpha$$

20. Seven identical circular planar disks, each of mass M and radius R are welded symmetrically as shown. The moment of inertia of the arrangement about the axis normal to the plane and passing through the point P is **[JEE (Main) 2018; 4/120, –1]**

चित्रानुसार सात एक जैसी वृत्ताकार सतमल डिस्कों, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है, को सममित रूप से जोड़ा जाता है। समतल के लम्बवत् तथा P से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष, इस संयोजन का जड़त्व आघूर्ण है :



(1) $\frac{73}{2}MR^2$ (2*) $\frac{181}{2}MR^2$ (3) $\frac{19}{2}MR^2$ (4) $\frac{55}{2}MR^2$

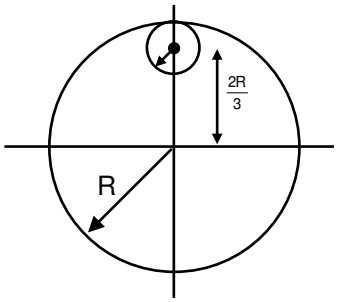
Ans. (2)

Sol. $I_p = I_0 + 7M(3R)^2$

$$= \left(\frac{MR^2}{2} + 6\left(\frac{MR^2}{2} + M(2R)^2\right)\right) + 7M(3R)^2 = \frac{181}{2}MR^2$$

21. From a uniform circular disc of radius R and mass 9 M, a small disc of radius $\frac{R}{3}$ is removed as shown in the figure. The moment of inertia of the remaining disc about an axis perpendicular to the plane of the disc and passing through centre of disc is : **[JEE (Main) 2018; 4/120, –1]**

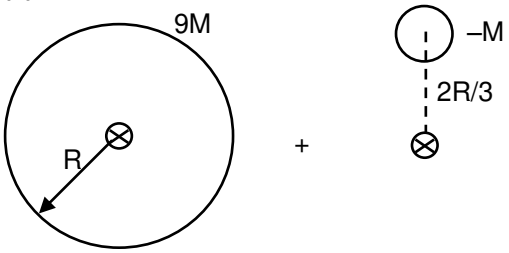
R त्रिज्या तथा 9 M द्रव्यमान के एकसमान गोलाकार डिस्क से $\frac{R}{3}$ त्रिज्या का एक छोटा गोलाकार डिस्क काट कर निकाल लिया जाता है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। डिस्क के सतह के लम्बवत् एवं उसके केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष बची हुई डिस्क का जडत्व आघूर्ण होगा।



(1) 10 MR^2 (2) $\frac{37}{9}MR^2$ (3*) 4 MR^2 (4) $\frac{40}{9}MR^2$

Ans. **(3)**

Sol.



[Using negative mass concept] ऋणात्मक द्रव्यमान सिद्वान्त का उपयोग करने पर

$$I = \frac{9MR^2}{2} - \left[\frac{M\left(\frac{R}{3}\right)^2}{2} + M\left(\frac{2R}{3}\right)^2\right]$$

$$= MR^2\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{18} - \frac{4}{9}\right] = 4MR^2$$

High Level Problems (HLP)

SUBJECTIVE QUESTIONS

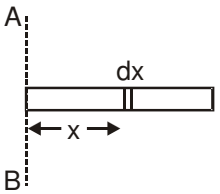
विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. Find the M.I. of a rod about (i) an axis perpendicular to the rod and passing through left end. (ii) An axis through its centre of mass and perpendicular to the length whose linear density varies as $\lambda = ax$ where a is a positive constant and 'x' is the position of an element of the rod relative to its left end. The length of the rod is ℓ.

छड़ का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो – (i) छड़ के बांये सिरे से पारित लम्बवत् अक्ष के परितः। (ii) छड़ के द्रव्यमान केन्द्र से पारित तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः जिसका रेखिक घनत्व $\lambda = ax$ के अनुसार परिवर्तित होता है, यहां a धनात्मक स्थिरांक है तथा 'x' छड़ के बांये सिरे से किसी भाग की दूरी है। छड़ की लम्बाई ℓ है–

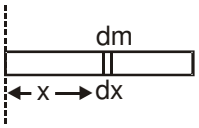
Ans. (i) $I = \frac{a\ell^4}{4}$ (ii) $\frac{a\,\ell^4}{36}$

Sol. (i)

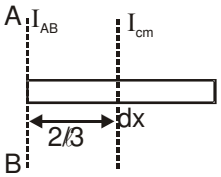


$$I_{AB} = \int dmx^2, \quad I_{AB} = \int_0^{\ell} ax^3 dx = \left(\frac{a\ell^4}{4}\right)$$

(ii)



$$x_{cm} = \frac{\int_0^{\ell} ax^2 dx}{\int_0^{Q} ax\,dx} = \left(\frac{2}{3}\ell\right)$$



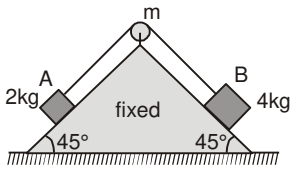
$$I_{AB} = I_{cm} + m\left(\frac{2}{3}\ell\right)^2, \qquad I_{cm} = I_{AB} - \frac{4m\ell^2}{9}$$

$$m = \int_0^{\ell} ax\ dx = \frac{a\ell^2}{2}$$

$$I_{cm} = \frac{a\ell^4}{4} - \frac{2a\ell^4}{9}$$

$$\left[I_{cm} = \frac{a\ell^4}{36}\right] \quad \textbf{Ans.}$$

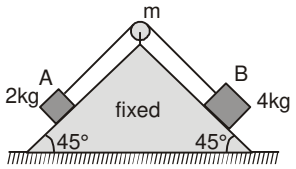
2. The pulley (uniform disc) shown in figure has, radius 10 cm and moment of inertia about its axis $I = 0.5\ kgm^2$ (B and A both move)



(a) Assuming all the plane surfaces are smooth and there is no slipping between pulley and string, calculate the acceleration of the mass 4kg.

(b) The friction coefficient between the block A and the plane below is $\mu = 0.5$ and the plane below the B block is frictionless.Assuming no slipping between pulley and string find accelaration of 4kg block

2. चित्र में दिखाई गई घिरनी की त्रिज्या 10 cm है तथा इसकी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I = 0.5\ kg\text{-}m^2$ (B तथा A दोनो गति करते है।)

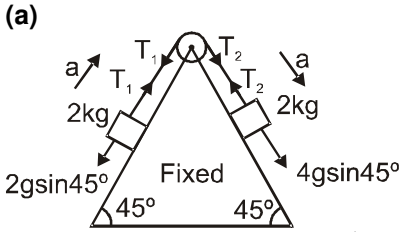


(a) सभी समतल सतह को घर्षण रहित मानते हुए तथा घिरनी एवं डोरी में कोई फिसलन नही है मानते हुए 4 kg के ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो।

(b) यदि A ब्लॉक व नत तल के मध्य घर्षण गुणांक $\mu = 0.5$ है तथा B ब्लॉक के नीचे का तल घर्षण रहित है घिरनी एवं डोरी में कोई फिसलन नही है। मानते हुए 4kg के ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करों।

Ans. (a) $0.25\ m/s^2$ (b) $0.125\ m/s^2$

Sol. **(a)**



For 2kg mass, 2 kg द्रव्यमान के लिए

$T_1 - 2g \sin 45^\circ = 2a$ .....(i)

For 4kg mass 4 kg द्रव्यमान के लिए

$4g \sin 45^\circ - T_2 = 4a$ .....(ii)

For pulley, घिरनी के लिए

$r(T_2 - T_1) = I\alpha = I(a/r)$ .....(iii) $\left(I = \left(\frac{mr^2}{2}\right)\right)$

From eq. (i),(ii) and (iii) समीकरण (i), (ii) व (iii) से

$$a = \frac{(4-2)g\sin\theta}{\left(4+2+\frac{I}{r^2}\right)}$$

$$a = \frac{(4-2)\times 10\times 1/52}{\left(4+2+\frac{0.5}{0.01}\right)}$$

$a = 0.248 = (0.25\ m/s^2)$

(b) $m_1 = 4kg$ $m_2 = 2kg$

$\mu = 0.2$ (between inclined plane and 2kg block) (2 kg ब्लॉक व नत तल के अनुदिश)

$I = 0.5\ kg\text{-}m^2$ $r = 0.1\ m$

$m_1g\sin\theta - T_2 = m_1a$ .....(i)

$T_1 - (m_2g\sin\theta + \mu m_2g\cos\theta) = m_2a$ .....(ii)

$r(T_1 - T_2) = I.\alpha = \left(I\frac{a}{r}\right)$ .....(iii)

From eq. (i),(ii) and (iii) समीकरण (i), (ii) व (iii) से

$m_1g\sin\theta - (m_2g\sin\theta + \mu m_2g\sin\theta) + \frac{Ia}{r^2} = m_1a + m_2a$

Put values : मान रखने पर

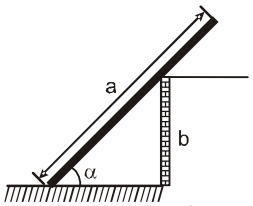
$4g\sin45^\circ - (2g\sin45^\circ + 0.2\ 2g\sin45^\circ) + \frac{0.5}{0.01}a = 6a$

$\Rightarrow \quad 27.80 - (13.69 + 6.95) = 56a$

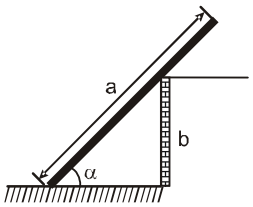
$= \quad a = \frac{7}{56} = (0.125\ m/s^2)$.

3. A uniform rod of length 'a' rests against a frictionless wall as shown in figure. Find the friction coefficient between the horizontal surface and the lower end if the minimum angle that the rod can make with the horizontal is α., without slipping.

'a' लम्बाई की एक समान छड़ को एक चिकनी दीवार के विरूद्ध नीचे प्रदर्शित चित्रानुसार रखा गया है। यदि छड़ बिना फिसले, क्षैतिज से न्यूनतम कोण α बना सकती है, तो छड़ के निचले सिरे और क्षैतिज सतह के मध्य घर्षण गुणांक ज्ञात कीजिए।

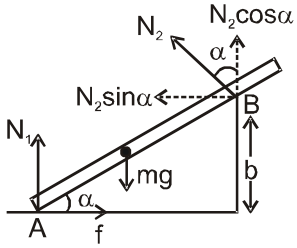


'a' लम्बाई की एक समान छड़ को एक चिकनी दीवार के विरूद्ध नीचे प्रदर्शित चित्रानुसार रखा गया है। यदि छड़ बिना फिसले, क्षैतिज से न्यूनतम कोण α बना सकती है, तो छड़ के निचले सिरे और क्षैतिज सतह के मध्य घर्षण गुणांक ज्ञात कीजिए।



Ans. $\frac{a\cos\alpha\sin^2\alpha}{2b - a\cos^2\alpha\sin\alpha}$

Sol.



$N_2\sin\alpha = f$ ——(i)

$N_1 + N_2\cos\alpha = mg$ ——(ii)

Torque about point A बिन्दु A के सापेक्ष बलार्घूण

$$(N_2 \cos\alpha)\left(\frac{b}{\tan\alpha}\right) + N_2 \sin\alpha\, b = mg\, a/2 \cos\alpha)$$

$$N_2 = \frac{(mga\cos\alpha \ \ \sin\alpha)}{2b}$$

$$N_2 \cos\alpha = \frac{\left(mga\cos^2\alpha \ \ \sin\alpha\right)}{2b}$$

From equn. समीकरण ....(ii) से

$$N_1 = mg - N_2 \cos\alpha = mg - \frac{mga\cos^2\alpha\sin\alpha}{2b}$$

$$N_1 = mg\ \frac{(2b - a\cos^2\alpha\sin\alpha)}{2b}$$

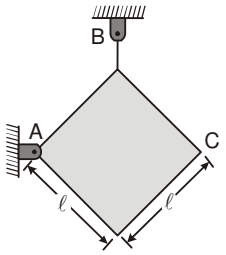
$$N_2 \sin\alpha = \mu N_1$$

$$\mu = \frac{N_2\sin\alpha}{N_1}$$

$$\mu = \frac{\frac{mg \ \ a\cos\alpha\sin^2\alpha}{2b}}{\frac{mg(2b - a\cos^2\alpha\sin\alpha)}{2b}}$$

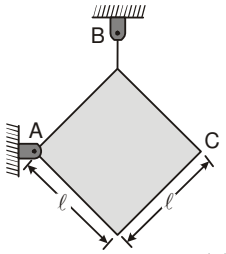
$$\Rightarrow \mu = \left[\frac{a\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha}{2b - a\cos^2\alpha\sin\alpha}\right]$$

4. A uniform square plate of mass m is supported as shown. If the cable suddenly breaks, determine just after that moment;
m द्रव्यमान की समरूप वर्गाकार प्लेट चित्रानुसार लटकाई जाती है। यदि अचानक रस्सी टूट जाये तो इस क्षण के तुरन्त बाद ज्ञात करो।



(a) The angular acceleration of the plate. (b) The acceleration of corner C.
(c) The reaction at A.

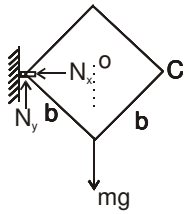
m द्रव्यमान की समरूप वर्गाकार प्लेट चित्रानुसार लटकाई जाती है। यदि अचानक रस्सी टूट जाये तो इस क्षण के तुरन्त बाद ज्ञात करो।



(a) प्लेट का कोणीय त्वरण (b) C कोने का त्वरण
(c) A पर प्रतिक्रिया

Ans. (a) $\frac{3\,g}{2\sqrt{2}\,\ell}$ (cw) (b) $\frac{3}{2}\,g\downarrow$ (c) $\frac{Mg}{4}\uparrow$

Sol.



$$mg\left(b/\sqrt{2}\right) = I\,\alpha\,,\ I = \frac{mb^2}{6} + m\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad I = \frac{mb^2}{6} + \frac{mb^2}{2} = \frac{mb^2}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)$$

$$I = \frac{2mb^2}{3}$$

Hence अतः $\qquad \frac{mgb}{\sqrt{2}} = \frac{2mb^2}{3}\,\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2\sqrt{2}b}$

Acc^n of corner C = $\sqrt{b^2+b^2}\ \alpha = \frac{3g}{2}$

Acceleration of O in horizontal direction is zero So $N_x = 0$
क्षेतिज दिशा में त्वरण शून्य है अतः

C भाग का त्वरण = $\sqrt{b^2+b^2}\ \alpha = \frac{3g}{2}$

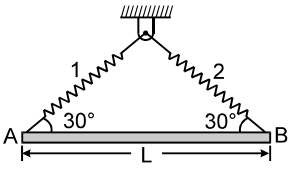
O बिन्दु का वेग शून्य है। इसलिए $N_x = 0$

$$mg - N_y = m\,\frac{b}{\sqrt{2}}\,\alpha$$

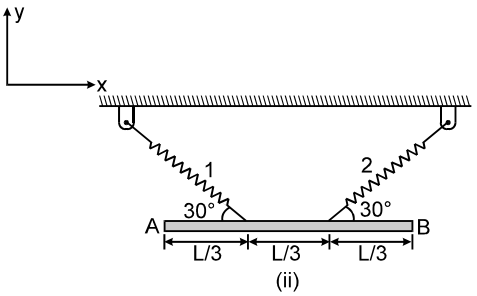
$$= m\,\frac{b}{\sqrt{2}}\left(\frac{3g}{2\sqrt{2}\ b}\right) = \frac{3\ mg}{4}$$

$$\therefore \qquad N_y = \frac{mg}{4}$$

5. A uniform slender rod AB of mass m is suspended from two springs as shown. If spring 2 breaks, determine at that instant ;



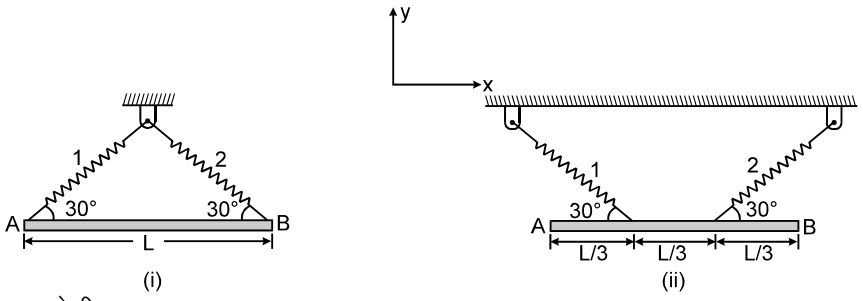
(i)



(ii)

(a) The angular acceleration of the bar.
(b) The acceleration of point A.
(c) The acceleration of point B.

m द्रव्यमान की एक समान बेलनाकार छड़ AB दो स्प्रिंग से चित्रानुसार लटकी है यदि स्प्रिंग 2 टूट जाए तो इस क्षण ज्ञात कीजिए-



(a) छड़ का कोणीय त्वरण

(b) बिन्दु A का त्वरण

(c) बिन्दु B का त्वरण

Ans. (i) (a) 3 g/L (cw)

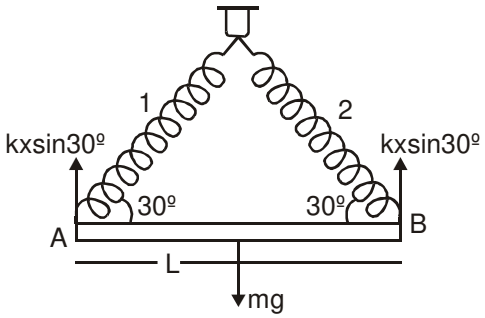
(b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{i}+\hat{j}\right)g = 1.323\,g \angle 49.1^{\circ}$

(c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{i} - 2\,\hat{j}\right)g = 2.18\,g \angle -66.6^{\circ}$

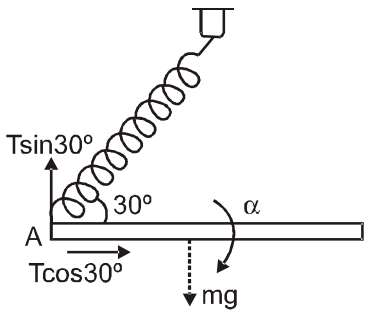
(ii) (a) g/L (cw) (b) $-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g\,\hat{i}$

(c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{i} + \hat{j}\right) - g = 1.323\,g \angle -130.9^{\circ}$

Sol. **(a)**



(i)



Before cutting काटने के पहले $2k\,x\sin30^{\circ} = mg$

$kx = mg$ $(T = kx = mg)$

After cutting काटने के बाद

(ii) Torque about COM COM के सापेक्ष बल आघूर्ण

$$(T\sin30^\circ) \times \frac{\ell}{2} = I\alpha$$

$$\frac{mg\ell}{4} = \frac{m\ell^2}{12}.\alpha$$

$$\alpha = \left(\frac{3g}{\ell}\right) \text{ (clockwise) (दक्षिणावृर्त्त)}$$

(b) acceleration of point A A बिन्दु का त्वरण

$$ma_x = T\cos30^\circ$$

$$a_x = \frac{mg\sqrt{3}}{2m} = \frac{\sqrt{3}g}{2} = a_{AC} \rightarrow$$

$$mg - T\sin30^\circ = ma_y$$

$$mg - \frac{mg}{2} = ma_y$$

$$a_{Ay} = \left(-\frac{g}{2}\right) + \frac{\alpha\ell}{2} = -\frac{g}{2} + \frac{3g}{2} = (g)\ (\uparrow)$$

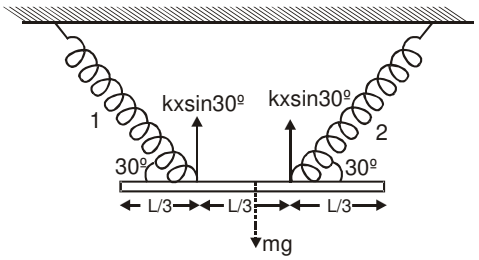
$$a_A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \hat{j}\right) g$$

(c) $$a_{Bx} = \frac{\sqrt{3}}{2}g \rightarrow$$

$$a_{By} = \left(\frac{g}{2}\right) + \frac{\alpha\ell}{2} = 2g\ (\downarrow)$$

$$a_B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} - 2\hat{j}\right) g$$

(ii)

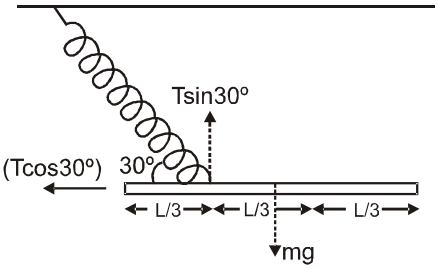


Before cutting काटने के पहले

$$mg = 2kx\sin30^\circ = kx = T$$

$$T = mg.$$

After cutting काटने के बाद



(a) Torque about COM COM के सापेक्ष बल आघूर्ण

$(T \sin 30^\circ)\left(\frac{\ell}{6}\right) = I.\alpha$

$(mg)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\ell}{6}\right) = \frac{m\ell^2}{12}.\alpha$

$\alpha = \left(\frac{g}{\ell}\right)$ (cw).

(b) $(T \cos 30^\circ) = ma_x$

$mg\ \frac{\sqrt{3}}{2} = ma_x$

$a_x = \left(\frac{\sqrt{3}g}{2}\right)$

$a_{Ax} = \frac{\sqrt{3}g}{2}(-\hat{i})$

$mg - \frac{ma}{2} = ma_y$

$a_y = \frac{g}{2}\ (-\hat{j})$

$a_{Ay} = (a_y - \alpha\frac{\ell}{2}) = \left(\frac{g}{2}\right) - \frac{g}{\ell}\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$

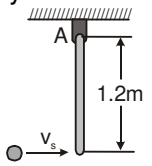
$\vec{a}_A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}g\hat{i}\right)$

(c) $\vec{a}_{cx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}g\hat{i}$

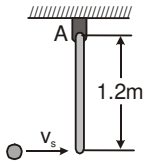
$\vec{a}_{cy} = -\left(\frac{g}{2} + \alpha\frac{\ell}{2}\right)\hat{j} = -g\,\hat{j}$

$a_c = a_{cx}\,\hat{i} + a_{cy}\,\hat{j} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}g\hat{i} + g\hat{j}\right)$

6. A 2 kg sphere moving horizontally to the right with an initial velocity of 5 m/s strikes the lower end of an 8 kg rigid rod AB. The rod is suspended from a hinge at A and is initially at rest. Knowing that the coefficient of restitution between the rod and sphere is 0.80, determine the angular velocity of the rod and the velocity of the sphere immediately after the impact.

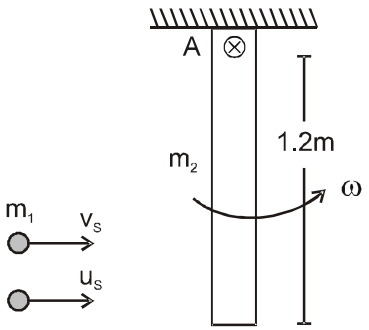


एक 2 kg द्रव्यमान का गोला दांयी ओर 5 m/s के प्रारम्भिक वेग से क्षैतिज दिशा में गति करता हुआ 8 kg द्रव्यमान की एक दृढ़ छड़ AB के निचले सिरे से टकराता है। छड़ बिन्दु A से कीलकित की जाती है तथा प्रारम्भ में विरामअवस्था में है। छड़ व गोले के मध्य प्रत्यावस्थान गुणांक 0.80 मानते हुए टक्कर के ठीक बाद छड़ का कोणीय वेग व गोले का वेग ज्ञात करो।



Ans. $\omega = \frac{45}{14} = 3.21$ rad/s (ccw), $v_s = \frac{1}{7} = 0.143$ m/s $\leftarrow$

Sol.



Angular momentum about point A

$L_i = m_1 v_s \ell$ (u_s : Final velocity of ball after collision)

A बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग :

$L_i = m_1 v_s \ell$ (u_s : टक्कर के बाद गेंद का अंतिम वेग)

$$L_f = \frac{m_2 \ell^2}{3}\omega + m_1 u_s \ell$$

$$L_i = L_f$$

$$(m_1 v_s \ell = \frac{m_2 \ell^2 . \omega}{3} + m_1 u_s \ell)$$

$$2 \times 5 = \frac{8 \times 1.2 \times \omega}{3} b + (2 \times u_s)$$

$$10 = \frac{32\ \omega}{10} + 2u_s \quad \text{..... (i)}$$

Coefficient of restitution प्रत्यावस्थान गुणांक

$$e = \frac{\omega\ell - u_s}{v_s}$$

$$0.8 = \frac{\omega\ell - u_s}{v_s}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{\omega\ (1.2) - u_s}{5}$$

$$4 = \frac{6\omega}{5} - u_s$$

$$u_s = \left(\frac{6\omega - 20}{5}\right) \quad \text{..... (ii)}$$

Put equation (ii) in equation (i)

समीकरण (ii) को समीकरण (i) में रखने पर

$$10 = \frac{32\omega}{10} + 2\left(\frac{6\omega - 20}{5}\right)$$

$$10 = \frac{32\omega}{10} + \frac{12\omega - 40}{5}$$

$$100 = 32\omega + 24\omega - 80$$

$$\omega = \frac{45}{14}$$

Put ω in equation (ii)
ω को समीकरण (ii) में रखने पर

$$u_s = \left(\frac{6\omega - 20}{5}\right)$$

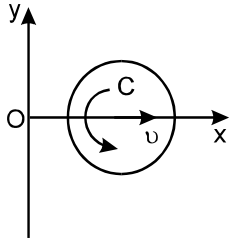
$$u_s = \frac{6\left(\frac{45}{14}\right) - 20}{5}$$

$$u_s = \frac{270 - 280}{14 \times 5} = -\frac{10}{14 \times 5} = \left(-\frac{1}{7}\right)$$

So direction is $(\leftarrow)\ u_s \left(\frac{1}{7}\right)$

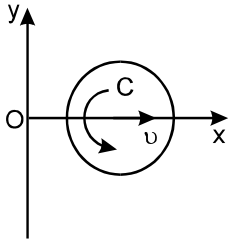
इसलिए दिशा $(\leftarrow)\ u_s \left(\frac{1}{7}\right)$

7. A rotating disc (figure) moves in the positive direction of the x axis. Find the equation y (x) describing the position of the instantaneous axis of rotation, if at the initial moment the axis C of the disc was located at the point O after which it moved



(a) With a constant velocity v, while the disc started rotating counter clockwise with a constant angular acceleration β (the initial angular velocity is equal to zero);
(b) With a constant acceleration a (and the zero initial velocity), while the disc rotates counterclockwise with a constant angular velocity ω.

7. एक घूर्णित चकती (चित्र), x अक्ष की धनात्मक दिशा में गति करती है। तात्क्षणिक घूर्णन अक्ष की स्थिति को दर्शाने वाली y(x) की समीकरण ज्ञात कीजिए। यदि प्रारम्भ में चकती की अक्ष C बिन्दु O पर स्थित थी जिसके बाद वह गति

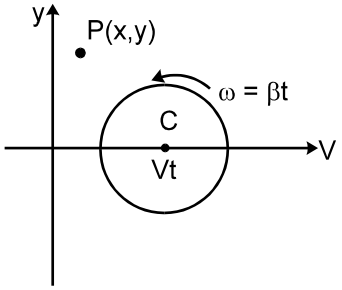


(a) नियत वेग v के साथ शुरू करती है, जबकि चकती नियत कोणीय त्वरण β से वामावर्त घूमना शुरू करती है। (प्रारम्भिक कोणीय वेग शून्य है।)
(b) नियत त्वरण a (व प्रारम्भिक वेग शून्य है) के साथ शुरू करती है, जबकि चकती नियत कोणीय वेग ω से वामावर्त घूमती है।

Ans. (a) $y = \frac{v^2}{\beta x}$ (Hyperbola) ; (b) $y = \frac{\sqrt{2ax}}{\omega}$ (Parabola)]

Ans. (a) $y = \frac{v^2}{\beta x}$ (अतिपरलवय) ; (b) $y = \frac{\sqrt{2ax}}{\omega}$ (परवलय)]

Sol. (a)



Let coordinates of instantaneous axis of rotation be P(x,y).
then velocity of P w.r.t. ground is zero.
माना ताक्षणिक घूर्णन अक्ष के निर्देशांक P(x,y).
तब P का वेग C के सापेक्ष शून्य है।

$\Rightarrow \quad \vec{\omega} \times \overrightarrow{CP} + v\hat{i} = 0$

$\Rightarrow \quad b\,t\,(\hat{k}) \times [(x - v\ \ t)\ \ \hat{i} + y\hat{j}] + v\hat{i} = 0$

$\Rightarrow \quad x = vt$

and $\beta yt = V$

from these eliminating t

और $\beta yt = V$

उपरोक्त समीकरण से t को हटाने पर

$\frac{\beta y}{v} . \frac{x}{\upsilon} = 1 \qquad \text{or} \qquad xy = \frac{v^2}{\beta}$

$\Rightarrow$ locus of P is a Hyperbola.

$\Rightarrow$ अतः P का बिन्दुपथ अतिपरवलय होगा

(b) Here coordinate at point $C = \left(\frac{1}{2}Nt^2,\ 0\right)$

(b) C बिन्दु के निर्देशांक $= \left(\frac{1}{2}Nt^2,\ 0\right)$

$\therefore \quad \vec{\omega} \times \overrightarrow{CP} + v\hat{i} = 0$

$\Rightarrow \quad \omega\hat{k} \times \left[(x - \frac{1}{2}w\ \ t^2)\hat{i} + y\hat{j}\right] + w\ \ t\hat{i} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{2}w\ \ t^2$

$\omega y = w\,t$

from these eliminating t,

t को हटाने पर

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}w\ \left(\frac{\omega}{w}\right)^2 y^2$

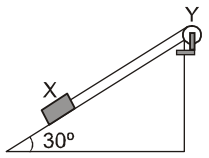
$\Rightarrow \quad x = \frac{\omega^2}{2\ \ w} y^2$

Eqn. of parabola.

समीकरण परवलय की है।

8. A block X of mass 0.5 kg is held by a long massless string on a fixed frictionless inclined plane inclined at 30º to the horizontal. The string is wound on a uniform solid cylindrical drum Y of mass 2 kg and radius 0.2 m as shown in figure. The drum is given an initial angular velocity such that block X starts moving up the plane.

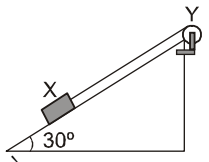
0.5 kg का एक ब्लॉक X, एक लम्बी व द्रव्यमानरहित रस्सी की सहायता से घर्षणरहित नत तल जो क्षैतिज से 30º कोण पर झुका हुआ है, पर रखा जाता है। रस्सी को एक 2 kg द्रव्यमान व 0.2 m त्रिज्या के समरूप बेलन y पर चित्रानुसार लपेटा जाता है। बेलन को प्रारम्भिक कोणीय वेग इस प्रकार दिया जाता है कि ब्लॉक X, तल पर उपर की ओर गति प्रारम्भ करता है।



(a) Find the tension in the string during motion.

(b) At a certain instant of time the magnitude of the angular velocity of Y is 10 rad s^{-1}. Calculate the distance travelled by X from that instant of time until it comes to rest.

0.5 kg का एक ब्लॉक X, एक लम्बी व द्रव्यमानरहित रस्सी की सहायता से घर्षणरहित नत तल जो क्षैतिज से 30º कोण पर झुका हुआ है, पर रखा जाता है। रस्सी को एक 2 kg द्रव्यमान व 0.2 m त्रिज्या के समरूप बेलन y पर चित्रानुसार लपेटा जाता है। बेलन को प्रारम्भिक कोणीय वेग इस प्रकार दिया जाता है कि ब्लॉक X, तल पर उपर की ओर गति प्रारम्भ करता है।



(a) गति के दौरान रस्सी में तनाव ज्ञात करो।

(b) किसी क्षण Y के कोणीय वेग का परिमाण 10 rad s^{-1} है, तो उस क्षण के बाद विरामावस्था तक आने में X द्वारा तय दूरी ज्ञात करो।

Sol. $a = \alpha R$

$mg \sin 30^0 - T = ma$ .....(1)

or और $\frac{mg}{2} - T = ma$ .....(2)

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR}{\frac{1}{2}MR^2}$$

$$\alpha = \frac{2T}{MR} \quad .....(3)$$

Solving Equations (1), (2) and (3) for T, we get

T के लिए समीकरण (1), (2) तथा (3) को हल करने पर

$$T = \frac{1}{2}\frac{M\,mg}{M+2m}$$

Substituting the value, we get

$$T = \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{(2)(0.5)(9.8)}{2+(0.5)(2)}\right\} = 1.63 \text{ N}$$

$T = 1.63$ N

(ii) From Eq. (3) , angular retardation of drum

$$\alpha = \frac{2T}{MR} = \frac{(2)(1.63)}{(2)(0.2)} = 8.15 \text{ rad/s}^2$$

or linear retardation of block

$a = R\alpha = (0.2)\,(8.15) = 1.63 \text{ m/s}^2$

At the moment when angular velocity of drum is

$\omega_0 = 10$ rad/s

The linear velocity of block will be

$$v_0 = \omega_0 R = (10)\,(0.2) = 2 \text{ m/s}$$

Now, the distance (s) travelled by the block until it comes to rest will be given by
मान रखने पर हम प्राप्त करेंगे

$$T = \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{(2)(0.5)(9.8)}{2+(0.5)(2)}\right\} = 1.63 \text{ N}$$

$$T = 1.63 \text{ N}$$

समीकरण (iii) से ड्रम का कोणीय मंदन

$$\alpha = \frac{2T}{MR} = \frac{(2)(1.63)}{(2)(0.2)} = 8.15 \text{ rad/s}^2$$

ब्लॉक का रेखीय मंदन

$$a = R\alpha = (0.2)\,(8.15) = 1.63 \text{ m/s}^2$$

वह क्षण जब ड्रम का कोणीय वेग

$$\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$

ब्लॉक का रेखीय वेग

$$v_0 = \omega_0 R = (10)\,(0.2) = 2 \text{ m/s}$$

अब ब्लॉक द्वारा तय दूरी जब तक यह विराम में नहीं आ जाये

$$s = \frac{v_0^2}{2a} \qquad [\text{ Using } v^2 = v_0^2 - 2as \text{ with } v = 0\ ]$$

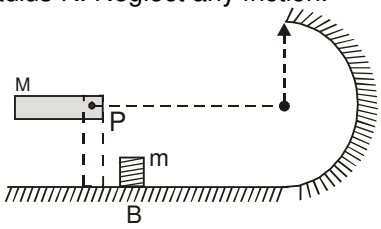
$$s = \frac{v_0^2}{2a} \qquad [\ v^2 = v_0^2 - 2as \text{ का उपयोग करने पर } v = 0\ ]$$

$$= \frac{(2)^2}{2(1.63)} \text{ m}$$

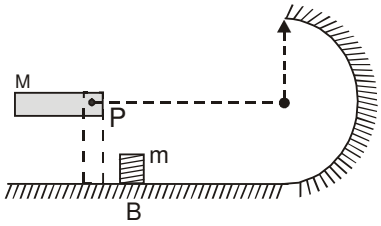
or या $s = 1.22$ m

Ans. (a) 1.633 N (b) 1.224 m

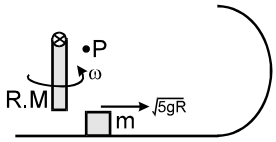
9. A rod of length R and mass M is free to rotate about a horizontal axis passing through hinge P as in figure. First it is taken aside such that it becomes horizontal and then released. At the lowest point the rod hits the small block B of mass m and stops. Find the ratio of masses such that the block B completes the circular track of radius R. Neglect any friction.



M द्रव्यमान व R लम्बाई की एक छड़ चित्रानुसार P पर निलम्बन से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष घूमने के लिये स्वतंत्र है। पहले इसे इस प्रकार लेते हैं कि यह क्षैतिज होती है और फिर छोड़ते हैं। छड़ निचले बिन्दु पर m द्रव्यमान के एक छोटे ब्लॉक B से टकराती है व रूक जाती है। द्रव्यमानों के अनुपात ज्ञात कीजिए, ताकि छोटा ब्लॉक B, R त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर पूरा चक्कर लगाता है। सभी घर्षण नगण्य है।



Sol. Minimum velocity required by block 'm' to complete the motion in $\sqrt{5gR}$



conserving mech. energy

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mg\,.\,\frac{R}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{MgR}{I}}$$

Cons. angular momentum wrt P before & after collision.

$$I\omega = m.R\ \sqrt{5gR}$$

$$I\sqrt{\frac{MgR}{I}} = mR\ \sqrt{5gR}$$

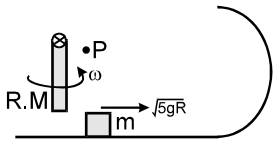
$$MgRI = m^2R^2\ 5gR$$

putting $I = \frac{ML^2}{3}$

$$\frac{M}{m} = \sqrt{15}$$

Ans. : $\frac{M}{m} = \sqrt{15}$

Sol. ब्लॉक 'm' को पूरा एक चक्कर लगाने के लिए न्यूनतम वेग $\sqrt{5gR}$ होना चाहिए।



यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण से

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = Mg - \frac{R}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{MgR}{I}}$$

बिन्दु P के सापेक्ष टक्कर तथा टक्कर के बाद कोणीय संवेग संरक्षण से

$$I\omega = m.R\ \sqrt{5gR}$$

$$I\sqrt{\frac{MgR}{I}} = mR\sqrt{5gR}$$

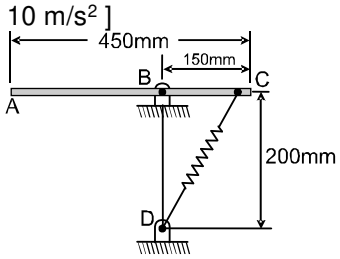
$$MgRI = m^2R^2\ 5gR$$

$I = \frac{ML^2}{3}$ रखने पर

$$\frac{M}{m} = \sqrt{15}$$

Ans. : $\frac{M}{m} = \sqrt{15}$

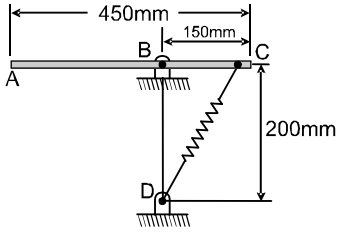
10. A 3 kg uniform rod rotates in a vertical plane about a smooth pivot at B. A spring of constant k = 300 N/m and of unstretched length 100 mm is attached to the rod as shown. Knowing that in the position shown the rod has an angular velocity of 4 rad/s clockwise, determine the angular velocity of the rod after it has rotated through. [g = 10 m/s^2]



(D is vertically below B)

(a) 90º (b) 180º

3 kg की एक समान छड़ एक चिकने निलम्बन B के सापेक्ष एक ऊर्ध्वाधर तल में घूमती है। एक स्प्रिंग जिसका नियतांक k = 300 N/m तथा लम्बाई (बिना खींची अवस्था में) 100 mm है, छड़ से चित्रानुसार जुड़ी है। यह जानते हैं कि इस अवस्था में छड़ का कोणीय वेग 4 रेडियन/सेकण्ड दक्षिणावर्त है। छड़ का कोणीय वेग ज्ञात करो, जबकि यह क्रमशः घूमती है ; [g = 10 m/s^2]



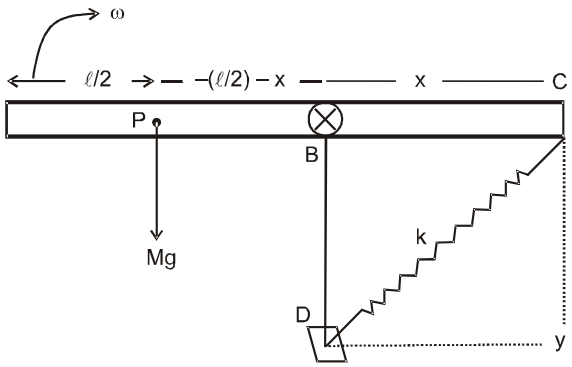
(D, B के उर्ध्वाधर नीचे है)

(a) 90º से

(b) 180º से

Ans. (a) $\frac{2}{3}\sqrt{86}$ rad/s (b) 4 rad/s

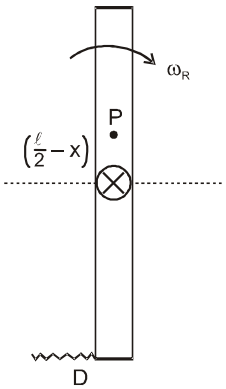
Sol. (i)



L = Natural length of spring

L = स्प्रिंग को बिना खोली अवस्था में लम्बाई

(ii)



(a) By energy conservation from (i) to (ii)

(a) (i) तथा (ii) में ऊर्जा संरक्षण से

$$\left[\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}I\omega_1^2+mg\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\right] \quad \text{..... (i)}$$

$$I = I_{cm} + \left(\frac{\ell}{2}-x\right)^2,$$

$$I = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}-x\right)^2 \quad \text{..... (ii)}$$

$$\left(x=\sqrt{x^2+y^2}-L\right) \quad \text{..... (iii)}$$

Put equation (ii) and (iii) in equation (i)

समीकरण (ii) तथा (iii) को (i) में रखने पर

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-x\right)^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}K\left(\sqrt{x^2+y^2}-L\right)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-x\right)^2\right)\omega_1^2+mg\left(\frac{\ell}{\alpha}-x\right)$$

x = 150 mm, y = 20 mm, ℓ = 450 mm, K = 300 N/m

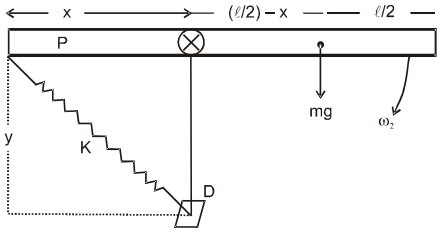
m = 3 kg, ω = 4 rad/sec

Put all the data समीकरण में मान रखने पर

$$\omega_1 = \frac{2}{3}\sqrt{86} \text{ rad/sec}$$

(b) rotating to 180° condition is

(b) 180° घुमाने पर



This is like a initial condition so $\omega_2 = \omega$

ω_2 = 4 rad / sec

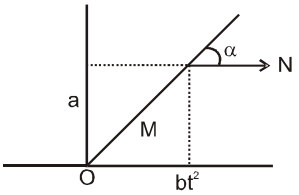
यह प्रारम्भिक स्थिति की तरह है, अतः $\omega_2 = \omega$

ω_2 = 4 rad / sec.

11. The angular momentum of a particle relative to a certain ' point O varies with time as $\vec{M} = \vec{a} + \vec{b}t^2$, where $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are constant vectors, with $\vec{a} \perp \vec{b}$. Find the force moment N relative to the point O acting on the particle when the angle between the vectors N and M equals 45°.
किसी कण का एक निश्चित बिन्दु 'O' के सापेक्ष कोणीय संवेग समय के साथ $\vec{M} = \vec{a} + \vec{b}t^2$ के अनुसार परिवर्तित होता है, जहाँ $\vec{a}$, $\vec{b}$ नियत सदिश व $\vec{a} \perp \vec{b}$ है। कण पर कार्यरत बल आघूर्ण N का बिन्दु 'O' के सापेक्ष मान ज्ञात कीजिए जब सदिश N व M के मध्य कोण 45° है।

Ans : $N = 2b\sqrt{\frac{a}{b}}$

Sol.



Force moment relative to point O
O बिन्दु के सापेक्ष बल आघूर्ण

$$\vec{N} = \frac{d\vec{M}}{dt} = 2\vec{b}t$$

Let the angle between $\vec{M}$ and $\vec{N}$
माना $\vec{M}$ तथा $\vec{N}$ के बीच कोण

$\alpha = 45^\circ$ at $t = t_0$

Then तब $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{M} \cdot \vec{N}}{|M||N|} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}t_0^2).2\vec{b}t_0}{\sqrt{a^2 + b^2t_0^4}\ 2bt_0}$

$$= \frac{2b^2t_0^3}{\sqrt{a^2 + b^2t^4}\ .\ 2bt_0} = \frac{bt_0^2}{\sqrt{a^2 + b^2t_0^4}}$$

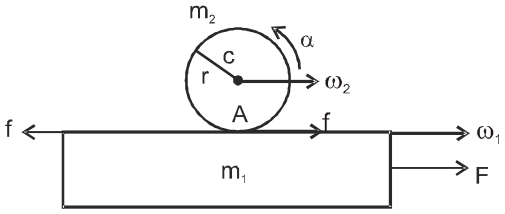
Solving हल करने पर, $t_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$ (as t_0 cannot be nagative) (t_0 ऋणात्मक नहीं हो सकता)

Therefore अतः $\vec{N} = 2\vec{b}t_0 = 2\vec{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$

12. A plank of mass m_1 with a uniform sphere of mass m_2 placed on it rests on a smooth horizontal plane. A constant horizontal force F is applied to the plank. With what accelerations will the plank and the centre of the sphere move provided there is no sliding between the plank and the sphere?
m_1 द्रव्यमान का एक समान तख्ता, इस पर रखे m_2 द्रव्यमान के एक समान गोले सहित एक घर्षणहीन क्षैतिज तल पर विरामावस्था में स्थित है। F परिमाण का एक नियत क्षैतिज बल तख्ते पर आरोपित किया जाता है। तख्ता और इस पर स्थित गोले का केन्द्र किस त्वरण से गति करेंगे, जबकि तख्ते और गोले के मध्य कोई फिसलन नहीं है।

Ans : $\mathbf{w_1 = F/(m_1 + 2/7m_2);\quad w_2 = 2/7\ w_1.}$

Sol.



α = angular acceleration

α = angular acceleration
For the plank

$F - f = m_1\omega_1$ ..... (i)

For sphere torque about point C

$$fr = I_c\alpha = \frac{2}{5}m_2r^2\alpha \qquad \text{..... (ii)}$$

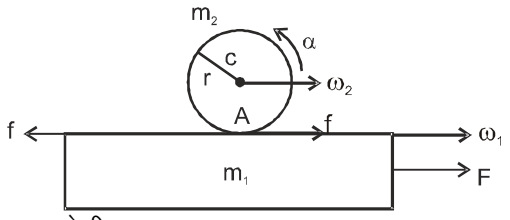
assuming ω_2 is the acceleration of COM of sphere at point A

$$(\omega_1 = \omega_2 + \alpha r) \qquad \text{..... (iii)}$$

From equation (i), (ii) and (iii)

$$\omega_1 = \frac{F}{\left(m_1 + \frac{2}{7}m_2\right)} \quad \text{and} \quad \omega_2 = \left(\frac{2}{7}\omega_1\right)$$

Sol.



α = कोणीय त्वरण

α = कोणीय त्वरण

तख्ते के लिए

$$F - f = m_1\omega_1 \qquad \text{..... (i)}$$

गोले के लिए बल आघूर्ण C बिन्दु के सापेक्ष

$$fr = I_c\alpha = \frac{2}{5}m_2r^2\alpha \qquad \text{..... (ii)}$$

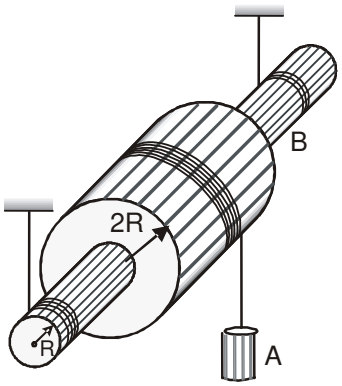
माना ω_2 गोले के द्रव्यमान केन्द्र का कोणीय त्वरण A बिन्दु पर है।

$$(\omega_1 = \omega_2 + \alpha r) \qquad \text{..... (iii)}$$

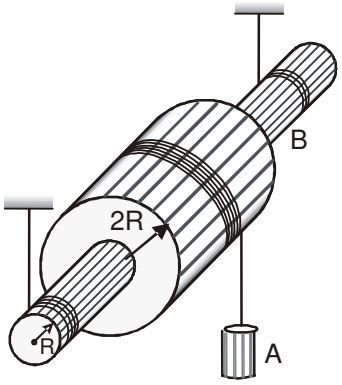
समीकरण (i), (ii) तथा (iii) से

$$\omega_1 = \frac{F}{\left(m_1 + \frac{2}{7}m_2\right)} \quad \text{तथा} \quad \omega_2 = \left(\frac{2}{7}\omega_1\right)$$

13. In the arrangement shown in the figure weight A possesses mass m, a pulley B possesses mass M. Also known are the moment of inertia I of the pulley relative to its axis and the radii of the pulley are R and 2R respectively. Consider the mass of the threads is negligible. Find the acceleration of weight A after the system is set free. (Assume no slipping takes place anywhere and axis of cylinder remains horizontal)

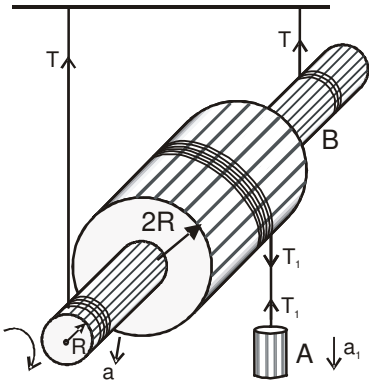


नीचे प्रदर्शित चित्र व्यवस्था में भार A का द्रव्यमान m तथा एक पुली B का द्रव्यमान M है। अपनी अक्ष के सापेक्ष पुली का जड़त्व आघूर्ण I है और पुली की त्रिज्याऐं क्रमशः R और 2R है। धागे के द्रव्यमान को नगण्य मानिए। निकाय को स्वतंत्र छोड़ने के पश्चात् भार A का त्वरण ज्ञात कीजिए। (बेलन की अक्ष क्षैतिज है एवं कहीं भी फिसलन नहीं मानें)



Ans : $w = 3g(M + 3m) / (M + 9m + I/R^2)$

Sol.



For cylinder बेलन के लिए

$Mg + T_1 - 2T = Ma$ .....(i)

Torque about axis of rotation घूर्णन अक्ष के सापेक्ष बल आघूर्ण

$$2TR + T_1(2R) = I.\alpha = \left(I \cdot \frac{a}{R}\right) \text{....(ii)} \quad (a = \alpha R)$$

For weight A A भार के लिए

$mg - T_1 = ma_1$

No slipping between pulleys and thread

घिरनी व डोरी के मध्य कोई फिसलन नहीं है।

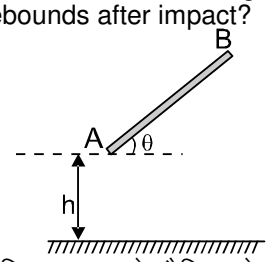
$a_1 = a + \alpha(2R) = (3a)$ ....(iii)

From equation (i), (ii) and (iii)

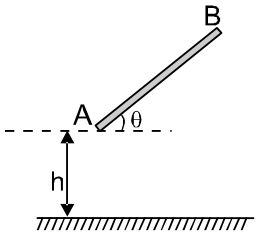
समीकरण (i), (ii) तथा (iii) से

$$\left\{a_1 = \frac{3(M+3m)\ g}{\left(M+9m+\frac{I}{R^2}\right)}\right\}$$

14. A uniform rod AB of length ℓ is released from rest with AB inclined at angle θ with horizontal. It collides elastically with smooth horizontal surface after falling through a height h. What is the height upto which the centre of mass of the rod rebounds after impact?



ℓ लम्बाई की समरूप छड़ AB को विरामावस्था से क्षैतिज से θ कोण पर झुकी हुई अवस्था से छोड़ा जाता है। यह h ऊँचाई से गिरकर घर्षण रहित क्षैतिज फर्श से प्रत्यास्थ टक्कर करती है। टक्कर के बाद छड़ का द्रव्यमान केन्द्र किस ऊँचाई तक वापस उछलता है।



Ans. $H = \left(\frac{1 - 3\cos^2\theta}{1 + 3\cos^2\theta}\right)^2 h$; $h = \frac{49\pi\ell}{144}$

Sol. Velocity of end A at the moment it strikes ground = $\sqrt{2gh}$. If velocity of COM of rod just after collision v′ and angular velocity acquired by the rod is ω clockwise as shown then using equation for coefficient of restitution velocity of approach = velocity of sep. (applied at point A).

$$\sqrt{2gh} = v' + \frac{L}{2}\omega\cos\theta \qquad \text{.....(1)}$$

Angular momentum can be conserved about A just before collision & after collision as only impulsive force will be acting at A only.

$$\sqrt{2gh}\ M\frac{L}{2}\cos\theta = I_{cm}\,\omega - Mv'\frac{L}{2}\cos\theta \qquad \text{.....(2)}$$

Putting value of $\omega = (\sqrt{2gh} - v')\frac{2}{L\cos\theta}$

from (1)

$$\sqrt{2gh}\ M.\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{ML^2}{12}(\sqrt{2gh} - v')\frac{2}{L\cos\theta} - Mv'\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\frac{L}{6\cos\theta}v' + \frac{L\cos\theta v'}{2} = \frac{L\sqrt{2gh}}{6\cos\theta}\frac{\sqrt{2gh}}{2}\ L\cos\theta$$

$$v'\left[\frac{1+3\cos^2\theta}{6\cos\theta}\right] = \frac{(1-3\cos^2\theta)}{6\cos\theta}\sqrt{2gh}$$

$$v' = \left(\frac{1-\cos^2\theta}{1+3\cos}\right)\sqrt{2gh}$$

COM will of at maximum height when its velocity becomes zero during upward motion.

$$O = v'^2 - 2gH$$

$$H = \frac{v'^2}{2g} = \left(\frac{1-3\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta}\right)^2 h.$$

[Ans.: $H = \left(\frac{1-3\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta}\right)^2 h$; $h = \frac{49\pi\ell}{144}$]

Sol. A भाग की धरातल से टकराते समय वेग $=\sqrt{2gh}$

यदि टक्कर के ठीक बाद द्रव्यमान केन्द्र का वेग v′ हो छड़ द्वारा प्राप्त कोणीय वेग ω दक्षिणावर्त दिशा में चित्रानुसार है। प्रत्यावस्थता गुणांक की समीकरण का उपयोग करने पर पास आने का वेग = दूर जाने का वेग (A बिन्दु पर)

$$\sqrt{2gh} = v' + \frac{L}{2}\omega\cos\theta \qquad .....(1)$$

क्योंकि A बिन्दु पर आवेगित बल कार्यरत है। इसलिए A बिन्दु के सापेक्ष टक्कर के पहले तथा टक्कर के बाद कोणीय संवेग संरक्षण से

$$\sqrt{2gh}\ M\frac{L}{2}\cos\theta = I_{cm}\,\omega - Mv'\frac{L}{2}\cos\theta \qquad .....(2)$$

$\omega = (\sqrt{2gh} - v')\frac{2}{L\cos\theta}$ का मान रखने पर

समीकरण (1) से

$$\sqrt{2gh}\ M.\frac{L}{2}\cos\theta = \frac{ML^2}{12}(\sqrt{2gh} - v')\frac{2}{L\cos\theta} - Mv'\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\frac{L}{6\cos\theta}v' + \frac{L\cos\theta v'}{2} = \frac{L\sqrt{2gh}}{6\cos\theta}\frac{\sqrt{2gh}}{2}\ L\cos\theta$$

$$v'\left[\frac{1+3\cos^2\theta}{6\cos\theta}\right] = \frac{(1-3\cos^2\theta)}{6\cos\theta}\sqrt{2gh}$$

$$v' = \left(\frac{1-\cos^2\theta}{1+3\cos}\right)\sqrt{2gh}$$

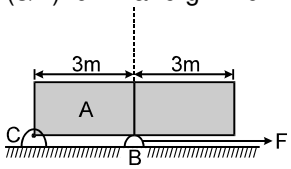
द्रव्यमान केन्द्र ऊपर जाते समय अधिकतम ऊचाई पर होगा जब उसका वेग शून्य हो जाएगा।

$$O = v'^2 - 2g\,H$$

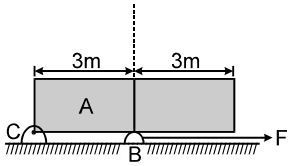
$$H = \frac{v'^2}{2g} = \left(\frac{1-3\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta}\right)^2 h.$$

[Ans.: $H = \left(\frac{1-3\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta}\right)^2 h;\ h = \frac{49\pi\ell}{144}$]

15. A uniform block A of mass 25 kg and length 6m is hinged at C and is supported by a small block B as shown in the Figure . A constant force F of magnitude 400N is applied to block B horizontally . What is the speed of B after it moves 1.5 m ? The mass of block B is 2.5 kg & the coeffcient of friction for all contact surfaces is 0.3. [use ln (3/2) 0.41 and g = 10 ms^{-2}]



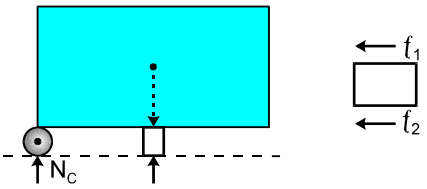
25 kg तथा 6m लम्बाई का एक–समान ब्लॉक A,C बिन्दु पर निलम्बित है तथा छोटा ब्लॉक B सम्पर्क के लिए चित्रानुसार रखा जाता है। F = 400N का एक नियत बल ब्लॉक B पर चित्रानुसार क्षैतिज दिशा में लगाया जाता है। B की चाल क्या होगी ? जब यह 1.5 m दूरी तय करता है। B का द्रव्यमान 2.5 kg तथा सभी० सम्पर्क सतह पर घर्षण गुणांक 0.3 है। [ln (3/2) 0.41 तथा g = 10 ms^{-2}]



Ans. $\sqrt{323.4}$ m/s or 18.52 m/sec.

Sol. $N_C + N_B = 250$

$N_B - x = 250 \times 3$



$N_B = \frac{750}{x}$, $f_1 = \frac{750}{x}\mu$

$f_2 = \left[\frac{750}{x} + 25\right] \mu$

workdone against friction

घर्षण के विरूद्ध किया गया कार्य

$$W = \int (f_1 + f_2)\ dx = \int_3^{4.5} \left(\frac{1500}{x} \times 0.3 + 7.5\right) dx = 450\ \ell n\frac{3}{2} + 7.5\ (4.5 - 3)$$

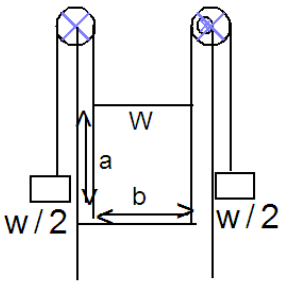
$$= 450 \times 0.41 + 7.5 \times 1.5$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 400 \times 1.5 - 195.75$$

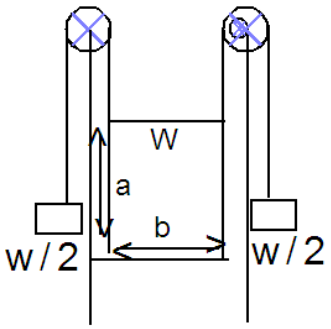
$$v^2 = (600 - 195.75) \times \frac{2}{2.5} \qquad = 161.7 \times 2 \qquad = 323.4$$

$v = 18.52$ m/sec.

16. A window (of weight w) is supported by two strings passing over two smooth pulleys in the frame of the window in which window just fits in, the other ends of the string being attached to weights each equal to half the weight of the window. One thread breaks and the window moves down. Find acceleration of the window if μ is the coefficient of friction, and 'a' is the height and 'b' the breadth of the window .



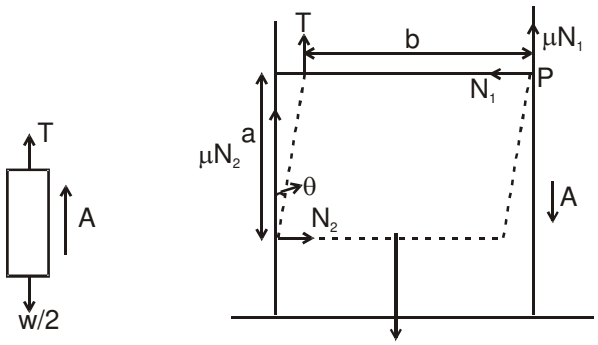
w भार की खिड़की को, दो रस्सियों से आदर्श घिरनी द्वारा चित्रानुसार जोड़ा जाता है। रस्सी के अन्तिम सिरे पर खिड़के के भार से आधे भार (w/2) के ब्लॉक जुड़े हुए है तथा खिड़की, खिड़की के फ्रेम में हल्के से रखी हुई है। एक रस्सी को काटा जाता है। जिससे खिड़की नीचे की ओर गति करती है। खिड़की का त्वरण क्या होगा यदि, μ फ्रेम तथा खिड़की की सतह के लिए घर्षण गुणांक हो व 'a' तथा 'b' खिड़की की ऊचाँई तथा चौड़ाई हो।



Ans. $A = \left(\frac{a - \mu b}{3a + \mu b}\right) g$

Sol. θ is very small θ बहुत छोटा है।

$\theta \approx 0^\circ$



Force balance in horizontal direction
क्षैतिज दिशा में बल संतुलित करने पर

$N_1 = N_2$

balancing torque about point P
P बिन्दु के सापेक्ष बल आघूर्ण संतुलित करने पर

For θ to be very small we can directly write

$$T.b + \mu N_2 b - \frac{Wb}{2} - N_2 a = 0$$

Force in y direction if acceleration of windows is A
यदि खिड़की का त्वरण A हो तो y दिशा में बल

$$w - \mu N_1 - \mu N_2 - T = \frac{wA}{g} \qquad \text{... (ii)}$$

For block ब्लॉक के लिए

$$T - \frac{W}{2} = \frac{WA}{2g}$$

$$T = \left(\frac{W}{2} + \frac{WA}{2g}\right) \qquad \text{.... (iii)}$$

Put equation (iii) in equation (i)
समीकरण (iii) को समीकरण (i) में रखने पर

$$\frac{W}{2} b + \frac{W}{2g} Ab + \mu N_1 b = N_1 a + \frac{Wb}{2}$$

$$\frac{WAb}{2g} = N_1 (a - \mu b)$$

$$N_1 = \left\{\frac{WAb}{2g\ (a - \mu b)}\right\} \qquad \text{..... (iv)}$$

Put N_1 and T in equation (ii)
N_1 तथा T का मान समीकरण (ii) में रखने पर

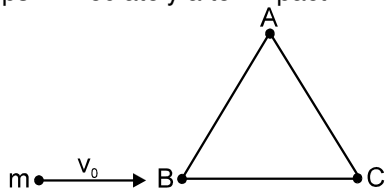
$$W - 2\mu \left(\frac{WAb}{2g\ (a - \mu b)}\right) - \frac{W}{2} - \frac{WA}{2g} = \frac{WA}{g}$$

$$\frac{W}{2} - \frac{\mu\ WAb}{g\ (a - \mu b)} = \frac{3WA}{2g}, \qquad 1 - \frac{2\mu\ Ab}{g\ (a - \mu b)} = \frac{3A}{g}$$

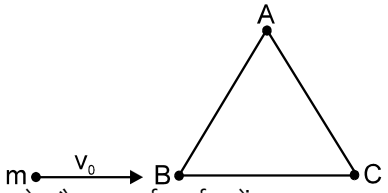
$$g (a - \mu b) = (2\mu b + 3a - 3\mu b)A$$

$$A = \frac{(a - \mu b)\ g}{(3a - \mu b)}$$ **Ans.**

17. Three particles A, B, C of mass m each are joined to each other by massless rigid rods to form an equilateral triangle of side a. Another particle of mass m hits B with a velocity v_0 directed along BC as shown. The colliding particle stops immediately after impact.



(a) Calculate the time required by the triangle ABC to complete half revolution in its subsequent motion.
(b) What is the net displacement of point B during this interval ?
तीन कण A, B, C प्रत्येक का द्रव्यमान m है एक द्रव्यमान रहित दृढ़ छड़ द्वारा जुड़े हैं जो एक 'a' भुजा का समबाहु त्रिभुज बनाते हैं। कोई 'm' द्रव्यमान का अन्य कण v_0 वेग से BC भुजा की दिशा में 'B' कण से चित्रानुसार टकराता है। टकराने वाला कण टक्कर के तुरन्त बाद रूक जाता है -

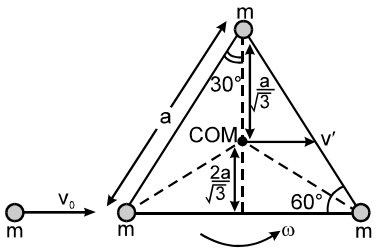


(a) त्रिभुज ABC द्वारा उसके अग्र गति के दौरान अर्द्ध घूर्णन में लगा समय ज्ञात करो।
(b) इस समयान्तराल में कण B का कुल विस्थापन क्या है।

Ans. (a) $t = \frac{6a\pi}{\sqrt{3}\,v_0}$ (b) $s = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{1 + \left(2\pi + \sqrt{3}\right)^2}$

Sol. After collision, let COM move by velocity v′ and
system starts rotating by angular velocity ω about COM.
Using cons. of linear momentum
टक्कर के बाद, माना COM, V वेग से गति करता है, और निकाय COM के सापेक्ष ω कोणीय वेग से घुमाना प्रारम्भ कर देता है। रेखीय संवेग संरक्षण लगाने पर

$$mv_0 = 3mv' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v_0}{3}$$



conserving angular momentum about COM
COM के सापेक्ष कोणीय संवेग संरक्षण लगाने पर

$$mv_0.\frac{a}{2\sqrt{3}} = I\omega = \left(\frac{ma^2}{3}\times 3\right).\omega = ma^2\omega$$

$$\omega = \frac{v_0}{2\sqrt{3}\ a}$$

(a) Time to complete half revolution. आधा चक्कर पूरा करने में लगा समय

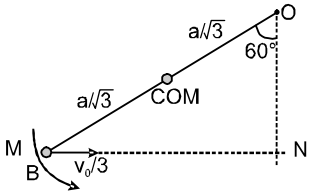
$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{2\sqrt{3}\ a\pi}{v_0}$$

(b) Particle 'B' completes half cycle during this duration. It's position const. COM in shown.

इस अन्तराल में कण 'B' आधा चक्कर पूरा करता है। इसकी स्थिति में COM दिखाई गई स्थिति

Disp. of B in x-direction = Disp. due to linear motion of COM
+ Disp. due to Angular motion.

x-दिशा में B का विस्थापन = COM के रेखीय गति के कारण विस्थापन + कोणीय गति के कारण विस्थापन



$x_B = \frac{v_0}{3}.t + MN$

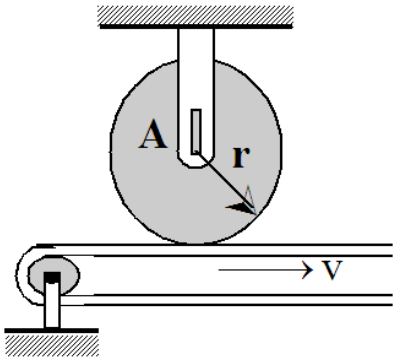
$= \frac{v_0}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}\ a\pi}{v_0} + \frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} a\pi + a$

Disp. in Y-direction Y दिशा में विस्थापन

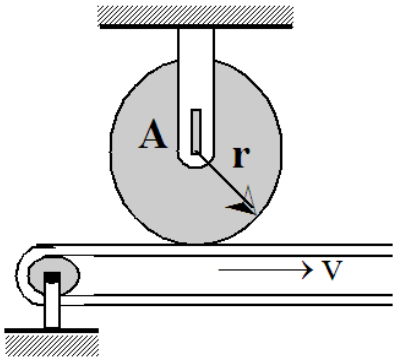
$Y_B = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cos 60° = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Total displacement कुल विस्थापन $= \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$

18. Disk A has a mass of 4 kg and a radius r = 75 mm, it is at rest when it is placed in contact with the belt, which moves at a constant speed υ = 18 m/s . Knowing that μ_k = 0.25 between the disk and the belt, determine the number of revolutions executed by the disk before it reaches a constant angular velocity . (Assume that the normal reaction by the belt on the disc is equal to weight of the disc) .

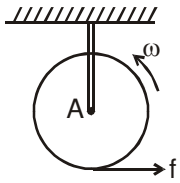


4 kg तथा r = 75 mm, त्रिज्या की एक चकती A विराम अवस्था में नियत चाल υ = 18 m/s से गति करती हुई बेल्ट के सम्पर्क में रखी जाती है। μ_k = 0.25 चकती की सतह तथा बेल्ट के बीच घर्षण गुणांक है। चकती के नियत कोणीय चाल तक पहुँचने से पहले चकती द्वारा तय चक्करों की संख्या क्या होगी। (माना बेल्ट द्वारा चकती पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल चकती के भार के बराबर है)



Ans. $\frac{216}{\pi}$

Sol.



$f = \mu mg$

Torque about A

A बिन्दु के सापेक्ष बल आघूर्ण

$$R(\mu mg) = \frac{mR^2}{2} \cdot \alpha$$

$$\frac{2\mu g}{R} = \alpha$$

$$\frac{2 \times 0.25 \times 10}{R} = \alpha$$

$$\alpha = \left(\frac{5}{R}\right)$$

at constant angular speed

नियत कोणीय चाल पर

$$\omega = \left(\frac{v}{R}\right)$$

$$\left(\frac{v}{R}\right)^2 = 2\alpha \quad (2\pi n)$$

$$n = \left(\frac{v^2}{4\alpha\pi R^2}\right) = \frac{18 \times 18}{4 \times 5.R.\pi}$$

$$n = \left(\frac{18 \times 18}{20.R.\pi}\right) = \frac{18 \times 18}{20 \times 75 \times 10^{-3} \times \pi}$$

$$n = \frac{18 \times 18 \times 10^3}{20 \times 75 \times \pi} = \left(\frac{6 \times 18 \times 10^3}{20 \times \pi \times 20}\right)$$

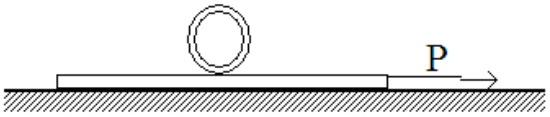
$$n = \left(\frac{6 \times 18 \times 4}{\pi \times 2}\right)$$

$$n = \frac{36\pi 6}{\pi} = \frac{216}{\pi}$$

Number of revolutions executed by the disk before it comes at constant angular velocity $n = \left(\frac{216}{\pi}\right)$.

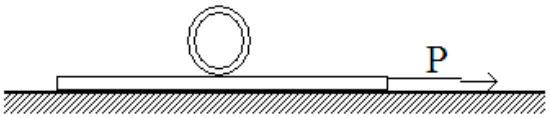
नियत कोणीय वेग पर आने से पहले चकती द्वारा लगाये गये चक्करों की संख्या $n = \left(\frac{216}{\pi}\right)$.

19. A 160 mm diameter pipe of mass 6 kg rests on a 1.5 kg plate . The pipe and plate are initially at rest when a force P of magnitude 25 N is applied for 0.75 s . Knowing that $\mu_s = 0.25$ & $\mu_k = 0.20$ between the plate and both the pipe and the floor, determine ;



(a) whether the pipe slides with respect to the plate.
(b) the resulting velocities of the pipe and of the plate.

6kg व 160 mm व्यास का एक बेलन 1.5 kg की प्लेट पर विराम में है। बेलन तथा प्लेट प्रारम्भ में विराम में है जब P = 25 N का बल 0.75 s के लिए प्लेट पर लगाया जाता है। प्लेट तथा बेलन व धरातल के बीच घर्षण गुणांक $\mu_s = 0.25$ तथा $\mu_k = 0.20$ है तो ज्ञात करो ;

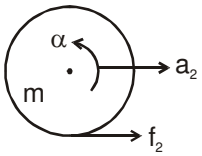


(a) क्या बेलन प्लेट के सापेक्ष फिसलेगा।
(b) बेलन तथा प्लेट का परिणामी वेग क्या होगा।

Ans. (a) pipe rolls without sliding (b) pipe : $\frac{5}{6}$ m/s $\rightarrow$, $\frac{125}{24}$ rad/s (ccw) ; plate : $\frac{5}{3}$ m/s $\rightarrow$

Ans. (a) पाइप बिना फिसले घूर्णन गति करेगा (b) पाइप : $\frac{5}{6}$ m/s $\rightarrow$, $\frac{125}{24}$ rad/s (ccw) ; प्लेट : $\frac{5}{3}$ m/s $\rightarrow$

Sol.



Friction on plate due to ground $f_1 = 7.5 \times 0.2 \times 10 = 15$
सतह के कारण प्लेट पर घर्षण $f_1 = 7.5 \times 0.2 \times 10 = 15$

$25 - 15 - f_2 = 1.5\, a_1$

$f_2 = 6a_2$

$10 = 1.5\, a_1 + 6a_2$ ....(i)

$f_2 \cdot r = mr^2 \cdot \alpha$

$\Rightarrow \quad f_2 = ma_2$ ...(ii)

$f_2 = ma_1 - ma_2$

$a_2 + r\alpha = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 - a_2 = a_2$

$\Rightarrow \quad a_2 = a_1 - a_2$

$\Rightarrow \quad a_1 = 2a_2$

$10 - 3a_1 = 1.5\, a_1$

$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{100}{45} = \frac{20}{9}$

$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{20}{18}$

$v_1 = a_1 t = \frac{20}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{3}$ (Plate) (प्लेट)

$v_2 = a_2 t = \frac{20}{18} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{6}$ (pipe). (पाइप)

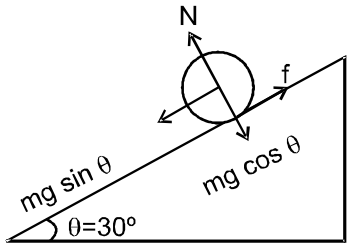
$\omega_2 = \frac{v_2}{r} = \frac{5}{6} x \frac{1000}{\frac{160}{2}} = 10.42$ rad/s (pipe) (पाइप)

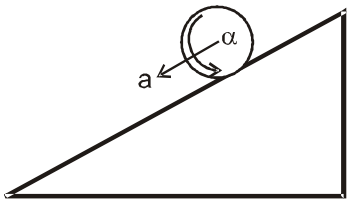
20. A uniform disc of mass m and radius R is rolling up a rough inclined plane, which makes an angle of 30º with the horizontal. If the coefficients of static and kinetic friction are each equal to μ and only the forces acting are gravitational, normal reaction and friction, then the magnitude of the frictional force acting on the disc is _____ and its direction is _____ (write 'up' or 'down') the inclined plane. **[JEE - 1997]**

20. m द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक समरूप चकती खुरदरे नत तल, जो क्षैतिज से 30º कोण बनाता है, पर ऊपर की ओर गतिशील है। यदि स्थैतिक व गतिज घर्षण गुणांक, प्रत्येक μ के बराबर है और केवल गुरूत्वीय व घर्षण बल ही कार्यरत हो, तब चकती पर कार्यरत घर्षण बल का परिमाण _____ है और नत तल पर इसकी दिशा _____ ('उपर' या 'नीचे' लिखिए)।

Ans. $\frac{mg}{6}$, up ऊपर

Sol. Under the given conditions only possibility is that friction is upwards and it accelerates downwards as shown below :





The equations of motion are :

$$a = \frac{mg\ \sin\theta\ -\ f}{m} = \frac{mg\ \sin\ 30^\circ\ -\ f}{m} = \frac{g}{2} - \frac{f}{m} \qquad .....(1)$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{fR}{I} = \frac{2f}{mR} \qquad .....(2)$$

For rolling (no slipping)

$a = R\alpha$ or $g/2 - f/m = 2f/m$

$\therefore \quad \frac{3f}{m} = g/2$ or $f = mg/6$

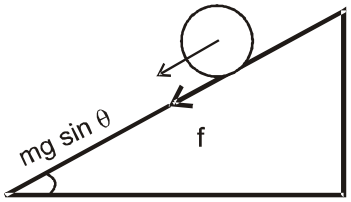
(1) $f \le f_{max}$

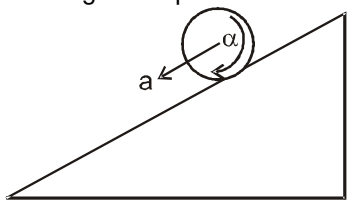
$\le \mu$ mg cos 30º $\le \frac{\sqrt{3}}{2}\ \mu$ mg

(2) Other possibilities which are not feasible are as follows :

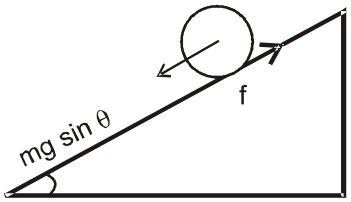
(a) Friction is downwards.

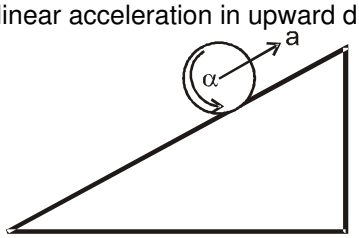
In this case a and α will be as shown and rolling is not possible.





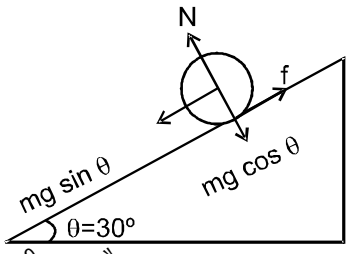
(b) Friction is upwards and the disc has linear acceleration in upward direction.

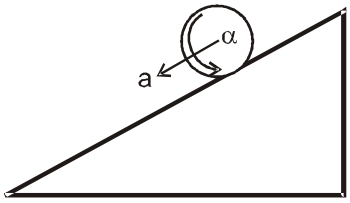




In this case also rolling is not possible.

Sol. दी गई शर्त के अन्तर्गत केवल यही सम्भव है कि घर्षण ऊपर की ओर व त्वरण नीचे की ओर है जैसा नीचे दर्शाया गया है।





गति की समीकरण है –

$$a = \frac{mg\ \sin\theta\ -\ f}{m} = \frac{mg\ \sin\ 30^\circ\ -\ f}{m} = \frac{g}{2} - \frac{f}{m} \qquad .....(1)$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{fR}{I} = \frac{2f}{mR} \qquad .....(2)$$

घूर्णन (बिना फिसले) के लिए

$a = R\alpha$ or $g/2 - f/m = 2f/m$

$\therefore \quad \frac{3f}{m} = g/2$ या $f = mg/6$

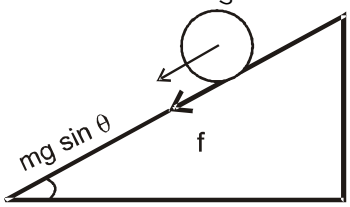
(1) $f \le f_{max}$

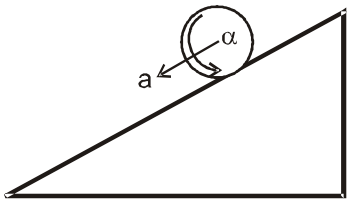
$$\le \mu\ mg \cos 30^\circ \le \frac{\sqrt{3}}{2}\mu\ mg$$

(2) अन्य सम्भावनाऐं जो सम्भव नहीं है निम्न है –

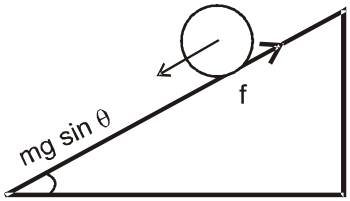
(a) घर्षण नीचे की ओर है।

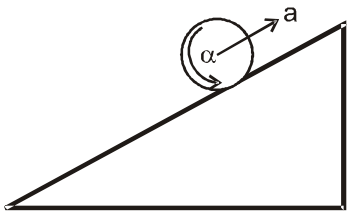
इस स्थिति में a व α दर्शाये अनुसार है।





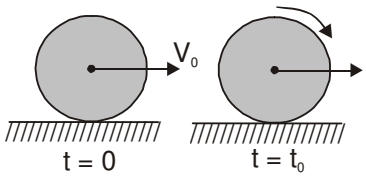
(b) चकती पर घर्षण ऊपर की ओर व रेखीय त्वरण ऊपर की ओर





इस स्थिति में घूर्णन सम्भव नहीं है।

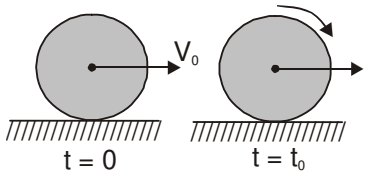
21. A uniform disc of mass m and radius R is projected horizontally with velocity v_0 on a rough horizontal floor so that it starts off with a purely sliding motion at t = 0. After t_0 seconds, it acquires a purely rolling motion as shown in figure.



(a) Calculate the velocity of the centre of mass of the disc at t_0 .

(b) Assuming the coefficient of friction to be μ, calculate t_0. Also calculate the work done by the frictional force as a function of time & the total work done by it over a time t much longer than t_0. **[JEE - 1997]**

m द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक समान चकती को एक खुरदरे क्षैतिज फर्श पर v_0 वेग से क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित किया जाता है, जिससे कि यह t = 0 समय पर शुद्ध फिसलन गति प्रारम्भ करती है। t_0 सेकण्ड पश्चात् यह शुद्ध लुढ़कन गति आरम्भ करती है, जैसा चित्र में प्रदर्शित किया गया है।

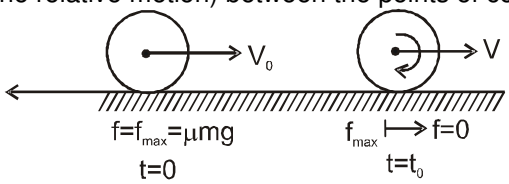


(a) t_0 पर चकती के द्रव्यमान केन्द्र का वेग ज्ञात कीजिए।

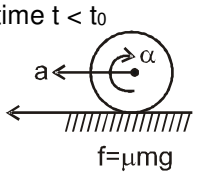
(b) घर्षण गुणांक μ मानते हुए t_0 की गणना कीजिए। समय के फलन में, घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य समय के फलन के रूप में तथा समय t, जो t_0 से बहुत अधिक है, में इसके द्वारा किया गया कुल कार्य ज्ञात कीजिए।

Ans. (a) $v = \frac{2v_0}{3}$; $t_0 = \frac{v_0}{3\mu g}$ (b) $w = -\mu mg\,(v_0 t - \frac{3}{2}\mu g t^2)$; $-\frac{1}{6}mv_0^2$

Sol. Between the time t = 0 to t = t_0. There is forward sliding, so friction, f is leftwards and maximum i.e., μ mg. For time t > t_0, friction f will become zero, because now pure rolling has started i.e., there is no sliding (no relative motion) between the points of contact.



So, for time t < t_0



Linear retardation, $\alpha = \frac{f}{m} = \mu g$ (f = μ mg)

and angular acceleration, $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{f\ R}{\frac{I}{2}mR^2} = \frac{2\mu g}{R}$

Now let V be the linear velocity and ω, the angular velocity of the disc at time t = t_0 then

$V = V_0 - at_0 = V_0 - \mu g t_0$ .....(1)

and $\omega = \alpha t_0 = \frac{2\mu g t_0}{R}$ .....(2)

For pure rolling to take place

$V = R\omega$

i.e., $V_0 - 2\mu t_o = 2\mu t_o$

$\Rightarrow$ $t_0 = \frac{V_0}{3\ \mu\ g}$

Substituting in Eq. (1), we have

$$V = V_0 - \mu g\left(\frac{V_0}{3\ \mu\ g}\right)$$

$$V = \frac{2}{3}V_0$$

Work done by friction

For $t \le t_0$, linear velocity of disc at any time t is $V = V_0 - \mu gt$ and angular velocity is $\omega = \alpha t = \frac{2\mu gt}{R}$. From work-energy theorem, work done by friction upto time t = Kinetic energy of the disc at time t – Kinetic energy of the disc at time t = 0

$$\therefore \quad W = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} mV_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m [V_0 - \mu gt]^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{2\mu gt}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} mV_0^2$$

$$= [mV_0^2 + m\mu^2g^2t^2 - 2mV_0\mu gt + 2m\mu^2g^2t^2 - mV_0^2]$$

$$\text{or} \quad W = \frac{m\mu gt}{2} [3\mu gt - 2V_0]$$

For $t > t_o$, friction force is zero i.e., work done by friction is zero. Hence, the energy will be conserved. Therefore, total work done by friction over a time t much longer then t_0 is total work done upto time t_0 (because beyond the work done by friction is zero) which is equal to

$$W = \frac{m\mu gt_0}{2} [3\mu gt_0 - 2V_o]$$

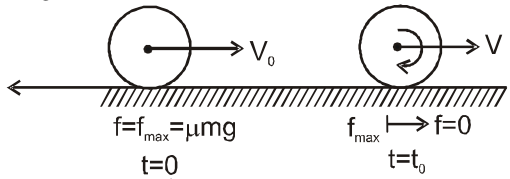
Substituting $t_0 = V_0/3\mu g$, we get

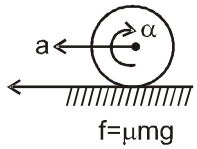
$$W = \frac{mV_0}{6} [V_0 - 2V_0]$$

$$W = -\frac{mV_0^2}{6}$$

Sol. t = 0 से $t = t_0$ समय के मध्य, यहाँ आगे की ओर फिसलन हो रही है। इसलिए घर्षण f बांयी ओर है एवं अधिकतम है। अर्थात् μ mg है। $t > t_0$, समय के लिए, घर्षण f शून्य है। क्योंकि शुद्ध घूर्णन गति प्रारम्भ हो गई है। अर्थात् यहाँ सम्पर्क बिन्दुओं के मध्य कोई फिसलन (सापेक्ष गति) नहीं है।

इसलिए $t < t_0$ के लिए





रेखीय त्वरण , $\alpha = \frac{f}{m} = \mu g$ (f = μ mg)

और कोणीय त्वरण, $\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{\frac{f\ R}{I}}{2} mR^2 = \frac{2\mu g}{R}$

अब V रेखीय वेग है और ω कोणीय वेग है। तब $t = t_0$ चकती का

$$V = V_0 - at_0 = V_0 - \mu gt_0 \qquad ......(1)$$

$$\text{और} \quad \omega = \alpha\, t_0 = \frac{2\mu gt_0}{R} \qquad ......(2)$$

शुद्ध घूर्णन के लिए

$$V = R\omega$$

अर्थात् $\quad V_0 - 2\mu t_o = 2\mu t_o$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \frac{V_0}{3\ \mu\ g}$$

समीकरण (1), में रखने पर, हम प्राप्त करते है

$$V = V_0 - \mu g \left(\frac{V_0}{3 \ \mu \ g} \right)$$

$$V = \frac{2}{3} V_0$$

घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य

$t \le t_0$ के लिए, किसी समय t पर चकती का रेखीय वेग $V = V_0 - \mu gt$ है और कोणीय वेग $\omega = at = \frac{2\mu gt}{R}$ है। कार्य ऊर्जा प्रमेय से, t समय में घर्षण द्वारा किया गया कार्य = t समय पर चकती की गतिज ऊर्जा – समय (t = 0) पर चकती की गतिज ऊर्जा

$$\therefore \qquad W = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} mV_0^2$$

$$= \frac{1}{2} m [V_0 - \mu gt]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} mR^2 \right) \left(\frac{2\mu gt}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} mV_0^2$$

$$= \frac{1}{2} [mV_0^2 + m\mu^2 g^2 t^2 - 2mV_0 \mu gt + 2m\mu^2 g^2 t^2 - mV_0^2]$$

या $$W = \frac{m\mu gt}{2} [3\mu gt - 2V_0]$$

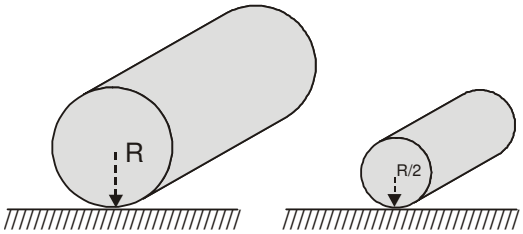
$t > t_0$ पर से लिए, घर्षण बल शून्य है। घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य शून्य है। अतः ऊर्जा संरचित रहेगी।
इसलिए, t समय मे घर्षण द्वारा किया गया कार्य t_0 तक किया गया कुल कार्य है। (क्योंकि इसके बाद घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य शून्य है।)

$$W = \frac{m\mu gt_0}{2} [3\mu gt_0 - 2V_0]$$

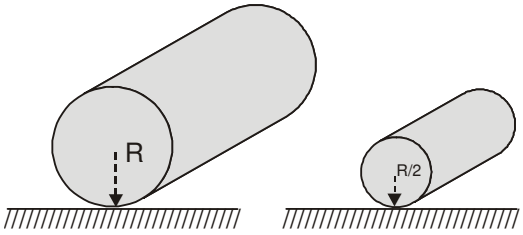
$t_0 = V_0/3\mu g$, रखने पर हम प्राप्त करते है

$$W = \frac{mV_0}{6} [V_0 - 2V_0], \quad W = -\frac{mV_0^2}{6}$$

22. A carpet of mass 'M' made of inextensible material is rolled along its length in the form of a cylinder of radius 'R' and is kept on a rough floor. The carpet starts unrolling without sliding on the floor when a negligibly small push is given to it. Calculate the horizontal velocity of the axis of the cylindrical part of the carpet when its radius reduces to R/2.



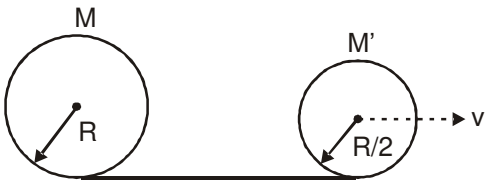
'M' द्रव्यमान तथा अवितान्य पदार्थ की बनी हुई एक दरी (carpet) इसकी लम्बाई के अनुदिश 'R' त्रिज्या के बेलन के रूप में लपेटी जाती है तथा खुरदरे फर्श पर रखी जाती है। जब एक हल्का सा धक्का दिया जाता है तो दरी बिना फिसले खुलना शुरू हो जाती है। जब इसकी त्रिज्या R/2 है तो बेलनाकार भाग के अंक्ष का क्षैतिज वेग ज्ञात करो। **[JEE - 1990]**



Ans. $\upsilon = \sqrt{\frac{14\,g\,R}{3}}$

Sol. Let M be the mass of unwound carpet. Then ,
माना बिना मूड़ी दरी का द्रव्यमान M तब

$$M' = \left(\frac{M}{\pi R^2}\right)\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{M}{4}$$



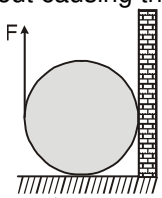
From conservation of mechanical energy :
यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$MgR - M'g\frac{R}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{4}\right)v^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

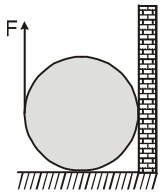
or या $MgR - \left(\frac{M}{4}\right)g\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{Mv^2}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{M}{4}\times\frac{R^2}{4}\right)\left(\frac{v}{R/2}\right)^2$

or या $\frac{7}{8}MgR = \frac{3Mv^2}{16}$ $\quad\therefore\quad$ $v = \sqrt{\frac{14\,Rg}{3}}$

23. Figure shows a vertical force F that is applied tangentially to a uniform cylinder of weight W. The coefficient of static friction between the cylinder and all surfaces is 0.5. Find in terms of W, the maximum force that can be applied without causing the cylinder to rotate.



चित्र में ऊर्ध्वाधर बल F दर्शाया गया है जो W भार के एक समरूप बेलन के स्पर्श रेखीय लग रहा है। सभी सतह व बेलन के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.5 है। W के पदों में, बेलन को बिना घुमायें इस पर लगने वाला अधिकतम बल ज्ञात कीजिए।



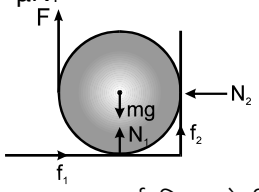
Ans. $\frac{3\,W}{8}$

Sol. When F is maximum equation. of rotational equilibrium.
जब F अधिकतम है तब घूर्णन साम्यावस्था समीकरण

$$F.R. = \mu (N_1 + N_2) R \quad .....(1)$$

For equilibrium in horizontal direction
क्षतिज दिशा में साम्यावस्था के लिए

$$f_1 = N_2 = \mu N_1 \quad .....(2)$$



In vertical direction ऊर्ध्व दिशा के लिए

$$F + N_1 = mg$$

$$F = \mu [(mg - F) + \mu (mg - F)]$$

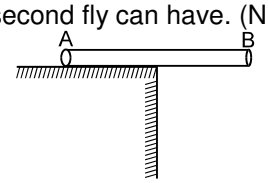
$$\frac{1}{2}\left[(mg-F)+\frac{1}{2}(mg-F)\right] \qquad \left[\text{putting } \mu=\frac{1}{2}\right]\left[\mu=\frac{1}{2} \text{ रखने पर}\right]$$

$$F\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}mg$$

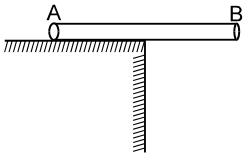
$$F=\frac{3}{8}\ mg = \frac{3}{8}w$$

[Ans.: 3w/8]

24. A drinking straw of mass 2m is placed on a smooth table orthogonally to the edge such that half of it extends beyond the table. A fly of mass m lands on the A end of the straw and walks along the straw untill it reaches the B end. It does not tip even when another fly gently lands on the top of the first one. Find the largest mass that the second fly can have. (Neglect the friction between straw and table).

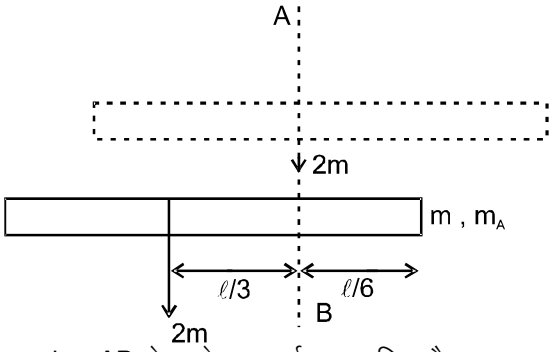


2m द्रव्यमान का एक पीने का पाईप (drinking straw) एक चिकनी टेबल पर समकोणीय रूप से इस प्रकार स्थित है। कि इसका आधा भाग टेबल से आगे तक फैला रहे। m द्रव्यमान की एक मक्खी, पाईप के आन्तरिक सिरे 'A' पर उतरती है और पाईप के अनुदिश तब तक चलती रहती है, जब तक कि यह दूसरे सिरे 'B' पर न पहुँच जाये। यह पाईप तब भी नहीं झुकता है, यदि एक अन्य मक्खी, पहली वाली मक्खी पर बैठ जाती है। वह अधिकतम द्रव्यमान ज्ञात कीजिए जो द्वितीय मक्खी रख सकती है। (यहाँ पाईप और टेबल के मध्य घर्षण को नगण्य मानिए)



Ans. 3m

Sol. As fly moves to other end C.M must remains at same position so straw shifts left.
जैसे ही कीट (मच्छर) दुसरे सिरे की ओर गति करेगा द्रव्यमान केन्द्र उसी स्थिती पर रहेगा जिससे (straw) छड बायी तरफ स्थानान्तरित होगी।

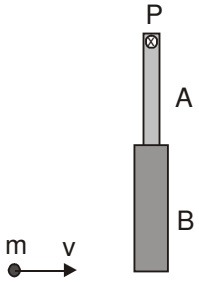


Torque about AB is balanced AB के सापेक्ष बलार्घूण सन्तुलित है।

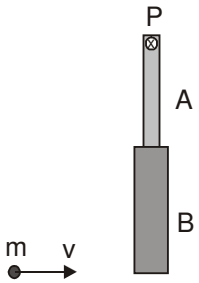
$$2mg\left(\frac{\ell}{3}\right) = (m + m_A)g\left(\frac{\ell}{6}\right)$$

$4m = m + m_A$
$m_A = 3m$

25. Two uniform thin rods A & B of length 0.6 m each and of masses 0.01 kg & 0.02 kg respectively are rigidly joined, end to end. The combination is pivoted at the lighter end P as shown in figure such that it can freely rotate about the point P in a vertical plane. A small object of mass 0.05 kg moving horizontally hits the lower end of the combination and sticks to it. What should be the velocity of the object so that the system could just be raised to the horizontal position ?

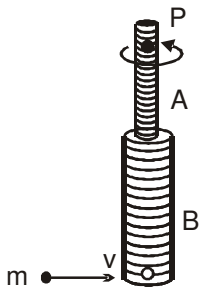


दो समरूप पतली छड़ें A तथा B प्रत्येक 0.6 m लम्बाई व द्रव्यमान क्रमशः 0.01 kg व 0.02 kg की दृढ़ता पूर्वक किनारों से जोड़ी जाती है। चित्रानुसार निकाय की हल्की छड़ को बिन्दु P से कीलकित किया जाता है ताकि यह ऊर्ध्वाधर तल में बिन्दू P के परितः स्वतंत्रतापूर्वक घूर्णन कर सके। एक 0.05 kg द्रव्यमान की छोटी वस्तु क्षैतिज दिशा में गति करती हुई निकाय के निचले किनारे से टकराती है तथा इससे चिपक जाती है। वस्तु का वेग क्या हो कि निकाय को क्षैतिज स्थिति तक उठाया जा सके।



Ans. 6.3 m/s

Sol. System is free to rotate but not free to translate. During collision, net torque of the system (rod A + rod B + mass m) about point P is zero.
निकाय घूर्णन करने के लिए स्वतन्त्र है लेकिन स्थानान्तिरित गति के लिए स्वतन्त्र नही है। सम्पूर्ण निकाय (छड A + छड B + द्रव्यमान m) का बिन्दु P के सापेक्ष बलाघूर्ण शून्य है।
Therefore, angular momentum of system before collision = Angular momentum of system just after collision. (About P). Let ω be the angular velocity of system just after collision, then
अतः टक्कर से पूर्व निकाय का कोणीय संवेग = टक्कर के बाद निकाय का कोणीय संवेग (बिन्दु P के सापेक्ष).माना टक्कर के तुरन्त बाद निकाय का कोणीय वेग ω है तब



$L_i = L_f$

$\Rightarrow \quad mv(2l) = \ell\omega$

Here, ℓ = moment of inertia of system about P
यहां , ℓ = बिन्दु P के सापेक्ष निकाय का जडत्व आघूर्ण

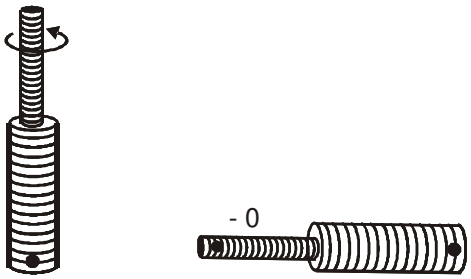
$$= m(2\ell)^2 + m_A\ (\ell^2/3) + m_B \left[\frac{\ell^2}{12} + \left(\frac{\ell}{2} + \ell\right)\right]^2$$

Given दिया है : $\ell = 0.6$ m, m = 0.05 kg, $m_A = 0.01$ kg and और $m_B = 0.02$ kg
Substituting the values, we get
मानो का प्रतिस्थापन करने पर
$I = 0.09$ kg–m^2
Therefore, from Eq. (1) अतः समीकरण (1) से

$$\omega = \frac{2mv\ell}{I} = \frac{(2)(0.05)(v)(0.6)}{0.09}$$

$$\omega = 0.67\ v \qquad \text{.....(2)}$$

Now after collision, mechanical energy will be conserved.
अब टक्कर के बाद यान्त्रिक ऊर्जा संरक्षण से



Therefore, decrease in rotational KE = increase in gravitational PE
अतः घूर्णन गतिज ऊर्जा में कमी = गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

or या $\quad \frac{1}{2} I\omega^2 = mg(2\ell) + m_A\ g\left(\frac{\ell}{2}\right) + m_B\ g\left(\ell + \frac{\ell}{2}\right)$

or या $\quad \omega^2 = \frac{g\ell(4m + m_A + 3\ m_B)}{I}$

$$= \frac{(9.8)(0.6)(4\times0.05 + 0.01 + 3\times0.02)}{0.09} = 17.64\ (\text{rad/s})^2$$

$\therefore$ $\omega = 4.2$ rad/s .....(3)

Equating Eqs. (2) and (3) , we get समीकरण (2) और (3) की तुलना करने पर

$$v = \frac{4.2}{0.67} m/s$$

or या $v = 6.3$ m/s

26. A uniform cube of side 'a' and mass m rests on a rough horizontal table. A horizontal force F is applied normal to one of the faces at a point directly above the centre of the face, at a height $\frac{3a}{4}$ above the base. (i) What is the minimum value of F for which the cube begins to tip about an edge?
(ii) What is the minimum value of μ_s so that toppling occures.
(iii) If $\mu = \mu_{min}$, find minimum force for topping.
(iv) Minimum μ_s so that F_{min} (as in part-(i)) can cause toppling.
एक समरूप m द्रव्यमान व a भुजा का घनाकार ब्लॉक खुरदरे क्षैतिज तल पर रखा है। एक क्षैतीज बल F घन के एक फलक पर केन्द्र के ठीक ऊपर आधार से $\frac{3a}{4}$ ऊचाई पर लगाया जाता है।
(i) घन के भुजा के सापेक्ष लुढ़कने के लिए 'F' का न्यूनतम मान क्या होगा? (माना कि घन फिसलता नहीं है)
(ii) μ_s का न्यूनतम मान क्या होना चाहिए ताकि घन पलट जाए।
(iii) यदि $\mu = \mu_{min}$, तो पलटने के लिए न्यूनतम बल ज्ञात करो।
(iv) न्यूनतम μ_s ताकि F_{min} के कारण पलट जाये।

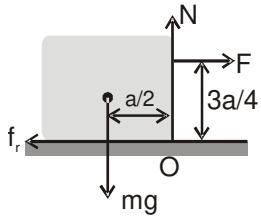
Ans. (i) $\frac{2}{3}$ mg, (ii) $\mu_{min} = 0$, (iii) $F = 2$ mg], (iv) $\mu_s = \frac{2}{3}$

Solution :

(i) In the limiting case normal reaction will pass through O. The cube will tip about O if torque of Fabout O exceeds the torque of mg.

(i) सीमान्त अवस्था में, अभिलम्ब प्रतिक्रिया 'O' से गुजरती है। तथा घन O के सापेक्ष लुढक जायेगा यदि F का O के साथ बलाघूर्ण mg के बलाघूर्ण से ज्यादा है तो–

Hence अतः $F\left(\frac{3a}{4}\right) > mg\left(\frac{a}{2}\right)$



or या $F > \frac{2}{3}$ mg

therefore, minimum value of F is $\frac{2}{3}$ mg.

अतः F का न्यूनतम मान $\frac{2}{3}$ mg होगा।

(ii) In this case since it is not acting at COM, toppling can occur even after body started sliding because of increasing the the torque of F about COM.hence $\mu_{min} = 0$,

(ii) इस स्थिती में क्योकि यह COM, पर कार्य नही कर रहा है अतः यदि वस्तु फिसलना शुरू कर देती है उसके बाद भी वस्तु पलट जायेगी क्योकि द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष F का बलाघूर्ण बढता है। अतः $\mu_{min} = 0$,

(iii) Now body is sliding before toppling, O is not I.A.R., torque equation can not be applied across it. It can now be applied about COM.

(iii) यदि वस्तु पलटन से पहले फिसलती है तो, O, I.A.R. नही है। तथा इसके सापेक्ष बलार्घूण सभी नही लगा सकते। बलार्घूण सभी COM के सापेक्ष लगायी जा सकती है।

$F \times \frac{a}{4} = N \times \frac{a}{2}$ ..... (1)

$N = mg$ ..... (2)

from (1) and (2) सभी (1) और (2) से

$F = 2\,mg$

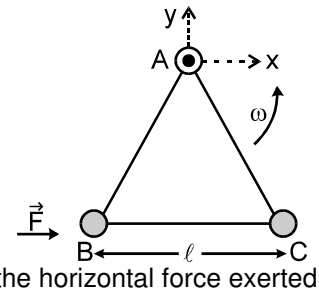
(iv) $F > \frac{2}{3} mg$ ..... (1) (from sol. (i))

$N = mg$ .....(2)

$F = \mu_s N = \mu_s mg$ ..... (3) from (1) and (2) सभी (1) और (2) से

$\mu_s = \frac{2}{3}$

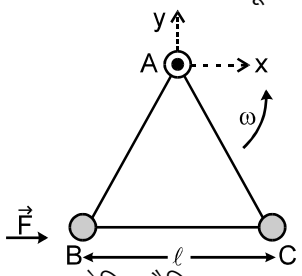
27. Three particles A , B and C each of mass m are connected to each other by three massless rigid rods to form a rigid , equilateral triangular body of side ℓ . This body is placed on a horizontal frictionless table (x - y plane) and is hinged to it at the point A so that it can move without friction about the vertical axis through A as shown in figure. The body is set into rotational motion on the table about A with a constant angular velocity ω



(a) Find the magnitude of the horizontal force exerted by the hinge on the body .

(b) At time T , when the side BC is parallel to the x – axis , a force F is applied on B along BC as shown. Obtain the x – component and the y – component of the force exerted by the hinge on the body, immediately after time T.

27. तीन कण A , B और C प्रत्येक का द्रव्यमान m एक दूसरे से द्रव्यमानहीन दृढ़ छड़ों की सहायता से भुजा वाली दृढ़ त्रिभुजाकार वस्तु का निर्माण करते हैं। यह वस्तु क्षैतिज घर्षणरहित टेबल (x - y तल में) पर रखी गई है तथा इसे बिन्दु A पर इस प्रकार लटकाया हुआ है ताकि यह A से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष चित्रानुसार घर्षण रहित गति कर सके। वस्तु को A के परित टेबल पर नियत कोणीय वेग ω से घूर्णन गति दी जाती है।



(a) निलम्बन (hinge) द्वारा वस्तु पर आरोपित क्षैतिज बल का परिमाण ज्ञात कीजिए।

(b) समय T पर जब भुजा BC, x- अक्ष के समान्तर है, चित्रानुसार BC के अनुदिश B पर F बल आरोपित किया जाता है। समय T के ठीक पश्चात् निलम्बन के द्वारा वस्तु पर, आरोपित बल का x –घटक व y –घटक ज्ञात कीजिए।

Ans. : (a) $\sqrt{3}\,m\,\omega^2\,\ell$ (b) $F_y = \sqrt{3}\,m\,\omega^2\,\ell$ $F_x = -F/4$]

Sol. **(a)** The distance of centre of mass (COM) of the system about point A will be :

$$r = \frac{\ell}{\sqrt{3}}$$

Therefore the magnitude of horizontal force exerted by the hinge on the body is

F = centripetal force

or $F = (3m)\, r\omega^2$

or $F = (3m)\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)\omega^2$

or $F = \sqrt{3}\ m\ell\omega^2$

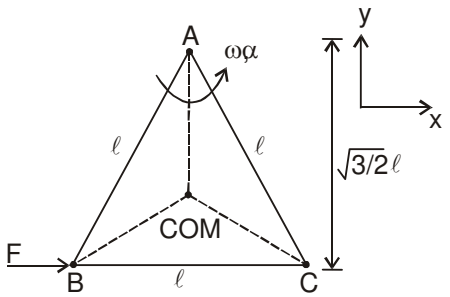
(b) Angular acceleration of system about point A is

$$\alpha = \frac{\tau_A}{I_A}$$

$$= \frac{(F)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)}{2m\ell^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\ F}{4m\ell}$$

Now acceleration of COM along x-axis is



$$\alpha x = r\alpha = \left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4\ m\ell}\right)$$

or $a_x = \frac{F}{4m}$

Now let F_x be the force applied by the hinge along x-axis. Then :

$F_x + F = (3m)\ a_x$

or $F_x + F = (3m)\left(\frac{F}{4m}\right)$

or $F_x + F = \frac{3}{4}F$ or $\mathbf{F_x = -\frac{F}{4}}$ **Ans.**

Further if F_y be the force applied by the hinge along y-axis. Then :

F_y = centripetal force

or $F_y = \sqrt{3}\ m\ell\omega^2$ **Ans.**

Sol. **(a)** निकाय के गुरूत्वीय केन्द्र का बिन्दु A से दूरी होगी :

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

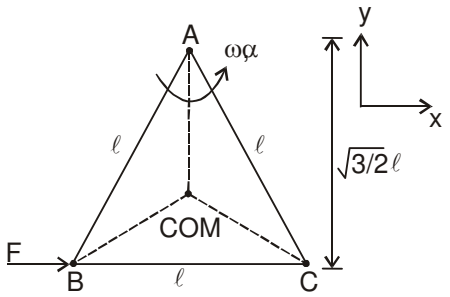
अतः कीलक द्वारा वस्तु पर आरोपित क्षैतिज बल का मापांक होगा -

F = अभिकेन्द्रीय बल या $F = (3m)\, r\omega^2$

या $F = (3m)\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)\omega^2$ या $F = \sqrt{3}\ m\ell\omega^2$ **Ans.**

(b) बिन्दु A के सापेक्ष निकाय का कोणीय त्वरण -

$$\alpha = \frac{\tau_A}{I_A} = \frac{(F)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ell\right)}{2m\ell^2} = \frac{\sqrt{3}\,F}{4m\ell}$$



COM का x अक्ष के अनदिश त्वरण -

$$\alpha x = r\alpha = \left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4\,m\ell}\right) \qquad \text{या} \quad a_x = \frac{F}{4m}$$

माना x अक्ष के अनुदिश कीलक द्वारा बल F_x है तो :

$$F_x + F = (3m)\,a_x$$

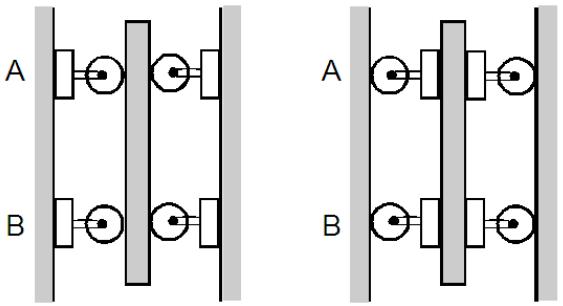
या $F_x + F = (3m)\left(\frac{F}{4m}\right)$ या $F_x + F = \frac{3}{4}F$ or $F_x = -\frac{F}{4}$ **Ans.**

यदि y अक्ष के अनुदिश कीलक द्वारा F_y बल है तो :

F_y = अभिकेन्द्रीय बल

या $F_y = \sqrt{3}\ m\ell\omega^2$ **Ans.**

28. A bar of mass m is held as shown between 4 disks , each of mass M & radius r = 75 mm Determine the acceleration of the bar immediately after it has been released from rest, knowing that the normal forces exerted on the disks are sufficient to prevent any slipping and assuming that ;
In (i) case the discs are attacthed to the fixed support on wall. In (ii) case the discs are attached to the bar.

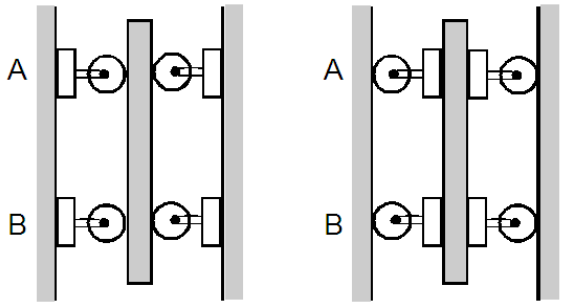


(i) (ii)

(a) m = 5 kg and M = 2 kg .
(b) the mass of M of the disks is negligible.
(c) the mass of m of the bar is negligible .

m द्रव्यमान के एक ब्लॉक को चित्रानुसार 4 चकती, प्रत्येक का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या r = 75 mm के सम्पर्क में रखा जाता है। ब्लॉक को विराम से छोड़ने के तुरन्त बाद त्वरण क्या होगा। ध्यान रहे कि चकतियों पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल शुद्ध लौटनी गति के लिए पर्याप्त है।

स्थिति (i) में चकतीयां दीवार से जुड़े सम्पर्क से जुड़ी हुई है तथा स्थिति (ii) में चकतीयां तख्तें से जुड़े सम्पर्क से जुड़ी हुई है।



(i) (ii)

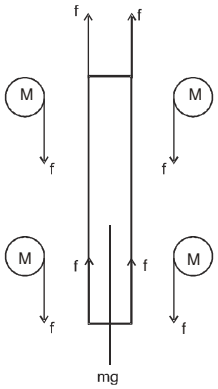
(a) m = 5 kg तथा M = 2 kg .

(b) चकती का द्रव्यमान M नगण्य है।

(c) ब्लॉक का द्रव्यमान m नगण्य है।

Ans. (i) (a) $5g/9\downarrow$ (b) $g\downarrow$ (c) 0 (ii) (a) $\frac{13g}{17}\downarrow$ (b) $g\downarrow$ (c) $\frac{2g}{3}\downarrow$

Sol. (i)



(a) $mg - 4f = ma$ ..... (i)

$fR = I\alpha = \frac{Ia}{R}$

$fR^2 = Ia$

$fR^2 = \frac{MR^2}{2}a$

$f = \left(\frac{Ma}{2}\right)$

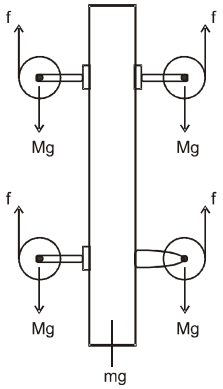
$mg = \left(\frac{4Ma}{2} + ma\right) = (2M + m)a$ M = 2kg, m = 5 kg

$a = \frac{5g}{9}\ (\downarrow)$

(b) If यदि M = 0
f = 0
mg = ma
a = g(↓)

(c) m = 0
mg = (2M + m) a
0 = a
a = 0

(ii)



(a) $(m + 4M)g - 4f = (m + 4M)a$

Torque about centre of disk ($\alpha = a / R$)

चकती के केन्द्र के सापेक्ष बल आघूर्ण ($\alpha = a / R$)

$$f \cdot R = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R}$$

$$f = \left(\frac{Ma}{2}\right)$$

$(m + 4M)\, g - 2Ma = (m + 4M)\, a$

$(m + 4M)\, g = (m + 6M)\, a$

$(5 + 8)\, g = (5 + 12)\, a$

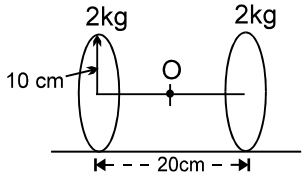
$$a = \left(\frac{13g}{17}\right) (\downarrow)$$

(b) If यदि $M = 0$ | If यदि $M = 0$

$mg = ma$ | $4Mg = 6Ma$

$a = g(\downarrow)$ | $a = \frac{2g}{3}\ (\downarrow)$

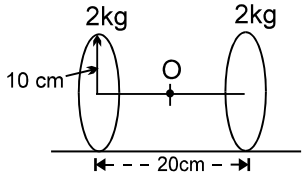
29. Two thin circular discs of mass 2 kg and radius 10 cm each are joined by a rigid massless rod of length 20 cm. The axis of the rod is along the perpendicular to the planes of the disk through their centres. This object is kept on a truck in such a way that the axis of the object is horizontal and perpendicular to the direction of motion of the truck. The friction with the floor of the truck is large enough, so that object can roll on the truck without slipping. Take x-axis as the direction of motion of the truck and z-axis as the vertically upward direction. If the truck has an acceleration of $9\ m/s^2$, calculate **[JEE - 1997' 5/100]**



(a) the force of friction on each disc.

(b) the magnitude & direction of frictional torque acting on each disk about the centre of mass O of the object. Express the torque in the vector form in terms of unit vectors $\hat{i}$, $\hat{j}$ & $\hat{k}$ along x, y & z direction.

2 kg द्रव्यमान व 10 cm त्रिज्या की दो पतली वृत्ताकार चकतियों को 20 cm लम्बाई की दृढ़ एवं द्रव्यमानरहित एक छड़ द्वारा जोड़ा गया है। छड़ की अक्ष, चकतियों के केन्द्रों से होकर जाती हुई तथा उनके तल के लम्बवत् है। इस समायोजन को एक ट्रक पर इस प्रकार रखा जाता है कि इस समायोजन की अक्ष क्षैतिज है तथा ट्रक की गति की दिशा के लम्बवत् है। ट्रक के फर्श के साथ इसका घर्षण पर्याप्त रूप से अधिक है, जिससे यह समायोजन बिना फिसले ट्रक पर लुढ़क सकता है। x-अक्ष ट्रक की गति की दिशा में तथा z-अक्ष ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर लीजिए। यदि ट्रक का त्वरण 9 m/s^2 है। गणना कीजिए-



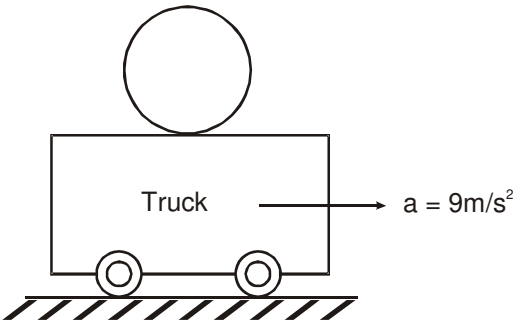
(a) प्रत्येक चकती पर घर्षण बल

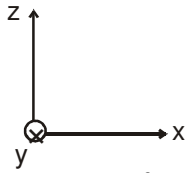
(b) समायोजन के द्रव्यमान केन्द्र O के परितः प्रत्येक चकती पर कार्यरत घर्षण बल आघूर्ण का परिमाण एवं दिशा। बल–आघूर्ण को x, y व z अक्षों पर एकांक सदिश $\hat{i}$, $\hat{j}$ & $\hat{k}$ के पदों में सदिश रूप में प्रदर्शित कीजिए।

Ans. (a) 6 N (b) $\vec{\tau}_1 = 0.6\hat{k} - 0.6\hat{j}$, $\vec{\tau}_2 = -0.6\hat{k} - 0.6\hat{j}$

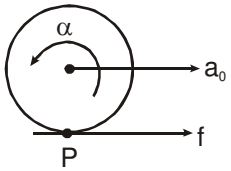
Sol. Given mass of disc m = 2Kg and radius R = 0.1 m
चकती का दिया गया द्रव्यमान m = 2Kg और त्रिज्या R = 0.1 m

(i) FBD of any one disc is किसी एक चकती का FBD

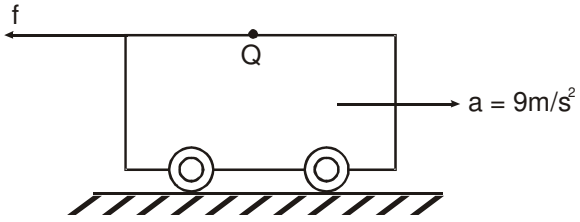




Frictional force on the should be in forward direction. चकती पर घर्षण बल आगे की और होना चाहिए।



Let a_0 be the acceleration of COM of disc α the angular acceleration about its COM. Then –
माना कि COM का त्वरण a_0 है व इसका COM के सापेक्ष कोणीय त्वरण α है। तब चकती के –



$$a_0 = \frac{f}{m} = \frac{f}{2} \quad \text{.....(i)}$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{f.\ R}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2f}{mR} = \frac{2f}{2\times 0.1} = 10\,f \quad \text{.....(2)}$$

Since there is no slipping between disc and truk therfore. चूंकि यहाँ चकती व ट्रक के मध्य फिसलन नहीं है।
Acceleration of point P = Acceleration of point Q
P बिन्दु का त्वरण = Q बिन्दु का त्वरण

$\therefore \quad a_0 + R\alpha = a$

or या $\left(\frac{f}{2}\right) + (0.1)(10\ f) =$

or या $\frac{3}{2} f = a \qquad f = \frac{2a}{3} = \frac{2\times 9.0}{3} N$

$\therefore \quad f = 6N$

Since this force is acting in positive x-direction. चूंकि यह बल धनात्मक x-दिशा में कार्यरत है।
Therefore, in vector form अतः सदिश रूप में

$\vec{f} = (6\hat{i})\ N$ **Ans. 3 (i)**

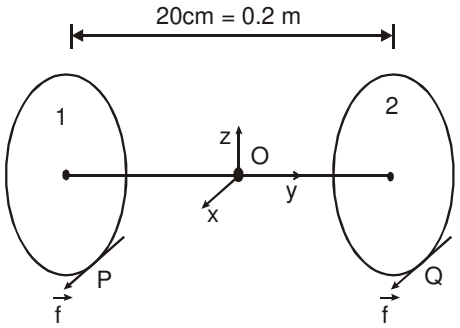
(ii) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f}$

Here $\vec{f} = (6\hat{i})\ N$ (for both the discs

यहाँ $\vec{f} = (6\hat{i})\ N$ (दोंनो चकती के लिए

$\vec{r}_P = \vec{r}_1 = 0.1\hat{j} - 0.1\hat{k}$ and और

$\vec{r}_Q = \vec{r}_2 = 0.1\hat{j} - 0.1\hat{k}$ and और



Therefore, frictional torque on disk 1 about O (centre of mass)
अतः चकती 1 पर O द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष घर्षण बल आघूर्ण –

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = (-0.1\hat{j} - 0.1\hat{k}) \times (6\hat{i})$ N-m

$= (0.6\hat{k} - 0.6\hat{j})$

or या $\vec{r}_1 = 0.6\,(\hat{k} - \hat{j})$ N-m $\Rightarrow 0.6\,(\hat{k} - \hat{j})$

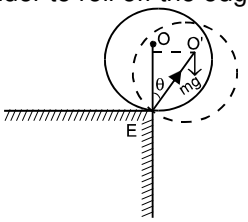
and तथा $|\vec{r}_1| = \sqrt{(0.6)^2 + (0.6)^2} = 0.85$ N-m

Similarly, इस प्रकार $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{f} = (0.1\hat{j} - 0.1\hat{k}) \times (6\hat{i})$ N-m

$\vec{r}_1 = 0.6\,(-\hat{j} - \hat{k})\ 0.6 \Rightarrow (\hat{k} - \hat{j})$

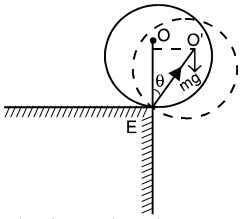
and और $|\vec{r}_2| = |\vec{r}_1| = 0.85$ N-m **Ans. 3 (ii)**

30. A rectangular rigid fixed block has a long horizontal edge. A solid homogeneous cylinder of radius r is placed horizontally at rest with its length parallel to the edge such that the axis of the cylinder and the edge of the block are in the same vertical plane. There is sufficient friction present at the edge so that a very small displacement causes the cylinder to roll off the edge without slipping. Determine :



(a) The angle θ_c through which the cylinder rotates before it leaves contact with the edge.
(b) The speed of the centre of mass of the cylinder before leaving contact with the edge.
(c) The ratio of translational to rotational kinetic energies of the cylinder when its centre of mass is in horizontal line with the edge.

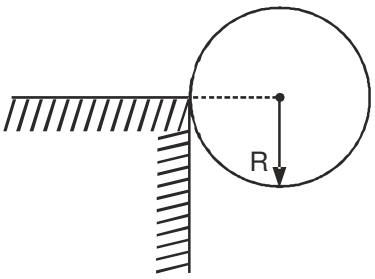
एक आयताकार दृढ़ स्थिर ब्लॉक एक लम्बा क्षैतिज किनारा रखता है। एक ठोस समांगी बेलन जिसकी त्रिज्या r है, विरामावस्था में क्षैतिज रखा गया है कि इस बेलन की लम्बाई, किनारे के समान्तर इस प्रकार है कि बेलन का अक्ष तथा ब्लॉक का किनारा एक ही ऊर्ध्वाधर तल में है। यहाँ ब्लॉक के किनारे पर पर्याप्त घर्षण विद्यमान है ताकि एक छोटा सा विस्थापन, बेलन को किनारे पर बिना फिसले लुढ़का सकता है। ज्ञात करो।

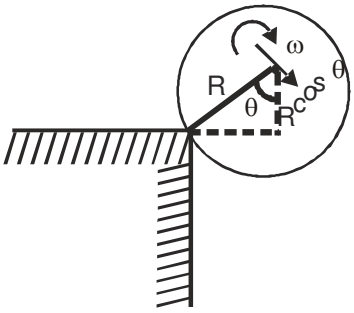


(a) कोण θ_c जिससे बेलन, किनारे को छोड़ने के पहले घूमेगा।
(b) किनारे को छोड़ने से ठीक पहले बेलन के द्रव्यमान केन्द्र की चाल होगी।
(c) बेलन की स्थानान्तरीय और घूर्णन गतिज ऊर्जाओं का अनुपात, जब बेलन का द्रव्यमान केन्द्र किनारे के साथ क्षैतिज रेखा में हो।

Ans. (a) $\theta = \cos^{-1}\frac{4}{7}$ (b) $v = \sqrt{\frac{4}{7}gr}$ (c) $\frac{k_T}{k_R} = 6$

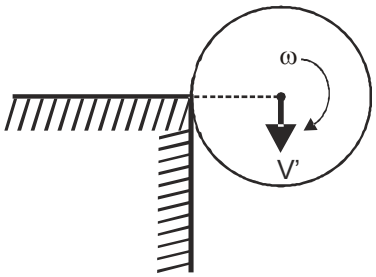
Sol. (a) The cylinder rotates about the point of contact. Hence, the machanical energy of the cylinder will be conserved i.e.,
(a) बेलन सम्पर्क बिन्दु के सापेक्ष घूर्णन कर रहा है अतः बेलन की कुल यान्त्रिक ऊर्जा सरंक्षित रहेगी





$\therefore \quad (PE + KE)_1 = (PE + KE)_2$

$\therefore \quad mgr + 0 = mgr\cos\theta + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$



but $\omega = v / R$ (No slipping at point of contact.)
लेकिन $\omega = v / R$ (सम्पर्क बिन्दु पर कोई फिसलन नही है)

and और $I = \frac{1}{2} mv^2$

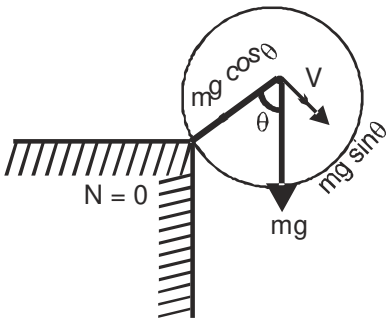
Therefore, अतः

$$mgR = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right) + \frac{1}{2}mv^2$$

or या $$\frac{3}{4}v^2 = gR(1 - \cos\theta)$$

or या $$v^2 = \frac{4}{3}gR(1 - \cos\theta)$$

or या $$\frac{v^2}{R} = \frac{4}{3}gR(1 - \cos\theta) \quad \text{.....(1)}$$



At the time of leaving contact, normal reaction $N = 0$ and $\theta = \theta_c$ hence,
सम्पर्क छोडते समय अभिलम्ब् प्रतिक्रिया $N = 0$ और $\theta = \theta_c$ अतः

$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

or या $$\frac{v^2}{R} = g\cos\theta \quad \text{.....(2)}$$

From Eqs. (1) and (2) समीकरण (1) और (2) से

$$\frac{4}{3}g(1 - \cos\theta_c) = g\cos\theta_c$$

or या $$\frac{7}{4}\cos\theta_c = 1$$

or या $$\cos\theta_c = 4/7$$

or या $$\theta_c = \cos^{-1}(4/7)$$

(b) $v = \sqrt{\frac{4}{3}gR(1-\cos\theta)}$ [From Eq. (1)] [समीकरण (1) से]

At the time of losing contact सम्पर्क छोडने के समय पर

$$\cos\theta = \cos\theta_c = 4/7$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{\frac{4}{3}gR\left(1-\frac{4}{7}\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{7}gR}$$

Therefore, speed of COM of cylinder just before losing contact is $\sqrt{\frac{4}{7}gR}$

अतः बेलन के द्रव्यमान केन्द्र की सम्पर्क छोडने के तुरन्त पहले चाल $\sqrt{\frac{4}{7}gR}$

Therefore, rotational kinetic energy अतः घूर्णन गतिज ऊर्जा $K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$

or या $$K_R = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$= \frac{1}{4} mv^2$$

$$= \frac{1}{4} m \left(\frac{4}{7}gR\right)$$

or या $$K_R = \frac{mgR}{7}$$

Now, once the cylinder losses its contact, N = 0, i.e., the frictional force , which is responsible for its rotation, also vanishes. Hence, its rotational kinetic energy now becomes constant, while its translational kinetic energy increases.

अब बेलन एक बार सम्पर्क छोडता है तब N = 0, अर्थात घर्षण बल जो इसे घूर्णन कराता है, भी समाप्त हो जायेगा। अतः इसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा नियत हो जायेगी तथा स्थानान्तिरित गतिज ऊर्जा बढेगी ।

Applying conservation ऊर्जा सरंक्षण से

decrease in gravitational PE = Gain in rotational KE + translational KE

गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में कमी = घूर्णन गतिज ऊर्जा में वृद्धि + स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा

$\therefore$ Translational KE (K_T) = Decrease in gravitational PE – K_R

$\therefore$ स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा (K_T) = गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में कमी – K_R

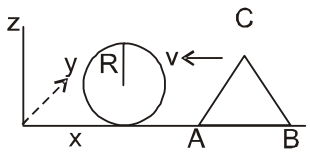
or या $$K_T = (mgR) - \frac{mgR}{7} = \frac{6}{7} mgR$$

From Eqs. (3) and (4) समीकरण (3) और (4) से

$$\frac{K_T}{K_R} = \frac{\frac{6}{7}mgR}{\frac{mgR}{7}}$$

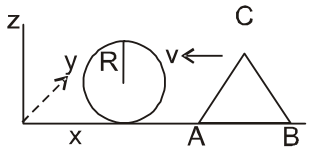
or या $$\frac{K_T}{K_R} = 6$$

31. A wedge of mass 'm' and triangular cross section (AB = BC = CA = 2R) is moving with a constant velocity-$v\hat{i}$ towards a sphere of radius R fixed on a smooth horizontal table as shown in the figure. The wedge makes an elastic collision with the fixed sphere and returns along the same path without any rotation. Neglect all friction and suppose that the wedge remains in contact with the sphere for a very short time Δt, during which the sphere exerts a constant force $\vec{F}$ on the wedge. The sphere is always fixed.



(a) Find the force $\vec{F}$ and also the normal force $\vec{N}$ exerted by the table on the wedge during the time Δt.
(b) Let 'h' denote the perpendicular distance between the centre of mass of the wedge and the line of action of force $\vec{F}$. Find the magnitude of the torque due to the normal force $\vec{N}$ about the centre of the wedge, during the time Δt.

'm' द्रव्यमान व त्रिभुजाकार अनुप्रस्थ काट का एक वेज (AB = BC = CA = 2R) नियत वेग -$v\hat{i}$ से R त्रिज्या के स्थिर गोले की तरफ चित्रानुसार चिकनी क्षैतिज टेबल पर गतिशील है। वेज स्थिर गोले के साथ पूर्ण प्रत्यास्थ टक्कर करता है तथा बिना घूर्णन किये हुए समान पथ से वापस आ जाता है। सभी प्रकार के घर्षण नगण्य मानिये तथा यह भी मानिये कि वेज गोले के साथ बहुत कम समय Δt के लिए संपर्क में रहता है। इस दौरान गोला वेज पर नियत बल $\vec{F}$ आरोपित करता है। टक्कर के बाद भी गोला स्थिर रहता है।

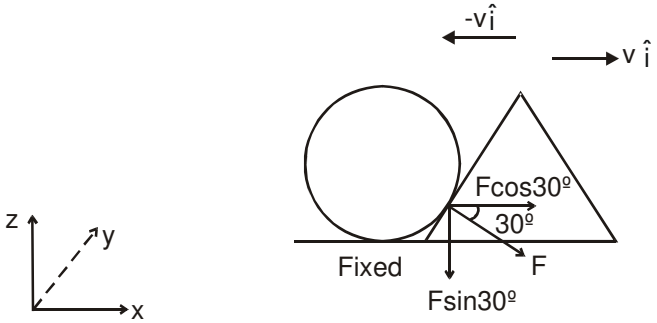


(a) Δt समय के दौरान वेज पर आरोपित बल $\vec{F}$ व टेबल द्वारा वेज पर आरोपित अभिलम्ब बल $\vec{N}$ ज्ञात कीजिए।

(b) माना कि 'h' वेज के द्रव्यमान केन्द्र व बल $\vec{F}$ की क्रिया रेखा के मध्य लम्बवत् दूरी है। अभिलम्ब बल $\vec{N}$ के कारण ब्लॉक के केन्द्र के परितः Δt समय के दौरान बलाघूर्ण का परिमाण ज्ञात कीजिए।

Ans. (a) $\vec{F} = \frac{2mV}{\Delta t}\hat{i} - \frac{2mV}{\sqrt{3}\Delta t}\hat{k}$; $\vec{N} = \left(\frac{2mV}{\sqrt{3}\Delta t} + mg\right)\hat{k}$, (b) $\vec{\tau} = -\left(\frac{4mVh}{\sqrt{3}\Delta t}\right)\hat{j}$

Sol. **(a)**



(i) Since the collision is elastic, the wedge will return with velocity v .
Now -
Linear impulse in x-direction = change in momentum in x - direction.

$\therefore$ $(F\cos 30^\circ)\Delta t = mv - (mv) = 2mv$

$\therefore$ $F = \frac{2mv}{\Delta t \cos 30^\circ} = \frac{4mv}{\sqrt{3}\Delta t}$

$\therefore$ $F = \frac{4mv}{\sqrt{3}\Delta t}$

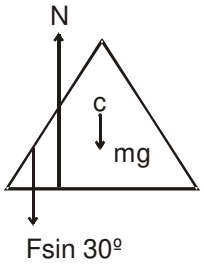
$\therefore$ $\vec{F} = F\cos 30^\circ \hat{i} - (F\sin 30^\circ)\hat{k}$

or $\vec{F} = \left(\frac{2mv}{\Delta t}\right)\hat{i} - \left(\frac{2mv}{\sqrt{3}\Delta t}\right)\hat{k}$ **Ans. 3a (i)**

(ii) Taking the equilibrium of wedge in vertical
(z) direction during collision

$$N = mg + F \sin 30^\circ$$

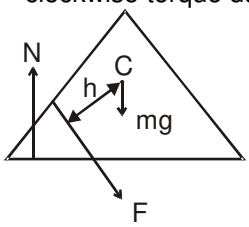
$$N = mg + \frac{2mv}{\sqrt{3}\Delta t}$$



or in vector form

$$\vec{N} = \left(mg + \frac{2mv}{\sqrt{3}\Delta t} \right) \hat{k}$$ **Ans. 3a (ii)**

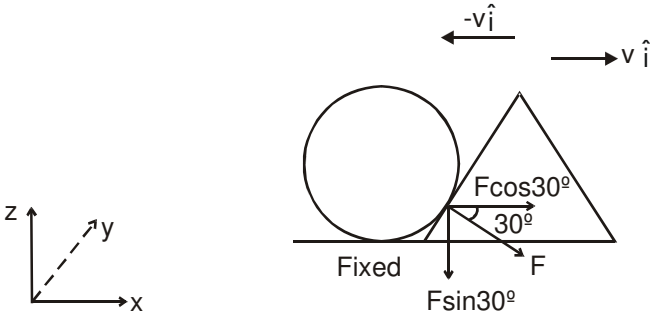
(b) For rotational equilibrium of wedge (about COM)
anticlockwise torque of F
= clockwise torque due to N



∴ magnitude of torque of N about COM = magnitude of torque of F about COM
= F.h

$$|\vec{\tau}_N| = -\left(\frac{4mv}{\sqrt{3}\Delta t} \right) \hat{j}$$ **Ans. 3 (b)**

Sol. (a)



(i) चूंकि टक्कर प्रत्यास्थ है, वेज v वेग से वापस लौटेगा।
अब
x-दिशा में रेखीय आवेग = x–दिशा में संवेग में परिवर्तन

$$\therefore \quad (F \cos 30^\circ)\Delta t = mv - (mv) = 2mv$$

$$\therefore \quad F = \frac{2mv}{\Delta t \cos 30^\circ} = \frac{4mv}{\sqrt{3}\Delta t}$$

$$\therefore \quad F = \frac{4mv}{\sqrt{3}\Delta t}$$

$$\therefore \quad \vec{F} = F \cos 30^\circ \, \hat{i} - (F \sin 30^\circ) \, \hat{k}$$

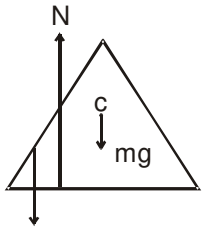
या $\vec{F} = \left(\frac{2mv}{\Delta t}\right)\hat{i} - \left(\frac{2mv}{\sqrt{3}\Delta t}\right)\hat{k}$ **Ans. 3a (i)**

(ii) ऊर्ध्वाधर में वेज का साम्यावस्था लेने पर

(z) दिशा में टक्कर के दौरान

$N = mg + F\sin 30^\circ$

$N = mg + \frac{2mv}{\sqrt{3}\Delta t}$



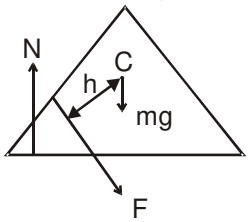
या सदिश रूप में

$\vec{N} = \left(mg + \frac{2mv}{\sqrt{3}\Delta t}\right)\hat{k}$ **Ans. 3a (ii)**

(b) वेज के घूर्णन साम्यावस्था (COM के सापेक्ष) के लिए

F का वामावर्त बल आघूर्ण

= N के कारण दक्षिणावर्त बल आघूर्ण



∴ COM के सापेक्ष N के बल आघूर्ण का परिमाण = F का COM के सापेक्ष बल आघूर्ण का परिमाण

$= F.h$

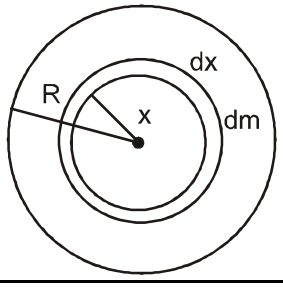
$|\vec{\tau}_N| = \left(\frac{4mv}{\sqrt{3}\Delta t}\right)\hat{k}$ **Ans. 3 (b)**

32. The surface mass density (mass/area) of a circular disc of radius 'R' depends on the distance from the centre x given as, $\sigma(x) = \alpha + \beta x$. Where α and β are positive constant find its moment of inertia about the line perpendicular to the plane of the disc through its centre.

'R' त्रिज्या की चकती का पृष्ठीय घनत्व (द्रव्यमान/क्षेत्रफल) चकती के केन्द्र से दूरी x पर निम्न प्रकार निर्भर करता है। $\sigma(x) = \alpha + \beta x$ जहां α तथा β धनात्मक अचर है। चकती के केन्द्र से पारित व तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

Ans. $2\pi\left(\frac{\alpha R^4}{4} + \frac{\beta R^5}{5}\right)$

Sol.



$dm = (2\pi x dx)\sigma$

$I = \int dm \cdot x^2 = \int_o^R (2\pi x dx)\sigma . x^2$

$I = 2\pi \int_0^R x^3 \sigma dx$

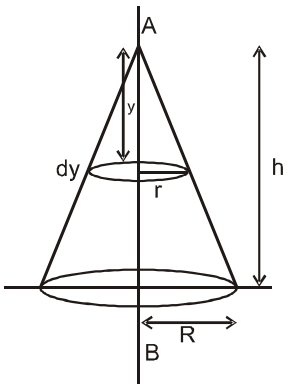
$I = 2\pi \int_0^R x^3 \cdot (\alpha + \beta x) dx = 2\pi \left[\int_o^R \alpha \ x^3 dx + \int_o^R \beta \ x^4 dx \right.$

$I = 2\pi \left(\frac{\alpha R^4}{4} + \frac{\beta R^5}{5} \right)$

33. Calculate the moment of inertia of a uniform solid cone relative to its symmetry axis, if the mass of the cone is equal to m and the radius of its base to R.
एक समान ठोस शंकु का उसकी सममीत अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण की गणना करो, यदि शंकु का द्रव्यमान m व आधार की त्रिज्या R है।

Ans. $I = 3/10\ mR^2$

Sol.



$\frac{h}{R} = \frac{y}{r}$

$r = \frac{R}{h} y$

$dm = \rho (\pi r^2 dy)$

$dI_{AB} = \frac{1}{2} (dm) r^2$

$I_{AB} = \int_{y=0}^{h} \frac{1}{2} \left(\rho \pi r^2 dy \right) r^2$

$= \frac{\rho \pi}{2} \frac{R^4}{h^4} \left[\frac{h^5}{5} \right]$

$= \frac{\pi}{10} R^4 h. \left[\frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} \right]$ ..... $\left(\because \quad \rho = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} \right)$

$= \frac{3}{10} mR^2$

34. A force $\vec{F} = A\hat{i} + B\hat{j}$ is applied to a point whose radius vector relative to the origin of coordinates O is equal to $\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j}$, where a, b &, A, B are constants, and $\hat{i}$, $\hat{j}$ are the unit vectors of the x and y axes. Find the moment N (torque of $\vec{F}$) and the arm ℓ of the force relative to the point O.
[Ans : N = (aB – bA) $\hat{k}$, where $\hat{k}$ is the unit vector of the z axis $\ell = |aB - bA|/\sqrt{A^2+B^2}$]

34. एक बिन्दु जिसका त्रिज्यीय सदिश मूल बिन्दु O के सापेक्ष $\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j}$ है, इस पर एक बल $\vec{F} = A\hat{i} + B\hat{j}$ आरोपित किया जाता है। जहाँ a, b व A, B अचर है तथा $\hat{i}$, $\hat{j}$ क्रमशः x व y अक्ष के इकाई सदिश है। बिन्दु O के सापेक्ष बल आघूर्ण N ($\vec{F}$ का बलाघूर्ण) तथा बलाघूर्ण भुजा ℓ ज्ञात कीजिए।

[Ans : N = (aB – bA)k, जहाँ **k, Z -** अक्ष का इकाई सदिश है। **$\ell = |aB - bA|/\sqrt{A^2+B^2}$]**

Sol. $N = \vec{r}\times\vec{F} = (a\hat{i}+b\tilde{j})\times(A\hat{i}+B\hat{j})$

$= (AB - bA)\,\hat{k}$

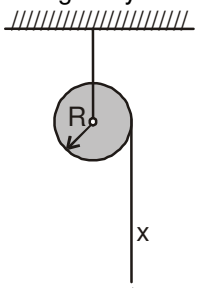
Also, $N = |\vec{F}|.r_1$

$$\Rightarrow r_1 = \left(\frac{|\vec{F}|}{N}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{(aB-bA)}\right)^{-1}$$

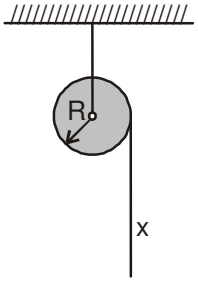
Ans. N = (aB – bA)k, where k is the unit vector of the z axis $= |aB - bA|/\sqrt{A^2+B^2}$

N = (aB – bA)k, जहाँ k z अक्ष के अनुदिश एंकाक सदिश है $= |aB - bA|/\sqrt{A^2+B^2}$

35. A uniform cylinder of radius R and mass M can rotate freely about a stationary horizontal axis O Fig. A thin cord of length ℓ and mass m is wound on the cylinder in a single layer. Find the angular acceleration of the cylinder as a function of the length x of the hanging part of the cord. The wound part of the cord is supposed to have its centre of gravity on the cylinder axis.



चित्रानुसार R त्रिज्या और M द्रव्यमान का एक एकसमान बेलन, एक स्थिर क्षैतिज अंक्ष O के पारितः स्वतंत्रापूर्वक घूर्णन कर सकता है। ℓ लम्बाई और m द्रव्यमान की एक पतली डोरी को एक एकल परत में बेलन के चारों ओर लपेटा गया है। बेलन का कोणीय त्वरण, डोरी के लटके हुए भाग की लम्बाई x के फलन के रूप में ज्ञात कीजिए। डोरी के लपटे हुए भाग का गुरूत्वीय केन्द्र बेलन के अक्ष पर माना गया है।



Ans : $\beta = 2mgx/R\ell(M + 2m)$

Sol. $\lambda = \left(\frac{m}{\ell}\right)$, $m_1 = \lambda x = \left(\frac{m}{\ell}\right)x$

$(a = \alpha R)$

$m_1g - T = m_1a$ ..... (i)

$T R = \left(\frac{MR^2}{2}\right)\alpha + (m - m_1)(R^2)\alpha$ .....(ii)

$T = \frac{MR}{2}\alpha + (m - m_1) R \alpha$

$T = \frac{Ma}{2} + (m - m_1) a$

$m_1g - \frac{Ma}{2} - (m - m_1) a = m_1a$

$m_1g - \frac{Ma}{2} - ma + m_1a = m_1a$

$m_1g = \left(\frac{Ma}{2} + ma\right)$

$\alpha = \frac{2m_1a}{(M+2m)}$

$\alpha = \frac{2\left(\frac{mx}{\ell}\right)g}{(M+2m)R} \Rightarrow \left(\alpha = \frac{2mgx}{(M+2m)\ell R}\right)$

36. A vertically oriented uniform rod of mass M and length ℓ can rotate about a fixed horizontal smooth axis passing through its upper end. A horizontally flying bullet of mass m strikes the lower end of the rod and gets stuck in it; as a result, the rod swings through an angle $\alpha(\alpha < 90^\circ)$. Assuming that m << M, find :

(a) the velocity of the flying bullet ;

(b) the momentum increment in the system "bullet + rod" during the impact; what causes the change of that momentum ;

(c) at what distance x : from the upper end of the rod the bullet must strike for the momentum of the system "bullet-rod" to remain constant during the impact.

M द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की ऊर्ध्वाधर एक समान छड़ उसके ऊपरी सिरे से गुजरने वाली क्षैतिज घर्षण रहित निलम्बन अक्ष के सापेक्ष घूम सकती है। एक क्षैतिज आती हुई m द्रव्यमान की गोली छड़ के निचले सिरे से टकराती है और चिपक जाती है। इसके परिणाम स्वरूप छड़, $\alpha(\alpha < 90^\circ)$ कोण से घूम जाती है। माना कि m << M, ज्ञात कीजिए **Irodov_1.275**

(a) उड़ती हुई गोली का वेग ;

(b) इस टक्कर के दौरान "गोली+छड़'' निकाय के संवेग में वृद्धि। संवेग में यह परिवर्तन किस कारण होगा।

(c) गोली, छड़ के ऊपरी सिरे से नीचे कितनी दूरी x पर टकराए कि ''गोली–छड़'' निकाय का संवेग टक्कर के दौरान नियत रहे।

[Ans : (a) $v = (M/m)\sqrt{2/3g\ell}\ \sin(\alpha/2)$; (b) $\Delta p = M\sqrt{1/6g\ell}\ \sin(\alpha/2)$; (c) $x \approx 2/3\ell$]

Sol. (a) About the axis of rotation of rod, the angular momentum of the system is conserved velocity of the flying bullet is V

(a) छड़ की घूर्णन अक्ष के सापेक्ष निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है तथा गोली का वेग V है तो

$mv\ell = \left(m\ell^2 + \frac{M\ell^2}{3}\right)\omega$

$\omega = \frac{mv}{\left(m + \frac{M}{3}\right)\ell} = \left(\frac{3mv}{M\ell}\right)$ (m <<< M) ..... (i)

conservation of mechanical energy of the system (rod + bullet)

निकाय (छड़ + गोली) की कुल यांत्रिक ऊर्जा सरंक्षण से

$\frac{1}{2}\left(m\ell^2 + \frac{M\ell^2}{3}\right)\omega^2 = (M+m)g\ \frac{\ell}{2}\ (1-\cos\alpha)$ ——(ii)

From (i) and (ii) समीकरण (i) और (ii) से

$V = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2g\ell}{3}}\ \sin\alpha/2$

(b) $\Delta P = \left[m\ (\omega\ell) + M\ \left(\omega\frac{\ell}{2}\right)\right] - mv$ From v and w v और w से

$\Delta P = \frac{1}{2}\ mv = \left(M\sqrt{\frac{g\ell}{6}}\sin\alpha/2\right)$

$mvx = \left(\frac{M\ell^2}{3} + mx^2\right)\omega'$

$\omega' = \frac{3mvx}{M\ell^2}$

final momentum अन्तिम संवेग

$p_f = mx\ \omega' + \int_0^{\ell} y\omega'\ \frac{M}{\ell}\ dy = \frac{M}{2}\ \omega'\ell = \frac{3}{2}mv\frac{x}{\ell}$

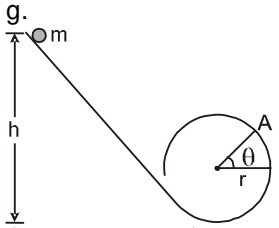
$\Delta p = p_f - p_i = mv\left(\frac{3x}{2\ell} - 1\right) = 0 \Rightarrow \left(x = \frac{2}{3}\ell\right)$

37. A small spherical ball of mass m is rolling without slipping down the loop track as shown in the figure. The ball is released from rest on the linear portion at a vertical height h from the lowest point. The circular part as shown in figure has a radius r. [g = 10 ms[2]]

(a) Find the kinetic energy of the ball when it is at a point A where the radius make an angle θ with the horizontal

(b) Find the radial and the tangential accelerations of the centre when the ball isat A.

(c) Find the normal force and the frictional force acting on the ball if h = 50 cm, r = 10 cm, θ = 0 and m = 70 g.

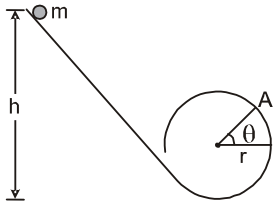


चित्रानुसार m द्रव्यमान की एक–गोलाकार गेंद लूप आकृति के पथ पर नीचे की ओर बिना फिसले लुढ़क रही है। रेखीय भाग में, गेंद को निम्नतम बिन्दु से. h ऊँचाई से छोड़ा गया है। प्रदर्शित किये गये वृत्ताकार भाग की त्रिज्या r है।

(a) जब गेंद उस बिन्दु A पर है, जहॉ त्रिज्या, क्षेतिज से θ कोण बनाती है, तब गेंद की गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

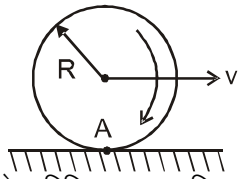
(b) जब गेंद A पर है। तब इसके केन्द्र के त्रिज्यीय तथा स्पर्श रेखीय त्वरण ज्ञात कीजिये।

(c) यदि h = 50 सेमी, r = 10 सेमी, θ = 0 तथा m = 70 ग्राम है तो गेंद पर लगने वाले अभिलम्बवत् बल तथा घर्षणं बल ज्ञात कीजिये।

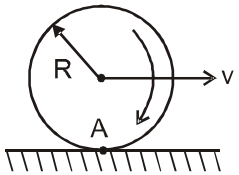


Ans. (a) mg(h-r-r sinα), (b) $\frac{10}{7}g\left(\frac{h}{r} - 1 - \sin\alpha\right)$, $-\frac{5}{7}g\cos\alpha$ (c) 4N, 0.2N upward ऊपर की ओर

38. A point A is located on the rim of a wheel of radius R = 0.50 m which rolls without slipping along a horizontal surface with velocity v = 1.00 m/s as shown in figure. Find:
(a) the modulus and the direction of the acceleration vector of the point A
(b) the total distance s traversed by the point A between the two successive moments at which it touches the surface.



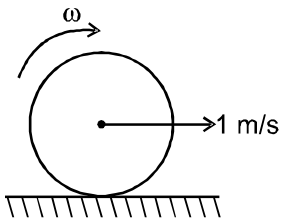
एक पहिये की त्रिज्या R = 0.50 m है। इसके परिधि पर एक बिन्दु A स्थित है। यह पहिया बिना फिसले एक क्षैतिज सतह के अनुदिश वेग v = 1.00 m/s. से लुढ़कता है। ज्ञात कीजिए -
(a) बिन्दु A के त्वरण सदिश का परिमाण व दिशा।
(b) उन दो क्रमागत क्षणों के मध्य, जब यह सतह पर स्पर्श करता है, बिन्दु A द्वारा तय की गई कुल दूरी



Ans : (a) $\omega_A = \frac{v^2}{R} = 2.0\ m/s^2$, the vector ω_A is permanently directed to the centre of the wheel ;
(b) $s = 8R = 4.0\ m$

Ans : (a) $\omega_A = \frac{v^2}{R} = 2.0\ m/s^2$, त्वरण सदिश ω_A स्थाई रूप से पहिये के केन्द्र की ओर निर्देशित हैं ;
(b) $s = 8R = 4.0\ m$

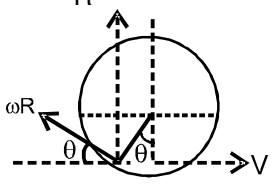
Sol.



R = 0.5m

V = ωR = (For pure rolling) (शुद्ध लोटनी गति के लिये)
(linear acceleration = 0) (रेखीय त्वरण = 0)
rolls with out slipping so यह बिना फिसले लुढकेगा अतः
acc. only centripetal acc. त्वरण केवल अभिकेन्द्रीय त्वरण होगा।

$a_A = \frac{v^2}{R}$



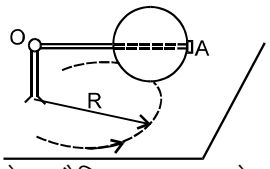
$V = \omega R$, $V_A = (V - V\cos\theta)\ \hat{i} + V\sin\theta\ \hat{j}$

$V_A = \sqrt{(v - v\cos\theta)^2 + (v\sin\theta)j}$, $V_A = (2V\sin\theta/2)$ $\theta = \omega t$

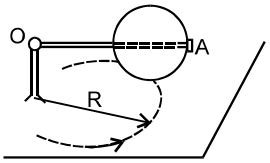
$\frac{ds}{dt} = 2\ V\sin\theta\backslash 2 = 2\ V\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)$

$\int_0^s ds = \int_O^{2\pi/\omega} 2v\ \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)dt = \frac{8v}{\omega} = (8R)$

39. A uniform sphere of mass m and radius r rolls without sliding over a horizontal plane, rotating about a horizontal axle OA . In the process, the centre of the sphere moves with velocity along a circle of radius R Find the kinetic energy of the sphere.



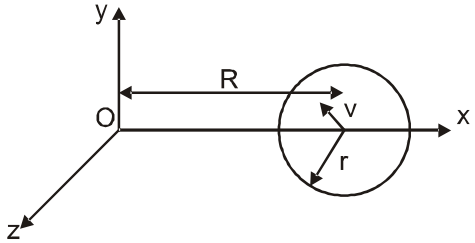
m द्रव्यमान तथा r त्रिज्या का एक समान गोला क्षैतिज अक्ष OA के परितः घूर्णन करना हुआ क्षैतिज तल पर शुद्ध लोटनी गति कर रहा है। इस प्रक्रम में गोले का केन्द्र R त्रिज्या के वृत्त के अनुदिश वेग से गति करता है। गोले की गतिज ऊर्जा ज्ञात करो।



Ans . $T = 7/10\ mv^2\ (1 + 2/7r^2/R^2)]$

Sol. We know K.E. from fixed axis relation is given by :

$$K = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2$$



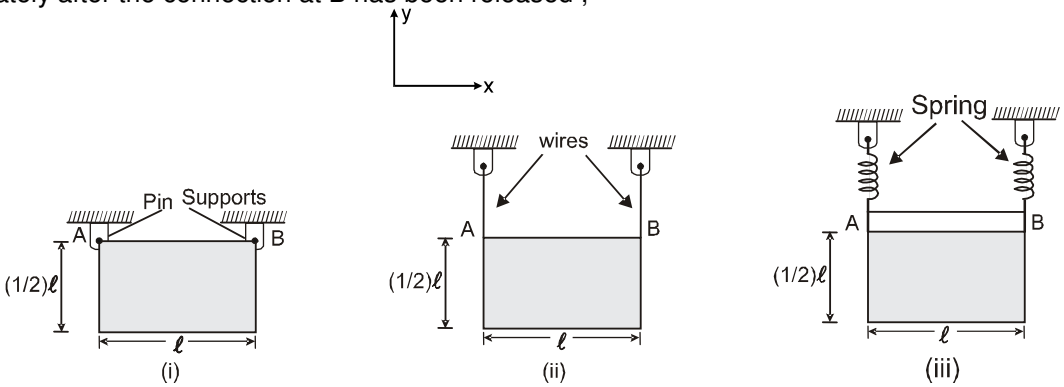
$$\omega_x = \frac{v}{r},\ \omega_y = \frac{v}{R} \quad \& \quad \omega_z = 0$$

Then $K = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + 0$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}mr^2 + mR^2\right]\left[\frac{v}{R}\right]^2$$

$$K = \frac{7}{10}mv^2\left(1 + \frac{2}{7}\frac{r^2}{R^2}\right)$$

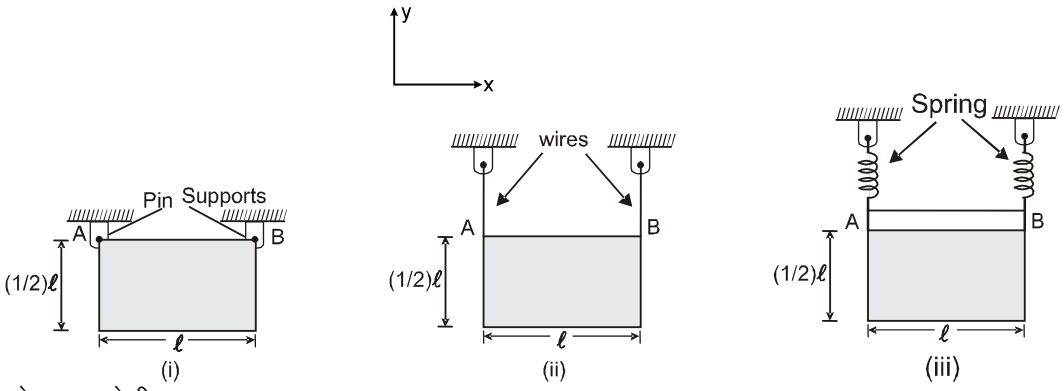
40. A uniform plate of mass 'm' is suspended in each of the ways shown. For each case determine immediately after the connection at B has been released ;



(a) The angular acceleration of the plate.

(b) The acceleration of its center of mass.

40. 'm' द्रव्यमान की एक समरूप प्लेट दिखाए गए तरीके से लटकायी जाती है। प्रत्येक स्थिति के लिए B से संबंध हटाने के ठीक बाद ज्ञात करो ;



(a) प्लेट का कोणीय त्वरण

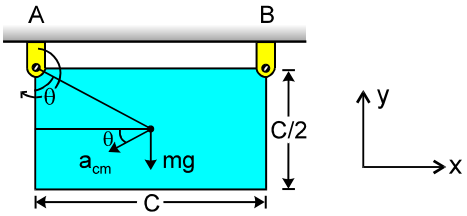
(b) इसके द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण

Ans. (i) (a) $\frac{1.2g}{\ell}$ (cw) (b) $-0.3\left(\hat{i}+2\hat{j}\right)$ g

(ii) (a) 24 g/17 ℓ (cw) (b) 12 g/17↓

(iii) 2.4 g/ℓ (cw) (b) 0.5 g↓

Sol. (i) (a) $I_{CM} = M\left[\frac{C^2}{12}+\frac{C^2}{4\times12}\right] = \frac{5\ M\ C^2}{12\times4}$



$I_A = I_{CM} + Mx^2$

$I_A = \frac{5\ M\ C^2}{12\times4} + \frac{5\ MC^2}{16} = \frac{20\ MC^2}{48}$

$I_A \rightarrow \quad mg \times \frac{C}{2} = I_A\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{6\ g}{5\ C}$

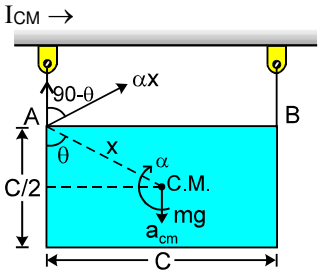
(b) $a_{cm} = \alpha x = \frac{6\ g}{5\ C}\times\frac{\sqrt{5}C}{4} = \frac{6\ g}{5\ C}x$

$a_x = -a_{cm}\cos\theta = -\frac{6\ g}{5\ C}x\,.\,\frac{C}{4\ .\ x} = -\frac{6\ g}{20} = -0.3\ g$

$a_g = -a_{cm}\sin\theta = -\frac{6\ g}{5\ C}x\ .\ \frac{C/2}{x} = -0.6\ g$

$a = -0.3\ g\ \hat{i} - 0.6\ g\ \hat{j}$

(ii) (a) $Mg - T = M a_{cm}$ .... (1)



$$T \times \frac{C}{2} = \frac{5}{48} MC^2 \alpha \Rightarrow T = \frac{5}{24} MC\alpha \quad .... (2)$$

As $a_A = 0$

(we know : acc. along the string is zero) (हम जानते है कि रस्सी के अनुदिश त्वरण शून्य है)

$a_{cm} - \alpha x \cos(90 - \theta) = 0$

$$a_{cm} = \alpha x \sin\theta = ax. \frac{C}{2x}$$

$$a_{cm} = \frac{\alpha C}{2} \quad .... (3)$$

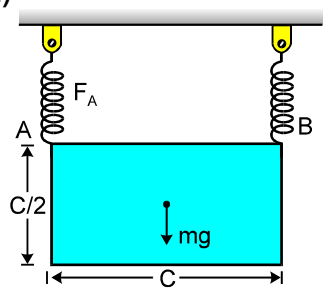
$$T = \frac{5}{24} MC \frac{2}{C} a_{cm} = \frac{5}{12} M a_{cm} \quad .... (4)$$

$$Mg = M a_{cm} + \frac{5}{12} M a_{cm}$$

$$= \frac{17}{12} M a_{cm}, \quad a_{cm} = \frac{12}{17} g \downarrow$$

(a) $$\alpha = \frac{2 a_{cm}}{C} = \frac{24 g}{17C}$$

(iii)



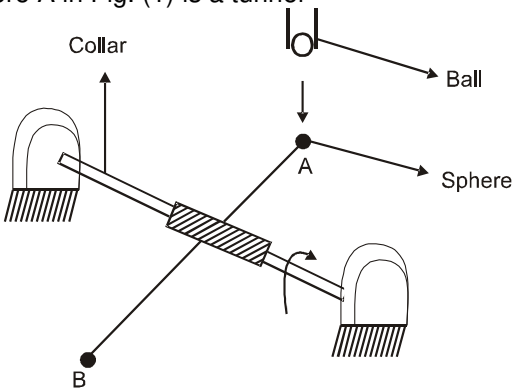
(a) $$\tau_{cm} = \frac{mg}{2} \times \frac{C}{2} = I_{cm}\alpha$$

$$\frac{mg}{4} \frac{C}{} = \frac{5}{48} MC^2 \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{12}{5} \frac{g}{C}$$

(b) $$F_A = \frac{Mg}{2}$$

$$Mg - F_A = m a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{g}{2} = 0.5g \downarrow$$

41. Figure (1) shows a mechanical system free of any dissipation. The two spheres (A and B) are each of equal mass m, and a uniform connecting rod AB of length 2r has mass 4m. The collar is massless. Right above the position of sphere A in Fig. (1) is a tunnel



from which balls each of mass m fall vertically at suitable intervals. The falling balls cause the rods and attached spheres to rotate. Sphere B when reaches the position now occupied by sphere A, suffers a collision from another falling ball and so on. Just before striking, the falling ball has velocity υ. All collision are elastic and the spheres as well as the falling balls can be considered to be point masses. **[Marks : 12]**

(a) Find the angular velocity ω_{i+1} of the assembly in terms of $\{\omega_i, \upsilon$, and r $\}$ after the i^{th} ball has struck it. **[4]**

ω_{i+1}

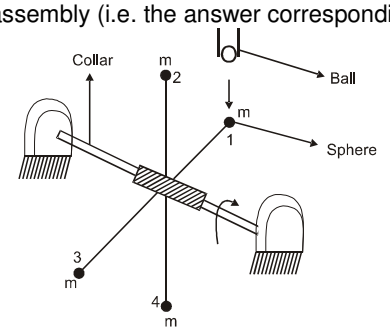
(b) The rotating assembly eventually assumes constant angular speed ω^*. Obtain ω^* in terms of υ and r by solving the equation obtained in part (a). Argue how a constant ω^* does not violate energy conservation. **[2]**

ω^* =
Argument

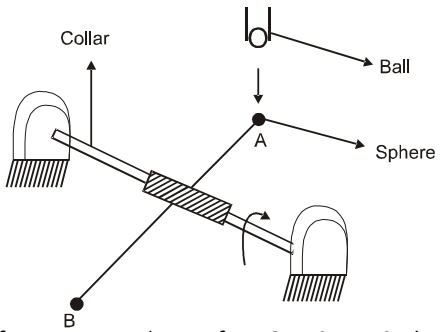
(c) Solve the expression obtained in part (a) to obtain ω_i in terms of {i,υ, and r} .

ω_i =

(d) If instead of a pair of spheres, we have two pairs of spheres as shown in figure below. What would be the new constant angular speed ω^* of the assembly (i.e. the answer corresponding to part (b). **[2]**



चित्र (1) किसी भी प्रकार के क्षय से मुक्त यांत्रिक निकाय है। दो गोले (A तथा B) प्रत्येक का द्रव्यमान m है, 2r लम्बाई व 4m द्रव्यमान की एक समान छड़ AB से चित्रानुसार जुड़े हुए है। कॉलर द्रव्यमानहीन है। चित्र (1) में गोले A की स्थिति के ठीक ऊपर सुरंग है— **[Olympiad_2011]**



जिससे m द्रव्यमान की गेदें उपर्युक्त अन्तराल में ऊर्ध्वाधर गिरायी जाती है। गिरती हुई गेंद के कारण गोला तथा छड़ घूर्णन करती है, अब गोला B उस स्थिति पर पहुँचता है, जहाँ पर पहले गोला A था, अब इस गोले B की सुरंग से गिरने वाली अन्य गोले से टक्कर होती है तथा यह प्रक्रिया लगातार चलती रहती है। टक्कर से ठीक पहले सुरंग से गिरने वाली गेंद का वेग υ है, सभी टक्कर प्रत्यास्थ है तथा गोला व गिरने वाली गेदों के बिन्दु द्रव्यमान मान सकते है।

(a) सुरंग से निकलने वाली i वीं गेंद की निकाय से टक्कर के पश्चात् इस निकाय के घूर्णन भाग का {ω_i, υ, तथा r} कोणीय वेग ω_{i+1} ज्ञात करो।

ω_{i+1}

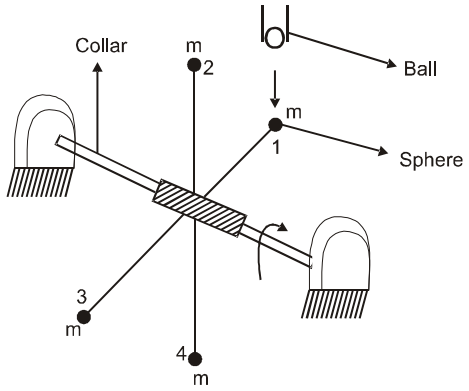
(b) इस निकाय के घूर्णन भाग की कोणीय चाल ω को नियत मानिये। भाग (a) मे प्राप्त समीकरणों को हल करके ω^* का मान υ तथा r के पदों में ज्ञात करो। स्पष्ट कीजिये कि नियत ω^* किस प्रकार ऊर्जा संरक्षण का उल्लंघन नहीं करता है।

ω^* =

(c) {i,υ, तथा r के पदों में} ω_i प्राप्त कर भाग (a) में प्राप्त व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।

ω_i =

(d) यदि हम गोलों के एक युग्म के अतिरिक्त गोलों के दो युग्म पर चित्रानुसार विचार करते है। तब घूर्णी निकाय की नयी कोणीय चाल ω^* ज्ञात करो (अर्थात् भाग b के सगंत उत्तर दीजिये)



ω^* =

Ans. **(a)** $\omega_{i+1} = \frac{7}{13}\,\omega_i + \frac{6}{13}\,\frac{v}{r}$ **(b)** $\omega^* = \frac{v}{r}$ **after this no further collision occurs**

(c) $\omega_{i+1} = \frac{v}{r}\left(1-\left(\frac{7}{13}\right)^i\right)$ **(d)** **ω^* will remain same as in case b.**

Sol. $I\omega_i + mvr = I\omega_{i+1} + m\,v'\,r \qquad \tau = \frac{10}{3}mr^2$

$$e = -\left(\frac{\omega_{i+1}\ r - v'}{\omega_i\ r - v}\right) = 1$$

$\omega_{i+1}r - v' = v' - \omega_i r$

$v' = (\omega_{i+1} + \omega_i)\, r - v$

$I\omega_i + mvr = I\omega_{i+1} + mr\left[\left(\omega_{i+1} + \omega_i\right)\ r - v\right]$

$I\omega_i + mvr = I\omega_{i+1} + mr^2\omega_{i+1} + mr^2\omega_i - mvr$

$(I - mr^2)\ \omega_i + 2mvr = (I + mr^2)\,\omega_{i+1}$

$$\frac{7mr^2}{3}\ \omega_i + 2mvr = \frac{13mr^2}{3}\ \omega_{i+1}$$

$$mr^2\,\omega_{i+1} = \frac{7}{13}\ mr^2\,\omega_i + \frac{6}{13}\ mvr$$

$$\omega_{i+1} = \frac{7}{13}\ \omega_i + \frac{6}{13}\ \frac{v}{r}$$

(b) $\omega = \frac{v}{r}$ after this no further collision occurs

(c) $\omega_2 = \frac{6v}{13r}$

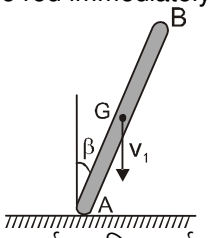
$$\omega_3 = \frac{7}{13}\left(\frac{6v}{13r}\right) + \frac{6v}{13r}$$

$$\omega_4 = \left(\frac{7}{13}\right)^2 \frac{6v}{13r} + \frac{6v}{13r} \times \frac{7}{13} + \frac{6v}{13r}$$

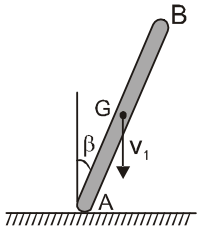
$$\omega_{i+1} = \frac{v}{r}\left(1 - \left(\frac{7}{13}\right)^i\right)$$

(d) ω^* will remain same as in case b.

42. A rod of length L forming an angle β with the vertical strikes a frictionless floor at A with a vertical velocity v_1 and no angular velocity. Assuming that the impact at A is perfectly elastic, derive an expression for the angular velocity of the rod immediately after the impact.

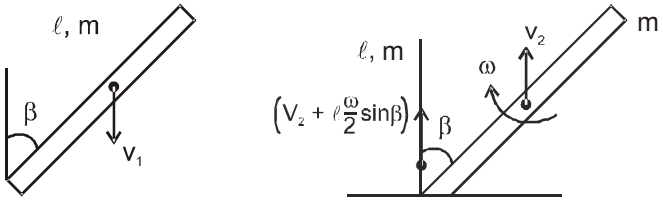


L लम्बाई की एक छड़ ऊर्ध्वाधर से β कोण पर घर्षण रहित फर्श पर A पर ऊर्ध्वाधर वेग v_1 से टकराती है तथा कोणीय वेग नहीं है। मानिये कि फर्श A के साथ टक्कर पूर्ण प्रत्यास्थ है, टक्कर के तुरन्त बाद छड़ के कोणीय वेग के लिए व्यंजक ज्ञात करो।



Ans. $\omega = \frac{v_1}{L}\ \frac{12\ \sin\beta}{3\ \sin^2\beta\ +\ 1}$ (cw) (correction by SR Sir 3-9-09)

Sol.



Before collision After collision

Coefficient of restitution प्रत्यावस्थान गुणांक

$$e = 1 = \frac{\left(V_2 + \ell\frac{\omega}{2}\sin\beta\right)}{V_1}$$

$$(V_1 = V_2 + \frac{\ell\omega}{2}\sin\beta) \qquad \text{..... (i)}$$

angular momentum about point A

बिन्दु A के सापेक्ष कोणीय संवेग

$$L_i = mV_1\frac{\ell}{2}\sin\beta$$

$$L_f = L_{CM} + L_A = \left(I_{CM}\omega - mV_2\frac{\ell}{2}\sin\beta\right)$$

$$L_i = L_f$$

$$mV_1\frac{\ell}{2}\sin\beta = \frac{m\ell^2}{12}\omega - mV_2\frac{\ell}{2}\sin\beta \qquad \text{..... (ii)}$$

Put equation (i) in (ii) equation समीकरण (ii) में (i) को रखने पर

$$mV_1\frac{\ell}{2}\sin\beta = \frac{m\ell^2}{12}\omega - m\left(V_1 - \frac{\ell\omega}{2}\sin\beta\right)\frac{\ell}{2}\sin\beta$$

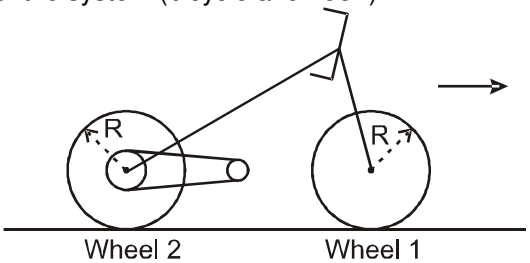
$$mV_1\frac{\ell}{2}\sin\beta = \frac{m\ell^2}{12}\omega - mV_1\frac{\ell}{2}\sin\beta + \frac{m\ell^2}{4}\omega\sin^2\beta$$

$$\left(mV_1\ell\sin\beta = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4}\omega\sin^2\beta\right)$$

$$V_1\sin\beta = \frac{\ell}{12} + \frac{\ell}{4}\omega\sin^2\beta \qquad \left[\omega = \frac{V_1\ (12\sin\beta)}{3\sin^2\beta + 1}\right]$$

43. Consider a bicyle in vertical position accelerating forward without slipping on a straight horizontal road. The combined mass of the bicycle and the rider is M and the magnitude of the accelerating torque applied on the rear wheel by the pedal and gear system is τ. The radius and the moment of inertia of each wheel is R and I (with respect to axis) respectively. The accelaration due to gravity is g.

(a) Draw the free diagram of the system (bicycle and rider).



(b) Obtains the accelaration a in terms of the above mentioned quantities.

a =

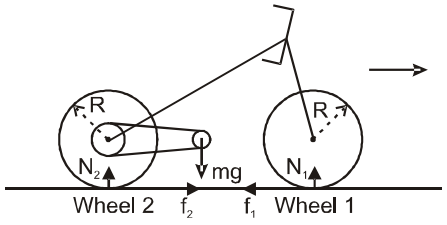
(c) For simplicity assume that the centre of mass of the system is at height R from the gruond and equidistant at 2 R from the center of each of the wheels. Let μ be the coefficient of friction (both static and dynamic) between the wheels and the ground. Consider $M >> I/R^2$ and no slipping. Obtain the conditions for the maximum acceleration a_m of the bike.

a_m =

(d) For $\mu = 1.0$ calculate a_m.

a_m =

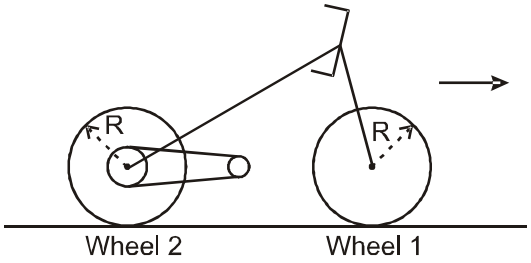
Sol. (a) Here f_1 f_2 are frictional forces and N_1, N_2 are normal reactions



(b) $a = \dfrac{\tau}{MR^2 + 2I}R$ (c) $a \le \dfrac{\mu g/2}{(1-\mu/4)}$ (d) $a_m = 2g/3$

43. ऊर्ध्वाधर स्थिति में एक साईकिल पर विचार करते है जो सीधी क्षैतिज सड़क पर बिना फिसले आगे की ओर त्वरित गति कर रही है। साईकिल तथा साईकिल सवार का संयुक्त द्रव्यमान M है तथा पैडल व गियर निकाय द्वारा पिछले पहिये पर आरोपित त्वरित बलाघूर्ण का परिमाण τ है। प्रत्येक पहिये की त्रिज्या तथा जडत्व आघूर्ण (अक्ष के सापेक्ष) क्रमशः R तथा I है। गुरूत्वीय त्वरण g है

(a) निकाय(साईकिल तथा साईकिल सवार) का मुक्त वस्तु चित्र बनाईयें।



(b) उपरोक्त बताई गई राशियों के पदों में त्वरण **a** ज्ञात करो।

a =

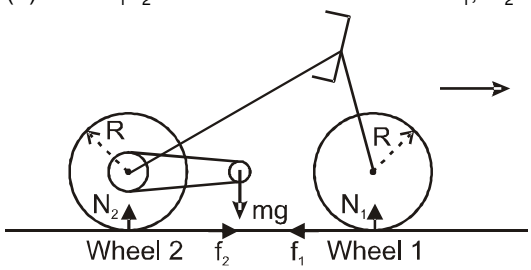
(c) सरल रूप में यह मानिए कि निकाय का द्रव्यमान केन्द्र धरातल से R ऊँचाई पर है तथा प्रत्येक पहिये के केन्द्र से समान दूरी 2R पर है। माना पहिये तथा धरातल के मध्य घर्षण गुणांक (स्थैतिक तथा गतिक दोनों) μ है। यह मानिए कि $M >> I/R^2$ तथा फिसलन नही है। साईकिल के अधिकतम त्वरण a_m के लिए शर्त प्राप्त कीजिए।

a_m =

(d) $\mu = 1.0$ के लिए a_m की गणना कीजिए।

a_m =

Sol. (a) Here f_1 f_2 are frictional forces and N_1, N_2 are normal reactions



(b) $a = \dfrac{\tau}{MR^2 + 2I}R$ (c) $a \le \dfrac{\mu g/2}{(1-\mu/4)}$ (d) $a_m = 2g/3$