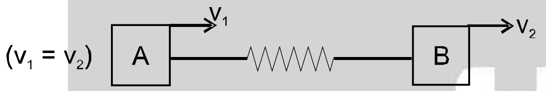
- Imagination is more important than knowledge
- Everything should be made as simple as possible, but not simpler. - Albert Einstein

दृढ़ पिण्ड गतिकी (RIGID BODY DYNAMICS)

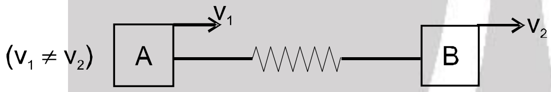
1. दृढ़ पिण्ड :

दृढ़ पिण्ड एक निकाय या वस्तु है, जिसमें किन्हीं भी दो कणों के बीच की दूरी सदैव नियत रहती है (समय के सापेक्ष) दृढ़ पिण्ड कहलाता है। याद रखिये दृढ़ पिण्ड एक गणितीय संकल्पना है तथा कोई निकाय दृढ़ हो सकता है जब तक वह उपर्युक्त शर्त को पूरा करता है।

☞

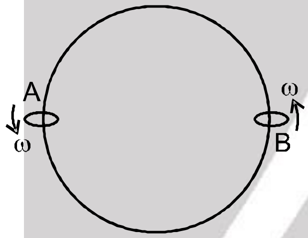


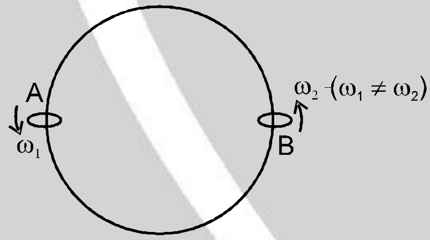
निकाय दृढ़ पिण्ड की तरह व्यवहार कर रहा है



निकाय एक अदृढ़ पिण्ड की तरह व्यवहार कर रहा है

☞ A तथा B मनके हैं, जो एक स्थिर वृत्तीय छल्ले पर घूम रहे हैं।



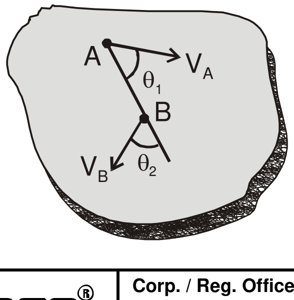


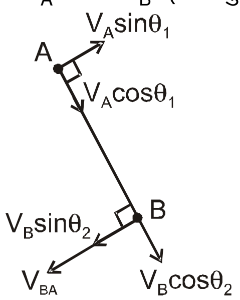
A + B एक दृढ़ पिण्ड निकाय है
जबकि A + B + छल्ला अदृढ़ निकाय है

A + B एक अदृढ़ निकाय है

- यदि एक निकाय दृढ़ है तो चूंकि निकय के किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी नहीं बदलती है, निकाय का आकार तथा आकृति नियत रहती है। अतः हम महसूस कर सकते हैं कि जबकि एक पत्थर या क्रिकेट गेंद दृढ़ पिण्ड है। एक गुब्बारा या प्रत्यास्थ डोरी अदृढ़ पिण्ड है, किन्तु उपर्युक्त निकायों में से कोई तभी तब दृढ़ है जब तक कणों के मध्य सापेक्ष दूरी नहीं बदलती है, चाहे वह एक क्रिकेट गेंद हो या गुब्बारा। परन्तु जिस समय बल्ला गेंद पर प्रहार करता है या गुब्बारा पिचकता है कणों के मध्य सापेक्ष दूरियाँ बदल जाती है और निकाय एक अदृढ़ पिण्ड की तरह व्यवहार करता है।

- किसी दृढ़ पिण्ड के किसी भी दो कणों के जोड़े के लिये कणों के बीच कोई पास आने तथा दूर जाने का कोई सापेक्ष वेग नहीं होता है, अर्थात् किसी दृढ़ पिण्ड में किसी बिन्दु B का किसी अन्य बिन्दु के सापेक्ष गति A तथा B, को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् होता है। अतः किसी कण B का किसी अन्य कण A के सापेक्ष गति एक वृत्तीय गति होती है। माना A तथा B का भूमि के सापेक्ष वेग $\vec{V}_A$ तथा $\vec{V}_B$ (चित्रानुसार) है–





यदि उपर्युक्त पिण्ड दृढ़ है तो $V_A \cos\theta_1 = V_B \cos\theta_2$ (दूर जाने/पास आने का वेग शून्य है)

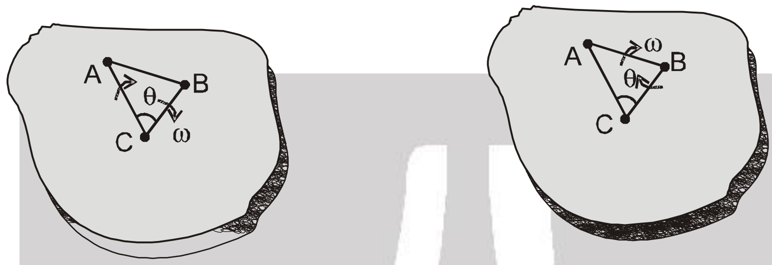
V_{BA} = B का A के सापेक्ष वेग

$V_{BA} = V_A \sin\theta_1 + V_B \sin\theta_2$ (जो AB के लम्बवत् है)

B एक वृत्त में गति करेगा, जिसके केन्द्र पर प्रेक्षक A है।

☞ किसी दृढ़ पिण्ड के किसी बिन्दु का पिण्ड के किसी भी अन्य बिन्दु से सापेक्ष कोणीय वेग समान होता है।

☞ माना A, B, C एक दृढ़ पिण्ड निकाय है, अतः किसी भी गतिकी में भुजाऐं AB, BC तथा CA बराबर कोण से घूर्णन करेगी। अतः प्रत्येक भुजाऐं समान दर से घूर्णन करेगी।



(i) (ii)

चित्र (i) से A तथा B का C के सापेक्ष कोणीय वेग ω है,

चित्र (ii) से A तथा C का B के सापेक्ष कोणीय वेग ω है,

दृढ़ पिण्ड की गतिकी के प्रकार

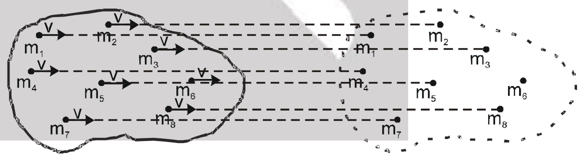
- शुद्ध स्थानांतरीय गति
- शुद्ध घूर्णन गति
- सम्मिलित स्थानांतरीय तथा घूर्णन गति

I. शुद्ध स्थानांतरीय गति :

एक पिण्ड की गति शुद्ध स्थानांतरीय होती है, यदि प्रत्येक कण का विस्थापन समान समय–अंतराल में समान हो। ऐसी गति में किसी भी क्षण पर प्रत्येक कण का विस्थापन $(\vec{s})$, वेग $(\vec{v})$ तथा त्वरण $(\vec{a})$ समान होते हैं। माना कि $m_1, m_2, m_3, ... m_n$ द्रव्यमान के n कणों का एक निकाय शुद्ध स्थानांतरीय गति कर रहा है। तब स्थानांतरीय गति की परिभाषा के अनुसार

$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_3 = ...\vec{a}_n = \vec{a}$ (मान लो)

और $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = ...\vec{v}_n = \vec{v}$ (मान लो)



किसी निकाय के लिये न्यूटन के नियम से

$$\vec{F}_{ext} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + ...$$

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}$$

जहाँ M = पिण्ड का कुल द्रव्यमान

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ...$$

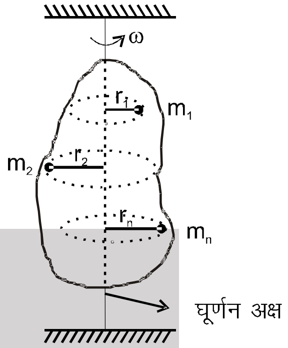
$$\vec{P} = M\vec{v}$$

पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + ... = \frac{1}{2} Mv^2$

II. शुद्ध घूर्णन गति :

चित्र में किसी भी आकार का एक दृढ़ पिण्ड एक स्थिर घूर्णन अक्ष के परितः घूर्णन कर रहा है। पिण्ड का प्रत्येक बिन्दु एक वृत्त में घूमता है, जिसका केन्द्र घूर्णन अक्ष पर है तथा प्रत्येक बिन्दु किसी समय अन्तराल में समान कोण घूमता है। ऐसी गति को शुद्ध घूर्णन गति कहते हैं। चूंकि पिण्ड दृढ़ है, अतः प्रत्येक कण का कोणीय वेग समान है।

अतः , $v_1 = \omega r_1$, $v_2 = \omega r_2$, $v_3 = \omega r_3$ ...... $v_n = \omega r_n$



कुल गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} m_1v_1^2 + \frac{1}{2} m_2v_2^2 + ...$

$= \frac{1}{2} [m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ...] \omega^2$

$= \frac{1}{2} I\omega^2$ जहाँ $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ...$ (जड़त्व आघूर्ण है)

ω = पिण्ड का कोणीय वेग

III. सम्मिलित स्थानांतरीय तथा घूर्णन गति :

एक पिण्ड सम्मिलित स्थानांतरीय तथा घूर्णन गति करता है, यदि पिण्ड के सभी बिन्दु किसी अक्ष के परितः घूमे तथा वह अक्ष स्वयं भूमि के सापेक्ष स्थानांतरीय गति करें। किसी दृढ़ पिण्ड की सामान्य गति को एक सम्मिलित स्थानांतरीय एवं घूर्णन गति के रूप में देखा जा सकता है।

Solved Examples

Example. 1 एक वस्तु को एक रस्सी जो घिरनी से होकर गुजर रही है के द्वारा कुंऐ में गिराया जाता है। रस्सी, घिरनी पर नहीं फिसलती है। जब वस्तु की चाल 20cm/s व त्वरण 4.0 m/s² है तो इस क्षण घिरनी का कोणीय वेग व कोणीय त्वरण ज्ञात करो। घिरनी की त्रिज्या 10 सेमी. है।

Solution : चूंकि रस्सी, घिरनी पर नहीं फिसलती है। इसलिये घिरनी की परिधि की रैखिक चाल v, वस्तु की चाल के बराबर होगी। तब घिरनी का कोणीय वेग

$\omega = v/r = \frac{20cm/s}{10cm} = 2$ rad/s

तथा घिरनी का कोणीय त्वरण

$\alpha = a/r = \frac{4.0m/s^2}{10cm} = 40$ rad/s².

Example 2. एक चकती 2.0 rad/s² के नियत त्वरण से घूमती है। यदि चकती स्थिरावस्था से प्रारम्भ होती है तो प्रथम 10 सैकण्ड में यह कितने चक्कर लगायेगी ?

Solution : प्रथम 10 सैकण्ड में कोणीय विस्थापन

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2}$ (2.0 rad/s²) (10 s)² = 100 rad.

चूंकि प्रत्येक चक्कर में चकती 2π रेडियन से घूमती है इसलिये 10s में चक्करों की संख्या $n = \frac{100}{2\pi} = 16$

Example : 3 एक मोटर का पहिया विरामावस्था से प्रारम्भ होकर एक समान त्वरण से प्रथम सैकण्ड के दौरान 5 रेडियन से घूम जाता है। अगले सैकण्ड में घूमा गया कोण ज्ञात कीजिए।

Solution : चूंकि कोणीय त्वरण नियत है इसलिए $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \alpha t^2$

इस प्रकार, 5 rad $= \frac{1}{2} \alpha (1s)^2$

$\alpha = 10$ rad/s² या $\alpha = 10$ rad/s²

प्रथम दो सैकण्ड में घूमा गया कोण $= \frac{1}{2} \times$ (10 rad/s²) (2s)² = 20 rad.

इस प्रकार, दूसरे सैकण्ड में घूमा गया कोण 20 rad – 5 rad = 15 rad.

Example : 4 विरामावस्था से प्रारम्भ होकर एक पंखा 400 rpm (चक्कर प्रति मिनट) की अधिकतम चाल प्राप्त करने में चार सैकण्ड का समय लेता है। त्वरण नियत मानते हुये पंखे द्वारा अधिकतम चाल की आधी चाल प्राप्त करने में लिया गया समय ज्ञात करो।

Solution : माना कोणीय त्वरण α है। प्रश्नानुसार

400 rev/min = 0 + α 4 s ....(i)

माना 200 चक्कर/मिनट की चाल जो अधिकतम की आधी है, पहुँचने तक लिया गया समय t है।

तब, 200 rev/min = 0 + αt ....(ii)

समीकरण (ii) का (i) में भाग देने पर

या t = 2 s.

Example : 5 एक इंजन की मोटर का पहिया इसकी अक्ष पर 120 rev/minute की चाल से घूर्णन कर रहा है। स्विच बन्द करने के बाद यह 10 सैक० में रूक जाता है। नियत कोणीय मन्दन मानते हुए रूकने से पहले इसके द्वारा काटे गये चक्करों की संख्या ज्ञात करो।

Solution : प्रारम्भिक कोणीय वेग = 120 चक्कर/मिनट = (4π) rad/s.

अन्तिम कोणीय वेग = 0.

समयान्तराल = 10 s.

माना कोणीय त्वरण α है। $\omega = \omega_0 + at$, के उपयोग से

$\alpha = (-4\pi/10)$ rad/s^2

इस गति के दौरान इसके द्वारा घूमा गया कोण

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \left(4\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)(10\text{s}) - \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{10}\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(10\text{s})^2 = 20\pi \text{ rad} = 10 \text{ चक्कर}$$

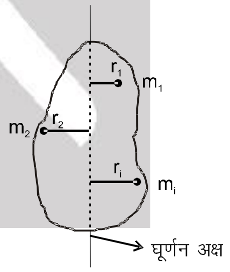
इस प्रकार मोटर रूकने से पहले 10 चक्कर लगाती है।

2. किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (I) :

(i) n कणों के एक निकाय का किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ...+ m_n r_n^2$

अथवा $$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$



जहाँ, r_i = द्रव्यमान m_i की घूर्णन अक्ष से लंबवत् दूरी

जड़त्व आघूर्ण की SI मात्रक किग्रा.मी^{2} (Kgm^2) होता है।

जड़त्व आघूर्ण की धनात्मक सदिश राशि है।

(ii) एक सतत निकाय के लिये : $I = \int r^2 (dm)$

जहाँ dm = अल्पांश का द्रव्यमान

r = dm द्रव्यमान का घूर्णन अक्ष से लंबवत् दूरी

जड़त्व आघूर्ण निर्भर करता है :

(i) वस्तु के पदार्थ के घनत्व पर (ii) वस्तु की आकृत्ति व आकार पर

(iii) घूर्णन अक्ष पर

संयुक्त रूप से हम कह सकते है कि यह घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करता है।

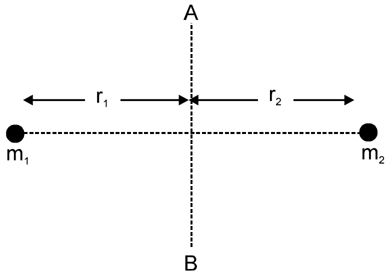
Note : जड़त्व आघूर्ण नहीं बदलता है यदि द्रव्यमान :

(i) घूर्णन अक्ष के समानान्तर विस्थापित किया जाये

(ii) घूर्णन अक्ष के प्रति नियत त्रिज्या के साथ घुमाया जाये।

Solved Examples

Example 6. दो भारी कण जिनके द्रव्यमान m_1 व m_2 है, रेखा AB के लम्बवत् क्रमशः r_1 व r_2 दूरियों पर स्थित है–



(i) अक्ष AB के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्या है ?

(ii) m_1 से गुजरने वाले व m_1 तथा m_2 को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्या है ?

(iii) m_1 व m_2 से गुजरने वाले अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्या है ?

(iv) m_1 तथा m_2 के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले तथा m_1 तथा m_2 को मिलाने वाली रेखा लंबवत् अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्या है?

Solution : (i) m_1 का जड़त्व आघूर्ण $I_1 = m_1r_1^2$.

m_2 का जड़त्व आघूर्ण $I_2 = m_2r_2^2$.

AB के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण $I = I_1 + I_2 = m_1r_2^2 + m_2r_2^2$

(ii) m_1 का जड़त्व आघूर्ण $I_1 = 0$

m_2 का जड़त्व आघूर्ण $I_2 = m_2\,(r_1 + r_2)^2$

निकाय का जड़त्व आघूर्ण AB is $I = I_1 + I_2 = 0 + m_2(r_1 + r_2)^2$

(iii) m_1 का जड़त्व आघूर्ण $I_1 = 0$

m_2 का जड़त्व आघूर्ण $I_2 = 0$

निकाय का जड़त्व आघूर्ण AB is $I = I_1 + I_2 = 0 + 0$

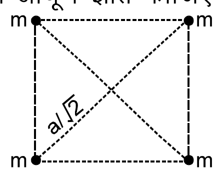
(iv) निकाय का द्रव्यमान केन्द्र $r_{CM} = m_2\left(\dfrac{r_1+r_2}{m_1+m_2}\right)$ = द्रव्यमान केन्द्र की m_1 से दूरी

द्रव्यमान केन्द्र की m_2 से दूरी $= m_1\left(\dfrac{r_1+r_2}{m_1+m_2}\right)$

अतः द्रव्यमान केन्द्र के परितः जड़त्व आघूर्ण $= I_{cm} = m_1\left(m_2\dfrac{r_1+r_2}{m_1+m_2}\right)^2 + m_2\left(m_1\dfrac{r_1+r_2}{m_1+m_2}\right)^2$

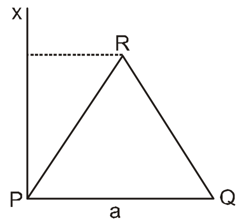
$I_{CM} = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,(r_1 + r_2)^2$

Example 7. 'm' द्रव्यमान के चार कण a भुजा के वर्ग के चारों कोनों पर रखे है। वर्ग के तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution : प्रत्येक कण को दी गयी रेखा से लम्बवत् दूरी $a/\sqrt{2}$ है। इस प्रकार एक कण का जड़त्व आघूर्ण $m(a/\sqrt{2}\,)^2 = \dfrac{1}{2}ma^2$ है। अतः निकाय का जड़त्व आघूर्ण, $4 \times \dfrac{1}{2}ma^2 = 2ma^2$ है।

Example 8. L भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज के तीनों शीर्षो पर m द्रव्यमान के तीन कण स्थित है।
(i) PQR के तल में PQ के लम्बवत् रेखा PX के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।
(ii) ΔPQR का किसी एक भुजा के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।
(iii) ΔPQR के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले तथा Δ PQR के तल के लंबवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution : (i) P की PX से लम्बवत् दूरी = 0
Q की PX से लम्बवत् दूरी = a
R की PX से लम्बवत् दूरी = a/2
इस प्रकार, P पर स्थित कण का जड़त्व आघूर्ण = 0, Q पर कण का Q - ma^2, व R पर कण का = $m(a/2)^2$

अतः PX के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण $0 + ma^2 + m(a/2)^2 = \frac{5\ ma^2}{4}$

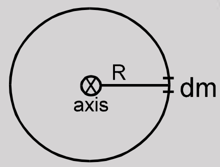
नोट करें कि अक्ष पर स्थित कण जड़त्व आघूर्ण में योगदान नहीं देते है।

(ii) PR के परितः जड़त्व आघूर्ण = कण Q का द्रव्यमान × Q की PR से लम्बवत् दूरी,

$$I_{AC} = m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{3ma^2}{4}$$

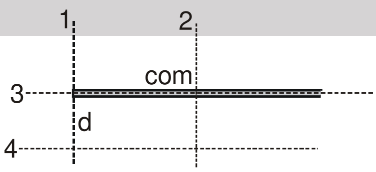
(iii) सभी कणों की द्रव्यमान केन्द्र से दूरी $\frac{a}{\sqrt{3}}$, अतः द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले तथा ΔPQR के तल के लंबवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण $= I_C = 3m\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = ma^2$

Example 9. M द्रव्यमान व R त्रिज्या की सतत् वलय का इसके तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए?



Solution : $I = \int (dm) r^2$ चूंकि प्रत्येक अल्पांश अक्ष से समान दूरी पर है। इसलिए $r = R = R^2 \int dm = MR^2$
$I = MR^2$
नोट : उत्तर समान रहेगा यदि द्रव्यमान समान रूप से वितरित न हो क्योंकि $\int dm = M$ हमेशा और सभी कणों की अक्ष से दूरियाँ भी समान है।

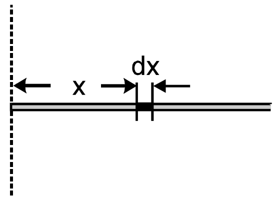
Example 10. M द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की एक समान छड़ का अक्ष 1,2,3 तथा 4 के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution

$$(I_1) = \int (dm)\ r^2 = \int_0^{\ell} \left(\frac{M}{\ell}dx\right) x^2 = \frac{M\ell^2}{3}$$

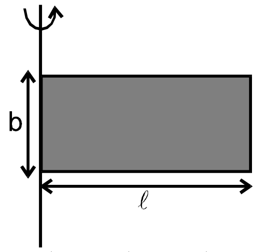
$$(I_2) = \int (dm)\ r^2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\frac{M}{\ell}dx\right) x^2 = \frac{M\ell^2}{12}$$



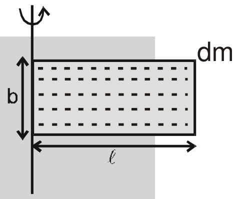
$(I_3) = 0$ (अक्ष 3 छड़ के अक्ष से गुजरता है)

$(I_4) = d^2 \int (dm) = Md^2$

Example 11. सूत्र $\left(I = \frac{m\ell^2}{3}\right)$ का उपयोग करके या किसी और तरीके से 'b' व 'ℓ' भुजा वाली एक आयताकार प्लेट का जड़त्व आघूर्ण कोर 'b' से गुजरने वाले अक्ष के प्रति ज्ञात करो।



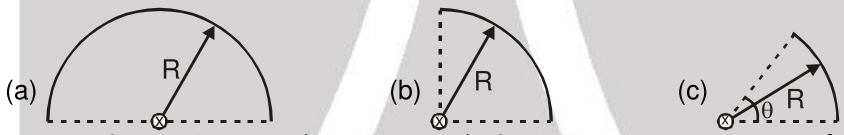
Solution : छड़ के dm द्रव्यमान के सेक्शन का कोर 'b' से गुजरने वाले अक्ष के परितः



जड़त्व आघूर्ण $dI = \frac{dm\ell^2}{3}$

अतः $I = \int dI = \frac{\ell^2}{3}\int dm = \frac{M\ell^2}{3}$

Example 12. दर्शाये गये चित्रों का तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। प्रत्येक का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है ?



Solution : MR^2 (R त्रिज्या की वलय को M द्रव्यमान के किसी भी भाग का जड़त्व आघूर्ण तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति MR^2 है।)

(iii) एक बड़ी वस्तु के लिये :

$I = \int dI_{element}$ जहाँ dI = छोटे अल्पांश का जड़त्व आघूर्ण

चयनित अल्पांश होना चाहिए

(i) सभी प्रकार के अल्पांशों में जितना बड़ा हो सके होना चाहिए।

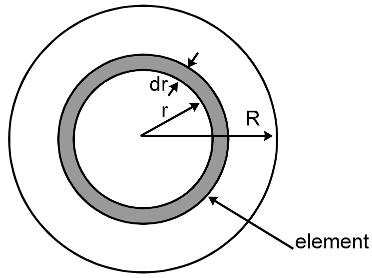
(ii) जितना सम्भव हो उतना सममित होना चाहिए।

(iii) अल्पांश का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात होना चाहिए।

Solved Examples

Example 13. M द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक समान चकती का इसके तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

Solution : $I = \int dI_{ring}$



अल्पांश - वलय $dI = dmr^2$

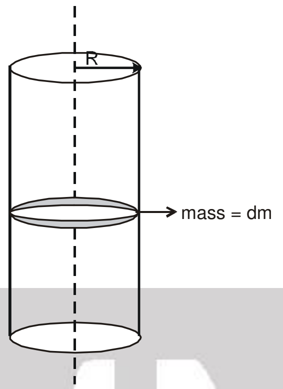
$dm = \frac{M}{\pi R^2}\ 2\pi r dr$ (यहां हमने एक समान द्रव्यमान वितरण लिया है।)

$\therefore\ I = \int_0^R \frac{M}{\pi R^2}.(2\pi r dr).r^2$

$\Rightarrow\ I = \frac{MR^2}{2}$

Example 14. M द्रव्यमान, त्रिज्या R तथा लम्बाई ℓ के एक समरूप खोखले बेलन का उसकी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

Solution :



खोखले बेलन का उसके अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$I = \int (dm)R^2 = mR^2$

3. जड़त्व आघूर्ण पर दो महत्त्वपूर्ण प्रमेय

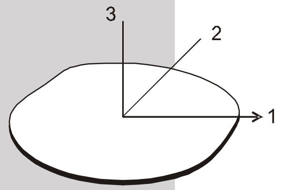
(i) लम्बवत् अक्षों की प्रमेय

केवल समतल वस्तुओं पर लागू [केवल 2-विमीय वस्तुओं के लिये)]

यदि अक्ष 1 तथा 2 वस्तु के तल में है तथा एक दूसरे के लम्बवत् है

तथा अक्ष 3 , 1 तथा 2 के तल के लंबवत् है

तब, $I_3 = I_1 + I_2$

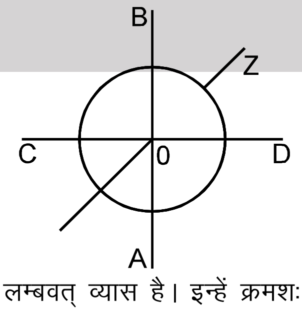


Body is in 1-2 plane

☞ तीनों अक्षों का प्रतिच्छेद बिन्दु वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र पर होगा जरूरी नहीं है। यह वस्तु के तल में स्थित कोई भी बिन्दु हो सकता है, जो वस्तु के अंदर अथवा बाहर हो सकता है।

Solved Examples

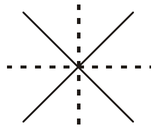
Example 15. एक समान चकती का इसके किसी व्यास के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो। वलय का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है।



Solution : माना AB व CD चकती के दो लम्बवत् व्यास है। इन्हें क्रमशः X व Y-अक्ष तथा तल के लम्बवत् केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष को Z-अक्ष लेते है। Z-अक्ष के प्रति चकती का जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{MR^2}{2}$ चूंकि चकती एक समान है। इसके सभी व्यास समरूप है और इसलिए $I_x = I_y$, लम्बवत् अक्षों की प्रमेय से

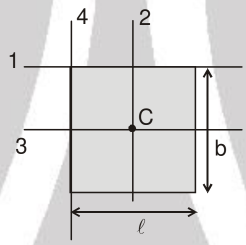
$I_z = I_x + I_y$. अतः $I_x = \frac{I_z}{2} = \frac{MR^2}{2}$.

Example 16. M द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की दो एक समान छड़े चित्रानुसार क्रॉस के रूप में जोड़ी जाती है। चित्र में दर्शाये गये अर्धक के प्रति क्रॉस का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution : क्रॉस के केन्द्र से गुजरने वाला लम्बवत् अक्ष लेते है। इस अक्ष के प्रति प्रत्येक छड़ का जड़त्व आघूर्ण $\frac{M\ell^2}{12}$ होता है। अतः क्रॉस का जड़त्व आघूर्ण $\frac{M\ell^2}{6}$ होगा। क्रॉस का इसके दोंनो अर्धकों के प्रति जड़त्व आघूर्ण सममिती से समान होता है और लम्बवत् अक्षों की प्रमेय के आधार पर अर्धक के प्रति क्रॉस का जड़त्व आघूर्ण $\frac{M\ell^2}{12}$ होगा।

Example 17. दिये गये चित्र में M द्रव्यमान की एक समरूप आयताकार प्लेट जिसकी लम्बाई ℓ तथा चौड़ाई b है का जड़त्व आघूर्ण अक्ष 1,2,3 व 4 के परितः ज्ञात करें।



Solution : अक्ष 1 के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (अक्ष 1 के लम्बवत् छड़ें मानने पर)

$I_1 = Mb^2 / 3$

अक्ष 2 के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (अक्ष 2 के लम्बवत् छड़ें मानने पर)

$I_2 = M\ell^2 / 12$

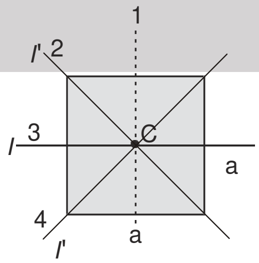
अक्ष 3 के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (अक्ष 3 के लम्बवत् छड़ें मानने पर)

$I_3 = Mb^2 / 12$

अक्ष 4 के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा (अक्ष 4 के लम्बवत् छड़ें मानने पर)

$I_4 = M\ell^2 / 3$

Example 18. चित्र में दिखाये m द्रव्यमान तथा a भुजा के एक वर्गाकार प्लेट का बिन्दु C से गुजरने वाले अक्ष 2 के परितः (तथा प्लेट के तल) जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution : लम्बवत् अक्षों के प्रमेय से $I_C = I_4 + I_2 = 2I'$

लम्बवत् अक्षों के प्रमेय से $I_C = I_3 + I_1 = I + I = 2I$

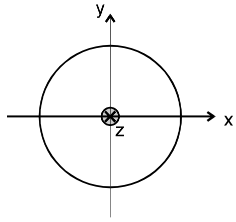
$2I' = 2I$

$I' = I$

$IC = 2I = \frac{ma^2}{6} \quad \Rightarrow \quad I' = \frac{ma^2}{12}$

Example 19. M द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक समान वलय का इसके व्यास के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

Solution : वलय के दो परस्पर लम्बवत् अक्ष x व y लें।



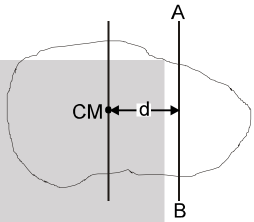
$I_x + I_y = I_z$

$I_x = I_y$ (सममितता से)

$I_z = \frac{MR^2}{2}$

$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}$

(ii) समान्तर अक्षों की प्रमेय (किसी भी प्रकार की वस्तु के लिये)



यदि I_{AB} = AB अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण

I_{CM} = AB अक्ष के समान्तर व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण

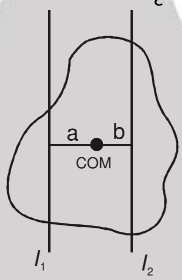
M = वस्तु का कुल द्रव्यमान

d = AB अक्ष व AB अक्ष के समान्तर द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के बीच की दूरी।

$I_{AB} = I_{CM} + Md^2$

Solved Examples

Example 20. I_1 व I_2 में संबंध ज्ञात करिए ? I_1 व I_2, m द्रव्यमान के दृढ पिण्ड के चित्र में निर्दिष्ट अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण है–



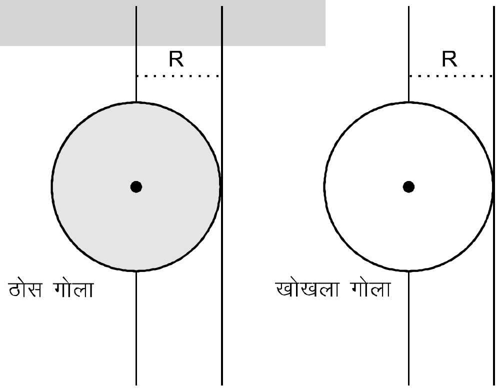
Solution : समान्तर अक्षों की प्रमेय से $I_1 = I_C + ma^2$ ......(1)

$I_2 = I_C + mb^2$ ......(2)

(1) व (2) से $I_1 - I_2 = m(a^2 - b^2)$

Example 21. m द्रव्यमान, R त्रिज्या के गोले की स्पर्शरेखीय अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करिए? यदि गोला (i) ठोस (ii) खोखला है।

Solution (i) समान्तर अक्षों की प्रमेय से



$I = I_{CM} + md^2$

ठोस गोले के लिए $I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2$, d = R

$I = \frac{7}{5}mR^2$

(ii) समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$I = I_{CM} + md^2$

खोखेले गोले के लिए $I_{CM} = \frac{2}{3}mR^2$, d = R

$I = \frac{5}{3}mR^2$

Example 22. M द्रव्यमान व R त्रिज्या के एक खोखले बेलन का इसके अक्ष के समानान्तर व पृष्ठ से गुजरने वाले किसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

Solution : बेलन का इसके अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण $= MR^2$.

समानान्तर अक्षों की प्रमेय के उपयोग से,

$I = I_0 + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2\,MR^2$.

इसी प्रकार, एक खोखला गोले का इसकी किसी स्पर्श–रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

$\frac{2}{3}\,MR^2 + MR^2 = \frac{5}{3}MR^2$.

Example 23. द्रव्यमान केन्द्र से परितः व तल के लम्बवत् अक्ष के प्रति अर्द्धवृत्तीय चकती का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करिए?

Solution : अर्द्धवृत्तीय चकती का इसके केन्द्र के परितः व तल के लम्बवत् अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण, $I = \frac{MR^2}{2}$ है।

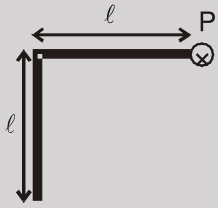
समान्तर अक्षों की प्रमेय $I = I_{CM} + Md^2$, जहाँ d समांतर अक्षों के मध्य लम्ब दूरी है का प्रयोग करने पर

$I = \frac{MR^2}{2}$, $d = \frac{4R}{3\pi}$

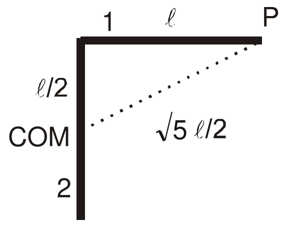
$\Rightarrow \quad \frac{MR^2}{2} = I_{CM} + M$

$I_{CM} = \left[\frac{MR^2}{2} - M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2\right]$

Example 24. दो समरूप छड़ों का जिसे चित्रानुसार युग्मित किया है का बिन्दु P के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करिए। समान्तर अक्ष प्रमेय का उपयोग करते हुए।



Solution : छड़ 1 का अक्ष P के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण , $I_1 = \frac{m\ell^2}{3}$



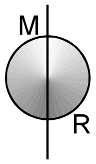
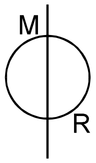
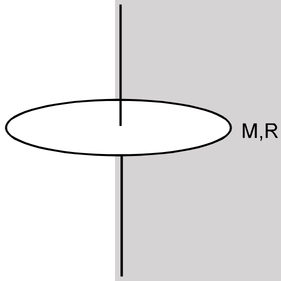
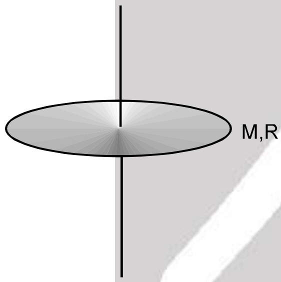
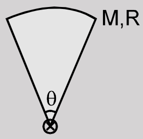
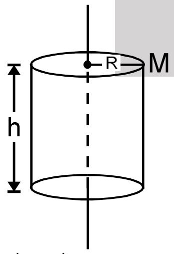
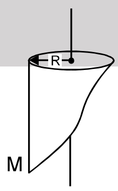
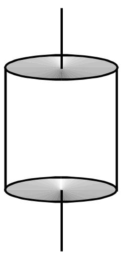
छड़ 2 का अक्ष P के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण, $I_2 = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\sqrt{5}\,\frac{\ell}{2}\right)^2$

अतः निकाय का अक्ष P के सापेक्ष कुल जड़त्व आघूर्ण,

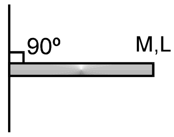
$I = I_1 + I_2 = \frac{m\ell^2}{3} + \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\sqrt{5}\,\frac{\ell}{2}\right)^2$

$I = \frac{m\ell^2}{3}$

कुछ महत्तवपूर्ण सूत्रों की सूची :

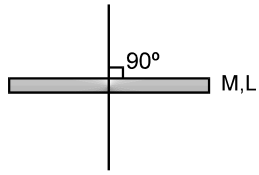
Object	Moment of Inertia
ठोस गोला 	$\frac{2}{5}MR^2$ (समरूप)
खोखला गोला 	$\frac{2}{3}MR^2$ (समरूप)
वलय 	MR^2 (समरूप या असमरूप)
चकती  	$\frac{MR^2}{2}$ (समरूप)
खोखला बेलन  	MR^2 (समरूप या असमरूप)
ठोस बेलन 	$\frac{MR^2}{2}$ (समरूप)

पतली छड़

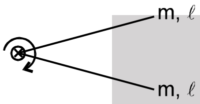


$\frac{ML^2}{3}$ (समरूप)

पतली छड़े

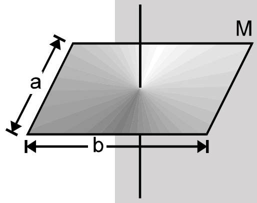


$\frac{ML^2}{12}$ (समरूप)



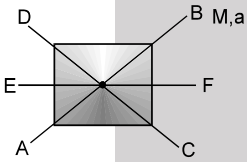
$\frac{2m\ell^2}{3}$ (समरूप)

आयताकार प्लेट



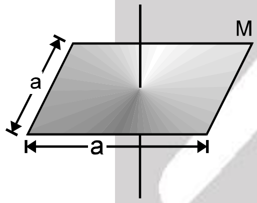
$I = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$ (समरूप)

वर्गाकार प्लेट



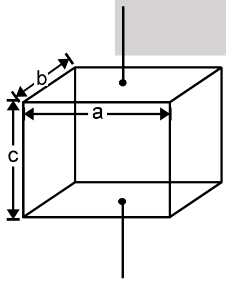
$I_{AB} = I_{CD} = I_{DF} = \frac{Ma^2}{12}$ (समरूप)

वर्गाकार प्लेट



$\frac{Ma^2}{6}$ (समरूप)

घनाभ



$\frac{M(a^2 + b^2)}{12}$ (समरूप)

4. घूर्णन त्रिज्या :

मापन का वह तरीका जिसमें घूर्णन कर रहे दृढ़ पिण्ड का द्रव्यमान घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जिस प्रकार वितरित है। एक नये प्राचल द्वारा परिभाषित किया जाता है जिसे घूर्णन त्रिज्या कहते है।

घूर्णन त्रिज्या, जड़त्व आघूर्ण व वस्तु के कुल द्रव्यमान से सम्बन्धित है।

$I = MK^2$

जहाँ   I = वस्तु का जड़त्व कुल द्रव्यमान

M = वस्तु का द्रव्यमान

K = वस्तु की घूर्णन त्रिज्या

$K = \sqrt{\frac{I}{M}}$

☞ लम्बाई K घूर्णन अक्ष व वस्तु का ज्यामितीय गुण है।

K का S.I. मात्रक मीटर है।

Solved Examples

Example 25. R त्रिज्या के एक समरूप ठोस गोले की घूर्णन त्रिज्या उसकी स्पर्श रेखा के परितः ज्ञात करो।

Solution : $I = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2 = mK^2 \quad \Rightarrow K = \sqrt{\frac{7}{5}}R$

Example 26. R त्रिज्या के एक समरूप खोखले गोले की घूर्णन त्रिज्या उसकी स्पर्श रेखा के परितः ज्ञात करो।

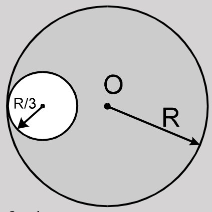
Solution : स्पर्श रेखा के परितः खोखले गोले का जड़त्व आघूर्ण, $I = \frac{5}{3}MR^2$

$MK^2 = \frac{5}{3}MR^2 \quad \Rightarrow \quad K = \sqrt{\frac{5}{3}}R$

5. कटी वस्तुओं का जड़त्व आघूर्ण :

Solved Example

Example 27. चित्रानुसार R त्रिज्या की एक समान चकती में से R/3 त्रिज्या की चकती काटी गयी है। चकती के शेष बचे छायांकित भाग का द्रव्यमान M है। प्रारम्भिक चकती के केन्द्र से गुजरने वाले व तल के लम्बवत् अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution : माना कि चकती के पदार्थ का इकाई क्षैत्रफल का द्रव्यमान σ है। अब खाली स्थान पर –σ और σ घनत्व माना जा सकता है।

अब $I_0 = I_\sigma + I_{-\sigma}$

$I_\sigma = (\sigma \pi R^2)R^2/2$ = σ का o के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

$I_{-\sigma} = \frac{-\sigma\pi(R/3)^2(R/3)^2}{2} + [-\sigma\pi(R/3)^2]\,(2R/3)^2$ = –σ का o के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

$\therefore \quad I_0 = \frac{4}{9}MR^2$ **Ans.**

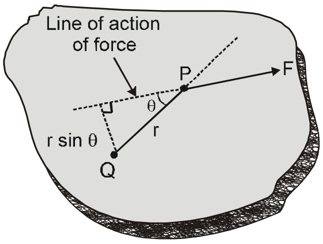
Example 28. M द्रव्यमान के R_1 त्रिज्या की एक एकसमान चकती जिसके बीच से R_2 त्रिज्या का भाग काटा गया है, का चकती के केन्द्र से गुजरने वाले व तल के लम्बवत् अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

Solution : $\rho = \frac{M}{\pi\ (R_1^2 - R_2^2)} \quad \Rightarrow \quad I = \rho \times \left(\frac{\pi R_1^4 - \pi R_2^4}{2}\right)$

$I = \frac{M\left(R_1^{\ 2} + R_2^{\ 2}\right)}{2}$ **Ans.**

6. बल आघूर्ण :

बल आघूर्ण, वस्तु की घूर्णन गति में परिवर्तन लाने वाले बल की क्षमता को दर्शाता है।



6.1 बिन्दु के प्रति बलाघूर्ण :

एक बिन्दु के परितः बल $\vec{F}$ का आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

यहाँ $\vec{F}$ = आरोपित बल

P = बल का क्रिया बिन्दु

Q = वह बिन्दु जिसके परितः हमें बलाघूर्ण ज्ञात करना है।

$\vec{r}$ = जिस बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण ज्ञात करना चाहते है उससे बल के क्रिया बिन्दु का स्थिति सदिश

$|\vec{\tau}| = r F \sin\theta = r_{\perp}F = rF_{\perp}$

यहाँ θ = बल की दिशा व Q के सापेक्ष P के स्थिति सदिश के बीच कोण।

$r_{\perp}$ = बिन्दु Q से बल की क्रिया रेखा की लम्बवत् दूरी

$F_{\perp}$ = बल भुजा

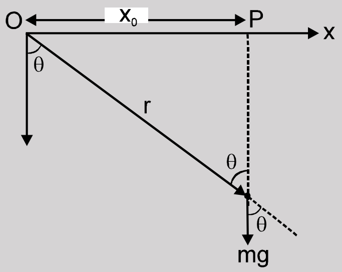
बलाघूर्ण का SI मात्रक Nm है।

☞ बलाघूर्ण एक सदिश राशि है तथा इसकी दिशा दाहिने हाथ के अंगूठे के नियम द्वारा ज्ञात की जाती है।

Solved Examples

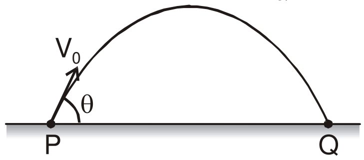
Example 29. x–अक्ष पर $x = x_0$ पर स्थित बिन्दु P से ऊर्ध्वाधर तल में M द्रव्यमान का एक कण छोड़ा जाता है। मूल बिन्दु के परितः किसी समय t पर कण पर बलाघूर्ण ज्ञात करो।

Solution : बलाघूर्ण, गुरूत्वीय बल द्वारा उत्पन्न होता है।



$\vec{\tau} = r F \sin\theta \hat{k}$ या $\tau = r_{\perp}F = x_0 mg = r\, mg\, \frac{x_0}{r} = mgx_0\, \hat{k}$

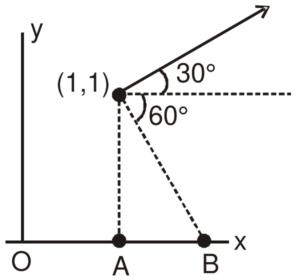
Example 30. क्षैतिज के साथ θ कोण बनाते हुए m द्रव्यमान के एक कण को v_0 वेग से धरातल पर स्थित किसी बिन्दु P, से फेंका जाता है। प्रक्षेप्य बिन्दु के परितः कण पर लगने वाला बलाघूर्ण ज्ञात करो जबकि यह अधिकतम ऊँचाई पर है ?



Solution : $\tau = rF\sin\theta = \frac{R}{2} mg = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} mg$

$\tau = \frac{mv_0^2 \sin 2\theta}{2}$

Example 31. O तथा A के परितः बल आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



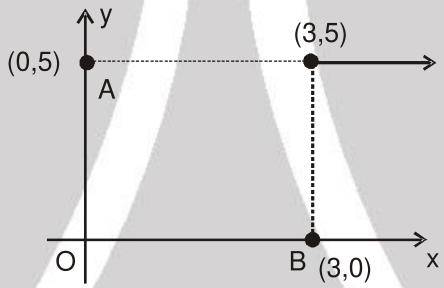
Solution : O के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau} = \vec{r}_0 \times \vec{F}$, $\vec{r}_0 = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{F} = 5\sqrt{3}\ \hat{i} + 5\hat{j}$

$\vec{\tau} = (\hat{i} + \hat{j}) \times (5\sqrt{3}\,\hat{i} + 5\hat{j}) = 5(1 - \sqrt{3})\hat{k}$

A के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau} = \vec{r}_a \times \vec{F}, \vec{r}_a = \hat{j}$, $\vec{F} = 5\sqrt{3}\,\hat{i} + 5\hat{j}$

$\vec{\tau} = \hat{j} \times (5\sqrt{3}\,\hat{i} + 5\hat{j}) = 5(-\sqrt{3})\ \hat{k}$

Example 32. बिन्दु A, O तथा B के परितः बल आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution : A के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau}_A = \vec{r}_A \times \vec{F}$, $\vec{r}_A = 3\hat{i}$, $\vec{F} = 10\hat{i}$

$\vec{\tau}_A = 3\hat{i} \times 10\hat{i} = 0$

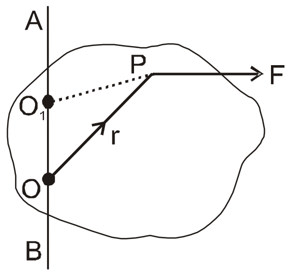
B के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau}_B = \vec{r}_B \times \vec{F}, \vec{r}_B = 5\hat{j}, \vec{F} = 10\hat{i}$

$\vec{\tau}_B = 5\hat{j} \times 10\hat{i} = -50\hat{k}$

O के परितः बल आघूर्ण , $\vec{\tau}_O = \vec{r}_O \times \vec{F}, \vec{r}_O = 3\hat{i} + 5\hat{j}, \vec{F} = 10\hat{i}$

$\vec{\tau}_O = (3\hat{i} + 5\hat{j}) \times 10\hat{i} = -50\hat{k}$

6.2 अक्ष के परितः बल आघूर्ण :



किसी अक्ष AB के परितः बल $\vec{F}$ का बलाघूर्ण को बल $\vec{F}$ के अक्ष के किसी बिन्दु O के परितः बलाघूर्ण का अक्ष AB के अनुदिश घटक के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

दिये गये चित्र में $\vec{F}$ का O के परितः बलाघूर्ण $\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$

$\vec{F}$ का AB के परितः बलाघूर्ण, τ_{AB} , $\vec{\tau}_0$ का AB के अनुदिश घटक है। किसी बल की किसी अक्ष के परितः बलाघूर्ण की चार दशायें हो सकती हैं :

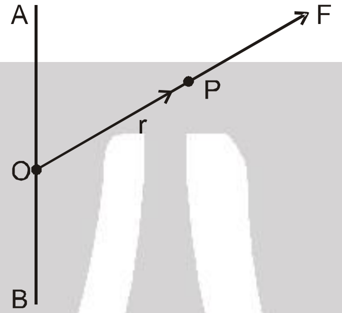
स्थिति I : बल घूर्णन अक्ष के समान्तर है, $\vec{F} \parallel \overline{AB}$

AB घूर्णन अक्ष के जिसके परितः बल आघूर्ण ज्ञात करना है

$\vec{r}\times\vec{F}$, $\vec{F}$ के लम्बवत् है, लेकिन $\vec{F} \parallel \overline{AB}$, अतः $\vec{r}\times\vec{F} \perp \overline{AB}$.

$\vec{r}\times\vec{F}$ का घटक $\overline{AB}$ के अनुदिश है अतः शून्य है।

स्थिति II : बल की रेखा घूर्णन अक्ष को काटती है (F , AB को काटता है)



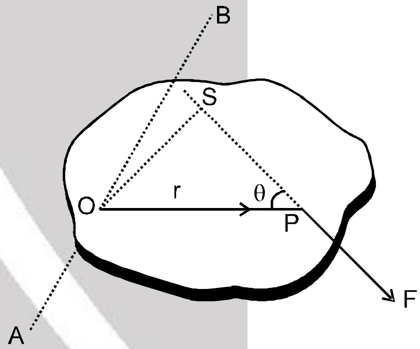
$\vec{F}$, AB को $\vec{r}$ के अनुदिश काटता है, अतः $\vec{F}$ तथा $\vec{r}$ एक ही रेखा में हैं। अतः O के परितः बल आघूर्ण $\vec{r}\times\vec{F} = 0$.

अतः इस बलाघूर्ण का AB के अनुदिश घटक भी शून्य होगा।

स्थिति III : $\vec{F}$, $\overline{AB}$ के लम्बवत् है तथा AB को प्रतिच्छेद नहीं करता है

त्रिविमा में दो रेखाऐं एक दूसरे को प्रतिच्छेद किये बिना एक दूसरे के लंबवत् हो सकती है। दो असमान्तर तथा एक दूसरे को प्रतिच्छेदन करने वाली रेखाऐं तिर्यक (skew) रेखाऐं कहलाती हैं।

चित्र में बल के कार्य बिन्दु P से होता हुआ एक तल दर्शाता है, जो घूर्णन अक्ष AB के लम्बवत् है। माना कि तल अक्ष को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है। बल F भी इसी तल में है। ($\because$ F $\perp$ AB), O पर मूल बिन्दु लेने पर,



बल आघूर्ण = $\vec{r}\times\vec{F}$ = $\overline{OP} \times \vec{F}$.

अतः बल आघूर्ण = rF sin θ = F(OS)

जहाँ OS, बल $\vec{F}$ की कार्य रेखा की O से लम्बवत् दूरी है। रेखा OS भी घूर्णन अक्ष के लम्बवत् है। अतः यह बल तथा घूर्णन के उभयनिष्ठ लंब की लम्बाई है।

$\vec{\tau}$ = $\overline{OP} \times \vec{F}$ की दिशा अक्ष AB के अनुदिश है, क्योंकि $\overline{AB} \perp \overline{OP}$ तथा $\overline{AB} \perp \vec{F}$ अतः AB के परितः बलाघूर्ण $\vec{\tau}$ के परिमाण F.(OS) के बराबर है।

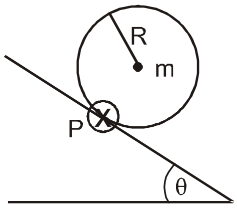
☛ अतः F का AB के परितः बलाघूर्ण = F का परिमाण × बल तथा अक्ष के उभयनिष्ठ लंब की लम्बाई के उभयनिष्ठ लंब OS का बलाघूर्ण की लीवर भुजा या आघूर्ण भुजा कहते हैं।

स्थिति IV : $\vec{F}$ तथा $\overline{AB}$ तिर्यक (skew) है परन्तु लंबवत् नहीं।

यहाँ हम $\vec{F}$ के दो घटक कर सकते हैं, एक अक्ष के समान्तर तथा एक अक्ष के लंबवत्। समांतर घटक का बलाघूर्ण शून्य है तथा लम्बवत् घटक का बलाघूर्ण **दशा (III)** में निकाले परिणाम से प्राप्त किया जा सकता है।

Solved Examples

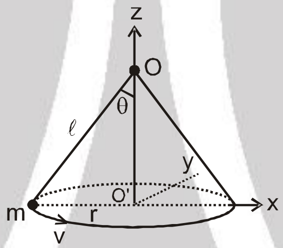
Example 33. भार का बल आघूर्ण P से गुजरने वाले अक्ष के परितः प्राप्त कीजिए।



Solution $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \vec{r} = R, \ \vec{F} = mg\sin\theta$

r तथा F दोनों लम्बवत् है, अतः P के परितः बलाघूर्ण $= mgR\sin\theta$

Example 34. m द्रव्यमान के एक गोलक को ℓ लम्बाई की एक डोरी से बांधकर बिन्दु O से लटका दिया जाता है। गोलक एक क्षैतिज वृत्त में गति कर रहा है। ज्ञात कीजिए (i) O तथा O' बिन्दु के परितः गुरूत्व तथा तनाव का बलाघूर्ण ज्ञात कीजिए (ii) अक्ष OO' के परितः कुल बलाघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution (i) बिन्दु O के परितः बलाघूर्ण

तनाव का बलाघूर्ण (T), $\tau_{ten} = 0$ (तनाव बिन्दु O से पास कर रहा है।)

गुरूत्व का बलाघूर्ण $\tau_{mg} = \ell mg\sin\theta$

O' बिन्दु के परितः बलाघूर्ण

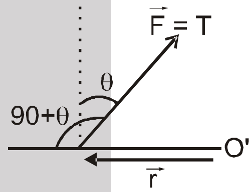
गुरूत्व का बलाघूर्ण $\tau_{mg} = mgr \quad r = \ell\sin\theta$

तनाव का बलाघूर्ण $\tau_{mg} = \ell mg\sin\theta$ (ऋणात्मक $\hat{j}$ के अनुदिश)

तनाव का बलाघूर्ण $\tau_{ten} = Tr\sin(90+\theta)$ $(T\cos\theta = mg)$

$\tau_{ten} = Tr\cos\theta$

$\tau_{ten} = \dfrac{mg}{\cos\theta}(\ell\sin\theta)\cos\theta = mg\ell\sin\theta$ (घनात्मक $\hat{j}$ के अनुदिश)



(ii) अक्ष OO' के परितः बलाघूर्ण

गुरूत्व का अक्ष OO' के परितः बलाघूर्ण $\tau_{mg} = 0$ (बल mg अक्ष OO' के समान्तर है)

तनाव का अक्ष OO' के परितः बलाघूर्ण $\tau_{ten} = 0$ (बल T अक्ष OO' के समान्तर है)

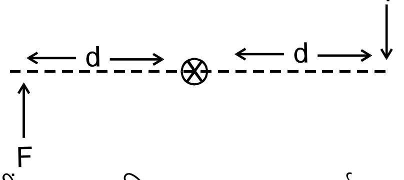
अक्ष OO' के परितः कुल बलाघूर्ण $\tau_{net} = 0$

6.3 बल युग्म :

समान परिमाण के बलों का युग्म जब विपरीत दिशा में आरोपित हो तो इसे बल युग्म कहते हैं।

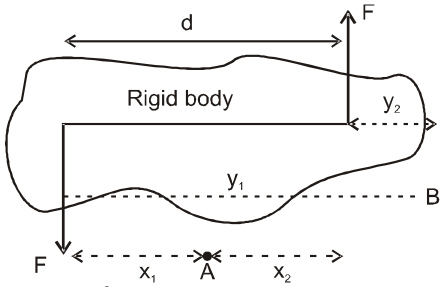
बल युग्म के कारण बल आघूर्ण = एक बल का परिमाण × उनकी बल रेखाओं के मध्य की दूरी

बल आघूर्ण का परिमाण $= \tau = F(2d)$



☞ बल युग्म वस्तु पर कुल बल नहीं लगाता यदि यह एक बल आघूर्ण लगाता है।

☞ किसी बल युग्म का कुल बल आघूर्ण किसी भी बिन्दु के परितः समान होता है।



A के परितः बलाघूर्ण $= x_1F + x_2F = F(x_1 + x_2) = Fd$

B के परितः बलाघूर्ण $= y_1F - y_2F = F(y_1 - y_2) = Fd$

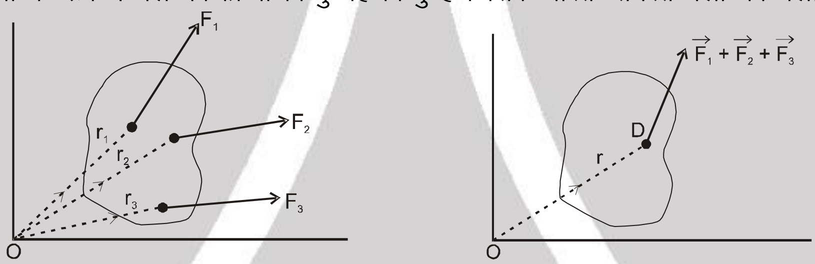
☞ यदि निकाय पर कुल बल शून्य है, तो किसी भी बिन्दु के परितः बलाघूर्ण समान होता है।

☞ इसका एक परिणाम यह है कि यदि $F_{net} = 0$ और $\tau_{net} = 0$ किसी भी एक बिन्दु के परितः, तो $\tau_{net} = 0$ सभी बिन्दु के परितः

6.4 बल का क्रिया बिंदु :

बल का क्रिया बिन्दु वह बिन्दु है जिस पर कुल बल आरोपित करने पर यह स्थानान्तरण तथा घूर्णन गति दोनों में वही प्रभाव उत्पन्न करता है, जो क्रिया बिन्दु पर आरोपित करने से पहले थे।

द्वितीयक परिभाषा के रूप में बल का क्रिया बिन्दु वह बिन्दु है जिसके परितः समस्त बलों का बलाघूर्ण शून्य होता है।

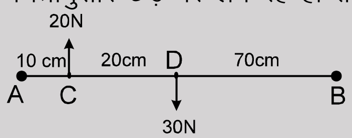


माना कि तीन बल $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ किसी वस्तु पर कार्य कर रहे हैं तथा D बल का क्रिया बिन्दु है तब $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ को D पर रखकर O के परितः मूल बलाघूर्ण के बराबर होगा

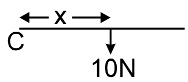
$$\left[\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3\right] = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$$

Solved Examples

Example 35. जब 20 N तथा 30 N के बल चित्रानुसार छड़ पर लग रहे हों तो बल का क्रिया बिन्दु ज्ञात कीजिए।



Solution : छड़ पर कार्यरत परिणामी बल $F_{rel} = 10N$



छड़ पर कार्यरत परिणामी बलाघूर्ण (C के परितः)

$\tau_c = (20 \times 0) + (30 \times 20) = 600$ दक्षिणावर्त

माना कि बल का क्रिया बिन्दु C से x दूरी पर है

$600 = 10\,x \Rightarrow x = 60$ cm

अतः बल का क्रिया बिन्दु A से 70 cm की दूरी पर है।

नोट : (i) गुरूत्व बल का क्रिया बिन्दु को गुरूत्व केन्द्र कहते हैं।

(ii) गुरूत्व केन्द्र तथा द्रव्यमान केन्द्र एक होते हैं यदि $\vec{g}$ का मान नियत हो।

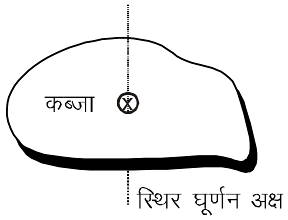
(iii) बल के क्रिया बिन्दु की संकल्पना काल्पनिक है, क्योंकि कुछ दशाओं में यह वस्तु के बाहर भी हो सकती है।

6.5 स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन :

यदि I_{Hinge} = घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (∵ यह अक्ष कब्जे से गुजरता है) I_{Hinge}

$\vec{\tau}_{ext})$ = वस्तु का घूर्णन अक्ष के परितः परिणामी बाह्य बलाघूर्ण

α = पिण्ड का कोणीय त्वरण $\quad \vec{\tau}_{ext})_{Hinge} = I_{Hinge}\,\vec{\alpha}$



घूर्णन गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}.I.\omega^2$

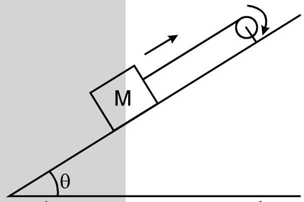
$\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$; $\vec{F}_{external} = M\ \vec{a}_{CM}$

वस्तु पिण्ड पर कार्यरत परिणामी बाह्य बल के स्पर्शरेखीय तथा त्रिज्यीय घटक है।

$\Rightarrow\ F_C = ma_C = m\frac{v^2}{r_{CM}} = m\omega^2 r_{CM} \quad \Rightarrow \quad F_t = ma_t = m\alpha\, r_{CM}$

Solved Examples

Example 36. चित्रानुसार θ झुकाव कोण वाले नततल के शीर्ष पर r त्रिज्या की पुली जुड़ी है, पुली का इसकी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है। एक रस्सी को इसके चारो तरफ लपेटा जाता है तथा इसके मुक्त सिरे से m द्रव्यमान जुड़ा है, यह इस नत तल पर फिसल सकता है। प्रारम्भ में पुली ω_0 कोणीय वेग से तल पर ब्लॉक के फिसलने की दिशा में घूर्णन कर रही है। ब्लॉक कितनी दूर गति करेगा?



Solution : माना ब्लॉक का मंदन a है। पुली की परिधि का रेखीय मंदन भी 'a' है। पुली का कोणीय मंदन $\alpha = a/r$ है। यदि रस्सी में तनाव T हो तो गति की समीकरण निम्न है : $mg\sin\theta - T = ma$ तथा $Tr = I\alpha = Ia/r$.

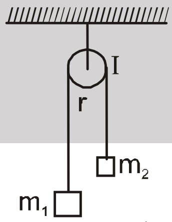
इन समीकरणों से T का विलोप करने पर, $mg\sin\theta - I\frac{a}{r^2} = ma$

दिया है, $a = \frac{mg\ \ r^2\sin\theta}{I + mr^2}$

नत तल के ऊपर ब्लॉक का प्रारम्भिक वेग $v = \omega r$ है। रूकने से पहले ब्लॉक द्वारा चली गई दूरी है

$$x = \frac{v^2}{2a} = \frac{\omega_0 r^2(I + mr^2)}{2m\ \ r^2\sin\theta} = \frac{(I + mr^2)\omega_0}{2m\ \ g\sin\theta}$$

Example 37. चित्रानुसार पुली का इसकी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है तथा इसकी त्रिज्या r है। दोनों ब्लॉक के त्वरण का परिमाण ज्ञात करो? यह मानना है कि रस्सी हल्की है तथा पुली पर फिसलती नहीं है।



Solution : माना बायीं रस्सी में तनाव T_1 है तथा दायीं रस्सी में तनाव T_2 है। माना m_1 द्रव्यमान वाला ब्लॉक α त्वरण से नीचे जा रहा है तथा दूसरा ब्लॉक समान त्वरण से ऊपर जा रहा है। चूंकि रस्सी पहिये की परिधि पर फिसल नहीं रही है अतः यह परिधि का स्पर्श रेखीय त्वरण भी है। इसलिए पहिये का कोणीय त्वरण $\alpha = a/R$ है। अतः m_1 द्रव्यमान, m_2 द्रव्यमान तथा पुली के लिए गति की समीकरणें निम्न हैं।

$m_1g - T_1 = m_1a$ ....(i)

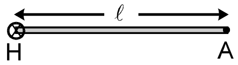
$T_2 - m_2g = m_2a$ ....(ii)

$T_1r - T_2r = I\alpha = I\alpha/r$ ....(iii)

(i) तथा (ii) से T_1 तथा T_2 का मान (iii) में रखने पर,

$[(m_1g - a) - m_2(g + a)]\, r = I\frac{a}{r}$ अतः $a = \frac{(m_1 - m_2)gr^3}{I + (m_1 + m_2)r^2}$

Example 38. m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की समरूप छड़ एक चिकनी क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष H बिन्दु पर कीलकित है, यह ऊर्ध्वाधर तल में घूर्णन कर सकती है।



(i) छड़ को इसकी प्रारम्भिक क्षैतिज स्थिति से विराम से मुक्त करने के तुरन्त बाद इसका कोणीय त्वरण α ज्ञात करो ?

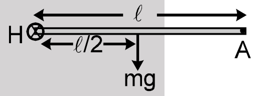
(ii) इस क्षण बिन्दु A का त्वरण (त्रिज्यीय तथा स्पर्शरेखीय) ज्ञात करो?

(iii) इस क्षण पर कुल हिन्ज बल ज्ञात कीजिए।

(iv) जब छड़ ऊर्ध्व होती है तो α तथा ω ज्ञात कीजिए।

(v) जब छड़ ऊर्ध्व होती है तो हिन्ज बल ज्ञात कीजिए।

Solution : (i) $\tau_H = I_H\ \alpha$



$\text{mg}.\ \frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{3}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2\ell}$

(ii) $a_{tA} = \alpha\ell = \frac{3g}{2\ell}.\ell = \frac{3g}{2}$

$a_{CA} = \omega^2 r = 0.\ell = 0$ ($\omega = 0$ छोड़ने के तुरन्त बाद)

(iii) माना कि हिन्ज चित्र में दर्शाये अनुसार अभिलम्ब प्रतिक्रिया लगती है

ऊर्ध्व दिशा में $F_{ext} = ma_{CM}$

$\Rightarrow\ mg - N_1 = m.\ \frac{3g}{4}$ (पिछले उदाहरण से हम a_{CM} का मान प्राप्त कर सकते हैं।)

$\Rightarrow\ N_1 = \frac{mg}{4}$

क्षैतिज दिशा में

$F_{ext} = ma_{CM} \Rightarrow\ N_2 = 0$ (क्षैतिज दिशा में $a_{CM} = 0$ $\omega = 0$ छोड़ने के तुरन्त बाद)

(vi) बलाघूर्ण = 0 जब छड़ ऊर्ध्व हो जाती है, अतः $\alpha = 0$

ऊर्जा संरक्षण से $\frac{mg\ell}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \left(I = \frac{m\ell^2}{3}\right)$

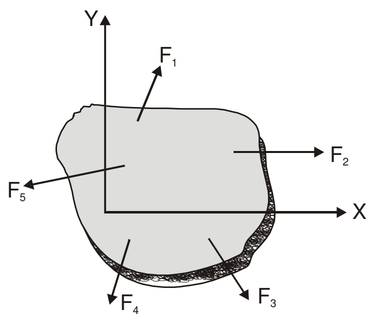
$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$

(v) जब छड़ ऊर्ध्व हो जाती है।

$\alpha = 0,\ \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$; $F_H - mg = \frac{m\omega^2\ell}{2}$; $F_H = \frac{5mg}{2}$ **Ans.**

7. साम्यावस्था :

एक निकाय यांत्रिक साम्यावस्था में होता है यदि वह स्थानांतरीय तथा घूर्णन साम्यावस्था दोनों में है



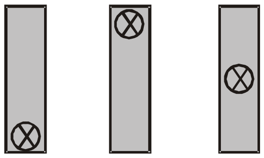
इसके लिए : $\overrightarrow{F_{net}} = 0$

$\overrightarrow{\tau_{net}} = 0$ (प्रत्येक बिन्दु के परितः)

(6.3) से यदि $\overrightarrow{F_{net}} = 0$ तो $\overrightarrow{\tau_{net}}$ प्रत्येक बिन्दु के परितः समान है

अतः साम्यावस्था के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है $\overrightarrow{F_{net}} = 0$, किसी बिन्दु के परितः $\overrightarrow{\tau_{net}} = 0$ जो हम अपनी सुविधानुसार चुन सकते हैं। ($\overrightarrow{\tau_{net}}$ अपने आप सभी बिन्दुओं के परितः शून्य हो जाएगा)

☞

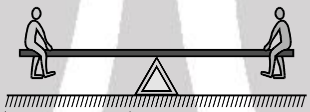


unstable equilibrium　stable equilibrium　Neutral equilibrium

यदि वस्तु को थोड़ा सा विस्थापित करने तथा मुक्त करने पर यह पुनः अपनी साम्यावस्था की स्थिति को प्राप्त कर लेती है, तो इसे वस्तु की **स्थाई साम्यावस्था** कहते हैं। यह अस्थाई होती है यदि वस्तु को थोड़ा सा विस्थापित या मुक्त करने पर यह और ज्यादा विस्थापित हो जाती है। यदि वस्तु का थोड़ा सा विस्थापित या मुक्त करने पर वस्तु साम्यावस्था में ही रहती है तो इसे **उदासीन साम्यावस्था** कहते हैं।

Solved Examples

Example 39. 20 kg तथा 25 kg के दो छोटे बच्चे 4.0m लम्बाई के सन्तुलन झूले को संतुलित करने की कोशिश कर रहे हैं। सन्तुलन झूला इसके केन्द्र पर कीलकीत है। यदि एक बच्चा इसके किनारे (छोर) पर बैठा है तो दूसरे बच्चे को कहाँ बैठना चाहिए।



Solution : स्पष्ट है कि 20 kg के बच्चे को एक किनारे पर तथा 25 kg के बच्चे को इसके केन्द्र के निकट बैठना होगा। माना कि केन्द्र से इसकी दूरी 'x' है। चूंकि बच्चे साम्यावस्था में है तो बच्चों तथा झूले के मध्य अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल बच्चों के भार के बराबर होगा। झूले को घूर्णन साम्यावस्था में मानने पर इस पर लगने वाले बलों के कारण बल आघूर्णों का योग शून्य होना चाहिए। इस पर निम्न बल कार्यरत है।

(a) 25 kg के बच्चे द्वारा (25 kg) g भार नीचे की ओर,

(b) 20 kg के बच्चे द्वारा (20 kg) g भार नीचे की ओर,

(c) झूले का भार

(d) fulcrum द्वारा अभिलम्ब बल fulcrum के सापेक्ष बल आघूर्ण (25 kg)g x = (20 kg)g (2 m) या x = 1.6 m

Example 40. 15 kg द्रव्यमान की एक समरूप छड़ चिकनी उर्ध्वाधर दीवार के साथ, खुरदरे क्षैतिज धरातल से 37º का कोण बनाते हुए चित्रानुसार रखी है तो छड़ सीढ़ी पर फर्श द्वारा लगाया गया अभिलम्ब बल तथा घर्षण बल ज्ञात करो? [g = 10 m/s^2]

Solution : चित्रानुसार सीढ़ी पर निम्न बल कार्यरत है

(a) सीढ़ी का भार W,

(b) उर्ध्वाधर दीवार द्वारा अभिलम्ब बल N_1 ,

(c) फर्श द्वारा अभिलम्ब बल N_2

(d) फर्श द्वारा घर्षण बल 'f'

उर्ध्वाधर तथा क्षैतिज घटक लेने पर,

$N_1 = f$ ....(i)

तथा $N_2 = W$ ....(ii)

B के सापेक्ष बल आघूर्ण लेने पर,

$N_1(AO) = W(CB)$

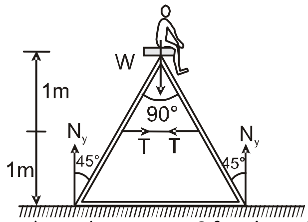
या, $N_1(AB)\cos 53° = W\,\frac{AB}{2}\sin 53°$ या $N_1\,\frac{3}{5} = \frac{W}{2}\,\frac{4}{5}$

या, $N_1 = \frac{2}{3}W$ ....(iii)

फर्श द्वारा अभिलम्ब बल $N_2 = W = (15\text{ kg})(10\text{ m/s}^2) = 150$ N.

घर्षण बल $f = N_1 = \frac{2}{3}W = 100$ N.

Example 41. चित्रानुसार द्रव्यमानहीन सीढ़ी घर्षण रहित फर्श पर रखी है। सीढ़ी की दो टांगे क्रास बार के मध्य से जुड़ी है। दोनों टांगों के मध्य का कोण 90° है। एक 60 kg का मोटा आदमी सीढ़ी पर बैठा है। फर्श द्वारा प्रत्येक टांग पर लगने वाला सम्पर्क बल तथा क्रॉसबार में तनाव ज्ञात करो? [Take $g = 10 m/s^2$]



Solution : चित्र में भिन्न–भिन्न भाग पर लगने वाले बल प्रदर्शित है। सीढ़ी + व्यक्ति निकाय को उर्ध्वाधर साम्यावस्था में मानने पर निकाय पर कार्यरत बल, इसका भार तथा फर्श द्वारा आरोपित $N_y + N_y = 2N_y$ सम्पर्क बल है। यद्यपि

$2N_y = (60 \text{ kg})\, g$ या $N_y = (30 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) = 300 \text{ N}$.

सीढ़ी की बायीं टांग को साम्यावस्था में मानने पर

ऊपरी सिरे के सापेक्ष इस पर लगने वाले बलों के कारण बल आघूर्ण

$N_y (2m) \tan 45° = T(1 \text{ m})$ या $T = N_y\, 2 = (300 \text{ N}) \times 2 = 600 \text{ N}$.

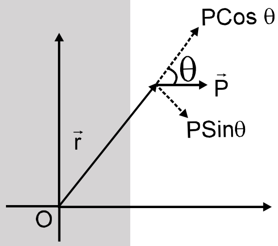
8. कोणीय संवेग ($\vec{L}$)

8. 1. किसी कण का बिन्दु के परितः कोणीय संवेग

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad \Rightarrow \quad L = rp\sin\theta$

or $|\vec{L}| = r_\perp \times P$

or $|\vec{L}| = P_\perp \times r$



जहाँ $\vec{P}$ = कण का रेखीय संवेग

$\vec{r}$ = बिन्दु O, जिसके परितः कण का कोणीय संवेग ज्ञात करना है।

θ = सदिश $\vec{r}$ & $\vec{P}$ के बीच का कोण

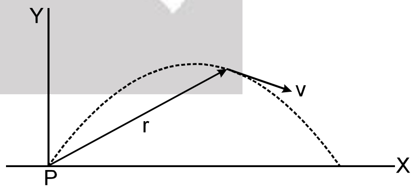
$r_\perp$ = बिन्दु O से कण की गति की दिशा के बीच की लम्बवत् दूरी

$P_\perp$ = $\vec{r}$ के लम्बवत् संवेग का घटक कोणीय संवेग का SI मात्रक kgm^2/sec. होता है।

Solved Examples

Example 42. m द्रव्यमान का एक कण को बिन्दु O से समय t = 0 पर क्षैतिज से 45° के कोण पर u चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। t = u/g समय पर कण का बिन्दु O के सापेक्ष कोणीय संवेग का परिमाण तथा दिशा ज्ञात करो?

Solution : चित्रानुसार X-अक्ष को क्षैतिज के अनुदिश तथा Y-अक्ष को उर्ध्वाधर ऊपर की ओर मानते हैं तथा बिन्दु 'P' मूल बिन्दु पर है।



$v_x = u \cos 45° = u/\sqrt{2}$

तथा $x = v_x t = \frac{u}{\sqrt{2}} \cdot \frac{u}{g} = \frac{u^2}{\sqrt{2}g}$.

उर्ध्वाधर गति के लिए,

$v_y = u \sin 45° = \frac{u}{\sqrt{2}} - u = \frac{(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} u$ तथा $y = (u \sin 45°)\, t - \frac{1}{2} gt^2$

$= \frac{u^2}{\sqrt{2}g} - \frac{u^2}{2g} = \frac{u^2}{2g}(\sqrt{2} - 1)$.

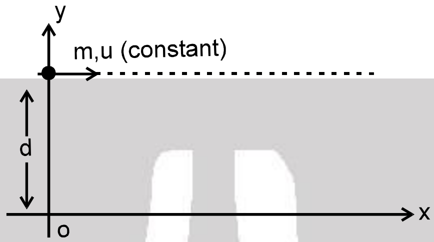
मूल बिन्दु के सापेक्ष कण का समय t पर कोणीय संवेग

$L = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = m(\hat{i}x + \hat{j}y) \times (\hat{i}v_x + \hat{j}v_y) = m(\hat{k}xv_y - \hat{k}yv_x)$

$$= m\hat{k}\left[\left(\frac{u^2}{\sqrt{2}\ \ g}\right)\frac{u}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}) - \frac{u^2}{2g}(\sqrt{2}-1)\frac{u^2}{\sqrt{2}}\right] = -\hat{k}\ \frac{mu^3}{2\sqrt{2}g}$$

कण तल में गति कर रहा है, कण का ऋणात्मक Z-अक्ष के अनुदिश कोणीय संवेग $\frac{mu^3}{2\sqrt{2}g}$ है अर्थात् गति के तल के लम्बवत्।

Example 43. एक 'm' द्रव्यमान का कण बिन्दु (o, d) से गति प्रारम्भ करके नियत वेग $u\hat{i}$ से गति कर रहा है। तो इस क्षण कण का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो? कुछ समय पश्चात् उत्तर क्या होगा ?

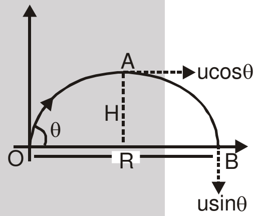


Solution : $\vec{L} = -m\,d\,u\,\hat{k}$. इसकी दिशा हमेशा दक्षिणावर्त रहती है।

Example 44. 'm' द्रव्यमान का कण क्षैतिज से θ कोण पर प्रारम्भिक वेग 'u' से प्रक्षेपित किया जाता है, तो प्रक्षेपण बिन्दु के सापेक्ष कण का कोणीय संवेग ज्ञात करो, जब -
(i) इसकी गति ठीक प्रारम्भ हुई हो (ii) यह पथ के शीर्ष बिन्दु पर हो (iii) यह धरातल से ठीक टकराये

Answer : (i) O ; (ii) mu cosθ $\frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$; (iii) mu sin θ $\frac{u^2\sin 2\theta}{g}$

Solution : (i) बिन्दु O के सापेक्ष कोणीय संवेग शून्य है



(ii) A के परितः कोणीय संवेग

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

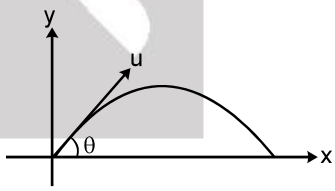
L = H × mu cosθ

$L = mu\cos\theta\ \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$ **Ans.**

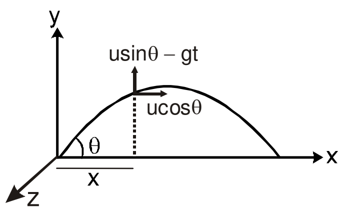
(iii) बिन्दु B के परितः कोणीय संवेग L = R × mu sinθ

$mu\sin\theta\ \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$ **Ans.**

Example 45. एक 'm' द्रव्यमान का कण क्षैतिज से θ कोण पर प्रारम्भिक वेग 'u' से प्रक्षेपित किया जाता है तो किसी समय 't' पर कण 'P' का कोणीय संवेग ज्ञात करो।
(i) y-अक्ष के सापेक्ष (ii) z-अक्ष के सापेक्ष



Solution : (i) वेग का घटक y-अक्ष के समांतर है, अतः, L = 0



(ii) $\tau = \frac{dL}{dt}$ – 1/2 mu cos θ. gt²

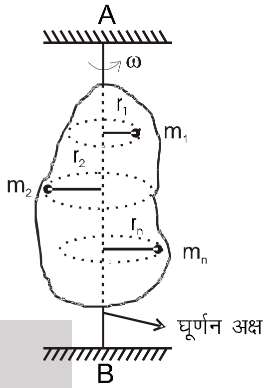
$-mgx = \frac{dL}{dt}$

– mgx dt = dL

$$\int_0^t -mgx\ \ dt\ \ =\ \int_0^L dL$$

z-अक्ष के परितः कोणीय संवेग : L = – 1/2 mu cos θ. gt² **Ans.**

8.2 स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करते हुए दृढ़ पिण्ड का कोणीय संवेग :



स्थिर अक्ष AB के सापेक्ष दृढ़ पिण्ड का कोणीय संवेग $L_{AB} = L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n$

$L_1 = m_1 r_1 \omega r_1$, $L_2 = m_2 r_2 \omega r_2$, $L_3 = m_3 r_3 \omega r_3$, $L_n = m_n r_n \omega r_n$

$L_{AB} = m_1 r_1 \omega r_1 + m_2 r_2 \omega r_2 + m_3 r_3 \omega r_3 .... + m_n r_n \omega r_n$

$$L_{AB} = \sum_{n=1}^{n=n} m_n \; (r_n)^2 \times \omega$$

$L_{AB} = I_H \, \omega$

$L_H = I_H \, \omega$

L_H = पिण्ड का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग

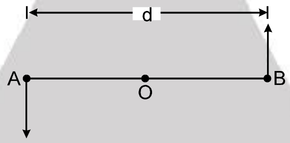
I_H = दृढ़ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण

ω = पिण्ड का कोणीय वेग

Solved Examples

Example 46. m द्रव्यमान के दो कण A तथा B, 'ℓ' लम्बाई की हल्की छड़ से इसके सिरों पर दृढ़तापूर्णक जुड़े है। यह निकाय छड़ के लम्बअर्द्धक के सापेक्ष ω कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है। इसकी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष प्रत्येक कण तथा निकाय का कोणीय संवेग ज्ञात करो?

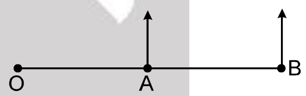
Solution : चित्र में दी गई स्थिति मानने पर। कण A का केन्द्र O के सापेक्ष वेग $v = \dfrac{\omega\ell}{2}$ है। कण का अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग $L_1 = mvr = m\left(\dfrac{\omega\ell}{2}\right)\left(\dfrac{\ell}{2}\right) = \dfrac{1}{4} m\omega\ell^2$ है। दूसरे कण का कोणीय संवेग L_2 भी यही होगा। निकाय का कोणीय संवेग दोनों कणों के कोणीय संवेग के योग के बराबर होगा अर्थात् $L = 1/2 \, m\omega\ell^2$



Example 47. समान द्रव्यमान m की दो गेंद 'ℓ' लम्बाई की हल्की छड़ पर एक गेंद इसके सिरे से तथा दूसरी गेंद इसके केन्द्र से जुड़ी है। छड़ दूसरे सिरे पर स्थिर है तथा क्षैतिज तल में ω कोणीय चाल से घूर्णन कर रही है। एक सिरे पर स्थित गेंद का केन्द्र पर स्थित गेंद के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो।

Solution : दी गई स्थिति चित्र में स्पष्ट है। स्थिर सिरे 'O' के सापेक्ष गेंद A का वेग $v_A = \omega\,(\ell/2)$ है। O के सापेक्ष गेंद B का वेग $v_B = \omega\ell$ है। अतः B का A के सापेक्ष वेग $v_B - v_A = \omega\,(\ell/2)$ होगा, इसलिए गेंद B का A के सापेक्ष कोणीय संवेग है L = mvr

$$= m\omega\left(\frac{\ell}{2}\right)\frac{\ell}{2} = \frac{1}{4}\, m\omega\ell^2$$



इसकी दिशा घूर्णन तल के लम्बवत् है।

Example 48. 400 g द्रव्यमान तथा 10 cm त्रिज्या की समरूप वृत्ताकार वलय इसकी किसी एक व्यास के अनुदिश 20 rad/s की कोणीय चाल से घूर्णन कर रही है, तो वलय का इसकी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग तथा गतिज ऊर्जा ज्ञात करो?

Solution : वलय का इसकी व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है

$$I = \frac{1}{2} Mr^2 = \frac{1}{2} (0.400 \text{ kg})\,(0.10 \text{ m})^2 = 2 \times 10^{-3} \text{ kg-m}^2.$$

गतिज ऊर्जा है ......

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\,(2 \times 10^{-3} \text{ kg - m}^2)\,(400 \text{ rad}^2/\text{s}^2) = 0.4 \text{ J}$$

तथा घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग है

$L = I\omega = (2 \times 10^{-3} \text{ kg-m}^2)\,(20 \text{ rad/s}) = 0.04 \text{ kg-m}^2/\text{s} = 0.04$ J-s.

8.3 कोणीय संवेग संरक्षण :

घूर्णन में न्यूटन का द्वितीय नियम : $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

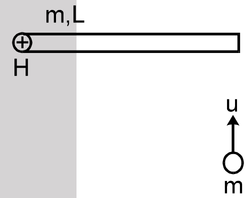
यहाँ $\vec{\tau}$ और $\vec{L}$ समान अक्ष के सापेक्ष है।

☞ यदि किसी कण या निकाय पर $\tau_{बाह्य} = 0$ हो तो कण या निकाय का कोणीय संवेग, उस बिन्दु या घूर्णन अक्ष के सापेक्ष नियत रहता है।

बलाघूर्ण का आवेग : $\int \tau dt = \Delta J$; $\Delta J \rightarrow$ कोणीय संवेग में परिवर्तन

Solved Examples

Example 49. m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की समरूप छड़ H बिन्दु पर किलकित है। यह क्षैतिज तल में ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष मुक्त रूप से घूर्णन कर सकती है। समान द्रव्यमान m का एक बिन्दु द्रव्यमान प्रारम्भिक वेग u से छड़ के लम्बवत् गति करता हुआ, छड़ के मुक्त सिरे से अप्रत्यास्थ टक्कर करता है तो टक्कर के तुरन्त बाद छड़ का कोणीय वेग ज्ञात करो ?

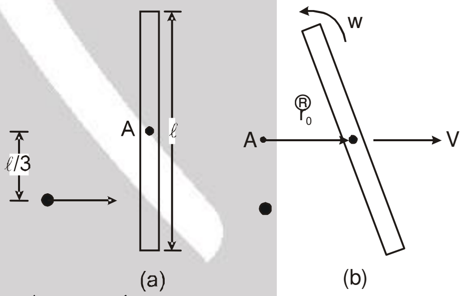


Solution : चूंकि क्षैतिज तल में कोई बाह्य बल उपस्थित नहीं है इसलिए कोणीय संवेग नियत रहता है। यह क्षैतिज तल में H के सापेक्षबल आघूर्ण उत्पन्न करता है।

$$mul = \left(\frac{m\ell^2}{3} + m\ell^2\right)\omega \;\Rightarrow\; \omega = \frac{3a}{4\ell}$$

Example 50. m_1 द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की छड़ चिकने क्षैतिज तल पर स्थित है। m_2 द्रव्यमान का कण छड़ की लम्बाई के लम्बवत् v_0 चाल से गति करता हुआ इसके केन्द्र से $\ell/3$ दूरी पर टकराता है तथा टकराने के पश्चात् यही रूक जाता है। तो (a) छड़ के केन्द्र का वेग ज्ञात करो तथा (b) टक्कर के तुरन्त बाद छड़ का इसके केन्द्र से सापेक्ष कोणीय वेग ज्ञात करो।

Solution : दी गई स्थिति चित्र में प्रदर्शित है। छड़ तथा कण को एक साथ निकाय मानने पर। चूंकि बाह्य परिणामी बल शून्य है। अतः निकाय का रेखीय संवेग संरक्षित रहेगा। यहां निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल आघूर्ण भी शून्य है तो निकाय का किसी भी रेखा के सापेक्ष कोणीय संवेग भी नियत रहेगा। माना छड़ के केन्द्र का वेग v_0 तथा केन्द्र के सापेक्ष कोणीय वेग ω है।



(a) टक्कर के पहले रेखीय संवेग mv है तथा टक्कर के पश्चात् संवेग MV है।

यद्यपि $m_2v_0 = m_1V_1$ या $V = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)v_0$

(b) जब छड़ विराम में हो तो माना A छड़ का केन्द्र है। माना AB रेखा चित्र के तल के लम्बवत् रेखा है। छड + कण निकाय का AB के सापेक्ष कोणीय संवेग है।

$L = m_2v_0\,(\ell/3)$

टक्कर के पश्चात् कण विराम में आ जाता है। कण का A के सापेक्ष संवेग है।

$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + m_1\vec{r}_0 \times \vec{V}$ चूंकि $\vec{r}_0 \parallel \vec{V}$, $\vec{r}_0 \times \vec{V} = 0$

यद्यपि $\vec{L} = \vec{L}_{cm}$ अतः छड़ का AB के सापेक्ष कोणीय संवेग

$$L = I\omega = \frac{m_1\ell^2}{12}\omega \text{ या } \frac{m_2v\ell}{3} = \frac{m_1\ell^2}{12}\omega \text{ या } \omega = \frac{4m_2v_0}{m_1\ell}$$

9. एक दृढ़ पिण्ड की सम्मिलित स्थानान्तरण और घूर्णन गति

दृढ़ पिण्ड की व्यापक गति दो स्वतंत्र गतियों के योग रूप में समझी जा सकती है। एक तो पिण्ड के किसी बिन्दु की स्थानांतरित गति व दूसरी इस बिन्दु के सापेक्ष पिण्ड की घूर्णन गति। पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र इस बिन्दु के लिए चयन करना सुविधाजनक रहता है, चूंकि इससे गणितीय गणनायें स्वीकृत हो जाएगी।

☞ एक रेल में एक पंखे को, प्लेटफार्म पर खड़ा प्रेक्षक A देखता है।

यदि पंखा बंद है, जबकि रेल चल रही है, तो पंखे की गति शुद्ध स्थानांतरीय होगी, चूंकि पंखे का प्रत्येक बिन्दु समान समय में समान दूरी विस्थापित हो रहा है।

यदि पंखा चालू (शुरू) करें, जबकि रेल खड़ी है, तो पंखे की गति अंश के सापेक्ष शुद्ध घूर्णन गति है, चूंकि अक्ष पर स्थित सभी बिन्दु स्थिर है, जबकि अन्य सभी बिन्दु अक्ष के सापेक्ष समान कोणीय वेग से घूम रहे हैं।

यदि चलती रेल में पंखा चालू (शुरू) किया जाए तो प्लेटफार्म पर स्थित प्रेक्षक के लिए पंखे की गति न तो शुद्ध स्थानांतरीय है ना ही शुद्ध घूर्णन गति। इस प्रकार की गति दृढ़ पिण्ड की व्यापक गति का अच्छा उदाहरण है।

अब यदि प्रेक्षक B रेल में ही स्थित है, तो उसे पंखे की गति शुद्ध घूर्णन गति व B की (A के सापेक्ष) शुद्ध स्थानांतरीय गति के योग रूप में विघटित की जा सकती है।

इस प्रकार दृढ़ पिण्ड की व्यापक गति का शुद्ध घूर्णन व शुद्ध स्थानांतरण गति के विघटन सिर्फ रेल में स्थित पंखे के लिए ही नहीं, अपितु किसी भी दृढ़ पिण्ड की गति के लिए सही (सटीक) है।

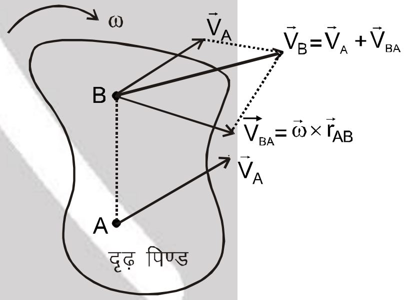
9.1 दृढ़ पिण्ड की व्यापक गति की गतिकी :

पूर्व कथनानुसार किसी भी दृढ़ पिण्ड के किसी भी बिन्दु का इसी पिण्ड के किसी भी अन्य बिन्दु के सापेक्ष कोणीय विस्थापन (θ) , कोणीय वेग (ω), कोणीय त्वरण (α) समान होता है।

अतः यदि हम पिण्ड के किसी बिन्दु (माना A) का वेग व किसी भी बिन्दु का अन्य किसी भी बिन्दु के सापेक्ष कोणीय वेग (माना ω), जानते हैं तो इस दृढ़ पिण्ड पर स्थित किसी भी बिन्दु का वेग परिकलित किया जा सकता है। चूंकि दूरी AB नियत है।

चूंकि दूरी AB नियत है

$\vec{V}_{BA} \perp \overrightarrow{AB}$



ज्ञातव्य है कि $\omega = \dfrac{V_{BA\perp}}{r_{BA}}$

$V_{BA\perp} = V_{BA} = \omega r_{BA}$

सदिश रूप में $\vec{V}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$

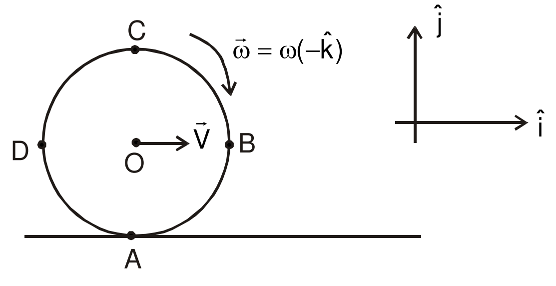
सापेक्ष वेग सूत्र से : $\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BA}$

इसी प्रकार $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{BA}$ [किसी भी दृढ़ पिण्ड निकाय के लिए]

Solved Examples

Example 51. पहिए (त्रिज्या r) की व्यापक गति जिसे केन्द्र O की शुद्ध स्थानांतरीय गति (वेग v से) O के सापेक्ष शुद्ध घूर्णन गति (कोणीय वेग ω) के योग रूप में प्रेक्षित किया जा सकता है।



ज्ञात करें $\vec{v}_{AO}, \vec{v}_{BO}, \vec{v}_{CO}, \vec{v}_{DO}$ व $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C, \vec{v}_D$

Solution : $\vec{v}_{AO} = \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AO}\right)$

$\vec{v}_{AO} = \left(\omega(-\hat{k}) \times \vec{OA}\right)$

$\vec{v}_{AO} = \left(\omega(-\hat{k}) \times r(-\hat{j})\right)$

$\vec{v}_{AO} = -\omega r\hat{i}$

इसी तरह $\vec{v}_{BO} = \omega r\,(-\hat{j})$

$\vec{v}_{CO} = \omega r\,(\hat{i})$

$\vec{v}_{DO} = \omega r\,(\hat{j})$

$\vec{v}_{A} = \vec{v}_{O} + \vec{v}_{AO} = v\hat{i} - \omega r\hat{i}$

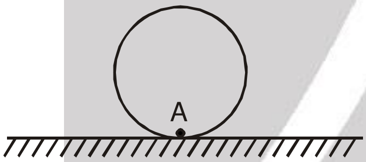
इसी तरह $\vec{v}_{B} = \vec{v}_{O} + \vec{v}_{BO} = v\hat{i} - \omega r\hat{j}$

$\vec{v}_{C} = \vec{v}_{O} + \vec{v}_{CO} = v\hat{i} + \omega r\hat{i}$

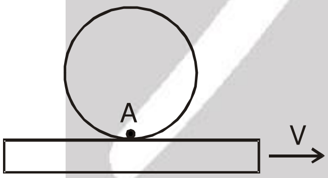
$\vec{v}_{D} = \vec{v}_{O} + \vec{v}_{DO} = v\hat{i} + \omega r\hat{j}$

9.2 शुद्ध लोटनी गति (या बिना फिसलन के लोटनी गति) :

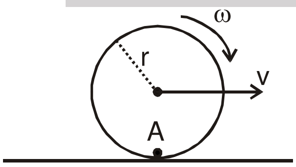
शुद्ध लोटनी गति एक दृढ़ पिण्ड जिसका अनुप्रस्थ काट वृत्तीय है (उदाहरण – पहिया, वलय, चकती, गोला) तथा जो किसी सतह पर गतिमान है के सामान्य घूर्णन का एक विशेष रूप है। अतः लोटनी गति करती हुयी वस्तु तथा स्पर्श सतह के मध्य (स्पर्श बिन्दु पर) कोई सापेक्ष गति नहीं है।

☞ 

यहाँ स्पर्श बिन्दु A है, तथा स्पर्श सतह क्षैतिज धरातल है। A के शुद्ध लोटनी वेग के लिये = 0 $\Rightarrow V_A = 0$.

☞ 

ऊपर दिये गये चित्रानुसार शुद्ध लोटनी गति हेतु A का वेग प्लेटफार्म के सापेक्ष शून्य है। $\Rightarrow V_A = V$.

☞ 

उपरोक्त चित्र से शुद्ध लोटनी गति हेतु A का वेग धरातल के सापेक्ष शून्य है।

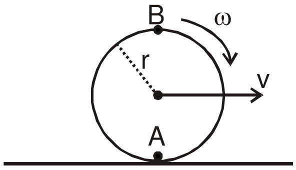
$\Rightarrow \quad v - \omega r = 0$

$v = \omega r$

इसी तरह $a = \alpha r$

Solved Examples

Example 52. चित्रानुसार एक r त्रिज्या का पहिया एक समान सड़क पर लोटनी गति करता है (बिना फिसलन के लोटनी गति)



बिन्दु A तथा B के वेग ज्ञात करो-

Solution : शुद्ध लोटनी गति हेतु स्पर्श सतह विराम में है। बिन्दु A का वेग शून्य है।

अतः $v = \omega r$

बिन्दु B का वेग $= v + \omega r = 2v$

9.3 दृढ़ पिण्ड की सामान्य गति की बल गतिकी :

इस गति को द्रव्यमान केन्द्र के स्थानान्तरण तथा द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष घूर्णन के रूप में भी देखा जा सकता है।

यदि I_{CM} = द्रव्यमान केन्द्र से पारित इस अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

τ_{cm} = द्रव्यमान केन्द्र से पारित इस अक्ष के सापेक्ष बलाघूर्ण

$\vec{a}_{CM}$ = द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण

$\vec{v}_{CM}$ = द्रव्यमान केन्द्र का वेग

$\vec{F}_{ext}$ = निकाय पर कार्यरत कुल बाह्य बल

$\vec{P}_{system}$ = निकाय का रेखीय संवेग

$\vec{L}_{CM}$ = द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग

$\vec{r}_{CM}$ = द्रव्यमान केन्द्र का बिन्दु A के सापेक्ष स्थिति सदिश

तो (i) $\vec{\tau}_{cm} = I_{cm} \vec{\alpha}$

(ii) $\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$

(iii) $\vec{P}_{system} = M\vec{v}_{cm}$

(iv) कुल K.E.= $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

(v) $\vec{L}_{CM} = I_{CM} \vec{\omega}$

(vi) बिन्दु A के सापेक्ष कोणीय संवेग = $\vec{L}$ द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष + $\vec{L}$ का द्रव्यमान केन्द्र A के सापेक्ष

$$\vec{L}_A = I_{cm}\vec{\omega} + \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}$$

☞ $\frac{dL_A}{dt} = \frac{d}{dt}(I_{cm}\vec{\omega} + \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}) \neq I_A \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. ध्यान दे कि बलाघूर्ण की समीकरण किसी भी दृढ़ पिण्ड के लिये सामान्य गति में केवल और केवल द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष लागू कर सकते हैं।

Solved Examples

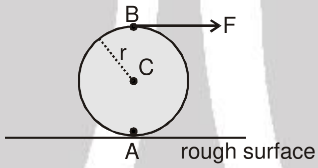
Example 53. 200 g द्रव्यमान का समरूप गोला बिना फिसले समतल सतह पर लुढ़क रहा है। इसके द्रव्यमान केन्द्र की चाल 2.00 cm/s है। इसकी गतिज ऊर्जा ज्ञात करो ?

Solution : चूंकि गोला बिना फिसले समतल सतह पर लुढ़क रहा है तो केन्द्र के सापेक्ष इसकी कोणीय चाल $\omega = \frac{v_{cm}}{r}$ है।

$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

$$= \frac{1}{5} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 = \frac{7}{10} M v_{cm}^2 = \frac{7}{10} (0.200 \text{ kg}) (0.02 \text{ m/s})^2 = 5.6 \times 10^{-5} \text{ J}$$

Example 54. m द्रव्यमान की एकसमान चकती खुरदरे क्षैतिज तल पर रखी है। इसके शीर्ष बिन्दु पर F स्पर्श रैखीय अचर बल कार्यरत है। यदि चकती बिना फिसले लुढ़कती है तो गोले के केन्द्र C तथा बिन्दु A व B का त्वरण ज्ञात करो?



Solution : स्थिति चित्र से स्पष्ट है, जैसे ही गोले पर बल F कार्य करता है, तो इसका संपर्क बिन्दु बांयी ओर फिसलना शुरू कर देता है। जिससे गोले पर स्थैतिक घर्षण बल आगे की ओर (दायीं ओर) लगने लगता है। माना गोले की त्रिज्या r है तथा इसके केन्द्र का रैखीय त्वरण 'a' है। चूंकि यहाँ फिसलन नहीं हो रही है अतः गोले के केन्द्र के सापेक्ष कोणीय त्वरण $\alpha = a/r$ है।

केन्द्र के रैखीय वेग के लिए,

$F + f = ma$ ....(i)

तथा केन्द्र के सापेक्ष घूर्णन गति,

$Fr - f\,r = I\,\alpha = \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{a}{r}\right)$ या $F - f = \frac{1}{2}ma$, ...(iii)

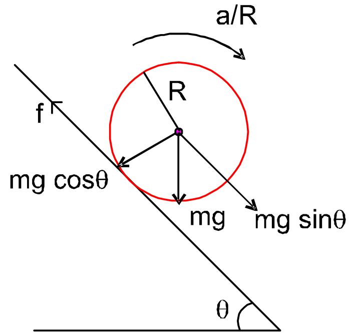
(i) तथा (ii) से, $2F = \frac{3}{2}ma$ या $a = \frac{4F}{3m}$

बिन्दु A का त्वरण $= 0$

बिन्दु B का त्वरण $= 2a = \frac{8F}{3m}$.

Example 55. एक R त्रिज्या, m द्रव्यमान तथा K घूर्णन त्रिज्या वाला वृत्तीय दृढ़ पिण्ड एक θ कोण वाले नत तल पर बिना फिसलन के लोटनी गति करता है। दृढ़ पिण्ड पर घूर्णन बल तथा पिण्ड का रेखीय त्वरण ज्ञात करो। घर्षण गुणांक का न्यूनतम मान क्या होना चाहिये, जिससे कि दृढ़ पिण्ड बिना फिसलन के शुद्ध लोटनी गति कर सके ?

Solution. यदि दृढ़ पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण a है तथा गोले तथा तल के मध्य घर्षण बल f है तो दृढ़ पिण्ड की स्थानांतरण तथा घूर्णन गति की समीकरण होगी।



$mg \sin\theta - f = ma$ (स्थानान्तरण गति)

$fR = I\,\alpha$ (घूर्णन गति)

$f = \frac{I\alpha}{R}$

$I = mk^2$, शुद्ध लोटनी गति के कारण $a = \alpha R$

$mg \sin\theta - \frac{I\alpha}{R} = m\alpha R$

$mg \sin\theta = m\,\alpha R + \frac{I\alpha}{R}$

$mg \sin\theta = m\,\alpha R + \frac{mk^2\alpha}{R}$

$mg \sin\theta = ma + \frac{mk^2\alpha}{R}$

$mg \sin\theta = a\left[\frac{R^2+k^2}{R^2}\right] \Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{\left[\frac{R^2+k^2}{R^2}\right]} \Rightarrow a = \frac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)}$

$f = \frac{I\alpha}{R} \Rightarrow f = \frac{mk^2a}{R^2} \Rightarrow \frac{mgk^2\sin\theta}{R^2+k^2}$

$f \le \mu N$

$\frac{mk^2}{R^2}a \le \mu \le mg\cos\theta \Rightarrow R^2\frac{k^2}{R^2} \times \frac{g\sin\theta}{(k^2+R^2)} \le \mu g\cos\theta$

$\mu \ge \frac{\tan\theta}{\left[1+\frac{R^2}{k^2}\right]} \Rightarrow \mu_{min} = \frac{\tan\theta}{\left[1+\frac{R^2}{k^2}\right]}$

नोट : पिछले उदाहरण से, यदि दृढ़ ठोस बेलन है, खोखला बेलन, ठोस गोला और खोखला गोला है।

(1) त्वरण का बढ़ता हुआ क्रम $a_{\text{ठोस गोला}} > a_{\text{खोखला गोला}} > a_{\text{ठोस बेलन}} > a_{\text{खोखला बेलन}}$

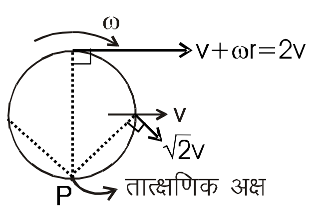
(2) शुद्ध लोटनी गति हेतु आवश्यक घर्षण बल बढ़ते हुए क्रम में $f_{\text{खोखला बेलन}} > f_{\text{खोखला गोला}} > f_{\text{ठोस बेलन}} > f_{\text{ठोस गोला}}$

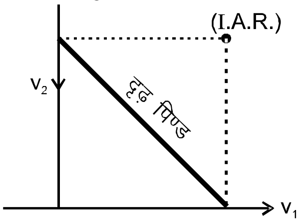
(3) शुद्ध लोटनी हेतु आवश्यक न्यूनतम घर्षण गुणांक बढ़ते हुए क्रम में $\mu_{\text{खोखला बेलन}} > \mu_{\text{खोखला गोला}} > \mu_{\text{ठोस बेलन}} > \mu_{\text{ठोस गोला}}$

9.4 घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष :

यह वह अक्ष है जिसके सापेक्ष सम्मिलित स्थानान्तरण और घूर्णन गति, शुद्ध घूर्णन गति प्रतीत होती है। द्रव्यमान केन्द्र के स्थानान्तरण और घूर्णन का सम्मिलित प्रभाव, द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष, समान कोणीय चाल से किसी स्थिर अक्ष के सापेक्ष शुद्ध घूर्णन के समान होगा। ये अक्ष घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष कहलाती है। ये किसी एक क्षण के लिये परिभाषित है तथा इसकी स्थिति समय के साथ बदलती है। उदाहरण – शुद्ध लोटनी गति में सतह के साथ संपर्क बिन्दु घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष कहलाती है।

घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष का ज्यामितीय निर्माण (I.A.R). दृढ़ पिण्ड पर स्थित दो बिन्दुओं पर वेग सदिश खींचो। घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष उन बिन्दुओं पर डाले गये लम्ब का मिलान बिन्दु है।





☞ शुद्ध लोटनी गति की स्थिति में तात्क्षणिक अक्ष निम्न बिन्दु घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष है।
शुद्ध लोटनी गति में वस्तु की गति की इस अक्ष के सापेक्ष शुद्ध घूर्णन गति के रूप में भी व्याख्या कर सकते हैं।

$\tau_P = I_P\,\alpha$

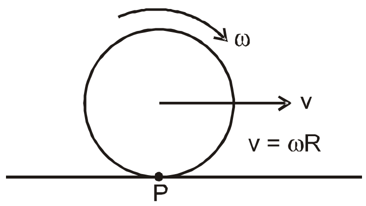
$L_P = I_P\,\omega$

$K.E. = 1/2\, I_P\,\omega^2$

जहाँ I_P घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष जो P से पारित है के सापेक्ष जड़त्वाघूर्ण है।

Solved Examples

Example 56.



सिद्ध करो कि गतिज ऊर्जा = 1/2 $I_P\ \omega^2$

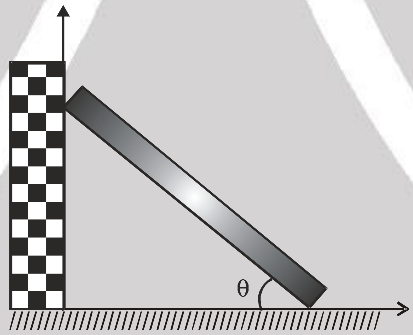
Solution : K.E. = $\frac{1}{2}\ I_{cm}\ \omega^2 + \frac{1}{2}\ Mv_{cm}^2 = \frac{1}{2}\ I_{cm}\ \omega^2 + \frac{1}{2}\ M\omega^2R^2$

$\frac{1}{2}\ (I_{cm} + MR^2)\ \omega^2$

$\frac{1}{2}\left(I_{\text{स्पर्श बिन्दु}}\right)\omega^2$

☛ एक समान वस्तु की शुद्ध लोटनी गति में बलाघूर्ण की समीकरण को भी संपर्क बिन्दु के सापेक्ष लागू किया जा सकता है।

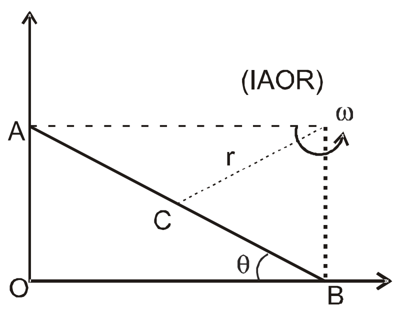
Example 57. एक एक समान बर्तन जिसकी लम्बाई ℓ तथा द्रव्यमान m है। एक उर्ध्वाधर दीवार को छुते हुए उर्ध्वाधर खड़ा हुआ है। (y-अक्ष) थोड़ा सा विचलित करने पर इसका निचला सिरा फर्श के अनुदिश सरकने लगता है। (x-अक्ष) बरतन के कोणीय वेग (ω) का θ के फलन के रूप में व्यजंक ज्ञात करो। घर्षण को हर जगह नगण्य मानें।



Solution : घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष की स्थिति (IAOR) चित्र में दर्शायी गयी है।

$$C = \left(\frac{\ell}{2}\cos\theta,\ \frac{\ell}{2}\sin\theta\right),\ \ r = \frac{\ell}{2} = \text{विकर्ण का आधा}$$

सभी सतह चिकनी है। अतः यांत्रिक उर्जा संरक्षित रहेगी।



∴ बर्तन की गुरूत्वीय स्थितिज उर्जा में कमी = बर्तन की IAOR के सापेक्ष घूर्णन गति में

∴ $mg\ \frac{\ell}{2}\ (1 - \sin\theta) = \frac{1}{2}\ I\omega^2$ ....(1)

यहाँ, $I = \frac{m\ell^2}{12} + mr^2$ (IAOR के सापेक्ष)

या $I = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}$

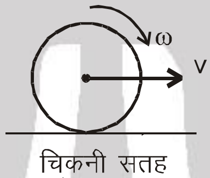
समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है

$$mg\,\frac{\ell}{2}\,(1 - \sin\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)\omega^2$$

या $\omega = \sqrt{\frac{3g\ (1-\sin\theta)}{\ell}}$ **Ans.**

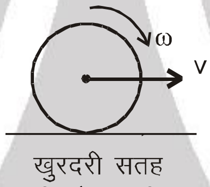
घर्षण की प्रकृति निम्न स्थितियों में ज्ञात करो, वस्तु को पूर्णरूप से दृढ़ मानें।

(i) $v = \omega R$



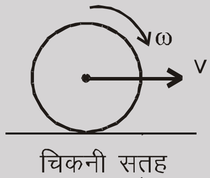
घषर्ण नहीं है तथा शुद्ध लोटनी गति है।

(ii) $v = \omega R$



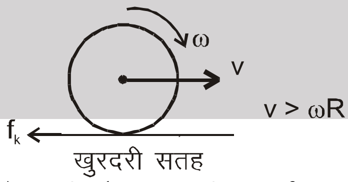
घषर्ण नहीं है तथा शुद्ध लोटनी गति है। (यदि वस्तु पूर्णरूप से दृढ़ नहीं हो तो इस स्थिति में एक लघु (छोटा) घर्षण बल कार्य करेगा, जिसे लोटनी घर्षण कहते हैं।

(iii) $v > \omega R$ or $v < \omega R$

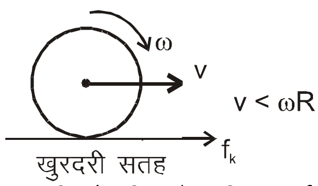


घर्षण बल नहीं परन्तु शुद्ध लोटनी गति नहीं है।

(iv) $v > \omega R$

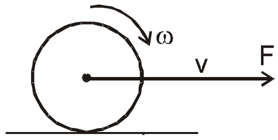


यहाँ संपर्क बिन्दु पर सापेक्ष गति है, अतः गतिज घर्षण, $f_k = \mu N$ पीछे की दिशा में लगता है। यह गतिक घर्षण v को घटाता है और ω को बढ़ाता है, अतः कुछ समय बाद $v = \omega R$ होगा और स्थिति (ii) की तरह शुद्ध लोटनी गति होगी।



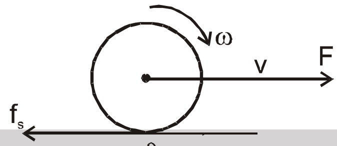
यहाँ संपर्क बिन्दु पर सापेक्ष गति है, जिससे गतिक घर्षण, $f_k = \mu N$ आगे की ओर लगता है। यह गतिक घर्षण v को बढ़ाता है और ω को घटाता है। अतः कुछ समय बाद $v = \omega R$ होगा और यह स्थिति (ii) की तरह शुद्ध लोटनी गति करेगा।

(vi) $v = \omega R$ (प्रारम्भ में)



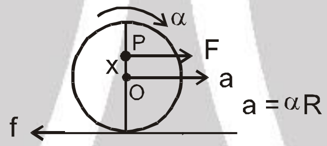
कोई घर्षण नहीं है और कोई शुद्ध लोटनी गति नहीं होगी।

(vii) $v = \omega R$ (प्रारम्भ में)



स्थैतिक घर्षण जिसका मान शून्य से $\mu_s N$ के बीच है, पीछे की ओर लगेगा। यदि घर्षण गुणांक पर्याप्त है।

Example 58. एक m द्रव्यमान और r त्रिज्या का एक दृढ़ पिण्ड एक खुरदरी सतह पर बिना फिसलन के लौटता है। चित्रानुसार केन्द्र से x दूरी पर दृढ़ पिण्ड पर एक बल लगेगा। x का वह मान ज्ञात करो, जिससे स्थैतिक घर्षण शून्य हो जायें?



Solution : द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बलाघूर्ण $Fx = I_{cm}\,\alpha$ ......(1)

$F = ma$ ......(2)

समीकरण (1) व (2) से

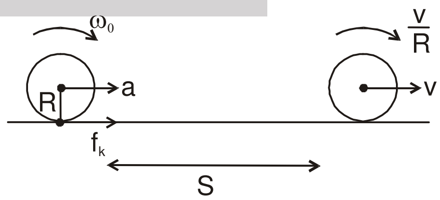
$max = I_{cm}\,\alpha$ $(a = \alpha R)$

$x = \dfrac{I_{cm}}{mR}$

नोट : शुद्ध लोटनी के लिये यदि कोई घर्षण आवश्यक है तो घर्षण बल स्थैतिक घर्षण बल होगा। यह शून्य हो सकता है या आगे की ओर या पीछे की ओर हो सकता है जो कि x के मान पर निर्भर करेगा। यदि F बिन्दु P के नीचे लगता है तो घर्षण बल आगे की ओर लगेगा और यदि F बिन्दु P के ऊपर लगता है तो घर्षण बल आगे की ओर लगेगा।

Example 59. एक बेलन को ω_0 कोणीय वेग दिया जाता है। जिसका प्रारम्भिक वेग शून्य है। यह खुदरे तल पर रखा है। बेलन द्वारा तय दूरी क्या होगी। जब तक यह शुद्ध लौटनी गति नही करता है। घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करो।

Solution : $\mu Mg\, R = \dfrac{MR^2 \propto}{2}$



$\propto = \dfrac{2\mu g}{R}$ ......(1)

प्रारम्भिक वेग $u = 0$

$v^2 = u^2 + 2as$

$v^2 = 2as$ ....(2)

$f_K = Ma$

$\mu Mg = Ma$

$a = \mu g$ ....(3)

$\omega = \omega_0 - \alpha t$

समीकरण (1) से $\omega = \omega_0 - \dfrac{2\mu g}{R} t$

$v = u + at$

समीकरण (3) से $v = \mu g t$

$\omega = \omega_0 - \frac{2v}{R}$

$\omega = \omega_0 - 2\omega$

$\omega = \frac{\omega_0}{3}$

समीकरण (2) से $\left(\frac{\omega_0 R}{3}\right)^2 = (2as) = 2\mu gs$

$s = \left(\frac{\omega_0^{\,2}}{18}\frac{R^2}{\mu g}\right)$

घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य $w = (-f_k R\, d\theta + f_k \Delta s)$

$-\mu mg R\,\Delta\theta + \frac{\mu mg \times \omega_0^2 R^2}{18\ \mu g}$

$\Delta\theta = \omega_0 \times t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = \omega_0 \times \left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right) - \frac{1}{2} \times \frac{2\mu g}{R}\left(\frac{\omega_0 R}{3\mu g}\right)^2$

$\frac{\omega_0^2 R}{3\mu g} - \frac{\omega_0^2 R}{9\mu g} \Rightarrow \frac{2\omega_0^2 R}{9\mu g}$

$-\mu mg \times R\frac{2\omega_0^2 R}{9\mu g} + \mu mg \times \frac{\omega_0^2 R^2}{18\mu g}$

$-\frac{2m\omega_0^2 R^2}{9} + \frac{m\omega_0^2 R^2}{18} \Rightarrow \frac{-3m\ \omega_0^2 R^2}{18} = -\frac{m\omega_0^2 R^2}{6}$

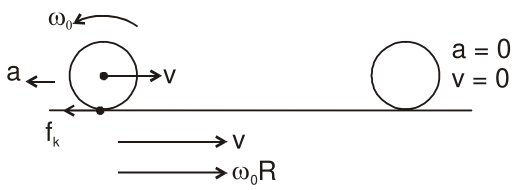
वैकल्पिक हल

(कार्य – उर्जा प्रमेय से)

$w_g + w_a + w_{f_k} = \Delta K$

$w_{f_k} = \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\omega_0 R}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\times\left(\frac{\omega_0}{3}\right)^2\right] - \left[\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\times\omega_0^2\right] = \left(-\frac{m\omega_0^{\,2}R^2}{6}\right)$

Example 60. एक खोखले गोले को v चाल तथा ω_0 कोणीय वेग से खुरदरे तल पर क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित किया जाता है। तो $\frac{v}{\omega_0}$ का मान क्या होगा, ताकि गोला कुछ देर के बाद रूक जाये।



Solution : गोले के निम्नतम बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण

$f_k \times R = I\alpha$

$\mu mg \times R = \frac{2}{3}mR^2\alpha$

$\alpha = \frac{3\mu g}{2R}$ कोणीय वेग के विपरित दिशा में कोणीय त्वरण

$\omega = \omega_0 - \alpha t$ (अन्तिम कोणीय वेग $\omega = 0$)

$\omega_0 = \dfrac{3\mu g}{2R} \times t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\omega_0 \times 2R}{3\mu g}$

त्वरण '$a = \mu g$'

$v_f = v - at$ (अन्तिम वेग $v_f = 0$)

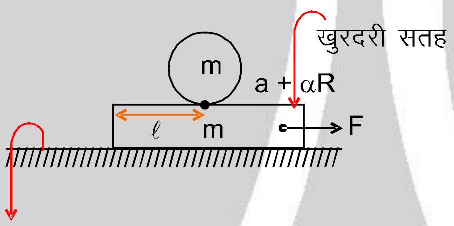
$v = \mu g \times t$

$t = \dfrac{v}{\mu g}$

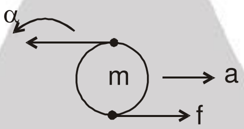
गोले के रोकने के लिये वह समय जिस पर v और ω शून्य है, समान होना चाहिये।

$\dfrac{v}{\mu g} = \dfrac{2\omega_0 R}{3\mu g} \; = \; \dfrac{v}{\omega_0} = \dfrac{2R}{3}$

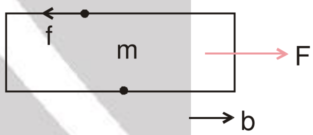
9.5 गति करती हुई सतह पर लौटनी गति :



तख्ते पर घर्षण पीछे की ओर तथा बेलन पर घर्षण आगे की ओर होगा। इसलिए बेलन आगे गति करेगा।



लौटनी गति के लिए स्थितिक घर्षण f है।



$fR = \dfrac{mR^2}{2}\alpha$

$\alpha = \dfrac{2f}{mR}$; $f = ma$

$F - f = mb \Rightarrow F = m(a + b)$

$a = \dfrac{\alpha R}{2}$

सम्पर्क बिन्दु पर

$b = a + \alpha R$

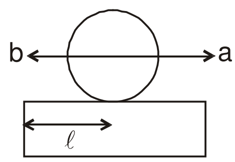
$b = \dfrac{3\alpha R}{2} \quad \Rightarrow \quad b = 3a$

$F = 4ma \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{F}{4m}$

$b = \dfrac{3F}{4m}$

तख्ते के सापेक्ष तय दूरी = ℓ

तख्ते के सापेक्ष त्वरण $(b - a)$



$\ell = \dfrac{1}{2}(b - a)\, t^2$

$\ell = \dfrac{1}{2} \times 2at^2 = t = \sqrt{\dfrac{a \times \ell}{F}} = 2\sqrt{\dfrac{m\ell}{F}}$

Solved Examples

Example 61. θ झुकाव कोण तथा लम्बाई वाले नत तल के शीर्ष से ठोस गोले को विराम से छोड़ा जाता है। यदि गोला नत तल पर बिना फिसले लुढ़कता है तो इसके तली पर पहुंचने पर इसकी चाल क्या होगी?

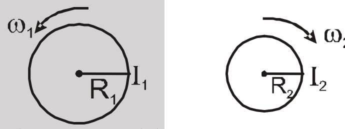
Solution : माना गोले का द्रव्यमान m तथा त्रिज्या r है। जब गोला तल पर पहुँचेगा तो माना इसकी रैखीय चाल v है। चूंकि गोला बिना फिसले लुढ़क रहा है तो इसकी अक्ष के सापेक्ष इसकी कोणीय चाल $\omega = v/r$ है। तल पर गतिज ऊर्जा होगी -

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{5}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$$

यह स्थितिज ऊर्जा mg sinθ में हानि के बराबर होगी, अतः

$$\frac{7}{10}mv^2 = mg\ell\sin\theta \qquad \text{या} \qquad v = \sqrt{\frac{10}{7}g\ell\sin\theta}\,.$$

Example 62. चित्र में R_1 तथा R_2 त्रिज्या के दो बेलन प्रदर्शित है। इनके जड़त्व आघूर्ण इनकी अक्षों के सापेक्ष क्रमशः I_1 तथा I_2 है। चित्रानुसार दोनों बेलन प्रारम्भ में स्वयं की अक्षों के सापेक्ष ω_1 तथा ω_2 कोणीय चाल से घूर्णन कर रहे हैं। बेलन इनकी अक्षों को समान्तर रखते हुए एक दूसरे के पास गति करते हैं।
दोनों एक दूसरे के सम्पर्क में आने पर पहले फिसलते हैं। फिर घर्षण के कारण दोनों फिसलना बंद कर देते हैं। फिसलन बंद होने के पश्चात् दोनों की कोणीय चाल ज्ञात करो?



Solution : जब फिसलन बंद हो जाती है तो दोनों बेलनों के संपर्क बिन्दुओं के रैखीय वेग समान होंगे। यदि ω'_1 तथा ω'_2 क्रमशः इनकी कोणीय चाल हो तो रैखीय वेग है -

$\omega'_1 R_1$ तथा $\omega'_2 R_2$ ......(i)

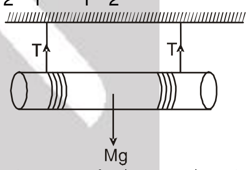
जब तक दोनों बेलनों में फिसलन होती है तब तक घर्षण कार्यरत रहता है, इसके कारण इनकी कोणीय चाल में परिवर्तन हो जाता है। यदि यह बल f, t समय तक के लिए कार्य करता है तो प्रथम बेलन पर बल आघूर्ण fR_1 तथा दूसरे बेलन पर बल आघूर्ण fR_2 है। माना $\omega_1 > \omega_2$, तो इनके सापेक्ष कोणीय आवेग $-fR_1t$ तथा fR_2t, हैं

इसलिए $-f R_1 t = I_1(\omega'_1 - \omega_1)$ तथा $fR_2 t = I_2(\omega'_2 - \omega_2)$

या, $-\dfrac{I_1}{R_1}(\omega'_1 - \omega_1) = \dfrac{I_2}{R_2}(\omega'_2 - \omega_2)$ ......(ii)

(i) तथा (ii) को हल करने पर $\omega'_1 = \dfrac{I_1\omega_1R_2 + I_2\omega_2R_1}{I_2R_1^2 + I_1R_2^2}r_2$ तथा $\omega'_2 = \dfrac{I_1\omega_1R_2 + I_2\omega_2R_1}{I_2R_1^2 + I_1R_2^2}R_1$

Example 63. चित्रानुसार M द्रव्यमान का खोखला बेलन इसके चारो ओर लिपटी हुई रस्सी की मदद से लटका हुआ है, तो (a) रस्सी में तनाव T तथा (b) जब बेलन ℓ दूरी पर गिर जायेगा तो इसकी चाल ज्ञात करो।



Solution : छत तथा बेलन के मध्य स्थित रस्सियों का भाग विराम में है। अतः बेलन के वह बिन्दु जहाँ से इसको रस्सियाँ छोड़ेगी, विराम में है। बेलन रस्सियों पर बिना फिसले लुढ़क रहा है। माना बेलन का केन्द्र 'a' त्वरण से गिर रहा है।
चूंकि बेलन रस्सियों पर फिसल नहीं रहा है। अतः बेलन का इसकी अक्ष के सापेक्ष कोणीय त्वरण $\alpha = a/R$, है। बेलन के द्रव्यमान केन्द्र के लिए गति की समीकरण है।

$Mg - 2T = Ma$ ....(i)

तथा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष गति के लिए, ...

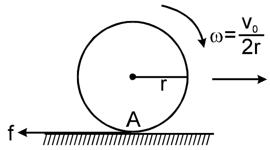
$2\,Tr = (Mr^2\alpha) = Mra$ या $2T = \dfrac{1}{2}ma$ ....(ii)

(i) तथा (ii) से, $a = \dfrac{g}{2}$ तथा $T = \dfrac{Mg}{4}$.

चूंकि बेलन का केन्द्र विराम से गति प्रारम्भ करता है, अतः h दूरी गिरने के बाद इसका वेग है -

$$v^2 = 2\left(\frac{g}{2}\right)\ell \qquad \text{या} \qquad v = \sqrt{g\ell}$$

Example 64. चित्रानुसार M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या का खोखला गोला खुरदरे क्षैतिज तल पर फिसल रहा है। किसी क्षण इसका रैखिक वेग v_0 तथा केन्द्र के सापेक्ष घूर्णन वेग $\frac{v_0}{2R}$ है। जब गोला शुद्ध लौटनी गति करने लगे तो इसका स्थानान्तरण वेग ज्ञात करो?



Solution : केन्द्र का वेग = v_0 तथा केन्द्र के सापेक्ष कोणीय वेग = $\frac{v_0}{2R}$ है। यद्यपि $v_0 > \omega_0 R$ है अतः गोला आगे की ओर फिसलता है जिससे तल द्वारा घर्षण पीछे की ओर कार्य करता है। चूंकि घर्षण गतिक है, इसका मान $\mu N = \mu Mg$ है तथा गोला $a_{cm} = f/M$. से मंदित होगा,

$$v(t) = v_0 - \frac{f}{M}t \qquad \text{............(i)}$$

यह घूर्णन केन्द्र के सापेक्ष बल आघूर्ण प्रदान करेगा बल आघूर्ण दक्षिणावर्त है तथा ω_0 की दिशा में है। अतः केन्द्र के सापेक्ष कोणीय त्वरण होगा–

$$\alpha = f\frac{R}{(2/3)MR^2} = \frac{3f}{2\ \ MR}$$

तथा 't' समय में दक्षिणावर्त कोणीय वेग होगा $\omega(t) = \omega_0 + \frac{3f}{2\ \ MR}t = \frac{v_0}{2R} + \frac{3f}{2MR}t$

जब $v(t) = r\,\omega(t)$ होगा तो, $v(t) = \frac{v_0}{2} + \frac{3f}{2M}t$ ....(ii)

(i) तथा (ii) से t विलोप करने पर, $\frac{3}{2}v(t) + v(t) = \frac{3}{2}v_0 + \frac{v_0}{2}$ या $v(t) = \frac{2}{5} \times 2v_0 = \frac{4}{5}v_0$

अतः गोला $4v_0/5$ स्थानान्तरण वेग से आगे की दिशा में लोटनी गति करेगा।

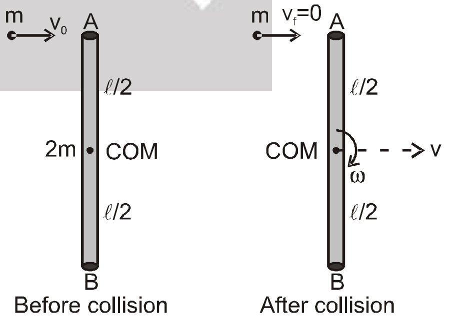
Example 65. 2m द्रव्यमान और ℓ लम्बाई की एक छड़ (AB) क्षैतिज घर्षणरहित सतह पर रखी हुई है। सतह के अनुदिश चलने वाला m द्रव्यमान का एक कण, छड़ को v_0 वेग से AB के लम्बवत् दिशा में टक्कर करता है। टक्कर प्रत्यास्थ है। टक्कर के बाद कण स्थिरावस्था में आ जाता है। तब टक्कर के बाद कण स्थिरावास्था में आ जाता है। तब टक्कर के बाद कण स्थिरावस्था में आ जाता है। तब टक्कर के बाद निम्न को ज्ञात करो–

(a) छड़ के द्रव्यमान केन्द्र का वेग (b) कोणीय वेग

Solution : (a) माना टक्कर के बाद छड़ के द्रव्यमान केन्द्र की चाल v है तथा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय वेग ω है। निकाय (छड़ + द्रव्यमान) पर क्षैतिज तल में बाह्य बल शून्य है।

अतः x दिशा में रेखीय संवेग संरक्षण से

$$mv_0 = 2mv \qquad \text{....(1)}$$



निकाय पर किसी बिन्दु के सापेक्ष बलाघूर्ण शून्य है।

छड़ के द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग संरक्षण से

$$mv_0\frac{\ell}{2} = I\omega \Rightarrow mv_0\frac{\ell}{2} = \frac{2m\ell^2}{12}\omega$$

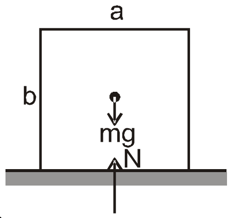
$$mv_0 = m\omega\frac{\ell}{3} \qquad \text{....(2)}$$

समीकरण (1) से द्रव्यमान केन्द्र का वेग $v = \frac{v_0}{2}$

समीकरण (2) से कोणीय वेग $\omega = \frac{3v_0}{\ell}$

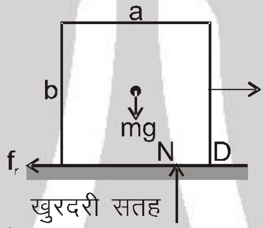
10. पलटन :

विभिन्न स्थितियों में किसी वस्तु को सतह पर फिसलने से रोकने के लिए एक बाह्य बल लगाया जाता है। कई स्थितियों में वस्तु फिसलन से पहले ही पलट जाती है। इसे पलटन (toppling) कहते हैं।



(1) यहाँ कोई क्षैतिज बल नहीं है अतः निचले भाग पर दाब एक समान है और अभिलम्ब, mg के साथ समरेखीय होगा।

(2) यदि एक बल द्रव्यमान केन्द्र पर लगाया जाता है, तो दाब एकसमान नहीं होगा तथा अभिलम्ब दायीं तरफ विस्थापित हो जायेगा, जिससे N के द्वारा बलाघूर्ण, विपरित दिशा में घर्षण के बलाघूर्ण को संतुलित कर सके।



(3) यदि F को लगातार बढ़ाया जाता है तो N दायीं तरफ विस्थापित होता है, जब तक अधिकतम बिन्दु D पर नहीं पहुंच जायें। यहाँ हम मानते हैं कि सतह पर्याप्त खुरदरी है, जिससे F का मान F_{max} तक बढ़ाने पर फिसलन शुरू हो जाए। यदि बल इसके बाद बढ़ाया जाता है, तब N के कारण बलाघूर्ण घर्षण f_r के कारण विपरित बलाघूर्ण से संतुलित नहीं होगा और वस्तु पलट जायेगी।

F का वह मान जिस पर वस्तु नहीं पलटेगी F_{max} होगी।

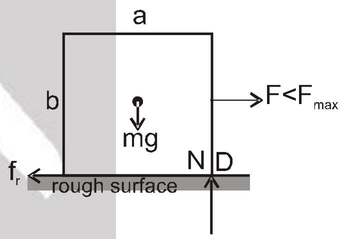
$F_{max} = f_r$

$N = mg$

$f_r \,.\, b/2 = N \,.\, a/2$

$f_r = Na/b = mg\, a/b$, $F_{max} = mg\, a/b$

(4) यदि सतह पर्याप्त खुरदरी नहीं है तो वस्तु पर बल F का मान $F_{max} = mg\, a/b$ होने से पहले ही फिसलन हो जायेगी, तब वस्तु पलटने से पहले फिसलेगी। जब एक बार वस्तु फिसलना शुरू करती है, तब स्थैतिक घर्षण नियत हो जाता है। अतः कोई पलटन नहीं होगी।

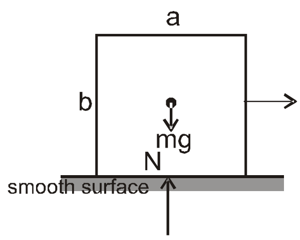


$F_{max} > f_{limit} \Rightarrow mg\, a/b > \mu mg \quad \Rightarrow \mu < a/b$

यह स्थिति तब होगी यदि पलटने की शर्त जब $\mu \geq a/b$ है। इस स्थिति में वस्तु पलटेगी यदि $F > mg\, a/b$ लेकिन यदि $\mu < a/b$, है तो द्रव्यमान केन्द्र पर F के किसी भी मान के लिये वस्तु नहीं पलटेगी।

Solved Examples

Example 66.



ब्लॉक को पलटने toppling) के लिए न्यूनतम F का मान ज्ञात करो।

Solution : कभी नहीं पलटेगा।

Example 67. एक एकसमान घन जिसकी भुजा 'a' तथा द्रव्यमान m है। एक खुरदरी टेबल पर रखा है। क्षैतिज बल F एक फलक के लम्बवत् दिशा में एक बिन्दु जो फलक के केन्द्र से नीचे आधार से $\frac{a}{4}$ ऊँचाई पर लगाया जाता है।

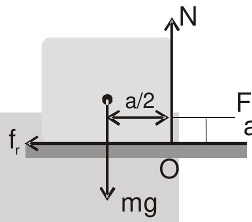
(i) F का न्यूनतम मान क्या हो, जिसके कारण घन किसी एक किनारे के सापेक्ष पलट जाये ?

(ii) पलटने की घटना के लिए μ_s का न्यूनतम मान ज्ञात करो।

(iii) यदि $\mu = \mu_{min}$ तो पलटने के लिए न्यूनतम बल ज्ञात करो।

(iv) न्यूनतम μ_s ताकि F_{min} पलट सके।

Solution : (i) सीमान्त स्थिति अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल O से गुजरेगा। घन O के सापेक्ष पलटेगा। यदि F का बलाघूर्ण O के सापेक्ष mg के बलाघूर्ण से ज्यादा हो जाये।



अतः $F\left(\frac{a}{4}\right) > mg\left(\frac{a}{2}\right)$ या $F > 2\ mg$

इसलिए F का न्यूनतम मान 2 mg है।

(ii) इस स्थिति में चूंकि ये द्रव्यमान केन्द्र पर कार्यरत नहीं है। वस्तु फिसलन शुरू होने के बाद भी पलट सकती है, क्योंकि द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष बलाघूर्ण बढ़ रहा है। अतः $\mu_{min} = 0$

(iii) अब वस्तु पलटने से पहले फिसल रही है, O घूर्णन की तात्क्षणिक अक्ष नहीं है, अतः बलाघूर्ण की समीकरण इसके साथ लागू नहीं की जा सकती है, ये अब द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष लागू की जा सकती है।

$F \times \frac{a}{4} = N \times \frac{a}{2}$ ......(1)

$N = mg$ ......(2)

समीकरण (1) व ()2) से

$F = 2\ mg$

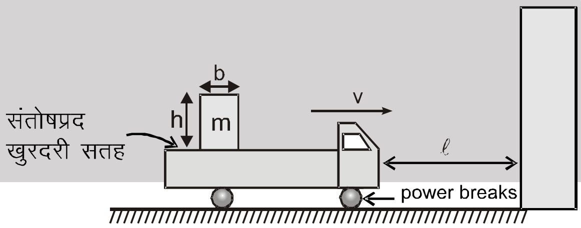
(iv) $F > 2\ mg$ ......(1) (हल (i) से)

$N = mg$ ......(2)

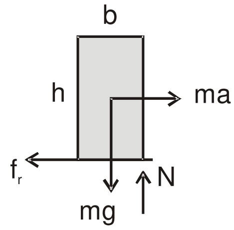
$F = \mu_s N = \mu_s mg$ ......(3) समीकरण (1) व (2) से

$\mu_s = 2$

Example 68. ℓ का वह मान ज्ञात करो, जिससे की ट्रक उस पर रखे बक्से को बिना पलटे टक्कर को टाल सके।



Solution : $ma\,\frac{h}{2} \le mg\,\frac{b}{2}$



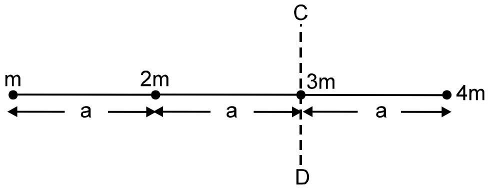
$a \le \frac{b}{h} g$

ट्रक का अन्तिम वेग शून्य है, अतः

$0 = v^2 - 2(\frac{b}{h} g)\,\ell \Rightarrow \ell = \frac{h}{2b}\frac{v^2}{g}$

Self Practice Problems

Problem 1. चार बिन्दुवत् द्रव्यमान एक द्रव्यमान रहित छड़ द्वारा चित्रानुसार जुड़े हुये है। CD अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो?



Solution : $I_1 = m(2a)^2$

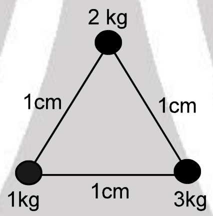
$I_2 = 2ma^2$

$I_3 = 0$

$I_4 = 4ma^2$

$I_{CD} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 10\ ma^2$ **Ans.**

Problem 2. 1 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज के तीनों शीर्षो पर तीन बिन्दुवत् कण रखे है। द्रव्यमान क्रमशः 1, 2 व 3 kg के है तथा चित्रानुसार रखे है। त्रिभुज के तल के लम्बवत् व 1 kg द्रव्यमान से गुजरने वाले अक्ष के प्रति निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो ?



Solution : 1 kg द्रव्यमान से पास होने वाली अक्ष के सापेक्ष 2 kg द्रव्यमानका जड़त्व आघूर्ण

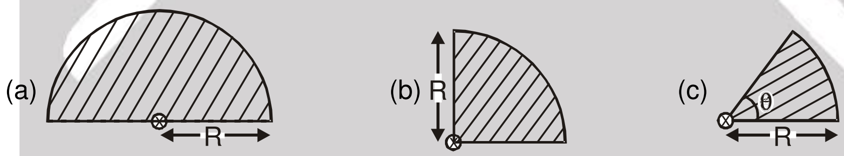
$I_1 = 2 \times (1 \times 10^{-2})^2 = 2 \times 10^{-4}$

1 kg द्रव्यमान से पास होने वाली अक्ष के सापेक्ष 3 kg द्रव्यमान का जड़त्व आघूर्ण है

$I_2 = 3 \times (1 \times 10^{-2})^2 = 3 \times 10^{-4}$

$I = I_1 + I_2 = 5 \times 10^{-4}\ kgm^2$

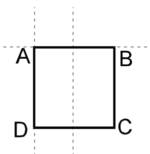
Problem 3. दर्शाये गये चित्रों का तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। प्रत्येक का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है ?



Solution : $dI = dm\frac{R^2}{2}$

$I = \int dI = \frac{R^2}{2}\int dm = \frac{MR^2}{2}$

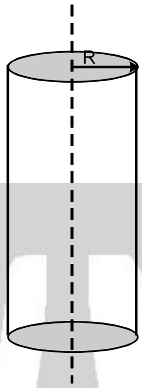
Problem 4. 'a' भुजा की M द्रव्यमान वाली एक समान वर्गाकार प्लेट का AB से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution : $dI = dm\dfrac{a^2}{3}$

$$I = \int dI = \frac{a^2}{3}\int dm = \frac{Ma^2}{3}$$

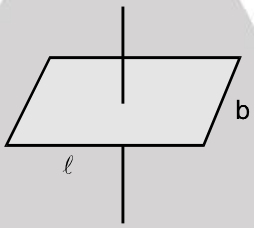
Problem 5. M द्रव्यमान, त्रिज्या R व ℓ लम्बाई के ठोस बेलन का इसके अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



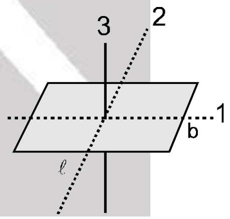
Solution : बेलन का प्रत्येक अवयव ठोस चकती है अतः $\int dI = \int dm\dfrac{R^2}{2}$

$$I = \frac{MR^2}{2}$$ **Ans.**

Problem 6. M द्रव्यमान तथा 'ℓ' लम्बाई व 'b' चौड़ाई एक समान आयताकार प्लेट का इसके लम्बवत् केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



Solution : लम्बवत् अक्ष प्रमेय से $I_3 = I_1 + I_2$

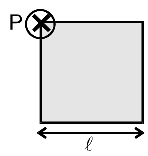


$$I_1 = \frac{Mb^2}{12}$$

$$I_2 = \frac{M\ell^2}{12}$$

$$I_3 = \frac{M(\ell^2 + b^2)}{12}$$

Problem 7. M द्रव्यमान व 'ℓ' भुजा वाली एक समान वर्गाकार प्लेट का इसके लम्बवत् व P से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



Solution : $I_P = \dfrac{M\ell^2}{6} + \dfrac{M\ell^2}{2} = \dfrac{2M\ell^2}{3}$

Problem 8. M द्रव्यमान की एक वलय का इसकी स्पर्श–रेखा के प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो। जो (i) वलय के तल में हो (ii) वलय के तल के लम्बवत् हो।

Solution : **(i)** वलय के तल तथा केन्द्र से पास होने वाली अक्ष में सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$I_1 = \frac{MR^2}{2}$

समान्तर अक्ष प्रमेय से

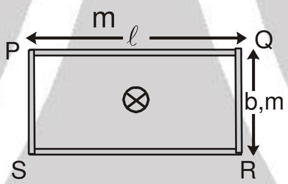
$I' = I_1 + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$

(ii) वलय के तल के लम्बवत् और केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष वलय का जड़त्व आघूर्ण

$I_C = MR^2$

समान्तर अक्ष प्रमेय से $I'' = I_C + MR^2 = 2MR^2$

Problem 9. m द्रव्यमान की एक समान छड़ों से बने एक आयताकार फ्रेम का (i) इसके केन्द्र से गुजरने वाली व तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो। (ii) PQ से गुजरने वाली अक्ष के परितः भी जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो ?



Solution : (i) फ्रेम के तल के लम्बवत् और केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$I_C = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

$I_1 = I_3,\ I_2 = I_4$

$I_C = 2I_1 + 2I_2$

$I_1 = \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow \quad I_2 = \frac{mb^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

अतः , $I_C = \frac{2m}{3}(\ell^2 + b^2)$

(ii) PQ छड़ के PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_1 = 0$

PS छड़ के PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_2 = \frac{mb^2}{2}$

QR छड़ के PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_3 = \frac{mb^2}{2}$

RS छड़ के PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_4 = mb^2$

$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{5mb^2}{3}$

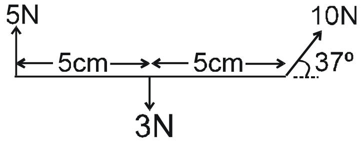
Problem 10. पिछले प्रश्न में कण की P से Q के दौरान गति में गुरूत्वीय बल का P के सापेक्ष बलाघूर्ण है -

(A) बढ़ रहा है (B) घट रहा है (C) नियत है

(D) पहले बढ़ रहा है, फिर घट रहा है

Solution : बढ़ रहा है, क्योंकि P से दूरी बढ़ रही है।

Problem 11. एक छड़ पर चित्रानुसार बल कार्यरत है तो बल का क्रिया बिन्दु ज्ञात करो?



Solution : A के सापेक्ष B का बलाघूर्ण τ_1 = 3N × 5 = 15N cm (दक्षिणावर्त)

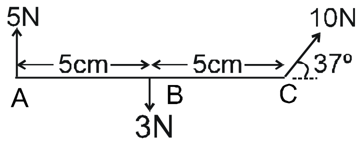
C का A के सापेक्ष बलाघूर्ण τ_2 = 6N × 10 = 60 N cm (वामावर्त)

छड़ के लम्बवत् परिणामी बल F = 8 N

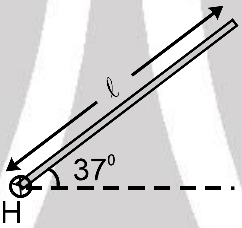
$\tau_1 + \tau_2 = F x$ (x = बिन्दु A से दूरी)

$-15 + 60 = 8x$

$x = 45/8 = 5.625$ cm



Problem 12. m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की छड़ H बिन्दु पर क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष कीलकित है। यह ऊर्ध्वाधर तल में घूर्णन कर सकती है। यह प्रारम्भिक स्थिति से 37° का कोण बना रही है। इसको यहाँ से मुक्त करने के तुरन्त बाद कोणीय त्वरण α ज्ञात करो?



Solution : कीलकीत के सापेक्ष बलाघूर्ण $= \tau_H = I\alpha$

$mg\cos 37 \frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{3}\alpha$

$\alpha = 6g / 5\ell$

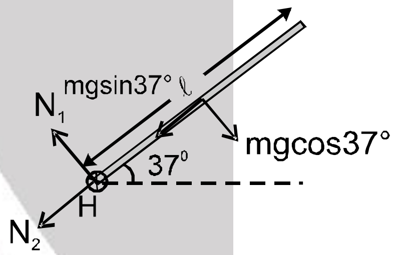
$a_t = \alpha \frac{\ell}{2} = \frac{3g}{5}$

$mg\cos 37 - N_1 = ma_t$

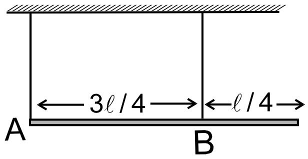
$N_1 = \frac{mg}{5}$

छड़ का कोणीय वेग शून्य है। अतः $N_2 = mg\sin 37° = 3mg/5$

$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{\left(\frac{mg}{5}\right)^2 + \left(\frac{3mg}{5}\right)^2} = \frac{mg\sqrt{10}}{5}$



Problem 13. चित्रानुसार, लम्बाई तथा m द्रव्यमान की छड़ दो समान लम्बाई की रस्सी द्वारा छत से लटकी है, तो दोनों रस्सी में तनाव ज्ञात करो?



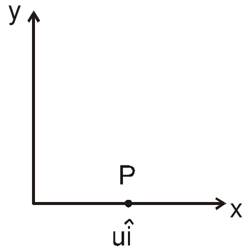
Solution : $T_A + T_B = mg$ ....(i)

बिन्दु A के सापेक्ष बलाघूर्ण शून्य है

अतः $T_B \times \frac{3\ell}{4} = mg\frac{\ell}{2}$ ....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से $T_A = mg/3$, $T_B = 2mg/3$.

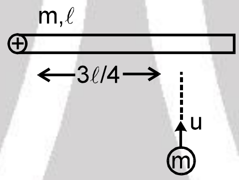
Problem 14. एक m द्रव्यमान का कण मूल बिन्दु से गति प्रारम्भ करके नियत वेग $u\hat{i}$ से गति कर रहा है। इस क्षण कण का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो? कुछ समय पश्चात् उत्तर क्या होगा?



Solution : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{L} = r\hat{i} \times mu\hat{i} = 0$

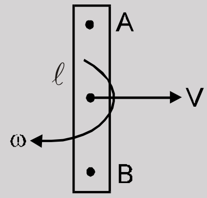
Problem 15. m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की छड़ H बिन्दु पर किलकित है। यह क्षैतिज तल में ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन कर सकती है। समान द्रव्यमान m का बिन्दु द्रव्यमान u प्रारम्भिक वेग से छड़ के लम्बवत् गति करता हुआ किलकित बिन्दु से $3\ell/4$ दूरी पर अप्रत्यास्थ टक्कर करता है तो कण का टक्कर के तुरन्त पश्चात् कोणीय वेग ज्ञात करो ?



Solution : कीलकीत बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग $L_i = L_f$

$$mu\left(\frac{3\ell}{4}\right) = \left(\frac{m\ell^2}{3} + m\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2\right)\omega \Rightarrow \quad \omega = \frac{36u}{43\ell}$$

Problem 16. एक एकसमान तथा चिकनी ℓ लम्बाई की छड़ जिसके केन्द्र का वेग v तथा कोणीय वेग ω है, चिकनी क्षैतिज सतह पर गतिमान है, बिन्दु A तथा B के वेग ज्ञात करो।



Solution : बिन्दु A का वेग केन्द्र के सापेक्ष $\omega\frac{\ell}{2}$ है

बिन्दु A का धरातल के सापेक्ष वेग - $V_A = V + \omega\frac{\ell}{2}$

बिन्दु B का केन्द्र के सापेक्ष वेग $-\omega\frac{\ell}{2}$

बिन्दु B का धरातल के सापेक्ष वेग - $V_A = V - \omega\frac{\ell}{2}$

Exercise-1

✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

खण्ड (A) : गतिकी

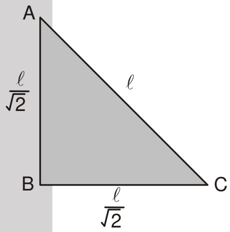
A-1. एक समरूप चकती नियत कोणीय त्वरण से घूमती हुई प्रारम्भ से पहले पाँच सैकण्ड में 50 चक्कर लगाती है। पाँच सैकण्ड पश्चात् कोणीय त्वरण तथा कोणीय वेग ज्ञात करो।

A-2. 20 rad/s से घूर्णन कर रही वस्तु को एक नियत बल–आघूर्ण 2 rad/s^2 का मंदन प्रदान करता है। किस समय पर वस्तु की गतिज ऊर्जा प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा के समान होगी यदि बल आघूर्ण लगातार आरोपित है ?

खण्ड (B) : जड़त्व आघूर्ण

B-1. M द्रव्यमान व L भुजा की एक समरूप वर्गाकार प्लेट का इसके एक विकर्ण के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण, इसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण की सहायता से ज्ञात करो।

B-2.✍ चित्रानुसार एक M द्रव्यमान की समरूप त्रिभुजाकार प्लेट जिसके कोने ABC है, की लम्बाई $\ell, \frac{\ell}{\sqrt{2}}$ तथा $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$ है। इस प्लेट का बिन्दु B से गुजरने वाली व तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।



B-3. एक समरूप आधी चकती के द्रव्यमान केन्द्र से पारित व तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो, चकती का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है।

B-4. एक वृत्ताकार r त्रिज्या की तथा एकसमान मोटाई t की एक चकती की इसके तल के लम्बवत् व चित्रानुसार इसके परिधि से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या ज्ञात करो।

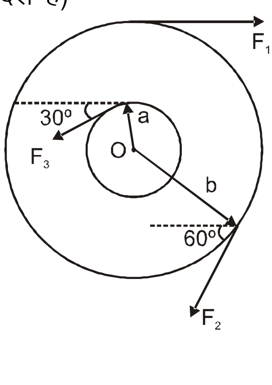
खण्ड (C) : बल आघूर्ण

C-1. दो बल $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - 5\hat{j} - 6\hat{k}$ तथा $\vec{F}_2 = -\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ एक वस्तु पर बिन्दुओं क्रमशः (1, 1, 0) तथा (0, 1, 2) पर आरोपित है। वस्तु का बिन्दु (–1, 0, 1) के सापेक्ष बल–आघूर्ण ज्ञात करो।

C-2. एक ℓ लम्बाई के सरल लोलक जिसमें m द्रव्यमान का गोलक लगा है, को एक ओर खींचा जाता है, ताकि यह ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाए। आलम्बन बिन्दु के सापेक्ष गोलक के भार के बल आघूर्ण का परिमाण ज्ञात करो। बल आघूर्ण किस स्थिति में शून्य होगा तथा किस θ के लिए यह अधिकतम होगा।

C-3. एक m द्रव्यमान का कण v वेग से क्षैतिज धरातल से α कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है। कण के भार का प्रक्षेपण बिन्दु के सापेक्ष बल आघूर्ण ज्ञात करो जब कण की स्थिति (a) उच्चतम बिन्दु पर हो (b) पुनः धरातल पर हो।

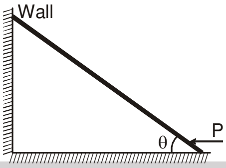
C-4. चित्रानुसार निकाय पर O के सापेक्ष कुल बलाघुर्ण ज्ञात करें यदि F_1 = 11 N, F_2 = 9 N, F_3 = 10 N, a = 10 cm तथा b = 20 cm (सभी बल स्पर्श रेखा के अनुदिश है)



खण्ड (D) : घूर्णन साम्यावस्था

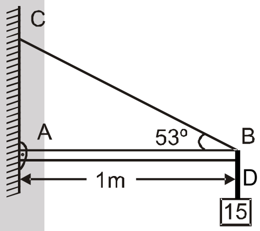
D-1. एक 400 g की समरूप मीटर छड़ को सिरो पर स्थिर (जड़वत) समान लम्बाई की दो ऊर्ध्वाधर हल्की रस्सियों की सहायता से दो स्थिर कीलक से लटकाया जाता है। छड़ के बाऐं किनारे से 60 cm दूरी पर एक छोटी 100 g की वस्तु को रखा जाता है, तो दोनो रस्सियों में तनाव ज्ञात करो। ($g = 10\ m/s^2$)

D-2. घर्षणरहित सम्पर्क मानते हुए, चित्रानुसार छड़ की साम्यावस्था के लिए निचले सिरे पर लगाए गए, बाह्य क्षैतिज बल P का परिमाण ज्ञात करो। छड़ समरूप है तथा इसका द्रव्यमान m है।



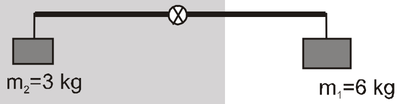
D-3. एक 24 kg द्रव्यमान व 10.0 m लम्बाई की समरूप सीढ़ी ऊर्ध्वाधर दीवार के सहारे इससे 53° के कोण पर रखी गई है। ऊर्ध्वाधर दीवार घर्षण रहित है। परन्तु मैदान खुरदरा है। एक 75 kg द्रव्यमान का एक पेन्टर सीढ़ी के ऊपर चढ़ता है। यदि यह सीढ़ी के ऊपरी सिरे से 2 m की दूरी पर ठहरता है। तब जमीन द्वारा सीढ़ी पर लगाया गया अभिलम्ब बल व घर्षण बल क्या होगा? पेन्टर के सुरक्षित काम करने के लिए जमीन तथा सीढी के मध्य न्यूनतम घर्षण गुणांक क्या होना चाहिए? ($g = 10\ m/s^2$)

D-4. चित्रानुसार प्रदर्शित निकाय में, ऊर्ध्वाधर तल में, एक समान द्रव्यमान 10 kg की छड AB है BC हल्की डोरी है जोकी दीवार तथा छड़ के मध्य उर्ध्वाधर तल में जुडी है, 15 kg का एक ब्लॉक B पर हल्की डोरी से जुडा है – [$g = 10\ m/s^2$] (BC तथा BD दो भिन्न डोरी है)
यदि पूर्ण निकाय संतुलन में है तो
(i) BC डोरी में तनाव ज्ञात करो (ii) A पर कीलक द्वारा आरोपित बल ज्ञात करो



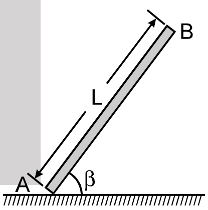
खण्ड (E) : स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन ($\tau_H = I_H\alpha$)

E-1. $\ell = 2$ m मीटर लम्बाई की नगण्य द्रव्यमान की एक छड़ चित्रानुसार मध्य बिन्दु से आलम्बित है तथा $m_1 = 6$ kg तथा $m_2 = 3$ kg के दो पिण्ड इसके किनारों से चित्रानुसार लटकाए जाते हैं

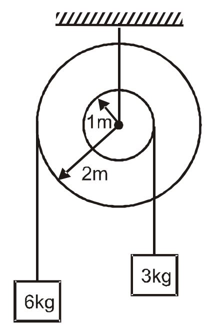


(a) यह मानते हुए कि छड़ प्रारम्भ में क्षैतिज थी। छड़ का प्रारम्भिक कोणीय त्वरण ज्ञात करो।
(b) यदि छड़ का द्रव्यमान $m_3 = 3$ kg है तथा इसकी लम्बाई पर समान रूप से वितरित हो तो ।
(i) छड़ का प्रारम्भिक कोणीय त्वरण ज्ञात करो।
(ii) 3 kg तथा 6 kg के ब्लॉक से जुड़ी हुई डोरी में तनाव ज्ञात करो। ($g = 10\ m/s^2$)

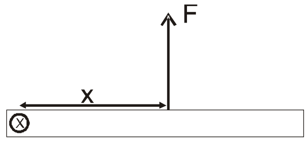
E-2. चित्रानुसार एक समरूप द्रव्यमान m की छड़ AB, $\beta = 60^o$ से विराम से छोड़ी जाती है। यह मानिये कि किनारे A व सतह के मध्य घर्षण फिसलने से रोकने के लिए पर्याप्त है, तो छोड़ने के ठीक बाद ज्ञात करें–
(a) छड़ का कोणीय त्वरण
(b) A पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल व घर्षण बल



E-3. चित्र में प्रदर्शित घिरनी निकाय का जडत्व आघूर्ण $3\ kg - m^2$ है। बडी एवं छोटी घिरनी की त्रिज्या क्रमशः 2m एवं 1m है जब निकाय को विराम से मुक्त किया जाता है तथा यह मानीए घिरनी तथा रस्सी में फिसलन नहीं है तथा रस्सी हल्की है तब घिरनी के इस निकाय का कोणिय त्वरण का मान ज्ञात करे। [$g = 10\ m/s^2$]

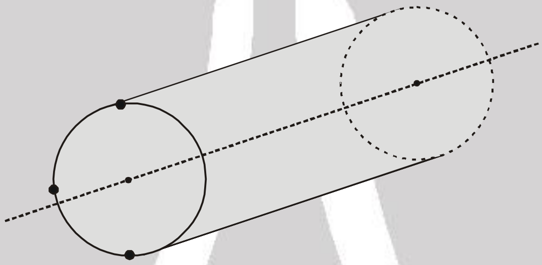


E-4. L लम्बाई की एकसमान पतली छड़ को इसके एक सिरे के परितः किलकीत (hinge) कर दिया जाता है तथा यह किलक (hinge) के परितः बिना घर्षण के घूमने के लिए स्वतन्त्र है। गुरूत्व का प्रभाव नगण्य है। छड़ पर किलक से x दूरी पर एक बल F इस प्रकार लगाया जाता है कि बल हमेशा छड़ के लम्बवत् होता है। जब छड़ का कोणीय वेग शून्य हो जाता है तब उस क्षण पर किलक पर आरोपित अभिलम्ब प्रतिक्रिया x के फलन के रूप में ज्ञात करों।

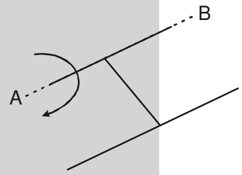


खण्ड (F) : स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन (ऊर्जा संरक्षण) :

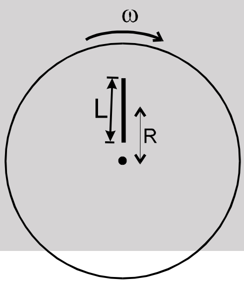
F-1. M = 1kg द्रव्यमान व R = 0.5m त्रिज्या का एक ठोस बेलन इसके केन्द्र से कीलकित किया जाता है तथा m = 0.1kg के तीन कण चित्रानुसार ऊर्ध्वाधर तल में इसकी परिधि पर बाँधे जाते हैं। प्रारम्भ में निकाय विरामावस्था में है। जब यह वामावर्त दिशा में 90° का कोण तय कर लेता है, तब बेलन का कोणीय वेग ज्ञात करो, [g = 10 m/s²]



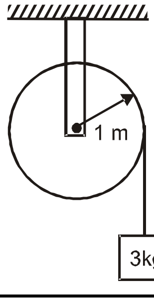
F-2. एक दृढ़ वस्तु तीन L लम्बाई की समरूप छड़ से मिलकर H आकृति की बनाई जाती है। यह वस्तु क्षैतिज अक्ष AB के सापेक्ष घूर्णन के लिए स्वतंत्र है जब H का तल क्षैतिज हो तब इसे विराम से छोड़ा जाता हैं। जब H का तल ऊर्ध्वाधर हो तो इसका कोणीय वेग क्या होगा ?



F-3. अपनी अक्ष के परितः क्षैतिज तल में ω कोणीय वेग से घूमती चकती पर, m द्रव्यमान तथा L लम्बाई की एक समान छड त्रिज्यीय दिशा में रखी है। छड़, चकती पर फिसलती नहीं है तथा छड़ का केन्द्र, चकती के केन्द्र से R दूरी पर है, तब छड़ की गतिज ऊर्जा ज्ञात करो।



F-4. चित्रानुसार घिरनी निकाय का जड़त्वाघूर्ण 3 kgm² है। जब निकाय को विराम से मुक्त करते है तो ब्लॉक के 40 cm नीचे गिरने पर ब्लॉक की रेखिय चाल ज्ञात करो। घिरनी की त्रिज्या 1 m है तथा यह मानिये कि डोरी व घिरनी के मध्य कोई फिसलन नहीं है एवं डोरी हल्की है [g = 10 m/s²]

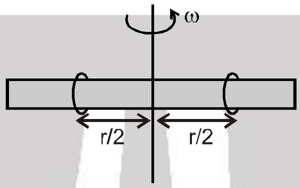


खण्ड (G) : कोणीय संवेग तथा उसका संरक्षण

G-1. 2 kg द्रव्यमान का कण $(2\hat{i}+3\hat{j})$m/s के वेग से गतिमान है। जब कण (1, 1, 0) पर है तब कण का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो।

G-2. 2 kg द्रव्यमान का कण सरल रेखा 3x + 4y = 5 के अनुदिश 8m/s की चाल से गतिमान है। कण का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो। x और y मीटर में है।

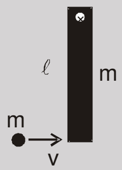
G-3. दो मोती (प्रत्येक द्रव्यमान m) एक घर्षणरहित तार में स्वतंत्रतापूर्वक गति कर सकते हैं। तार का ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है। जब मोती अक्ष से r/2 दूरी पर है, तो निकाय को ω_0 कोणीय वेग से घुमाया जाता है। जब मोती अक्ष से r दूरी पर है, तो निकाय का कोणीय वेग क्या होगा? **[JEE -1990]**



G-4. एक निकाय में 1 m लम्बाई की हल्की छड़ के दोनों किनारों पर दो एकसमान प्रत्येक 2 kg की गेंद लगी हुई है। निकाय, छड़ के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली व इसके लम्बवत अक्ष के सापेक्ष 9 rad/s के कोणीय वेग से घूर्णन करता है। एक 10 N औसत परिमाण का आवेगी बल एक द्रव्यमान पर 0.20 s तक इसके वेग की दिशा में लगाया जाता है। निकाय का नया कोणीय वेग ज्ञात करो।

G-5. एक M द्रव्यमान व R त्रिज्या का वृत्ताकार बोर्ड एक दृढ़ चिकनी समतल सतह पर रखा जाता है तथा इसके केन्द्र से गुजरने वाली स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूमने के लिए स्वतंत्र है। एक m द्रव्यमान का व्यक्ति बोर्ड की परिधि पर चिन्हित बिन्दु A पर खड़ा है। प्रारम्भ में बोर्ड व आदमी विरामावस्था में है। आदमी बोर्ड की परिधि पर, बोर्ड के सापेक्ष एक नियत चाल v_0 से गति प्रारम्भ करता है। जब व्यक्ति बोर्ड पर अपने प्रारम्भिक बिन्दु से पहली बार गुजरता है, तो बोर्ड द्वारा तय किया गया कोण ज्ञात करो।

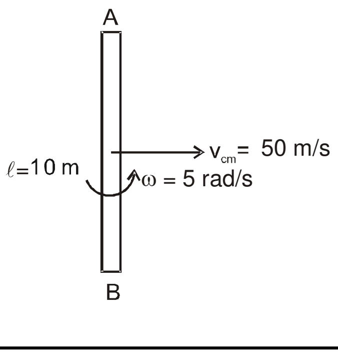
G-6. एक बिन्दु द्रव्यमान m, एक समरूप पतली ℓ लम्बाई व m द्रव्यमान की छड़ के निचले सिरे पर क्षैतिज रूप से टकराता है तथा इससे चिपक जाता है, छड़ क्षैतिज चिकनी सतह पर रखी है एवं दर्शाये अनुसार इसका दूसरा सिरा कीलकित है।



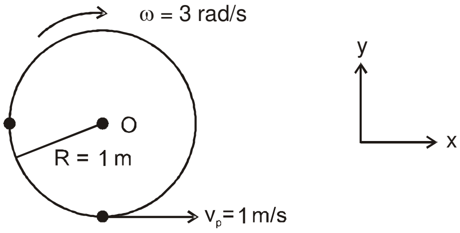
टक्कर के ठीक बाद निकाय का कोणीय वेग ज्ञात करो।

खण्ड (H) : संयुक्त स्थानांतरीय व घूर्णन गति (गतिकी)

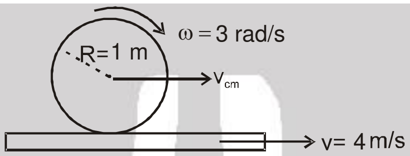
H-1 चित्रानुसार एक 10 मीटर लम्बी समरूप छड़ का द्रव्यमान केन्द्र 50 m/sec. से घर्षणरहित क्षैतिज सतह पर स्थानान्तरीय गति कर रहा है एवं छड़ इसके द्रव्यमान केन्द्र के परितः 5 radian/sec. के कोणीय वेग से घूमती है। V_A व V_B ज्ञात करो।



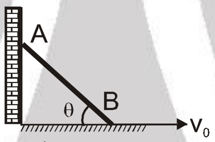
H-2 चित्रानुसार 1 m त्रिज्या की एक वलय एक घर्षणरहित क्षैतिज सतह पर 3 rad/sec. के कोणीय वेग से संयुक्त स्थानान्तरीय व घूर्णन गति कर रही है। इसके केन्द्र व बिन्दु A का वेग ज्ञात करो यदि निम्नतम बिन्दु का वेग V_P, 1 m/sec है।



H-3 चित्रानुसार एक पट्टा 4 m/sec. के वेग से चल रहा हैं। त्रिज्या 1 m की एक चकती इस पर बिना फिसले लुढ़क रही है। इसकी कोणीय चाल 3 rad/sec. है। चकती के द्रव्यमान केन्द्र का वेग ज्ञात करो।

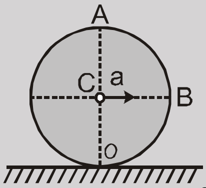


H-4 समरूप छड़ AB का किनारा B जो फर्श से θ कोण बनाता है, इसे चित्रानुसार v_0 वेग से खींचा जाता है। छड़ की लम्बाई को ℓ मानते हुए, θ = 37º के कोण की स्थिति पर निम्न का मान ज्ञात करो।



(a) किनारे A का वेग (b) छड़ का कोणीय वेग (c) छड़ के द्रव्यमान केन्द्र का वेग

H-5. एक गेंद की त्रिज्या R = 10.0 cm है, जो क्षेतीज तल पर बिना फिसलन के लुढक रही है तथा इसका केन्द्र नियत त्वरण $a = 2.50\ cm/s^2$ से गति करता है। गति शुरू होने के t = 2.00 s के बाद इसकी स्थिति चित्र में दर्शाए अनुसार है। बताओ :



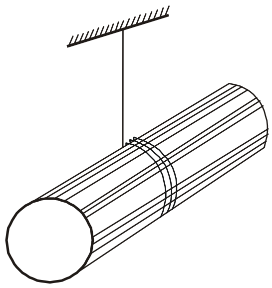
(a) बिन्दु A, B तथा O का वेग (b) इन बिन्दुओं का त्वरण

खण्ड (I) : संयुक्त स्थानांतरीय व घूर्णन (बल गतिकी)

I-1. एक खुरदरे पथ पर एक छोटे ठोस बेलन को h ऊँचाई पर स्थित बिन्दु से चित्रानुसार छोड़ा जाता है। यह मानते हुए कि यह कहीं भी नहीं फिसलता है तो पथ के क्षैतिज भाग पर लुढ़कने पर इसकी रेखीय चाल ज्ञात करो।

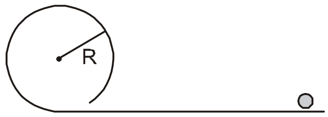
I-2. m द्रव्यमान की एक समरूप ठोस गेंद एक स्थिर क्षैतिज धरातल पर बिना फिसले लुढ़कती है। गेंद के केन्द्र के सापेक्ष इसके निम्नतम बिन्दु का वेग V है। गेंद की कुल गतिज ऊर्जा होगी –

I-3. एक समरूप ठोस बेलन की वक्रीय सतह पर एक डोरी लिपटी हुई है, तथा इसका दूसरा सिरा स्थिर दृढ़ आधार पर बंधा हुआ है। डोरी के खुलने से ठोस बेलन नीचे की ओर गतिशील है। ठोस बेलन का नीचे की ओर त्वरण ज्ञात कीजिये।

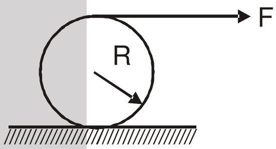


I-4. एक स्थिर अर्ध गोलाकार प्याले की परिधी के किनारे से m द्रव्यमान की एक समरूप चकती को इस प्रकार मुक्त किया जाता है कि यह सतह पर लुढ़कती हुई नीचे की ओर आती है। यदि प्याले की परिधि क्षैतिज रखी हुई है, तो जब चकती, प्याले के पैदें पर पहुंचती है, तो प्याले द्वारा चकती पर लगााया गया अभिलम्बवत् बल ज्ञात कीजिये।

I-5. चित्र में प्रदर्शित पथ खुरदरा है तथा इसका एक भाग बेलनाकार है, जिसकी त्रिज्या R है। इसके क्षैतिज भाग पर r त्रिज्या वाली एक समान वलय को किस न्यूनतम रेखीय चाल से बिना फिसले लुढकते हुए रखा जाये कि यह बेलनाकार भाग में वृत्ताकार पथ पर पूरा बिना फिसले चक्कर लगा सके?



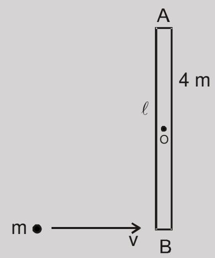
I-6. एक चिकनी क्षेतिज सतह पर R त्रिज्या का एक समान ठोस गोला स्थित है। चित्रानुसार यह इसके शीर्षतम बिन्दु पर स्पर्श रेखीय अचर बल द्वारा खींचा जाता है। गोला के द्वारा एक पूर्ण चक्कर तय करने में, लगे समय में इसके द्रव्यमान केन्द्र द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिये।



I-7. एक क्षेतिज सतह पर m = 1 किग्रा द्रव्यमान वाला एक एकसमान खोखला गोला रखा हुआ है। सम्पर्क सतहों के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक का मान μ = 2/5 है। शीर्षतम बिन्दु पर क्षैतिज दिशा में अधिकतम कितना अचर बल लगाया जा सकता है कि गोला सतह पर बिना फिसले लुढ़के ? ($g = 10\ m/s^2$)

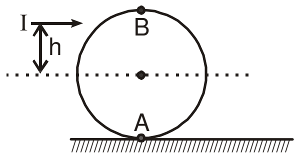
खण्ड (J) : कोणीय संवेग संरक्षण (संयुक्त स्थानान्तरीय एवं घूर्णन गति)

J-1 लम्बाई ℓ व द्रव्यमान 4m की एक समरूप छड़ एक घर्षणरहित क्षैतिज सतह पर रखी है। यह किसी भी तरफ जाने के लिए स्वतंत्र है। m द्रव्यमान की एक गेंद, v चाल से चित्रानुसार छड़ के एक सिरे पर टकराती है। यदि टक्कर के तुरन्त बाद गेंद विराम पर आ जाती है तो टक्कर के तुरन्त बाद छड़ का कोणीय वेग ω ज्ञात करो।



J-2. m_1 द्रव्यमान व L लम्बाई की एक समरूप छड़ क्षैतिज चिकनी सतह पर रखी गई है। m_2 द्रव्यमान का एक कण u चाल से गति करता हुआ छड़ के लम्बवत एक किनारे पर लम्बवत् टकराता है तथा चिपक जाता है। (a) छड़ व कण निकाय के द्रव्यमान केन्द्र C का वेग ज्ञात करो। (b) टक्कर से पहले कण का C के सापेक्ष वेग ज्ञात करो। (c) टक्कर से पहले छड़ का C के सापेक्ष वेग ज्ञात करो। (d) टक्कर से पहले कण व छड़ का C के सापेक्ष कोणीय संवेग ज्ञात करो। (e) टक्कर के पश्चात् निकाय का (छड़ तथा कण) द्रव्यमान केन्द्र C से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो (f) टक्कर के पश्चात् द्रव्यमान केन्द्र C का वेग तथा द्रव्यमान केन्द्र C के सापेक्ष निकाय का कोणीय वेग ज्ञात करो।

J-3. एक समरूप ठोस गोला एक चिकने क्षैतिज सतह पर रखा है। केन्द्र की रेखा से h = 4R/5 ऊँचाई पर क्षैतिज दिशा में एक आवेग I दिया जाता हैं। m तथा R क्रमशः गोले के द्रव्यमान व त्रिज्या हैं।

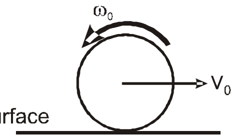


(a) आवेग के बाद गोले का कोणीय वेग व गोले के द्रव्यमान केंद्र का रेखीय वेग ज्ञात करो ।

(b) वह न्यूनतम समय जिसके बाद गोले का उच्चतम बिन्दू B सतह को छूता है, ज्ञात करों

(c) इस अन्तराल के दौरान द्रव्यमान केन्द्र का विस्थापन

J-4. एक समरूप चकती जिसकी त्रिज्या R = 0.2m है, को खुरदरे क्षेतिज धरातल पर वेग v_0 (=10 मी./सै.) तथा कोणीय वेग ω_0 प्रदान करके रखते है। कुछ समय पश्चात् इसकी गतिज ऊर्जा शून्य हो जाती है। प्रारम्भिक कोणीय वेग ω_0 ज्ञात करो।



खण्ड (K) : पलटना

K-1. एक m द्रव्यमान व a भुजा का ठोस घनाकार ब्लॉक खुरदरे θ कोण वाले तल पर नीचे की ओर नियत चाल से फिसलता है। इसके केन्द्र के परितः ब्लॉक पर लगने वाले अभिलम्ब बल का बल आघूर्ण तथा द्रव्यमान केन्द्र से लम्बवत् दूरी 'x' ज्ञात करो। जहां यह कार्यरत है।

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

खण्ड (A) : गतिकी

A-1. एक पंखा 3000 rpm से घूम रहा है। यह बन्द किया जाता है, तो यह कोणीय वेग की एक समान हास दर से घूमता हुआ 10 सैकण्ड में रूक जाता है। इस अन्तराल में लगाये गये कुल चक्कर होगें।

(A) 150 (B) 250 (C) 350 (D) 300

A-2. एक लटका हुआ ब्लॉक, क्षैतिज अक्ष के परितः घूमने वाली 20 cm त्रिज्या की चकती पर लिपटी हुई डोरी से बंधा हुआ है। यदि किसी क्षण चकती की कोणीय चाल 10 rad/s हो तो नीचे की ओर गतिशील ब्लॉक की इस क्षण चाल होगी।

(A) 4 m/s (B) 3 m/s (C) 2 m/s (D) 5 m/s

खण्ड (B) : जड़त्व आघूर्ण

B-1. एक r त्रिज्या की वृत्ताकार एक समान चकती a, t मोटाई की तांबे की प्लेट से बनाई गई है तथा दूसरी 2r त्रिज्या की वृत्ताकार एक समान चकती B, t/2 मोटाई की तांबे की प्लेट से ही बनाई गई है। जड़त्व आघूर्ण I_A व I_B के मध्य संबंध होगा–

(A) $I_A > I_B$ (B) $I_A = I_B$ (C) $I_A < I_B$ (D) r व t के मान पर निर्भर करता है।

B-2. द्रव्यमान m व त्रिज्या r के एक असमरूप अर्द्धवृत्ताकार तार का इसके केन्द्र से गुजरने वाली व तार के तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण होगा–

(A) mr^2 (B) $\frac{1}{2}mr^2$ (C) $\frac{1}{4}mr^2$ (D) $\frac{2}{5}mr^2$

B-3. यदि समरूप ज्यामितिय आकृति व आकार के दो ठोस बैलन का उनकी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I_A तथा I_B हैं। पहली एल्यूमिनियम व दूसरी लोहे से बनाई जाती है–

(A) $I_A < I_B$ (B) $I_A = I_B$ (C) $I_A > I_B$

(D) I_A व I_B के मध्य संबंध इनकी वास्तविक आकृति पर निर्भर करता है।

B-4. यदि 1 व 2 दो अक्षों के परितः एक वस्तु के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः I_1 व I_2 है। अक्ष 1 वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरती है। परन्तु अक्ष 2 नहीं–

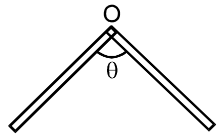
(A) $I_1 < I_2$ (B) यदि $I_1 < I_2$, अक्ष समान्तर है।

(C) यदि अक्ष समान्तर है, $I_1 < I_2$ (D) यदि अक्ष समान्तर नहीं है $I_1 \geq I_2$.

B-5. m द्रव्यमान की समरुप द्रव्यमान वितरण वाली अर्द्धदीर्घ अक्ष 'r' तथा अर्द्धलघु अक्ष 'd' की दीर्घ वृत्ताकार चकती का जड़त्व आघूर्ण इसकी अक्ष के परितः है ।

(A) $= \frac{mr^2}{2}$ (B) $= \frac{md^2}{2}$ (C) $> \frac{mr^2}{2}$ (D) $< \frac{mr^2}{2}$

B-6. लम्बाई L व द्रव्यमान M की एक पतली छड़ मध्य बिन्दू O पर चित्रानुसार मुड़ी है। मध्य बिन्दु O से गुजरने वाली तथा मुड़ी छड़ के तल के लम्बवत एक अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण है।

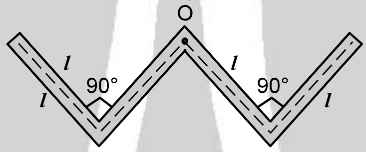


(A) $\frac{2}{3}$ mL^2 (B) $\frac{1}{3}$ mL^2 (C) $\frac{1}{12}$ mL^2 (D) θ पर निर्भर करेगा

B-7. एक समरूप वृत्ताकार चकती का इसके व्यास के परितः जड़त्व आघूर्ण 200 gm cm^2 है तो इसके केन्द्र से पारित एवं वृत्ताकार फलक के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण होगा–

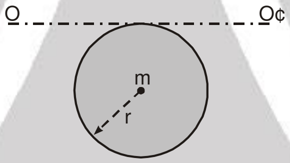
(A) 100 gm cm^2 (B) 200 gm cm^2 (C) 400 gm cm^2 (D) 1000 gm cm^2

B-8. एक 4 l लम्बाई, 4m द्रव्यमान की पतली एकसमान छड़ को चित्रानुसार मोड़ा जाता है। छड़ का O से निकलने वाली तथा कागज के समतल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण क्या होगा ?



(A) $\frac{m\ell^2}{3}$ (B) $\frac{10\,m\ell^2}{3}$ (C) $\frac{m\ell^2}{12}$ (D) $\frac{m\ell^2}{24}$

B-9. OO′ अक्ष के सापेक्ष चकती का जड़त्व आघूर्ण है :

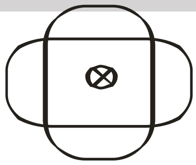


(A) $\frac{3\,m\,r^2}{2}$ (B) $\frac{m\,r^2}{2}$ (C) $\frac{5\,m\,r^2}{2}$ (D) $\frac{5\,m\,r^2}{4}$

B-10. एक खोखले घनीय बक्से का द्रव्यमान M तथा भुजा a है। इसका, इसकी दो विपरीत फलकों के मध्य बिन्दुओं से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्वाघूर्ण होगा : **[Olympiad 2015 (stage-1)]**

(A) $\frac{5Ma^2}{3}$ (B) $\frac{5Ma^2}{6}$ (C) $\frac{5Ma^2}{12}$ (D) $\frac{5Ma^2}{18}$

B-11. लम्बाई $(4a + 2\pi a)$ तथा द्रव्यमान $(4m + 2\pi m)$ की एक, एकसमान पतली छड़ को एक वर्ग के रूप में मोड़ा गया है। तथा यह वर्ग एक अर्द्धवृत्त द्वारा चित्रानुसार घिरा हुआ है। इस फ्रेम का इसके केन्द्र से गुजरने वाली तथा इसके तल के लम्बवत् अक्ष के परितः जड़त्व आर्घूण होगा। **[Olympiad 2014 (stage-1)]**



(A) $\frac{(4+2\pi)}{3}ma^2$ (B) $\frac{(4+\pi)}{2}ma^2$ (C) $\frac{(4+3\pi)}{3}ma^2$ (D) $\frac{ma^2\{10+3\pi\}}{3}$

खण्ड (C) : बल आघूर्ण

C-1. यदि एक दृढ़ वस्तु पर दो बल $\vec{F}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, बिन्दु (3, 3, 4) पर तथा $\vec{F}_2 = -2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$, बिन्दु (1, 0, 0) पर लगाए जाते हैं, तो निम्न में से कौनसा/कौनसे सत्य है। **[REE - 1994]**

(A) वस्तु साम्यावस्था में है। (B) वस्तु केवल एक बलाघूर्ण के प्रभाव में है।

(C) वस्तु केवल एक बल के प्रभाव में है। (D) वस्तु एक बल व एक बलाघूर्ण के प्रभाव में है।

C-2. एक बल $\vec{F} = 4\hat{i} - 10\hat{j}$, एक वस्तु पर एक बिन्दु पर जिसका घूर्णन अक्ष पर मूल बिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश $-5\hat{i} - 3\hat{j}$ है, कार्यरत है। मूल बिन्दु के सापेक्ष वस्तु पर कार्यरत बलाघूर्ण है :

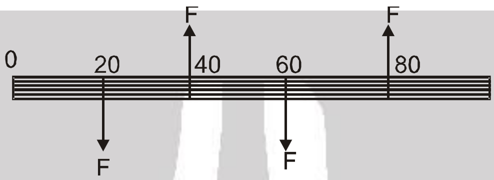
(A) $38\hat{k}$ (B) $-25\hat{k}$ (C) $62\hat{k}$ (D) इनमें से कोई नहीं

C-3. एक बल युग्म के बलाघूर्ण के लिए यदि अक्ष को इसके समान्तर विस्थापित किया जाये तो बलाघूर्ण :

(A) बढ़ेगा (B) घटेगा (C) नियत रहता है (D) इनमें से कोई नहीं

खण्ड़ (D) : घूर्णन साम्यावस्था

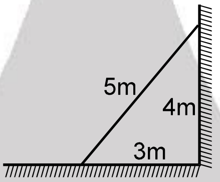
D-1. चित्रानुसार क्षैतिज तल में, किसी छड़ पर चार समान व समान्तर बल छड़ के एक सिरे से क्रमशः 20 cm, 40 cm, 60 cm व 80 cm की दूरीयों पर लगाये जाते हैं। इन बलों के प्रभाव में छड़ –



(A) स्थिर है (B) बलाघुर्ण अनुभव करती है

(C) रेखिय गति करती है (D) बलाघुर्ण अनुभव करती है व रेखिक गति भी करती है

D-2. 5m लम्बी एक समरुप सीढ़ी एक दीवार पर चित्रानुसार ऊर्ध्वाधर तल में लगी है। दीवार तथा फर्श के लिए घर्षण गुणांक μ समान है तो इसको फिसलने से रोकने के लिए μ का न्यूनतम मान क्या होना चाहिऐ।



(A) $\mu = 1/2$ (B) $\mu = 1/4$ (C) $\mu = 1/3$ (D) $\mu = 1/5$

D-3 w भार की एक छड़ दो समान्तर तीखे किनारो A तथा B पर उनके लम्बवत् क्षैतिज अवस्था में रखी हैं। किनारे एक दूसरे से d दूरी पर है तथा छड का द्रव्यमान केन्द्र A सिरे से x दूरी पर है। A तथा B पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल होगा।

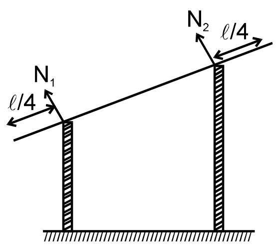
(A) $N_A = 2w(1 - x/d)$, $N_B = wx/d]$ (B) $N_A = w(1 - x/d)$, $N_B = wx/d]$

(C) $N_A = 2w(1 - x/d)$, $N_B = 2wx/d]$ (D) $N_A = w(2 - x/d)$, $N_B = wx/d]$

D-4 किसी तराजु का पलड़ा व छड़ द्रव्यमान रहित हैं। एक पलडे में रखने पर किसी वस्तु का भार W_1 व दूसरे पलड़े में रखने पर W_2 ज्ञात होता है। वस्तु का भार W है–

(A) $\sqrt{W_1W_2}$ (B) $\sqrt{(W_1 + W_2)}$ (C) $W_1^2 + W_2^2$ (D) $(W_1^{-1} + W_2^{-1})/2$

D-5. ℓ लम्बाई की एक समान छड़ को दो दीवारों पर सममित रूप से चित्रानुसार रखा है। छड़ साम्यावस्था में है। यदि N_1 तथा N_2 दीवार द्वारा छड़ पर लगाये अभिलम्बवत् बल हों तब–



(A) $N_1 > N_2$ (B) $N_1 > N_2$

(C) $N_1 = N_2$ (D) N_1 तथा N_2 ऊर्ध्वाधर दिशा में होने चाहिये।

खण्ड़ (E) : स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन ($\tau_H = I_H\alpha$)

E-1. एक r त्रिज्या की वृत्ताकार एक समान चकती A, t मोटाई की धातु की प्लेट से बनाई जाती है तथा दूसरी 4r त्रिज्या की एक समान चकती B, t/4 मोटाई की उसी धातु की प्लेट से बनाई जाती है। यदि दोनों प्रारम्भ में विरामअवस्था में है तथा दोनों पर समान बल आघूर्ण आरोपित किया जाए तो, कुछ समय पश्चात् A की परिधि पर स्थित बिन्दु तथा B की परिधी पर स्थित अन्य बिन्दु का कोणीय वेग क्रमशः ω_A तथा ω_B हो, तो

(A) $\omega_A > \omega_B$ (B) $\omega_A = \omega_B$ (C) $\omega_A < \omega_B$
(D) संबंध बल आघूर्ण के वास्तविक मान पर निर्भर करता है।

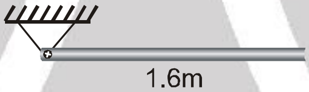
E-2. जड़त्वीय तंत्र में एक स्थिर ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष एक वस्तु एक समान कोणीय वेग से घूर्णन गति कर रही है। वस्तु के एक कण पर जो वस्तु की अक्ष पर स्थित नहीं है, पर परिणामी बल होगा –

(A) क्षैतिज तथा अक्ष से झुकाव पर (B) ऊर्ध्वाधर
(C) क्षैतिज व अक्ष को काटता हुआ (D) उपरोक्त में से कोई नहीं

E-3. एक m द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की समरूप छड़ का एक सिरा आलम्बित है। छड़ एक चिकने क्षैतिज तल पर रखी गई है तथा आलम्बित सिरे के सापेक्ष समान कोणीय वेग ω से घूर्णन करती है। दृढ़ आलम्ब द्वारा छड़ पर लगाए गए बल का क्षैतिज घटक होगा–

(A) $m\omega^2\ell$ (B) शून्य (C) mg (D) $\frac{1}{2}m\omega^2\ell$

E-4. चित्रानुसार 20 kg द्रव्यमान तथा 1.6 m लम्बाई की एक एकसमान छड़ अपने एक सिरे के बिन्दु पर कीलकित है तथा ऊर्ध्वाधर तल में मुक्त रूप से झूल सकती है। छड़ को क्षैतिज स्थिति में, विराम से छोड़ने के तुरन्त बाद छड़ का कोणीय त्वरण होगा :



(A) $\frac{15g}{16}$ (B) $\frac{17g}{16}$ (C) $\frac{16g}{15}$ (D) $\frac{g}{15}$

E-5. दो आदमी एक समरुप क्षैतिज छड़ को इसके दोनों किनारों पर से उठाते हैं। यदि उनमें से एक व्यक्ति छड़ को अचानक छोड़ देता है तो छड़ द्वारा दूसरे व्यक्ति पर आरापित बलः

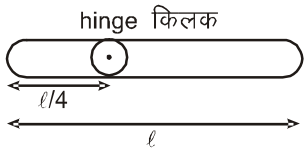
(A) अपरिवर्तित रहेगा (B) बढ़ेगा (C) घटेगा
(D) उसके द्वारा छड़ पर आरोपित बल से अलग होगा

खण्ड़ (F) : स्थिर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन (ऊर्जा संरक्षण)

F-1. एक मीटर की एक समरूप छड़ ऊर्ध्वाधर रखी जाती है। इसका एक सिरा फर्श पर है और यह गिरने दी जाती है यह मानते हुऐ कि फर्श वाला सिरा फिसलता नहीं है। जब यह फर्श पर टकराती है तब दूसरे सिरे की चाल ज्ञात करो।

(A) $\sqrt{4g}$ (B) $\sqrt{3g}$ (C) $\sqrt{5g}$ (D) $\sqrt{g}$

F-2. एक समरूप छड़ चित्रानुसार कीलकित की गयी है। इसे क्षैतिज अवस्था से छोड़ा जाता है। छड़ के ऊर्ध्वाधर अवस्था में पहुँचने पर इसका कोणीय वेग है : (अक्ष जड़वत्, घर्षणरहित और क्षैतिज है।)



(A) $\sqrt{\frac{12g}{3\ell}}$ (B) $\sqrt{\frac{2g}{3\ell}}$ (C) $\sqrt{\frac{24g}{7\ell}}$ (D) $\sqrt{\frac{3g}{7\ell}}$

खण्ड़ (G) : कोणीय संवेग तथा कोणीय संवेग संरक्षण

G-1. एक नियत बलाघूर्ण एक समरुप वृत्ताकार पहिये का कोणीय संवेग 4 sec. में A_0 से $4A_0$ तक परिवर्तित करता है। इस बलाघूर्ण का परिमाण है :

(A) $4A_0$ (B) A_0 (C) $3A_0/4$ (D) $12A_0$

G-2. एक कण Y-अक्ष के समान्तर अचर वेग से गति करता है, मूल बिन्दु के सापेक्ष इसका कोणीय संवेग
(A) शून्य है (B) नियत रहता है (C) लगातार बढ़ता है। (D) लगातार घटता है

G-3. एक कण t = 0 पर जमीन पर क्षैतिज से 45° के कोण पर बिन्दु P से v_0 चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। $t = v_0/g$ समय पर कण का P के सापेक्ष कोणीय संवेग का परिमाण क्या होगा
(A) $\frac{mv_0^2}{2\sqrt{2}g}$ (B) $\frac{mv_0^3}{\sqrt{2}g}$ (C) $\frac{mv_0^2}{\sqrt{2}g}$ (D) $\frac{mv_0^3}{2\sqrt{2}g}$

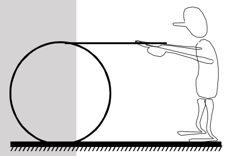
G-4. 'M' द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक पतली एकसमान वलय इसकी स्थिर अक्ष जो केन्द्र से गुजरती है, तथा घुर्णन तल के लम्बवत् है, के सापेक्ष समान कोणीय वेग ω से घूर्णन करती है। दो वस्तुऐं प्रत्येक m द्रव्यमान की इसके व्यासतः विपरीत किनारों पर धीरे से रख दी जाती है। अब वलय का कोणीय वेग होगा - **[JEE - 1983]**
(A) $\frac{\omega M}{(M+m)}$ (B) $\frac{\omega M}{(M+2m)}$ (C) $\frac{\omega M}{(M-2m)}$ (D) $\frac{\omega(M+3m)}{M}$

G-5. एक बच्चा घूर्णन कर रहे स्टूल पर भुजाएं सिकौडकर बैठा है। यदि यह अपनी भुजाऐं फैलादे, तो घूर्णन अक्ष के सापेक्ष इसका कोणीय संवेग
(A) बढ़ता है (B) घटता है (C) अपरिवर्तित रहता है (D) दुगना हो जाता है

खण्ड़ (H) : संयुक्त स्थानांतरीय गति + घूर्णन गति (गतिकी)

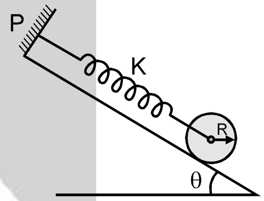
H-1. समतल सतह पर बिना फिसले लुढ़कने वाली चकती का केन्द्र u चाल से गति करता है। निम्न अर्धवृत्त पर स्थित ऊर्ध्वाधर से 60º के कोण पर, चकती की परिधी पर स्थित एक बिन्दु की चाल होगी
(A) शून्य (B) u (C) $\sqrt{2}u$ (D) 2u

H-2. खुरदरे क्षैतिज तल पर रखे गए एक बेलन पर नगण्य मोटाई की एक रस्सी कई बार लपेटी गई है। चित्रानुसार ℓ दूरी पर खड़ा बच्चा इसको अपनी तरफ खींचता है। यदि बेलन बिना फिसले लुढकता है, तो जब बेलन उसके हाथ पर पहुचता है तो बच्चे के हाथ से गुजरने वाली रस्सी की लम्बाई होगी



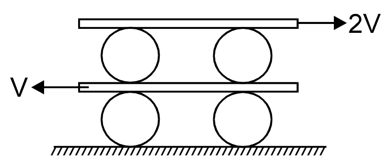
(A) ℓ (B) 2ℓ (C) 3ℓ (D) 4ℓ

H-3. क्षैतिज के साथ θ कोण वाले नत तल पर M द्रव्यमान व R त्रिज्या का एकसमान बेलन बिना फिसले नीचे की ओर लुढ़कता है। बेलन K स्प्रिंग नियतांक वाली एक स्प्रिंग से जुड़ा हुआ है जबकि स्प्रिंग का दूसरा सिरा एक दृढ़ आधार P से जुड़ा हुआ है। जब स्प्रिंग अविस्तारित होती है तब बेलन को विराम से छोड़ा जाता है। बेलन का अधिकतम विस्थापन है–



(A) $\frac{3}{4}\frac{Mg\sin\theta}{K}$ (B) $\frac{Mg\sin\theta}{K}$ (C) $\frac{2Mg\sin\theta}{K}$ (D) $\frac{4}{3}\frac{Mg\sin\theta}{K}$

H-4. समरूप बेलन व प्लेटों का निकाय चित्रानुसार है। सभी बेलन एक ही प्रकार के हैं तथा किसी भी सम्पर्क सतह पर फिसलन नहीं है। नीचे वाली तथा ऊपरी प्लेट का वेग क्रमशः V तथा 2V चित्रानुसार है तो ऊपर तथा नीचे वाले बेलनों के कोणीय वेग का अनुपात क्या होगा।

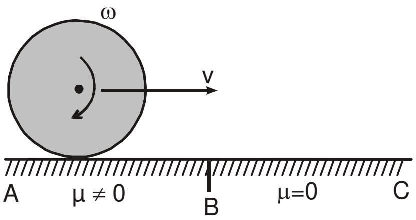


(A) 3 (B) 1/3 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

H-5. जब एक आदमी ने एक मीटर छड़ को फैंका तो यह देखा गया कि उसके केन्द्र की चाल ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर 10 m/s है और बाईं ओर के सिरे की चाल 20 m/s ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर है तो छड़ की कोणीय चाल होगी :
(A) 20 rad/ sec (B) 10 rad/sec (C) 30 rad/sec (D) इनमें से कोई नही

खण्ड़ (I) : संयुक्त स्थानांतरीय गति तथा घूर्णन गति (गतिकी)

I-1. चित्रानुसार एक m द्रव्यमान की समरूप चकती ω कोणीय वेग से बिना फिसले लोटनी गति करती है। AB भाग खुरदरा व BC चिकना है। जब यह B को पार करती है, चकती में होगी :



(A) केवल स्थानान्तरीय गति (B) शुद्ध लोटनी गति (C) केवल घूर्णन गति (D) इनमें से कोई नहीं

I-2. समान द्रव्यमान व त्रिज्या का एक ठोस गोला, खोखला गोला तथा वलय एक नत तल के शीर्ष से एक साथ छोड़े जाते हैं। वस्तु व नत तल के मध्य घर्षण गुणांक समान है तथा शुद्ध लोटनी गति के लिए पर्याप्त नहीं है। तली पर सबसे अधिक गतिज उर्जा प्राप्त करेगा–

(A) ठोस गोला (B) खोखला गोला (C) वलय (D) सभी समान गतिज ऊर्जा प्राप्त करेंगे

I-3. एक खोखला गोला व ठोस गोला जिनका द्रव्यमान व त्रिज्या समान है। एक खुरदरे नत तल पर बिना फिसलन के नीचे लुढ़काए जाते हैं, तो

(A) दोनो गोले तली पर एक साथ पहुँचेगे

(B) खोखला गोला तली पर कम चाल से पहुँचेगा

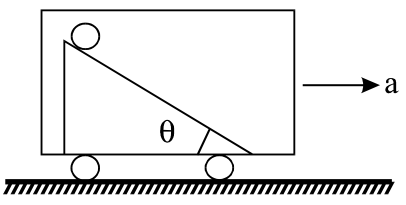
(C) ठोस गोला तली पर अधिक गतिज उर्जा से पहुँचेगा

(D) दोनों गोले तली पर समान रेखीय संवेग से पहुँचेगे

I-4. समान द्रव्यमान व त्रिज्या का एक ठोस गोला, खोखला गोला तथा ठोस बेलन एक नत तल के शीर्ष से छोड़े जाते हैं, वस्तु व नत तल के मध्य घर्षण गुणांक समान है तथा शुद्ध लोटनी गति के लिए पर्याप्त नहीं है। निम्न के द्वारा तली तक पहुँचने में लिया गया समय अधिकतम होगा -

(A) ठोस गोला (B) खोखला गोला (C) ठोस बेलन (D) सभी समान समय लेंगे

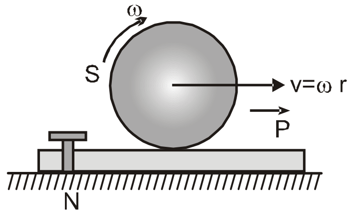
I-5. चित्र में एक चिकना नत तल दिखाया गया है जो एक कार में जड़वत किया गया है। कार क्षैतिज सड़क पर त्वरित होती है। नत तल का झुकाव कोण θ व कार का त्वरण निम्न प्रकार से संबंधित है $a = g \tan\theta$. यदि एक दृढ़ गोले को नत तल पर शुद्ध लोटनी गति दी जाए तो –



(A) यह लगातार शुद्ध लोटनी गति करेगा (B) इस पर घर्षण बल कार्य करेगा

(C) इसका कोणीय वेग बढ़ेगा (D) इसका कोणीय वेग घटेगा

I-6. एक गोला S एक प्लांक P पर बिना फिसले नियत चाल से चल रहा है। P की ऊपरी सतह व गोले के मध्य घर्षण फिसलन रोकने के लिऐ पर्याप्त है। जबकि P की निचली सतह चिकनी है व सतह पर विराम पर रखा है। प्रारम्भ में P सतह से एक पिन N द्वारा जुड़ा (fixed) है। यदि N अचानक हटा लिया जाये तो –



(A) S, P पर फिसलना प्रारम्भ करेगा

(B) P पीछे चलना प्रारम्भ करेगा

(C) S की चाल घटेगी व इसका कोणीय वेग बढ़ेगा

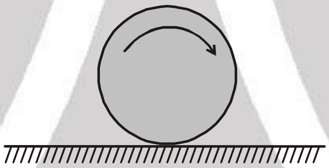
(D) S की गति में कोई परिवर्तन नहीं आयेगा व P अब भी विराम पर रहेगा

I-7. एक वस्तु को स्थानान्तरीय वेग दिया जाता है एवं पर्याप्त घर्षण वाली सतह पर रखा जाता है, तो :

(A) शुद्ध घूर्णन से पहले वस्तु आगे की ओर गति करेगी (B) शुद्ध घूर्णन से पहले वस्तु पीछे की ओर गति करेगी

(C) वस्तु तुरंत शुद्ध घूर्णन प्रारंभ करेगी (D) इनमें से कोई नहीं

I-8. चित्रानुसार m द्रव्यमान व r त्रिज्या की एक वस्तु ω कोणीय वेग से घूर्णन करती है तथा एक सतह पर रखी जाती है जिसका पर्याप्त घर्षण है तो वस्तु गति करेगी :



(A) पहले पीछे की ओर तथा बाद में आगे की ओर (B) पहले आगे की ओर तथा बाद में पीछे की ओर

(C) हमेशा आगे की ओर (D) इनमें से कोई नहीं

I-9. v चाल से क्षेतिज सतह पर बिना फिसले लौटनी गति कर रही m द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की एक वस्तु ऊँचाई $\frac{3v^2}{4g}$ के रेम्प पर चढ़ती है। वस्तु हो सकती है। **[Olympiad 2015 (stage-1)]**

(A) एक गोला (B) एक वृत्ताकार वलय (C) एक गोलीय कोश (D) एक वृत्ताकार चकती

खण्ड़ (J) : कोणीय संवेग संरक्षण (संयुक्त स्थानान्तरीय गति एवं घूर्णन गति)

J-1. एक चिकने नत तल के ऊपरी सिरे से एक गोला मुक्त रूप से छोड़ा जाता है। जब यह नीचे की ओर गति करता है, तो इसका कोणीय सवेग

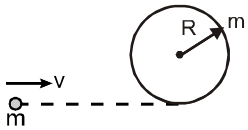
(A) प्रत्येक बिन्दु के सापेक्ष संरक्षित होगा।

(B) केवल संपर्क बिन्दु के सापेक्ष संरक्षित होगा।

(C) केवल गोले के केन्द्र के सापेक्ष संरक्षित होगा।

(D) गोले के केन्द्र से गुजरने वाली तथा नत तल के समानान्तर एक स्थिर रेखा पर स्थित किसी भी बिन्दु के सापेक्ष संरक्षित होगा।

J-2. m द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक वृत्ताकार लकड़ी की वलय समतलीय रूप से एक घर्षण रहित क्षैतिज तल पर स्थिर रखा हुआ है। समान द्रव्यमान m की एक गोली V वेग से गति करती हुई वलय से टकराकर इसमें धंस जाती है। वलय की मोटाई R की तुलना में बहुत कम है। गोली के वलय में धंस जाने के ठीक बाद निकाय का कोणीय वेग है।



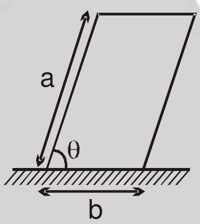
(A) $\frac{V}{4R}$ (B) $\frac{V}{3R}$ (C) $\frac{2V}{3R}$ (D) $\frac{3V}{4R}$

खण्ड (K) : पलटना

K-1. a भुजा व m द्रव्यमान का एक समरूप घन खुरदरी क्षैतिज मेज पर रखा गया है। एक क्षैतिज बल 'F' केन्द्र के ठीक उपर आधार से $\frac{3a}{4}$ ऊँचाई पर लगाया जाता है। घन के भुजा के सापेक्ष लुढ़कने (tilt) के लिए 'F' का न्यूनतम मान क्या होगा? (माना कि घन फिसलता नहीं है) **[JEE - 1984]**

(A) $\frac{2}{3}mg$ (B) $\frac{4}{3}mg$ (C) $\frac{5}{4}mg$ (D) $\frac{1}{2}mg$

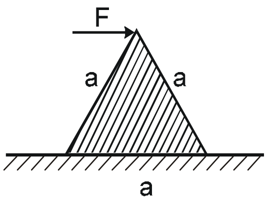
K-2. एक संमागी ब्लॉक जिसकी अनुप्रस्थ काट भुजा 'a' तथा 'b', चित्रानुसार है तथा यह एक समान्तर चतुर्भुज के रूप मे है। यदि यह साम्यवस्था में घर्षणहीन क्षैतिज सतह पर रखा है तो कोण θ (न्यूनकोण) का मान होगा :



(A) $\cos\theta \le \frac{b}{a}$ (B) $\cos\theta \ge \frac{b}{a}$ (C) $\cos\theta < \frac{b}{a}$ (D) $\cos\theta > \frac{b}{a}$

(E) $\cos\theta > \frac{a}{b}$

K-3. m द्रव्यमान का एक समरूप समबाहु प्रिज्म घर्षण गुणांक μ के खुरदुरे समतल पर रखा है। इस पर क्षैतिज बल F चित्रानुसार आरोपित होता है यदि घर्षण गुणांक इतना पर्याप्त है कि वह पलटने (topple करने) से पहले खिसकता नहीं हैं तो प्रिज्म को पलटने (topple करने) के लिए आवश्यक न्यूनतम बल होगा।

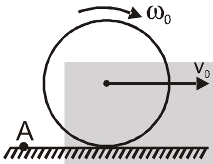


(A) $\frac{mg}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{mg}{4}$ (C) $\frac{\mu mg}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\mu mg}{4}$

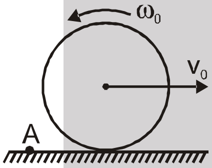
भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. प्रत्येक स्थिति में, एक एकसमान चकती जिसका द्रव्यमान m तथा त्रिज्या R है, घर्षणयुक्त स्थिर (fixed) क्षैतिज सतह पर लोटनी गति (roll) कर रही है। प्रारम्भ में t = 0 पर, चकती की कोणीय चाल ω_0 है तथा चकती के द्रव्यमान केन्द्र का वेग क्षैतिज दिशा में v_0 है। तथा v_0 एवम् ω_0 का सम्बन्ध प्रत्येक स्थिति में दिया गया है तथा घूर्णन की प्रारम्भिक प्रवृत्ति प्रत्येक स्थिति के लिए स्तम्भ-I में दी गई है तब स्तम्भ-I में दिये गये कथनों से सम्बन्धित स्तम्भ-II में दिये गये परिणामों को सुमेलित करिए।

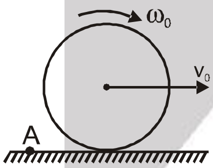
स्तम्भ-I

(A) 

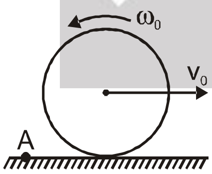
($v_0 > R\omega_0$)

(B) 

($v_0 > R\omega_0$)

(C) 

($v_0 < R\omega_0$)

(D) 

($v_0 < R\omega_0$)

स्तम्भ-II

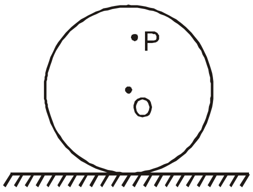
(p) चित्रानुसार बिन्दु A के परितः चकती का कोणीय संवेग संरक्षित होता है।

(q) चकती के बिना फिसले लोटनी गति (rolling) शुरू करने के बाद, चकती की गतिज ऊर्जा का मान इसकी प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा से कम होगा।

(r) चकती जब फिसलने के साथ लोटनी गति करती है तो उस समयान्तराल में चकती पर घर्षण बांयी (left) ओर लगेगा।

(s) जब चकती फिसलती हुई लोटनी गति (roll) करती है तो उस समयान्तराल के दौरान चकती पर कुछ समय के लिए घर्षण बल दांयी (right) ओर कुछ समय के बांयी (left) ओर होगा।

2. एक एकसमान चकती (disc) एक खुरदरी क्षैतिज सतह पर बिना फिसले एकसमान कोणीय वेग से लुढ़कती (roll) हुई गति करती है बिन्दु O चकती (disc) का केन्द्र है तथा P चित्रानुसार चकती पर एक बिन्दु है। स्तम्भ-I की प्रत्येक स्थिति में एक कथन दिया गया है तथा स्तम्भ-II में संगत परिणाम दिये गये हैं। स्तम्भ-I में दिये गये कथनों को स्तम्भ-II में दिये गये कथनों से सुमेलित कीजिए।



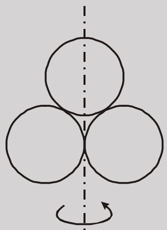
स्तम्भ I	स्तम्भ II
(A) चकती (disc) पर बिन्दु P का वेग	(p) समय के साथ परिमाण में परिवर्तित होता है।
(B) चकती (disc) पर बिन्दु P का त्वरण	(q) हमेशा उस बिन्दु जो स्तम्भ-I में चकती (disc) पर दिया गया है, से चकती के केन्द्र की ओर निर्देशित होता है।
(C) चकती (disc) पर बिन्दु P का स्पर्शरेखीय त्वरण	(r) हमेशा शून्य होता है।
(D) चकती पर स्थित बिन्दु, जो खुरदरी क्षैतिज सतह के साथ सम्पर्क है उस बिन्दु का त्वरण	(s) अशून्य (nonzero) है तथा परिमाण में नियत रहता है।

Exercise-2

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. तीन वलय प्रत्येक का द्रव्यमान m व त्रिज्या r है, इस प्रकार रखी है कि वे एक–दूसरे को स्पर्श कर रही है। चित्र में दर्शाई गई अक्ष के सापेक्ष निकाय की घूर्णन त्रिज्या होगी –

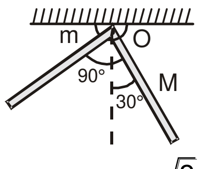


(A) $\sqrt{\frac{6}{5}}\ r$ (B) $\sqrt{\frac{5}{6}}\ r$ (C) $\sqrt{\frac{6}{7}}\ r$ (D) $\sqrt{\frac{7}{6}}\ r$

2. एक खोखले बेलन का द्रव्यमान M, बाहरी एवं आन्तरिक त्रिज्यायें क्रमशः R_2 एवं R_1 हैं। सममिति अक्ष के समान्तर एवं बाहरी सतह के स्पर्श रेखीय अक्ष के परितः इसका जड़त्व आघूर्ण है –

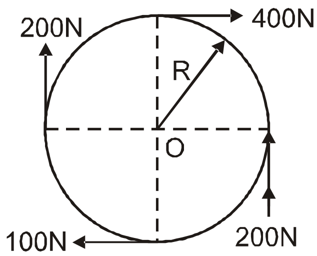
(A) $\frac{M}{2}(R_2^2 + R_1^2)$ (B) $\frac{M}{2}(R_2^2 - R_1^2)$ (C) $\frac{M}{4}(R_2 + R_1)^2$ (D) $\frac{M}{2}(3R_2^2 + R_1^2)$

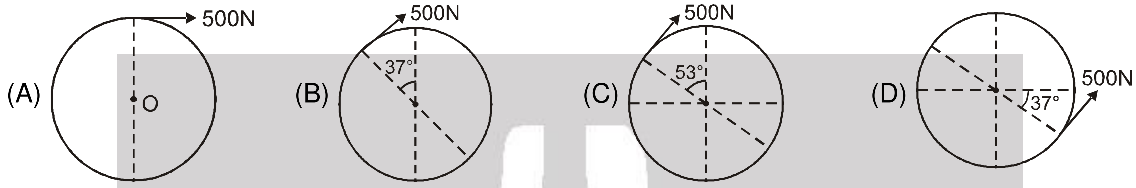
3. समान लम्बाई तथा भिन्न–भिन्न द्रव्यमान की दो समरूप छड़ें L–आकार में दृढ़ जुड़ी हुई है तथा यह चित्रानुसार O पर निलम्बित है। यदि प्रदर्शित व्यवस्था में वस्तु सन्तुलन की साम्यावस्था में हो तो M/m अनुपात होगा :



(A) 2 (B) 3 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

4. 'R' त्रिज्या के वृत्त के स्पर्श रेखीय, पहिये पर लगे चार बल चित्र में दर्शाये गये है। दिये गये बलो के परिणामी तुल्य एक बल निकाय होगा।

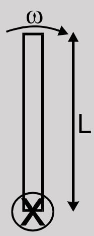




5. एक समरूपी 'm' द्रव्यमान व L लम्बाई की पतली छड़ सिरों पर दो ऊर्ध्व डोरियों से क्षैतिज लटकी हुई है। यदि एक रस्सी को काट दिया जाता है तो काटने के तुरन्त बाद छड़ का कोणीय त्वरण क्या होगा ?

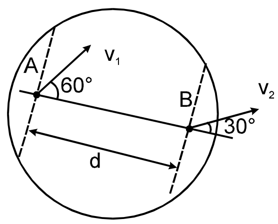
(A) $\frac{g}{2L}$ (B) $\frac{g}{L}$ (C) $\frac{3g}{2L}$ (D) $\frac{2g}{L}$

6. एक समान छड़, एक सिरे पर कीलकित है तथा ऊर्ध्वाधर तल में घूमने के लिए स्वतन्त्र है। छड़ को इसकी ऊर्ध्वाधर स्थिति से चित्रानुसार कोणीय वेग ω देते है। ω का वह मान ज्ञात करों जिसके लिये इस स्थिति में कीलकित बिन्दु द्वारा छड़ पर लगाया बल शून्य होगा–



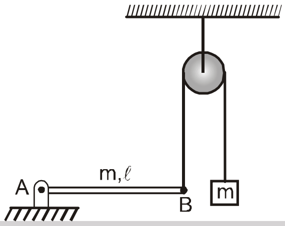
(A) $\sqrt{\frac{g}{L}}$ (B) $\sqrt{\frac{2g}{L}}$ (C) $\sqrt{\frac{g}{2L}}$ (D) $\sqrt{\frac{3g}{L}}$

7. चकती पर स्थित दो बिन्दु A व B का वेग किसी क्षण पर v_1 व v_2 है। चित्रानुसार दोंनो बिन्दुओं को पृथक करने वाली रेखा से उनकी दिशाऐं क्रमशः 60° व 30° कोण बनाते है, तो चकती का कोणीय वेग है।



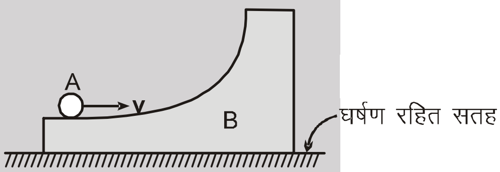
(A) $\frac{\sqrt{3}v_1}{d}$ (B) $\frac{v_2}{\sqrt{3}d}$ (C) $\frac{v_2 - v_1}{d}$ (D) $\frac{v_2}{d}$

8. चित्र में दिखाये अनुसार एक एकसमान छड़ AB, क्षैतिज स्थिति में A सिरे पर कीलकित (hinged) है। यहाँ कीलकीत खूंटी (hinge) घर्षणरहित है तथा यह छड़ पर कोई घर्षण बल नहीं लगाती है। छड़ का दूसरा सिरा एक द्रव्यमान रहित रस्सी द्वारा चित्रानुसार एक ब्लॉक से जुड़ा है। घिरनी द्रव्यमान रहित तथा चिकनी है। ब्लॉक तथा छड़ का द्रव्यमान समान तथा प्रत्येक का द्रव्यमान m हैं। गुरूत्वीय त्वरण g है। ब्लॉक को इस स्थिति से छोड़ने के तुरन्त बाद, रस्सी में तनाव तथा छड़ का कोणीय त्वरण होगा–



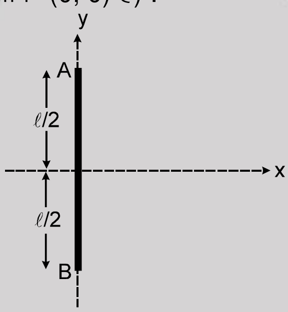
(A) $\frac{3mg}{8}, \frac{g}{8\ell}$ (B) $\frac{5mg}{8}, \frac{3g}{8\ell}$ (C) $\frac{mg}{8}, \frac{5g}{8\ell}$ (D) $\frac{7mg}{8}, \frac{7g}{8\ell}$

9. चित्रानुसार वलय A पिण्ड B की क्षैतिज सतह पर v वेग से बिना फिसले लुढ़क रही है। यदि A तथा B का द्रव्यमान समान है तथा सभी सतह चिकनी हो तथा B का प्रारम्भिक वेग शून्य है। A द्वारा B की सतह पर प्राप्त अधिकतम ऊचाँई (प्रारम्भिक स्थिति से) ज्ञात करो ?



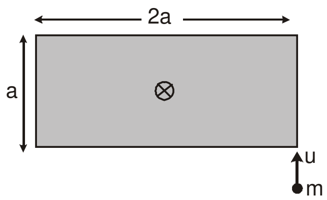
(A) $\frac{3v^2}{4g}$ (B) $\frac{v^2}{4g}$ (C) $\frac{v^2}{2g}$ (D) $\frac{v^2}{3g}$

10. m द्रव्यमान एवं ℓ लम्बाई की एक समरूप छड़ y-अक्ष के अनुदिश चित्रानुसार चिकनी क्षैतिज सतह पर स्थिर अवस्था में रखी है। एक आवेगीय बल F को बिन्दु A पर x दिशा में अल्प समय Δt के लिए लगाते है जिसके पश्चात् यह छड़ स्वतन्त्रता पूर्वक गति करती है तो छड़ के सिरे A के x–निर्देशांक है जब छड़ प्रथम बार x–अक्ष के समान्तर होती है (प्रारम्भ में छड़ के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक (0, 0) हैं) :



(A) $\frac{\pi\ell}{12}$ (B) $\frac{\ell}{2}\left(1+\frac{\pi}{12}\right)$ (C) $\frac{\ell}{2}\left(1-\frac{\pi}{6}\right)$ (D) $\frac{\ell}{2}\left(1+\frac{\pi}{6}\right)$

11. एक समरूप आयताकार m द्रव्यमान की प्लेट इसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली व प्लेट के लम्बवत् चिकने ऊर्ध्वाधर कीलक के सापेक्ष घूमने के लिए स्वतंत्र है। यह प्लेट चिकने क्षैतिज तल पर रखी गई है। m द्रव्यमान का एक कण चित्रानुसार 'u' चाल से गति करता हुआ प्लेट से टकराता है व इससे चिपक जाता है। टक्कर के बाद प्लेट का कोणीय वेग होगा :

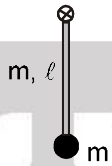


(A) $\frac{12}{5}\frac{u}{a}$ (B) $\frac{12}{19}\frac{u}{a}$ (C) $\frac{3}{2}\frac{u}{a}$ (D) $\frac{3}{5}\frac{u}{a}$

12. एक छड़ एक स्थिर लम्बवत अक्ष के सापेक्ष घूर्णन कर सकती है। छड़ की लम्बाई के अनुदिश द्रव्यमान असमरूप तरीके से वितरित है। छड़ के एक सिरे पर नियत परिमाण का क्षैतिज बल हमेशा छड़ के लम्बवत कार्यरत है। एक चक्कर के बाद निम्न में से कौनसी राशि इस बात पर निर्भर नहीं करेगी कि अक्ष किस सिरे से गुजरता है (प्रारम्भिक कोणीय वेग शून्य मानिये)

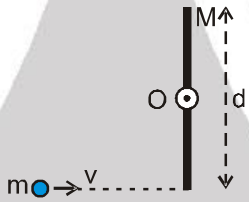
(A) कोणीय संवेग (B) गतिज उर्जा (C) कोणीय वेग (D) निम्न में से कोई नहीं

13. चित्र में दिखाये अनुसार एक छड़ एक सिरे पर कीलकित है तथा दूसरे निचले सिरे पर एक कण जुड़ा है। कण को दिया गया न्यूनतम वेग क्या होगा ताकि छड़ ऊर्ध्वाधर तल में वृत्तीय गति कर सके – [छड़ की लम्बाई ℓ है, छड़ व कण का द्रव्यमान दोनों m माने]



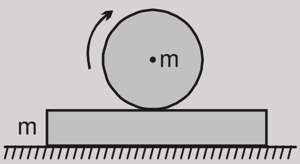
(A) $\sqrt{5g\ell}$ (B) $\sqrt{4g\ell}$ (C) $\sqrt{4.5g\ell}$ (D) इनमें से कोई नहीं

14. एक द्रव्यमान m, एक छड़ के लम्बवत् v चाल से क्षैतिजतः गति कर रहा है। दी गई एकसमान छड़ की लम्बाई d तथा द्रव्यमान M = 6m है। छड़ को केन्द्र O पर किलकीत किया हुआ है तथा यह केन्द्र O से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर स्थिर अक्ष के परितः क्षैतिज तल में मुक्त रूप से घूर्णन कर सकती है। किलकीत बिन्दु घर्षण रहित है। कण टकराता है व छड़ के सिरे से चिपक जाता है। टक्कर के ठीक बाद निकाय की कोणीय चाल होगी–



(A) 2v/3d (B) 3v/2d (C) v/3d (D) 2v/d

15. 'm' द्रव्यमान के एक समरूप गोले को एक केन्द्र से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष कुछ कोणीय वेग दिया जाता है तथा धीरे से m द्रव्यमान के तख्ते पर रख दिया जाता हैं। दोनों के बीच घर्षण गुणांक μ है। तख्ता चिकने क्षैतिज तल पर रखा गया है। तख्ते के सापेक्ष गोले के केन्द्र का प्रारम्भिक त्वरण होगा :



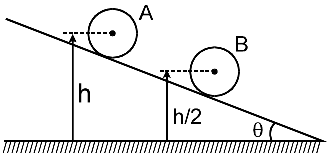
(A) शून्य (B) μg (C) $(7/5)\ \mu g$ (D) $2\ \mu g$

16. ℓ लम्बाई तथा नगण्य द्रव्यमान की एक छड़ को बांये छोर से $\frac{\ell}{4}$ दूरी पर चित्रानुसार कीलकित कर दिया जाता है। एक m द्रव्यमान का कण इसके बांये सिरे पर तथा दूसरा 2 m द्रव्यमान का कण दांये सिरे पर बांध दिया जाता है। अगर निकाय को चित्रानुसार स्थिर अवस्था से छोड़ा जाता है तो दोंनो द्रव्यमान की चाल तथा कोणीय वेग क्या होगा जब निकाय ऊर्ध्वाधर स्थिति से गुजरता है।

(A) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}$, $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}$, $\sqrt{\frac{40g}{19\ell}}$ (B) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}$, $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}$, $\sqrt{\frac{20g}{19\ell}}$

(C) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}$, $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{20g\ell}{19}}$, $\sqrt{\frac{20g}{19\ell}}$ (D) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{40g\ell}{19}}$, $\sqrt{\frac{40g}{19\ell}}$

17. दो एक समान ठोस गेंदे A व B प्रत्येक द्रव्यमान m, चित्र में दर्शाये अनुसार एक स्थिर वेज पर रखी जाती है। गेंद B विराम पर रखी है एवं गेंद B दोनों गेंदों के टकराने से ठीक पहले छोड़ी जाती है। गेंद A नत तल पर बिना फिसले लुढ़कती है और गेंद B से प्रत्यास्थ टक्कर करती है। गेंद B से टक्कर के तुरंत बाद गेंद A की गतिज ऊर्जा होगी : (A तथा B के मध्य घर्षण नगण्य माने तथा गेंदों की त्रिज्या को नगन्य माने)

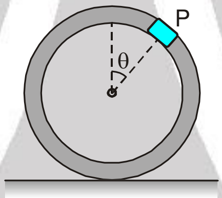


(A) $\frac{mgh}{7}$ (B) $\frac{mgh}{2}$ (C) $\frac{2mgh}{5}$ (D) $\frac{7mgh}{5}$

18. एक ठोस समरूप चकती जिसका द्रव्यमान m है, एक नततल पर a त्वरण से बिना फिसले लुढ़कती है। तल की सतह के कारण चकती पर घर्षण बल होगा।

(A) 2 ma (B) $\frac{3}{2}$ ma (C) ma (D) $\frac{1}{2}$ ma

19. एक 'm' द्रव्यमान का छोटा ब्लॉक एक वलय जिसका द्रव्यमान '3m' तथा त्रिज्या 'r' है पर दृढ़ रूप से लगा है। निकाय विराम से $\theta = 90^{\circ}$ पर मुक्त किया जाता है तथा बिना फिसले लुढ़कता है। विराम से मुक्त करने के तुरन्त बाद वलय का कोणीय त्वरण कितना होगा –

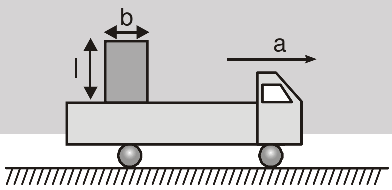


(A) $\frac{g}{4r}$ (B) $\frac{g}{8r}$ (C) $\frac{g}{3r}$ (D) $\frac{g}{2r}$

20. R त्रिज्या की एक एकसमान वलय को $V_0/2R$ कोणीय वेग का पश्च चक्रण (back spin) कराके एक खुरदरे क्षेतिज तल पर फेंका जाता है। फेंकते समय केन्द्र का वेग V_0 है। शुद्ध लोटनी गति प्रारम्भ होने के बाद वलय के केन्द्र का वेग होगा।

(A) $V_0/2$ (B) $V_0/4$ (C) $3V_0/4$ (D) 0

21. एक ℓ तथा b विमाओं का एक ब्लॉक a त्वरण से चल रहे ट्रक पर रखा है। यदि बॉक्स नहीं सरकता है और यह साम्यावस्था में रहे (ट्रक के सापेक्ष) तो ब्लॉक को अधिकतम कितना त्वरित कर सकते है।



(A) $\frac{g\ell}{b}$ (B) $\frac{gb}{\ell}$ (C) g (D) इनमें से कोई नहीं

22. यदि किसी हल्की छड़ पर, दो समान्तर (एक ही दिशा के) बलों की स्थिति परस्पर बदल दे, तो उनका परिणामी बल उनके बीच की दूरी के एक चौथाई से विस्थापित हो जाता है तो उनके परिमाणों का अनुपात होगा–

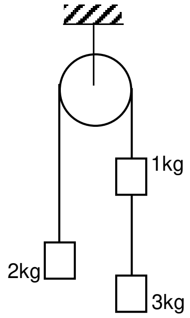
(A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 3 : 4 (D) 3 : 5

23. दो बिन्दु द्रव्यमानों m_1 तथा m_2 को एक हल्की दृढ़ r_0 लम्बाई की छड़ द्वारा जुड़े हुए मानिये। दृढ़ छड़ के लम्बवत् तथा उनके द्रव्यमान केन्द्रों से गुजरने वाली एक अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण दिया जाता है

[Olympiad (Stage-1) 2017]

(A) $\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}r_0^2$ (B) $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r_0^2$ (C) $\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}r_0^2$ (D) $\frac{m_1^2+m_2^2}{m_1+m_2}r_0^2$

24._ निम्न व्यवस्था में घिरनी को हल्की तथा रस्सी अवितान्य मानिये। निकाय का त्वरण किसी एक भौतिक राशि को संरक्षित मानकर निर्धारित किया जा सकता है। संरक्षित भौतिक राशि तथा त्वरण क्रमशः है – **[Olympiad (Stage-1) 2017]**



(A) ऊर्जा तथा g/3 (B) रेखीय संवेग तथा g/2 (C) कोणीय संवेग तथा g/3 (D) द्रव्यमान तथा g/2

भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

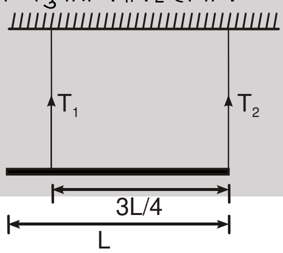
1. एक पहिया विरामावस्था से प्रारम्भ होकर 2 rad/s^2 के त्वरण से 20 सैकण्ड के लिए एक समान त्वरित होता है। इसको अगले 20 सैकण्ड के लिए एक समान रूप से घूमने दिया जाता है और अन्त में अगले 20 सैकण्ड बाद विरामावस्था में लाया जाता है। पहिये का कुल कोणीय विस्थापन $n \times 10^2$ radian है जहाँ n होगा

2. एक समान व्यास की दो स्टील की गेंदें नगण्य द्रव्यमान की दृढ़ छड़ से चित्रानुसार जुड़ी है। इसे h ऊँचाई से स्टील तथा ब्रांस की प्लेट पर क्षैतिज स्थिति से छोड़ा जाता है। यदि स्टील तथा गेंद के बीच व ब्रांस तथा गेदे के बीच प्रत्यास्थ गुणांक क्रमशः 0.6 तथा 0.4 है तो टक्कर के तुरन्त बाद वापस लौटते समय गेंद का कोणीय वेग $n \times 10^{-2}$ rad/s है जहाँ n होगा। (माना दोंनो टक्कर एक साथ होती है।) ($g = 9.8 m/s^2$)

3. तीन समरूप छड़े, प्रत्येक की लम्बाई ℓ है, इन्हें जोड़कर एक दृढ़ समबाहु त्रिभुज बनाते है। एक शीर्ष से गुजरने वाली तथा त्रिभुज के तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष इसकी घूर्णन त्रिज्या $\frac{\ell}{\sqrt{n}}$ है जहाँ n होगा

4. m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की एक पतली एकसमान छड़ का इसके एक सिरे से गुजरने वाली तथा इसकी लम्बाई के साथ $\theta = 45^\circ$ का कोण बनाने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $\frac{m\ell^2}{n}$ है जहाँ n होगा

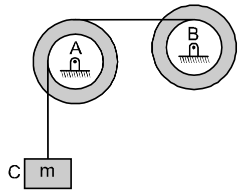
5. m द्रव्यमान व L लम्बाई की समरूप छड़ दो द्रव्यमानहीन रस्सियों से चित्रानुसार लटकी हुई है। यदि छड़ क्षैतिज अवस्था में स्थिर हो तो दोंनो रस्सियों में तनावों का अनुपात T_1/T_2 होगा :



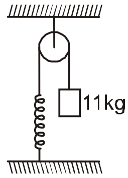
6. दो व्यक्ति जिनकी ऊँचाई समान है, एक लम्बे एक समान लकड़ी के गट्ठे (लम्बाई ℓ) को ले जो रहे हैं। वे गट्ठे के निकटतम सिरों से $\ell/4$ तथा $\ell/6$ की दूरी पर हैं। उनके सिरों (heads) पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बलो का अनुपात n : 3 है जहाँ n होगा –

7. एक (i) वलय, तथा (ii) एक समान चकती प्रत्येक की त्रिज्या R है, को कोणीय वेग से चक्रण गति प्रदान करते है, और तब इसे सावधानीपूर्वक क्षैतिज सतह पर रख देते हैं। इनकी अक्ष ऊर्ध्वाधर है। यदि दोनों स्थितियों में घर्षण गुणांक का मान μ है। तब वलय तथा चकती द्वारा विरामावस्था तक आने में लगे समय का अनुपात n : 3 है जहाँ n होगा (चकती तथा वलय द्वारा सतह पर लगाये गये दाब को एक समान मान सकते है)

8. दर्शाई गई द्वि घिरनीयाँ प्रत्येक का केन्द्रीय द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण 'mr^2', आन्तरिक त्रिज्या r व बाह्य त्रिज्या 2r है। माना A व B के अक्ष पर बियरीगं घर्षण (bearing friction) का बल आघूर्ण $\frac{mgr}{4}$ परिमाण के बराबर है तो घिरनीयों को जोडने वाली डोरी में तनाव न्यूटन में होगा (m = 3kg, g = 10m/s^2, तथा r =0.1m)

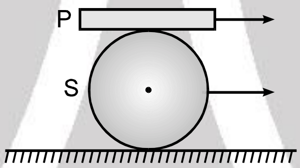


9. चित्र में दर्शाई गई एक घिरनी की त्रिज्या 10 cm तथा जड़त्व आघूर्ण 0.1 kg-m^2 है। इससे जाती एक डोरी का एक सिरा 100 N/m स्प्रिंग नियतांक की एक ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग से जुड़ा हुआ है जो नीचे बंधी है तथा दूसरे सिरे पर 11 kg द्रव्यमान बंधा है। स्प्रिंग उसकी प्राकृतिक लम्बाई की स्थिति में है जब निकाय को विरामावस्था से मुक्त करते हैं। जब यह 10 cm से नीचे आ जाता है तब ब्लॉक की चाल मी/सै. में ज्ञात कीजिए। (g = 10 m/s^2 लेवे, तथा पुलि एवं डोरी के मध्य कोई फिसलन नही है।)



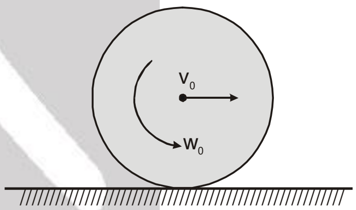
10. एक कण जब सरल रेखा y = x – 4 के अनुदिश गति करता है तो मूल बिन्दु के सापेक्ष इसका कोणीय संवेग $L = 4\sqrt{2}\,t + 8$ (SI मात्रक में है तथा x,y मीटर में है) के साथ परिवर्तित होता है। कण पर लग रहे बल का परिमाण न्यूटन में होगा।

11. ब्लॉक P को क्षैतिज सतह पर घूर्णन गति कर रहे ठोस बेलन S पर रखा जाता है। दोनों के द्रव्यमान समान है। सम्पर्क बिन्दु के बीच कही पर भी फिसलन गति नहीं है तो P की गतिज ऊर्जा व S की गतिज ऊर्जा का अनुपात n : 3 है, जहाँ n होगा

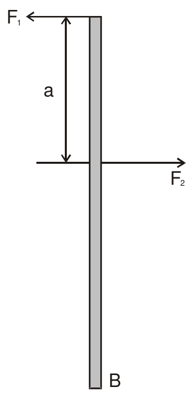


12. m = 5.0 kg द्रव्यमान व ℓ = 90 cm लम्बाई की एक समान छड़ क्षैतिज चिकनी सतह पर विरामावस्था में रखी हुई है। छड़ के एक सिरे को छड़ के लम्बवत् क्षैतिज दिशा में J = 3.0 N-s आवेग देते हैं तथा फिर हटा लेते है। इसके परिणाम स्वरूप उसी क्षण, छड़ कोणीय तथा रेखीय वेग प्राप्त कर लेती है, तो ज्ञात करे कि गति की प्रक्रिया में छड़ का आधा भाग बचे हुए आधे भाग पर कितना बल न्यूटन में लगाएगा

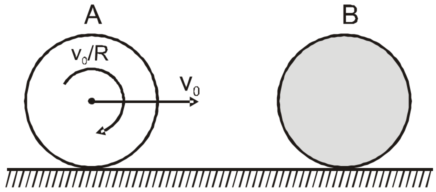
13. m द्रव्यमान व r त्रिज्या का एक एकसमान ठोस गोला खुरदरे समतल सतह पर दिखाए अनुसार प्रारम्भिक वेग v_0 तथा कोणीय वेग ω_0 से प्रक्षेपित किया जाता है। यदि गोले का अन्तिम वेग शून्य हो तो $\frac{2\omega_0 r}{v_0}$ किसके बराबर होगा



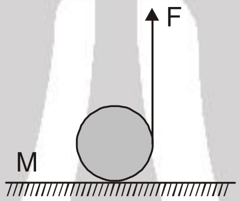
14. चित्रानुसार एक पतली एक समान छड़ AB जिसका द्रव्यमान m = 1.0 kg है, दो प्रतिसमान्तर (antiparallel) बलों F_1 व F_2 के कारण w = 2.0 m/s^2 के त्वरण से स्थानान्तरीय गति करती है। जिन बिन्दुओं पर यह बल लगते हैं, उनके मध्य की दूरी a = 20 cm है। यद्यपि यह ज्ञात है कि बल F_2 = 5.0.N. है तो छड़ की लम्बाई मीटर में ज्ञात करो।



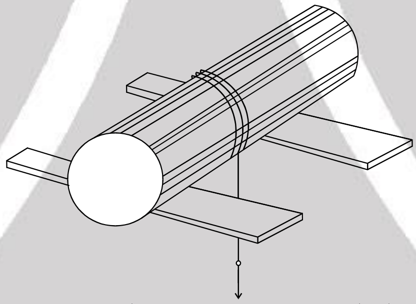
15. एक 'm' द्रव्यमान का चिकना खोखला समरूप गोला A एक समतल चिकने धरातल पर बिना फिसले लुढ़कता है। यह एक अन्य समान त्रिज्या व समान द्रव्यमान वाले चिकने ठोस स्थिर गोले 'B' से सम्मुख प्रत्यास्थ रूप से टक्कर करता है। टक्कर के ठीक बाद B तथा A की गतिज ऊजाओं का अनुपात 3 : n है जहाँ n होगा–



16. एक रस्सी का मुक्त सिरा M = 1kg द्रव्यमान व $R = \frac{2}{3}$ m त्रिज्या के ठोस बेलन की सतह पर बांधकर F बल से चित्रानुसार खींचा जाता है। यदि बेलन व फर्श के मध्य इतना पर्याप्त घर्षण है, तब बेलन के कोणीय त्वरण की अधिकतम सीमा रेडियन/सै^{2} में क्या होगी जिससे यह बिना फिसले लोटनी गति कर सके। ($g = 10m/s^2$)



17. m = 1kg द्रव्यमान का एक समान ठोस बेलन दो क्षैतिज तख्तों पर विराम में है। बेलन के चारों ओर एक धागा लपेटा गया है। धागे के स्वतंत्रतापूर्णक नीचे लटके हुए सिरे को एक नियत बल F से खींचा जाता है

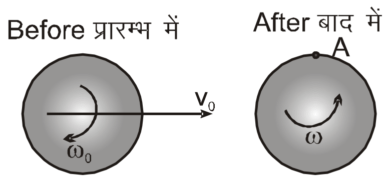


(a) बल F का वह अधिकतम परिमाण (न्यूटन में) ज्ञात कीजिए जिससे बेलन में किसी भी प्रकार की फिसलन नहीं हो, यदि बेलन और तख्ते के मध्य घर्षण गुणांक $\mu = \frac{1}{3}$ के बराबर है

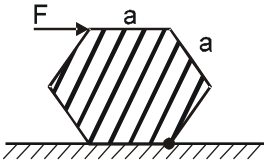
(b) तख्तो पर लुढ़कने में बेलन की अक्ष का अधिकतम त्वरण a_{max}, $\frac{n}{3}$ m/s^2 है जहाँ n होगा।

18. 50 चक्कर/सैकण्ड कोणीय चाल से घूम रहा एक बेलन स्थिर अवस्था में स्थित एक अन्य एक समान बेलन के सम्पर्क में लाया जाता है। गतिज घर्षण के कारण, दोंनो बेलनों पर बल आघूर्ण लगते है, स्थिर वाला त्वरित होता है तथा गतिशील अवमंदित होता है। यदि कोणीय त्वरण तथा कोणीय अवमंदन का उभयनिष्ठ परिमाण 1 rev/s^2 है, तो दोनों बेलनों की कोणीय चाल एक समान होने में कितना समय सैकण्ड में लगेगा ?

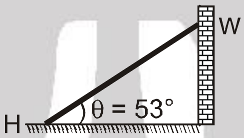
19. द्रव्यमान M = 1kg, त्रिज्या R = 1m की एक समरुप चकती दांयी ओर v_0 = 20m/s वेग से चिकनी क्षैतिज सतह पर गतिशील है एवं चकती के केन्द्र से पारित इसके तल के लम्बवत् अक्ष के परितः इसका कोणीय वेग ω_0 = 4 rad/s है। अचानक चकती का शीर्ष बिन्दु स्थिर चिकनी अक्ष के परितः किलकीत कर दिया जाता है। नयी घूर्णन अक्ष के परितःचकति का कोणीय वेग रेडियन/सैकण्ड में क्या होगा :



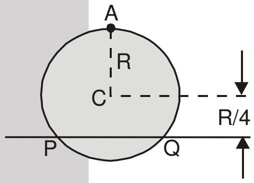
20. चित्रानुसार समषटभुज के रूप में $m = 4\sqrt{3}$ kg द्रव्यमान का बना एक समरूप ब्लॉक μ घर्षण गुणांक वाली क्षैतिज खुरदरी सतह पर रखा गया है तथा इस पर चित्रानुसार एक अचर क्षैतिज बल लगाते है। यदि,पलटने से पूर्व फिसलन रोकने के लिए आवश्यक घर्षण गुणांक का मान पर्याप्त है तो सिरे A के परितः इसे पलटने के लिए कितना न्यूनतम बल न्यूटन में आवश्यक होगा। ($g = 10m/s^2$)



21. 'ℓ'= 1m लम्बाई की एक समरूप छड़ को चित्रानुसार रखा गया है। H क्षैतिज चिकनी सतह है तथा W चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार है। छड़ को दर्शाई गई स्थिति में छोड़ा जाता है। छोड़ने के ठीक बाद छड़ का कोणीय त्वरण रेडियन/सै^{2} में ज्ञात करो।



22. एक समरूप वृत्ताकार चकती की त्रिज्या R तथा द्रव्यमान m है। एक कण, जिसका द्रव्यमान भी m है, चित्रानुसार चकती के किनारे पर बिन्दु A पर जुड़ा हुआ है। चकती एक स्थिर क्षैतिज जीवा PQ के परितः घूमने के लिए स्वतंत्र है, जिसकी चकती के केन्द्र C से दूरी R/4 है। रेखा AC, PQ के लम्बवत् है। आरंभ में चकती को इस प्रकार ऊर्ध्वाधर रखते हैं ताकि बिन्दु A उसकी उच्चतम स्थिति में होता है।



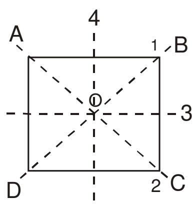
अब इसको गिरने देते हैं, जिससे यह PQ के परितः घूमना आरंभ कर देती है। जिस क्षण कण निम्नतम् स्थिति में पहुंचता है, उस क्षण कण की रेखीय चाल $\sqrt{ngR}$ है। जहां n एक पूर्णकं है। n का मान ज्ञात कीजिए। **[JEE - 1998' 8/200]**

भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1. एक दृढ़ पिण्ड शुद्ध घूर्णन गति कर रहा है।
(A) घूर्णन अक्ष के लम्बवत् तल में पिण्ड में दो ऐसे बिन्दु हो सकते है जिनका वेग समान है।
(B) घूर्णन अक्ष के लम्बवत् तल में पिण्ड में दो ऐसे बिन्दु हो सकते है जिनका त्वरण समान है।
(C) एक बेलन जिसकी अक्ष, घूर्णन अक्ष के सम्पाती है, के वक्रीय पृष्ठ पर स्थित सभी बिन्दुओं की चाल समान है।
(D) पिण्ड पर स्थित किसी भी बिन्दु के सापेक्ष पिण्ड की कोणीय चाल समान है।

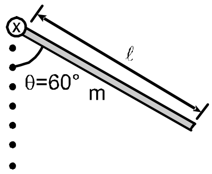
2 एक गोला इसके केन्द्र से गुजरने वाली स्थिर अक्ष के सापेक्ष एक समान घूर्णन करता है
(A) गोले की सतह पर स्थित कण का कोई कोणीय त्वरण नहीं होगा।
(B) ऊपर वर्णित अक्ष पर स्थित कणों का रेखीय त्वरण नहीं होगा।
(C) सतह पर स्थित अलग–अलग कणों का कोणीय वेग समान होगा।
(D) सतह पर स्थित सभी कणों की रेखीय चाल समान होगी।

3. एक पतली एकसमान मोटाई की समरूप वर्गाकार प्लेट ABCD का प्लेट के तल के लम्बवत् व इसके केन्द्र O से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण होगा - **[REE - 1992]**



(A) $I_1 + I_2$ (B) $I_3 + I_4$ (C) $I_1 + I_3$ (D) $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$
जहाँ I_1, I_2, I_3, तथा I_4 क्रमशः अक्ष 1, 2, 3, व 4 के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है, जो तल में स्थित है।

4. दर्शाये गये चित्र में m द्रव्यमान तथा ℓ लम्बाई की एक समरूप छड़ को कीलकित किया जाता है। जब छड़ ऊर्ध्वाधर से $\theta = 60°$ कोण बनाती है, तब छड़ को विराम से छोड़ा जाता है।



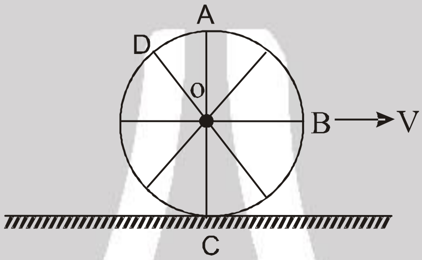
(A) छोडने के ठीक पश्चात् छड का कोणीय त्वरण $\frac{3\sqrt{3}g}{4\ell}$ है।

(B) छोडने के ठीक पश्चात् कीलक के कारण अभिलम्ब प्रतिक्रिया $\frac{\sqrt{19}mg}{8}$ है।

(C) छड का कोणीय वेग जब यह ऊर्ध्वाधर हो जाती है, $\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$ है।

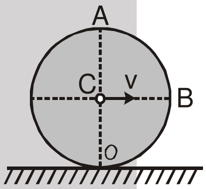
(D) उस क्षण पर कीलक के कारण अभिलम्ब प्रतिक्रिया जब यह ऊर्ध्वाधर हो जाती है, $\frac{7}{4}$mg है।

5. एक समान चकती क्षैतिज सड़क पर रेखीय वेग V से चित्रानुसार शुद्ध लोटनी गति करती है



(A) कण A की चाल 2V होगी
(B) B, C तथा D की चाल V समान होगी
(C) C की चाल शून्य है, तथा B की चाल $\sqrt{2}$V है
(D) O की चाल B की चाल से कम है

6. एक बेलन क्षैतिज तल पर बिना फिसले अचर वेग से लुढ़कता है। बेलन की त्रिज्या r है। इस क्षण पर



(A) B की चाल A की चाल की $\sqrt{2}$ गुना है।
(B) A द्वारा बनाये गये पथ की वक्रता त्रिज्या 4r है
(C) B द्वारा बनाये गये पथ की वक्रता त्रिज्या $2\sqrt{2}$ r. है
(D) C द्वारा बनाये गये पथ की वक्रता त्रिज्या r है

7. θ कोण के नत तल के शीर्ष से एक समरूप ठोस गोला छोड़ा जाता है। तब सही विकल्पों का चयन कीजिए।

(A) गोले तथा नततल के मध्य न्यूनतम घर्षण गुणांक फिसलन रोकने के लिए $\frac{2}{7}$ tan θ है .

(B) जब ठोस गोला नत तल पर नीचे की ओर S दूरी तक गति करता है तब उसकी गतिज ऊर्जा mgS sinθ है यदि $\mu \geq \frac{2}{7}$ tanθ

(C) जब ठोस गोला नततल पर नीचे की ओर S दूरी तक गति करता है तब ठोस गोले पर घर्षण बल द्वारा किये गये कार्य का परिमाण μmgScosθ से कम है यदि $\mu \geq \frac{2}{7}$ tan θ.

(D) जब ठोस गोला नततल नीचे की ओर S दूरी तक गति करता है तब ठोस गोले पर घर्षण बल द्वारा किये गये कार्य का परिमाण μmgScosθ के बराबर है यदि $\mu \geq \frac{2}{7}$ tan θ.

8. एक बेलन खुरदरे क्षैतिज फर्श पर बिना फिसले लुढ़कता है। इसका द्रव्यमान केन्द्र v चाल से चल रहा है। यह चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार से प्रत्यास्थ टक्कर करता है। टक्कर के बाद :

(A) प्रारंभ में इसका द्रव्यमान केन्द्र v चाल से गति करेगा।
(B) उसी क्षण से, इसकी गति बिना फिसले लोटनी गति होगी।
(C) प्रारंभ में इसकी गति फिसलने के साथ लोटनी गति होगी और किसी क्षण इसकी घूर्णन गति एक क्षण के लिए रुक जायेगी।
(D) केवल कुछ समय बाद इसकी गति बिना फिसले लोटनी गति होगी।

9. यदि किसी दृढ़ पिण्ड के लिए $\vec{\tau} \times \vec{L} = 0$ है, जहाँ किसी बिन्दु के सापेक्ष $\vec{\tau}$ = परिणामी बलाघूर्ण तथा $\vec{L}$ = कोणीय संवेग है तथा दोनों का मान अशून्य हैं तो :

(A) $\vec{L}$ = नियतांक (B) $|\vec{L}|$ = नियतांक (C) $|\vec{L}|$ घट सकता हैं (D) $|\vec{L}|$ बढ़ सकता है

10. यदि एक दृढ़ निकाय पर बाह्य बल नहीं है, तो कौनसी राशियाँ स्थिर रहनी चाहिए -

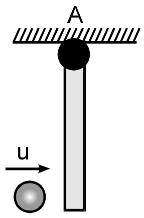
(A) कोणीय संवेग

(B) रेखीय संवेग

(C) वस्तु की किसी बिन्दु से गुजरने वाली जड़वत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

(D) गतिज उर्जा

11. दिये गये चित्र में एक गेंद एक छड़ पर प्रत्यास्थ रूप से टकराती है और छड़ बिन्दु A पर घर्षण रहित कीलकित है तो टक्कर के लिए कौनसा/से कथन सत्य है/हैं ?



(A) निकाय (गेंद + छड़) का रेखीय संवेग संरक्षित है।

(B) कीलकित बिन्दु A के परितः निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित है।

(C) निकाय की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा तथा अन्तिम गतिज ऊर्जा समान है।

(D) गेंद का रेखीय संवेग संरक्षित है।

12. एक क्षैतिज चकती इसके केन्द्र से पारित एक ऊर्ध्वाधर स्थिर अक्ष के परितः मुक्त रुप से घूम रही है। समान द्रव्यमान व त्रिज्या की एक वलय, चकती पर धीरे से समाक्षीय रूप से रख दी जाती है। कुछ समय बाद, दोंनों एक समान कोंणीय वेग से घूमने लगती है।

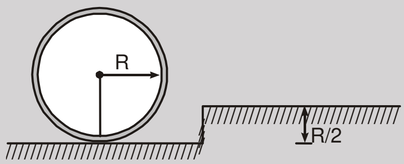
(A) उभयनिष्ट कोणीय वेग प्राप्त करने के पहले, चकती व वलय के मध्य कुछ घर्षण है।

(B) चकती तथा वलय का घुर्णन अक्ष के परीतः कोणीय संवेग संरक्षित है।

(C) अंतिम उभयनिष्ठ कोणीय वेग, चकती के प्रारंभिक कोणीय वेग का $2/3^{rd}$ है।

(D) अंतिम उभयनिष्ठ कोणीय वेग, चकती के प्रारंभिक कोणीय वेग का $1/3^{rd}$ है।

13. m द्रव्यमान व R त्रिज्या (वलय की तरह माना जा सकता है) का पहियाँ बिना फिसले क्षैतिज तल में v नियत वेग से लुढ़क रहा है। जिस क्षण ये बिना फिसले R/2 ऊचाँई की सिढी पर चढता है उस क्षण



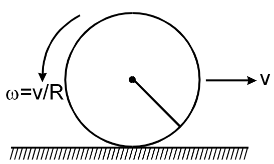
(A) सीढ़ी के सम्पर्क में आने के ठीक बाद वलय का कोणीय वेग 3v/4R है।

(B) पहिये द्वारा सीढ़ी पर आवेग के ठीक बाद अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल $\frac{mg}{2} - \frac{9mv^2}{16R}$ है।

(C) जब पहिया चढ़ता है तो पहिये द्वारा सीढ़ी पर लगाया गया अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल बढ़ता है।

(D) चढ़ाई के दौरान घर्षण बल अनुपस्थित होगा।

14. एक खुरदरी क्षैतिज सतह पर एक खोखला गोला आगे की ओर रेखिक चाल v से तथा वामावर्ती दिशा में v/R कोणीय चाल से चित्रानुसार गतिशील किया जाता है। गोले की रेखिक चाल ज्ञात कीजिये। (a) जब यह घूर्णन बंद कर दे तथा (b) जब अंतिम रूप से फिसलना बंद हो जाये तथा शुद्ध लोटनी गति प्रारम्भ हो जाये।



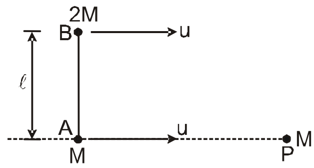
(A) गोले के द्रव्यमान केन्द्र के परितः गोले का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

(B) जब यह घूर्णन करना बन्द कर देता है तब उस क्षण पर गोले की चाल v/3 है

(C) शुद्ध लोटनी गति प्रारम्भ करने के पश्चात् गोले की चाल v/5 है।

(D) शुद्ध लोटनी गति प्रारम्भ होने तक घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य शून्य है।

15. दो कण A तथा B, जिनके द्रव्यमान क्रमशः M तथा 2M है, एक ℓ लम्बाई की हल्की छड़ से दृढ़तापूर्वक चित्रानुसार जुड़ी है। यह निकाय एक घर्षणरहित क्षैतिज तल पर u वेग से छड़ के लम्बवत् दिशा में गति करता है। सतह पर रखा M द्रव्यमान का एक कण P विरामावस्था में इस प्रकार रखा है कि वह कण A से चिपक जाता है, जब कण P इससे टकराता है, तो सही विकल्पों का चयन कीजिए।



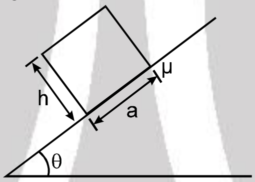
(A) टक्कर के ठीक पश्चात् कण A की चाल $\frac{u}{2}$ है।

(B) टक्कर के ठीक पश्चात् कण B की चाल $\frac{u}{2}$ है।

(C) निकाय A + B + P के द्रव्यमान केन्द्र का वेग $\frac{3u}{4}$ है।

(D) टक्कर के पश्चात् निकाय A + B + P की कोणीय चाल $\frac{u}{2\ell}$ है।

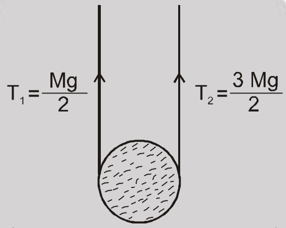
16. $a \times a$ माप का वर्गाकार आधार व h ऊँचाई वाला एक गुटका एक नत तल पर रखा है। घर्षण गुणांक μ है। नततल का झुकाव कोण (θ) धीरे से बढ़ाया जाता है तो गुटका :



(A) यदि $\mu > \frac{a}{h}$ है तो फिसलने से पहले पलट जायेगा
(B) यदि $\mu < \frac{a}{h}$ है तो फिसलने से पहले पलट जायेगा
(C) यदि $\mu > \frac{a}{h}$ है तो पलटने से पहले फिसल जायेगा
(D) यदि $\mu < \frac{a}{h}$ है तो पलटने से पहले फिसल जायेगा

17. M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की एक एकसमान चकती को डोरी के द्वारा चित्रानुसार उठाया जाता है, तब

[Olympiad 2014 (stage-1)]

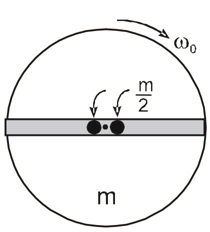


(A) इसका रेखीय त्वरण g ऊपर की ओर है।
(B) इसका रेखीय त्वरण g नीचे की ओर है।
(C) इसका कोणीय त्वरण $\frac{2g}{R}$ है।
(D) इसके कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर MgR है।

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

अनुच्छेद # 1

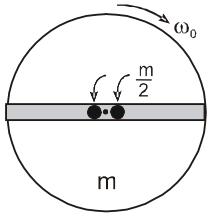
एक एकसमान चकती जिसका द्रव्यमान m तथा त्रिज्या R है, यह क्षैतिज तल में केन्द्र से पारित तथा ऊर्ध्वाधर चिकनी स्थिर अक्ष के परितः, क्षैतिज तल में घूमने के लिए स्वतन्त्र है। यहाँ एक चिकना खाँचा (groove) है जो कि चकती के व्यास के अनुदिश है तथा इसमें दो छोटी गेंदे, प्रत्येक का द्रव्यमान m/2 है, इनको चकती के केन्द्र पर दोनों तरफ चित्रानुसार रखा जाता है। चकती को आरम्भिक कोणीय चाल ω_0 देकर इनको मुक्त कर दिया जाता है।



1. जब गेंदे चकती के किनारे पर पहुँच जाती है, उस समय चकती की कोणीय चाल होगी –

(A) $\frac{\omega_0}{2}$ (B) $\frac{\omega_0}{3}$ (C) $\frac{2\omega_0}{3}$ (D) $\frac{\omega_0}{4}$

2. प्रत्येक गेंद जब चकती को ठीक छोड़ती ही है (अलग होती है) उस समय प्रत्येक गेंद की जमीन के सापेक्ष चाल क्या होगी



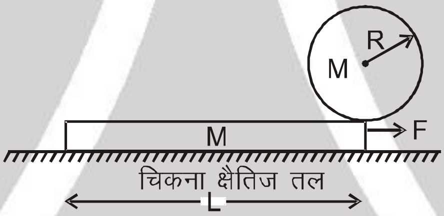
(A) $\frac{R\omega_0}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{R\omega_0}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{2R\omega_0}{3}$ (D) $\frac{R\omega_0}{3}$

3. उस समय के लिए जब गेंद चकती पर ही रहती है तब चकती द्वारा एक गेंद पर आरोपित बल के कारण किया गया कार्य कितना होगा।

(A) $\frac{2mR^2\omega_0^2}{9}$ (B) $\frac{mR^2\omega_0^2}{18}$ (C) $\frac{mR^2\omega_0^2}{6}$ (D) $\frac{mR^2\omega_0^2}{9}$

अनुच्छेद-2

M द्रव्यमान की व R त्रिज्या की एक एकसमान चकती प्रारम्भ में एक क्षैतिज तख्ते के दाहिने सिरे पर ऊर्ध्वाधर खड़ी है। तख्ते का द्रव्यमान M तथा लम्बाई L चित्रानुसार है। तख्ता एक चिकने क्षैतिज धरातल पर है तथा चकती तथा तख्ते के मध्य घर्षण इतना पर्याप्त है कि चकती बिना फिसले तख्ते पर लौटनी गति कर सकती है। तख्ते को दाहिनी तरफ एक नियत क्षैतिज बल लगाया जाता है जिसका परिमाण F है।



4. तख्ते के त्वरण का परिमाण है–

(A) $\frac{F}{8M}$ (B) $\frac{F}{4M}$ (C) $\frac{3F}{2M}$ (D) $\frac{3F}{4M}$

5. चकती के कोणीय त्वरण का परिमाण है –

(A) $\frac{F}{4mR}$ (B) $\frac{F}{8mR}$ (C) $\frac{F}{2mR}$ (D) $\frac{3F}{2mR}$

6. प्रारम्भिक स्थिति से जब तक तख्ते के बांये सिरे के ऊर्ध्वाधर ठीक नीचे चकती का केन्द्र आता है उस दौरान तक चकती के केन्द्र द्वारा तय की गई दूरी होगी।

(A) $\frac{L}{2}$ (B) $\frac{L}{4}$ (C) $\frac{L}{8}$ (D) L

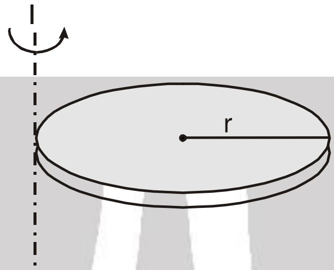
Exercise-3

✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

* चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -

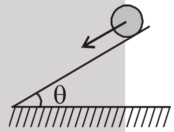
भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1.✍ R त्रिज्या का एक ठोस गोला अपने ज्यामितीय अक्ष के परित I जड़त्व आघूर्ण रखता है। यदि इसे r त्रिज्या व t मोटाई की एक चकती के रूप में पिघलाया जाता है। यदि इसका स्पर्शज्या अक्ष के परितः (जो चकती के तल के लम्बवत् है) जड़त्व आघूर्ण भी I के बराबर है, तब r का मान बराबर है : **[JEE 2006 , 3/184]**



(A) $\frac{2}{\sqrt{15}}$ R (B) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ R (C) $\frac{3}{\sqrt{15}}$ R (D) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ R

2.* एक ठोस गोला θ नति कोण वाले आनत तल पर शुद्ध लौटनी गति कर रहा है - **[JEE 2006 , 5/184]**



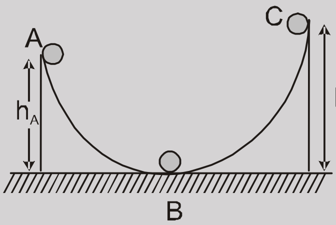
(A) गोले पर कार्यरत घर्षण बल $f = \mu\, mg \cos\theta$ है।

(B) f क्षयित बल है।

(C) घर्षण इसका कोणीय वेग बढ़ायेगा तथा इसका रेखीय वेग घटायेगा।

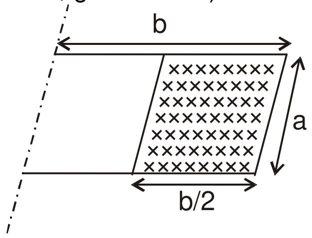
(D) यदि θ घटेगा, घर्षण भी घटेगा

3*. एक गेंद चित्रानुसार स्थिर पथ पर गति करती है। A से B तक गेंद बिना फिसले लुढ़कती है। यदि BC सतह घर्षण रहित हो तथा K_A, K_B व K_C गेंद की क्रमशः A, B व C पर गतिज ऊर्जाऐं हो, तब – **[JEE 2006 , 5/184]**



(A) $h_A > h_C$; $K_B > K_C$ (B) $h_A > h_C$; $K_C > K_A$ (C) $h_A = h_C$; $K_B = K_C$ (D) $h_A < h_C$; $K_B > K_C$

4. M द्रव्यमान की एक प्लेट जिसकी विमाऐं (a × b) है, को इसके एक किनारे से निलम्बित किया जाता है। प्लेट के इकाई क्षैत्रफल पर m द्रव्यमान की गेदें 100 गेंदें/सैक० की दर से प्रत्यास्थ रूप से टकराती है। जिससे प्लेट क्षैतिज रूप में चित्रानुसार बनी रहती है। गेंद की आवश्यक चाल क्या होगी? (गेंदें प्लेट के आधे भाग पर टकराती है।) (दिया गया है M = 3 kg, m = 0.01 kg, b = 2 m, a = 1 m, g = 10 m/s²) **[JEE 2006, 6/184]**



प्रश्न 5 से 6 के लिए अनुच्छेद ✍

दो चकतियाँ A एवं B एक ऊर्ध्वाधर धुरी पर समाक्ष रूप से व्यवस्थित (mount) की गई है। उभयनिष्ठ अक्ष (common axis) के परितः उन चकतियों के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः I तथा 2I है। एक स्प्रिंग को x_1 दूरी से दबाकर उसकी सम्पूर्ण स्थितिज ऊर्जा का उपयोग कर चकती A को 2ω प्रारम्भिक कोणीय वेग दिया जाता है। उतने ही स्प्रिंग गुणांक वाले एक दूसरे स्प्रिंग को x_2 दूरी से दबाकर चकती B को ω कोणीय वेग दिया जाता है। दोंनो चकतियाँ दक्षिणावर्ती (clockwise) दिशा में घूम रही है। **[JEE-2007, 12/162]**

5.✍ अनुपात x_1/x_2 है

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

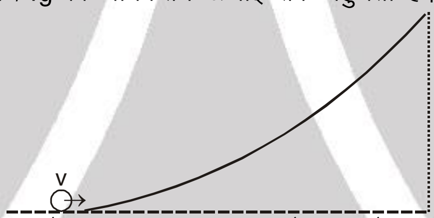
6.✍ जब चकती B को चकती A के साथ सम्पर्क में लाया जाता है तो वे t समय में समान कोणीय वेग प्राप्त कर लेते है। इस अवधि में एक चकती पर दूसरी के द्वारा लगाया गया औसत घर्षण बल आघूर्ण है

(A) $\frac{2I\omega}{3t}$ (B) $\frac{9I\omega}{2t}$ (C) $\frac{9I\omega}{4t}$ (D) $\frac{3I\omega}{2t}$

7.✍ उपरोक्त प्रक्रिया में होने वाला गतिज ऊर्जा का ह्रास (loss) है

(A) $\frac{I\omega^2}{2}$ (B) $\frac{I\omega^2}{3}$ (C) $\frac{I\omega^2}{4}$ (D) $\frac{I\omega^2}{6}$

8.✍ एक समान घनत्व वाली एक छोटी वस्तु वेग v से प्रारम्भ कर एक वक्र सतह पर ऊपर की ओर लुढ़कती (rolls) है। आरम्भिक स्थिति की अपेक्षा यह $3v^2/4g$ की अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचती है। वस्तु है। **[JEE-2007, 3/162]**



(A) वलय (ring) (B) ठोस गोला (C) खोखला गोला (D) चकती (disc)

9.✍ **वक्तव्य-1 :** यदि किसी वस्तु पर उसके द्रव्यमान केन्द्र के परितः कोई बाह्रय बल आघूर्ण नहीं है, तो द्रव्यमान केन्द्र का वेग अचर रहेगा। क्योंकि **[JEE-2007, 3/162]**

वक्तव्य-2: एक विलगित निकाय (isolated system) का रेखीय संवेग अचर रहता है।

(A) वक्तव्य-1 सत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है; वक्तव्य-2 वक्तव्य -1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) वक्तव्य-1 सत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है ; वक्तव्य-2 वक्तव्य-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) वक्तव्य-1 सत्य है, वक्तव्य-2 असत्य है।
(D) वक्तव्य-1 असत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है।

10. **वक्तव्य-1 :** समान द्रव्यमान एवं समरूप विमाओं के दो बेलन, जिनमें से एक खोखला (धातु) और दूसरा ठोस (लकड़ी का) है, एक नत समतल (Inclined plane) पर समान ऊचाँई से, बिना फिसले, एक साथ लुढ़काये जाते है। खोखला बेलन नत समतल की तली पर पहले पहुँचेगा। **तथा** **[JEE-2008, 3/163]**

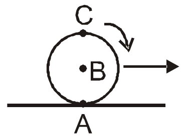
वक्तव्य-2: ऊर्जा संरक्षण के सिद्धान्त के अनुसार, जब दोंनो बेलन नत समतल की तली पर पहुँचेंगे, उनकी गतिज–ऊर्जा समान होगी।

(A) वक्तव्य-1 सत्य है , वक्तव्य-2 सत्य है; वक्तव्य-2 वक्तव्य-1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) वक्तव्य-1 सत्य है , वक्तव्य-2 सत्य है; वक्तव्य-2 वक्तव्य-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) वक्तव्य-1 सत्य है, वक्तव्य-2 असत्य है।
(D) वक्तव्य-1 असत्य है, वक्तव्य-2 सत्य है।

11. कणों के एक निकाय पर लग रहे बाहरी बलों का परिणामी बल यदि शून्य हो, तो किसी जडत्वीय फ्रेम से यह निश्चित रूप से कहा जा सकता है कि

(A) निकाय का रेखीय संवेग समय के साथ नहीं बदलता (B) निकाय की गतिज ऊर्जा समय के साथ नहीं बदलती
(C) निकाय का कोणीय संवेग समय के साथ नहीं बदलता (D) निकाय की स्थितिज ऊर्जा समय के साथ नहीं बदलती

12*. एक स्थिर क्षैतिज समतल पृष्ठ पर एक गोला बिना फिसले लुढ़क रहा है। चित्र में, A तल से सम्पर्क बिन्दु, B गोले का केन्द्र तथा C उसका सबसे ऊपरी बिन्दु है। तब **[JEE 2009, 4/160, –1]**



(A) $\vec{V}_C - \vec{V}_A = 2(\vec{V}_B - \vec{V}_C)$ (B) $\vec{V}_C - \vec{V}_B = \vec{V}_B - \vec{V}_A$

(C) $|\vec{V}_C - \vec{V}_A| = 2|\vec{V}_B - \vec{V}_C|$ (D) $|\vec{V}_C - \vec{V}_A| = 4|\vec{V}_B|$

13. 10 cm × 10 cm आधार व 15 cm ऊँचाई का एक गुटका एक नततल पर रखा है। तल और गुटके के बीच घर्षण गुणांक $\sqrt{3}$ है। इस नततल और क्षैतिज तल के बीच कोण θ को 0º से धीरे–धीरे बढ़ाया जाता है। तब **[JEE 2009, 3/160, –1]**

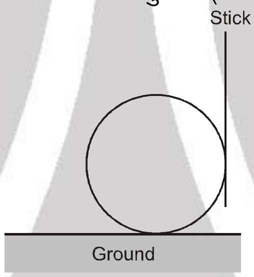
(A) θ = 30º पर गुटका नीचे सरकने लगता है

(B) θ के किसी विशेष मान तक गुटका तल पर स्थिर रहता है और उसके बाद पलट जाता है

(C) θ = 60º पर गुटका नीचे सरकने लगता है, θ का मान ओर बढ़ाने पर भी गुटका सरकता रहता है

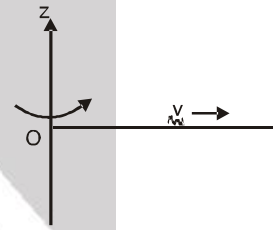
(D) θ = 60º पर गुटका नीचे सरकने लगता है, θ का मान ओर अधिक बढ़ाने पर किसी विशेष θ पर यह पलट जाता है

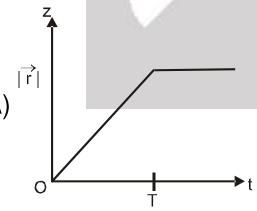
14. एक लड़का छड़ी से एक रिंग को 2N अभिलम्ब बल लगाकर धकेल रहा है (चित्र देखिये)। रिंग का द्रव्यमान 2 kg और त्रिज्या 0.5 m है। रिंग बिना फिसले 0.3 m/s² के त्वरण से लुढ़क रही है। रिंग और जमीन के बीच घर्षण गुणांक इतना है कि लुढ़कना हमेशा संभव है। यदि छड़ी और रिंग के बीच घर्षण गुणांक (P/10) हो, तब P का मान है **[JEE 2011, 4/160]**

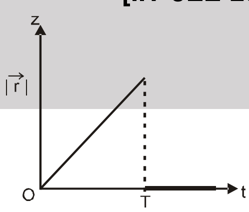


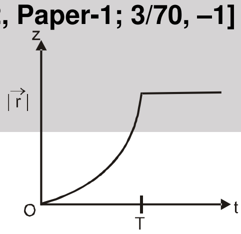
15. $\sqrt{5}$ cm व्यास के चार ठोस गोलों, प्रत्येक का द्रव्यमान 0.5 kg है, को एक 4cm भुजा के वर्ग के कोनों पर क्रमशः रखा गया है। वर्ग के कर्ण पर इस निकाय का जड़त्व–आघूर्ण यदि N × 10^{-4} kg-m², हो, तब N का मान है। **[JEE 2011, 4/160]**

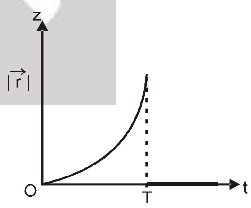
16. एक पतली एकसमान छड़ बिन्दु O पर कीलकित है और क्षैतिज तल में एकसमान कोणीय चाल ω से घूम रही है (चित्र देखिये)। t = 0 पर एक छोटा कीड़ा O से चलना शुरू करके छड़ के अंतिम सिरे पर t = T समय पर पहुँच कर रूक जाता है। कीड़ा छड़ के सापेक्ष एकसमान चाल v से चलता है। निकाय की कोणीय चाल पूरे समय ω बनी रहती है। O के परितः निकाय पर लगने वाले बल–आघूर्ण का मान ($|\vec{\tau}|$) समय के साथ जिस प्रकार बदलता है उसका सर्वोत्तम वर्णन किस ग्राफ में है? **[IIT-JEE-2012, Paper-1; 3/70, –1]**



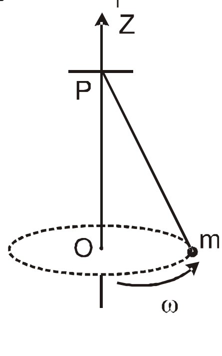
(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

17. m द्रव्यमान का एक छोटा पिंड द्रव्यमान–रहित धागे से जुड़ा है। धागे का दूसरा सिरा P पर बंधित हैं (चित्र देखिये।) पिंड x – y तल में एकसमान कोणीय चाल ω से वृत्तीय गति कर रहा है। वृत्त का केन्द्र O पर है। यदि O और P बिन्दूओं के सापेक्ष निकाले गये इस निकाय के कोणीय संवेग क्रमशः $\vec{L}_0$ और $\vec{L}_P$ है, तब **[IIT-JEE-2012, Paper-1; 3/70, –1]**



(A) $\vec{L}_0$ और $\vec{L}_P$ समय के साथ नही बदलते है।

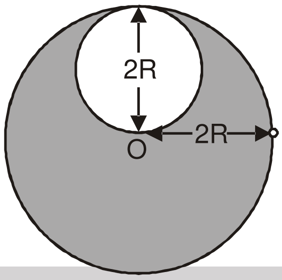
(B) $\vec{L}_0$ समय के साथ बदलता है, जबकि $\vec{L}_P$ एकसमान है।

(C) $\vec{L}_0$ एकसमान रहता है, जबकि $\vec{L}_P$ समय के साथ बदलता है।

(D) $\vec{L}_0$ और दोनों $\vec{L}_P$ समय के साथ बदलते है।

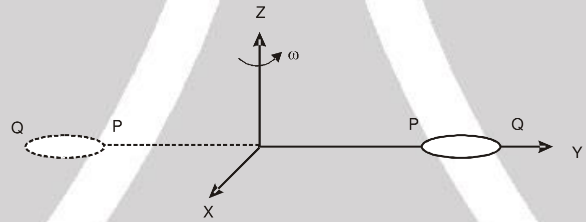
18. एक एकसमान द्रव्यमान घनत्व की 2R त्रिज्या की गोल डिस्क में से एक 2R व्यास की छोटी गोल डिस्क निकालकर एक पटल (lamina) बनाया गया है (चित्र देखिए)। इस पटल का जड़त्व–आघूर्ण O और P से जानेवाले अक्षों के परितः क्रमशः I_0 एवं I_1 हैं। दोनों अक्ष पटल के तल के लम्बवत् हैं। तब अनुपात I_P/I_O निकटतम पूर्णांक में क्या है ?

[IIT-JEE-2012, Paper-1; 4/70]

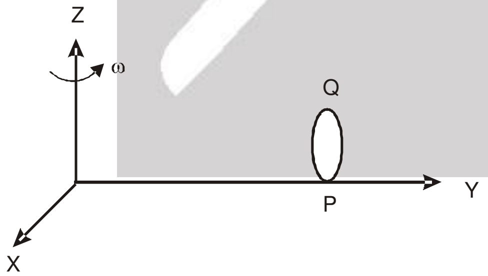


प्रश्न 19 से 20 के लिए अनुच्छेद

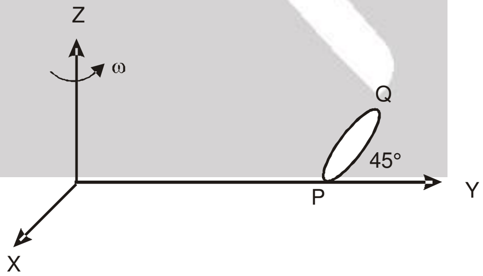
व्यापक रूप से किसी दृढ़ पिण्ड की गति को हम दो अलग–अलग गतियों के संयुक्त रूप में देख सकते हैं : (i) उसके संहति–केन्द्र की किसी अक्ष के परितः गति, और (ii) उसके संहति–केन्द्र से गुजरने वाले किसी तात्क्षणिक–अक्ष के परितः उसकी गति। यह आवश्यक नहीं है कि दोनों अक्ष स्थिर हों। उदाहरण के लिए हम क्षैतिज तल में रखी एक समान डिस्क को लेते हैं जो अपनी परिधि पर पर एक द्रव्यमान रहित छड़ से दृढ़ता से जुड़ी है (चित्र देखिये)। यह डिस्क–छड़ निकाय उद्गम के परितः ω कोणीय चाल से घर्षण–रहित क्षैतिज तल में घूम रहा है। तब किसी भी क्षण डिस्क की गति को दो भिन्न गतियों के अध्यारोपण के रूप में देख सकते हैं (i) डिस्क के संहति केन्द्र का z-अक्ष के सापेक्ष घूर्णन, और (ii) डिस्क का अपने संहति केन्द्र से गुजर रहे ऊर्ध्वाधर तात्क्षणिक–अक्ष पर घूर्णन (जो कि बिन्दुओं P और Q के आपस में स्थान बदलने के रूप में दिखता है)। इस उदाहरण में इन दोनों घूर्णनों की कोणीय चाल ω है।



अब चित्र में दर्शाये गये उसी प्रकार के निकाय के दो भिन्न स्वरूपों (cases) पर ध्यान दें। Case (a) : डिस्क का पृष्ठ ऊर्ध्वाधर है और x-z तल के समांतर है ; Case (b) : डिस्क का पृष्ठ x-y तल में 45° कोण बनाता है एवं उसका क्षैतिज व्यास x–अक्ष के समांतर है। दोनों cases में डिस्क बिन्दु P पर जड़ित है तथा यह निकाय z-अक्ष के परितः ω कोणीय चाल से घूर्णन करता है।



Case (a)



Case (b)

19. तात्क्षणिक–अक्ष (जो संहति–केन्द्र से गुजर रहा है) के परितः घूर्णन की कोणीय चाल के बारे में कौन सा प्रकथन सही है ?

[IIT-JEE-2012, Paper-2; 3/66, –1]

(A) दोनों cases के लिये यह $\sqrt{2}\omega$ है।

(B) Case (a) के लिये यह ω है ; Case (b) के लिये यह $\frac{\omega}{\sqrt{2}}$ है।

(C) Case (a) के लिये यह ω है ; Case (b) के लिये यह $\sqrt{2}\omega$ है।

(D) दोनों cases के लिये यह ω है।

20. तात्क्षणिक–अक्ष (जो संहति–केन्द्र से गुजर रहा है) के बारे में कौन सा प्रकथन सही है?**[IIT-JEE-2012, Paper-2; 3/66, –1]**

(A) यह दोनों स्थितियों (a) तथा (b) के लिये ऊर्ध्वाधर है।

(B) Case (a) के लिये ऊर्ध्वाधर है ; Case (b) के लिये x-z तल से 45° कोण पर एवं डिस्क के पृष्ठ में है।

(C) Case (a) के लिये क्षैतिज है ; Case (b) के लिये x-z तल से 45° कोण पर एवं डिस्क–पृष्ठ के लम्बवत् है।

(D) Case (a) के लिये ऊर्ध्वाधर है ; Case (b) के लिये x-z तल से 45° कोण पर एवं डिस्क–पृष्ठ के लम्बवत है।

21. समान द्रव्यमान और समान त्रिज्या के दो ठोस बेलन P और Q एक जड़ आनत तल पर समान ऊँचाई से एक ही समय लुढ़कना शुरू करते हैं। बेलन P का अधिकतम द्रव्यमान उसकी सतह की ओर केन्द्रित है और बेलन Q का अधिकतम द्रव्यमान उसके अक्ष की ओर केन्द्रित है। तब कौन प्रकथन सही है/हैं ? **[IIT-JEE-2012, Paper-2; 4/66]**

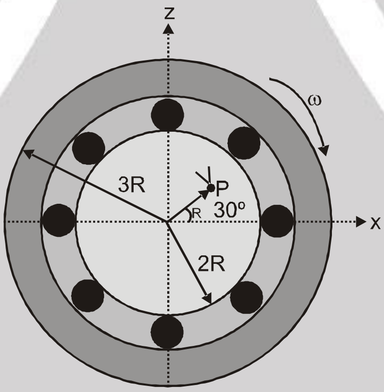
(A) दोनों बेलन P तथा Q एक साथ जमीन पर पहुँचेंगे।

(B) बेलन P का रेखीय त्वरण बेलन Q से ज्यादा है।

(C) दोनों बेलन जमीन पर समान स्थानांतरण गतिज–ऊर्जा के साथ पहुँचते हैं।

(D) बेलन Q जमीन पर ज्यादा कोणीय–गति से पहुँचता है।

22.* चित्र में दिखाये निकाय के हिस्से हैं : (i) 3R बाहरी–त्रिज्या की रिंग, जो क्षैतिज सतह पर ω कोणीय चाल से दक्षिणावर्त बिना फिसले लुढ़क रही है, और (ii) 2R त्रिज्या की भीतरी डिस्क जो ω/2 कोणीय चाल से वामावर्त घूम रही है। घर्षण –रहित बॉल–बियरिंग (गोलियाँ) रिंग और डिस्क को एक दूसरे से अलग रखते हैं। निकाय x-z तल में है। भीतरी डिस्क पर बिन्दु P उद्‌गम O से R दूरी पर है और OP क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है। तब क्षैतिज सतह के सापेक्ष **[IIT-JEE-2012, Paper-2; 4/66]**



(A) बिन्दु O का रेखीय वेग $3R\omega\hat{i}$ है।

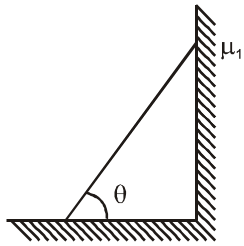
(B) बिन्दु P का रेखीय वेग $\frac{11}{4}R\omega\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{4}R\omega\hat{k}$ है।

(C) बिन्दु P का रेखीय वेग $\frac{13}{4}R\omega\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}R\omega\hat{k}$

(D) बिन्दु P का रेखीय वेग $\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R\omega\hat{i} + \frac{1}{4}R\omega\hat{k}$ है।

23. एक 50 kg व 0.4 m त्रिज्या की एकसमान डिस्क अपनी ऊर्ध्वाधर अक्ष के गिर्द 10 rad/s^{-1} के कोणीय वेग से घूम रही है। दो एकसमान वृत्ताकार छल्ले धीर से डिस्क पर सममित तरीके से एक दूसरे को छूते हुए इस प्रकार डिस्क तल पर रखे जाते है कि वे डिस्क के अक्ष को भी स्पर्श करें। प्रत्येक छल्ले का द्रव्यमान 6.25 kg व त्रिज्या 0.2 m है। इस निकाय का नया कोणीय वेग (rad s^{-1} में) निम्न होगा (मान लीजिए कि डिस्क एवम् छल्ले के बीच घर्षण इतना है कि डिस्क व छल्ले के बीच सापेक्ष गति शून्य है और निकाय मूल अक्ष पर घूर्णन कर रहा है) **[JEE (Advanced) 2013; 4/60]**

24.* द्रव्यमान m वाली एक सीढ़ी दीवार के सहारे तिरछी खड़ी है, जैसा चित्र में दर्शाया गया है। क्षैतिज फर्श से θ कोण बनाते हुए यह स्थैतिक साम्यावस्था में है। दीवार व सीढ़ी के बीच घर्षण गुणांक μ_1 है। तथा फर्श व सीढ़ी के बीच घर्षण गुणांक μ_2 है। दीवार द्वारा सीढ़ी पर लगाया गया अभिलम्बित प्रतिक्रिया बल N_1 तथ फर्श द्वारा सीढ़ी पर लगाया गया अभिलम्बित प्रतिक्रिया बल N_2 है। जब सीढ़ी सरकने वाली हो, तब **[JEE (Advanced)-2014,P-1, 3/60]**



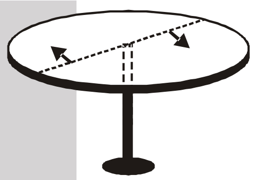
(A) $\mu_1 = 0$ $\mu_2 \neq 0$ तथा $N_2 \tan\theta = \frac{mg}{2}$

(B) $\mu_1 \neq 0$ $\mu_2 = 0$ तथा $N_1 \tan\theta = \frac{mg}{2}$

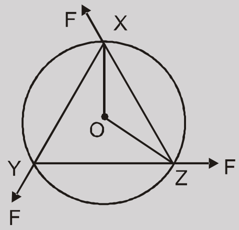
(C) $\mu_1 \neq 0$ $\mu_2 \neq 0$ तथा $N_2 = \frac{mg}{1+\mu_1\mu_2}$

(D) $\mu_1 = 0$ $\mu_2 \neq 0$ तथा $N_1 \tan\theta = \frac{mg}{2}$

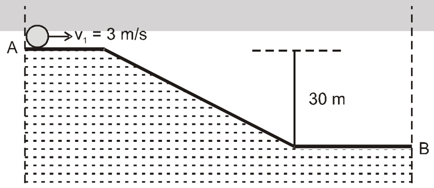
25. चित्र में दिखाया गया 0.5 m त्रिज्या तथा 0.45 kg द्रव्यमान वाला एक क्षैतिज वृत्तीय प्लेटफार्म अपने अक्ष के परितः घूमने के लिए स्वतंत्र है। दो द्रव्यमान रहित कमानी वाली खिलौना बन्दूके (toy-guns), जिन पर 0.05 kg द्रव्यमान वाली स्टील की गेंद लगी है, प्लेटफार्म के व्यास पर केन्द्र से 0.25 m की दूरी पर, केन्द्र के दोनों ओर स्थित हैं। दोनों बन्दूके एक साथ गोलियों के व्यास के लंबवत्, क्षैतिज तल में विपरीत दिशाा में दागती हैं। प्लेटफार्म को छोड़ने के पश्चात् गोलियों की भूमि के सापेक्ष क्षैतिज दिशा में गति $9 ms^{-1}$ है। गोलियों के प्लेटफार्म छोड़ने के पश्चात् प्लेटफार्म की घूर्णीय गति rad^{-1} में हैः **[JEE (Advanced)-2014,P-1, 3/60]**

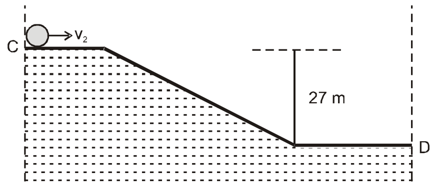


26. एक एकसमान वृत्ताकार डिस्क जिसका द्रव्यमान 1.5 kg तथा त्रिज्या 0.5 m है, प्रारम्भ में घर्षण रहित क्षैतिज सतह पर विरामावस्था में है। बराबर परिमाण F = 0.5 N वाले तीन बल एक साथ t = 0 चित्र में दिखाये गये समबाहु त्रिभुज XYZ, जिसके शीर्ष बिंदु डिस्क की परिधि पर स्थित है, की भुजाओं के अनुदिश लगाये जाते हैं। बलों को लगाने के 1 सैकण्ड पश्चात् डिस्क की कोणिय गति, $rad\ s^{-1}$ में है : **[JEE (Advanced)-2014,P-1, 3/60]**

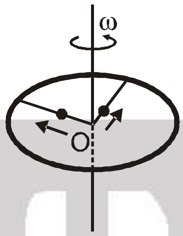


27. चित्रानुसार दो भिन्न सतहों AB व CD पर समान वृत्ताकार चक्रिकाएं (डिस्क) A तथा C से क्रमशः v_1 तथा v_2 प्रारम्भिक रेखीय वेगों से बिना फिसलते हुए लुढ़कना शूरू करती हैं तथा सदैव सतहों के संपर्क में रहती है। यदि B तथा D बिन्दुओं पर पहुँचकर दोनों चक्रिकाओं के रेखीय वेग बराबर हैं तथा $v_1 = 3$ m/s है, तब m/s में v_2 का मान है। ($g = 10\ m/s^2$) **[JEE(Advanced) 2015 ; P-1, 4/88]**





28. एक द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R का छल्ला अपने केन्द्र O से होकर जाने वाली स्थिर ऊर्ध्वाधर अक्ष के चारों ओर ω कोणीय गति से घूम रहा है। इस समय पर $\frac{M}{8}$ द्रव्यमान के दो बिन्दु द्रव्यमान छल्ले के केन्द्र O पर विराम स्थिति में हैं। वो दर्शाये चित्रानुसार छल्ले पर लगी द्रव्यमान रहित दो छड़ों पर त्रिज्यतः बाहर की ओर गति कर सकते हैं। किसी एक क्षण पर निकाय की कोणीय गति $\frac{8}{9}\omega$ है तथा एक बिन्दु द्रव्यमान O से $\frac{3}{5}R$ की दूरी पर है। इस क्षण दूसरे बिन्दु द्रव्यमान की O से दूरी होगी : **[JEE(Advanced) 2015 ; P-1, 4/88, –2]**



(A) $\frac{2}{3}R$ (B) $\frac{1}{3}R$ (C) $\frac{3}{5}R$ (D) $\frac{4}{5}R$

29. R त्रिज्या के दो ठोस गोलों A और B के घनत्वों का त्रिज्य दूरी r के साथ संबंध क्रमशः $\rho_A(r) = k\left(\frac{r}{R}\right)$ तथा $\rho_B(r) = k\left(\frac{r}{R}\right)^5$ हैं, जहॉं k एक स्थिरांक है। गोलों के अपने–अपने केन्द्र से होकर जाने वाली अक्षों के परितः जड़त्वाघूर्ण क्रमशः I_A तथा I_B है। यदि $\frac{I_B}{I_A} = \frac{n}{10}$ है, तब n का मान है। **[JEE(Advanced) 2015 ; P-2,4/88]**

30. 1.6 kg द्रव्यमान और ℓ लम्बाई की एकसमान लकड़ी की एक डंडी एक चिकनी खड़ी दीवार, जिसकी ऊंचाई $h(< \ell)$ है, पर आनत तरीके से इस तरह से रखी गयी है कि डंडी का एक छोटा सा भाग दीवार से ऊपर निकला हुआ है। डंडी पर दीवार का प्रतिक्रिया बल डंडी के लम्बरूप में है। डंडी दीवार के साथ 30° का कोण बना रही है और डंडी का आधार एक घर्षण वाली ज़मीन पर है। दीवार से डंडी पर प्रतिक्रिया तथा ज़मीन से डंडी पर प्रतिक्रिया की मात्रा समान है। $\frac{h}{l}$ का अनुपात एवं डंडी के आधार पर घर्षण बल f है $(g = 10 \text{ ms}^{-2})$ **[JEE (Advanced) 2016 ; P-1, 3/62, –1]**

(A) $\frac{h}{l} = \frac{\sqrt{3}}{16}, f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$
(B) $\frac{h}{l} = \frac{3}{16}, f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$
(C) $\frac{h}{l} = \frac{3\sqrt{3}}{16}, f = \frac{8\sqrt{3}}{3}N$
(D) $\frac{h}{l} = \frac{3\sqrt{3}}{16}, f = \frac{16\sqrt{3}}{3}N$

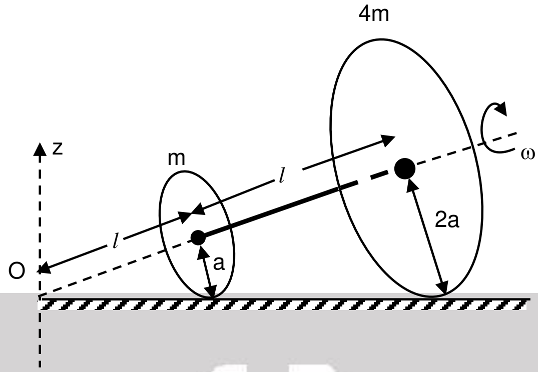
31.* m द्रव्यमान के एक कण का स्थिति–सदिश $\vec{r}$ नीचे समीकरण में दिया गया है। $\vec{r}(t) = \alpha t^3\hat{i} + \beta t^2\hat{j}$, जिसमें $\alpha = \frac{10}{3}$ ms^{-3}, $\beta = 5$ m s^{-2} एवं m = 0.1 kg. है। समय t = 1 s पर, निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं ?

(A) वेग का मान $\vec{v} = (10\hat{i} + 10\hat{j})$ ms^{-1} है **[JEE (Advanced) 2016 ; P-1, 4/62, –2]**
(B) मूल बिन्दु के गिर्द कोणीय संवेग का मान $\vec{L} = -(5/3)\hat{k}$ N ms है
(C) बल का मान $\vec{F} = (\hat{i} + 2\hat{j})$ N है
(D) मूल बिन्दु के गिर्द घूर्णन का मान $\vec{\tau} = (20/3)\hat{k}$ Nm है

32.* m तथा 4m द्रव्यमान वाली दो पतली वृताकार चत्रिकाएँ (discs), जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः a तथा 2a हैं, के केन्द्रों को $l = \sqrt{24}a$ लम्बाई की द्रव्यमान–रहित द्रढ़ (rigid) डंडी से जोड़ा गया है। इस समूह को एक मजबूत समतल सतह पर

लिटाया गया है और फिसलाये बिना इस तरह से घुमाया गया है कि इस कोणीय गति डंडी के अक्ष के गिर्द ω है। पूरे समूह का बिन्दु 'O' के गिर्द कोणीय संवेग $\vec{L}$ है (चित्र देखियें)। निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं।

[JEE (Advanced) 2016 ; P-2, 4/62, –2]



(A) $\vec{L}$ के z-घटक का परिमाण 55 $ma^2\omega$ है

(B) पूरे समूह का उसके संहति–केन्द्र के गिर्द कोणीय संवेग का परिमाण 17 $ma^2\frac{\omega}{2}$ है

(C) पूरे समूह का संहति–केन्द्र का बिन्दु O के गिर्द कोणीय संवेग का परिमाण 81$ma^2\omega$ है

(D) पूरे समूह के संहति–केन्द्र z-अक्ष के गिर्द कोणीय वेग $\frac{\omega}{5}$ से घूम रहा है

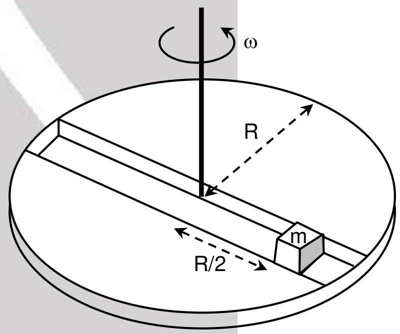
प्रश्न 33 और 34 के लिए अनुच्छेद

एक निर्देश तंत्र जो एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र की तुलना में त्वरित हो, अजड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाता है। स्थिर कोणीय वेग ω से घूमती हुई डिस्क पर बद्ध (fixed) निर्देश तंत्र अजड़त्वीय तंत्र का एक उदाहरण है। m द्रव्यमान का एक कण घूमती हुई डिस्क पर गतिमान है। गतिमान कण डिस्क पर बद्ध निर्देश तंत्र के सापेक्ष बल $\vec{F}_{rot}$ तथा एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र के सापेक्ष बल $\vec{F}_{in}$ को महसूस करता है। $\vec{F}_{rot}$ और $\vec{F}_{in}$ के बीच का संबंध निम्नलिखित समीकरण में दिया गया है

$$\vec{F}_{rot} = \vec{F}_{in} + 2m(\vec{v}_{rot} \times \vec{\omega}) + m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega},$$

यहाँ पर $\vec{v}_{rot}$ घूमते हुए निर्देश तंत्र में कण का वेग है तथा $\vec{r}$ कण का डिस्क के मध्य बिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश (position vector) है।

मानिए कि R त्रिज्या की एक डिस्क, जिसमें व्यास के समानान्तर एक घर्षणरहित खाँचा है, एक स्थिर कोणीय गति ω से अपने अक्ष पर वामावर्त दिशा में घूम रही है। एक निर्देश तंत्र मानिए जिसका मूलबिन्दू डिस्क के मध्य बिन्दु पर है एवं x-अक्ष खाँचे के समानान्तर है, y-अक्ष खाँचे के अभिलम्ब पर है एवं z-अक्ष घूमने वाली अक्ष के समानान्तर है $(\vec{\omega} = \omega\hat{k})$। m द्रव्यमान वाले एक छोटे गुटके को समय t = 0 पर $\vec{r} = (R/2)\hat{i}$ बिन्दु पर धीरे से इस तरह से रखा जाता है कि वो सिर्फ खाँचे में ही चल सके।



33. समय t पर गुटके की दूरी r का मान है : **[JEE (Advanced) 2016 ; P-2, 3/62, –1]**

(A) $\frac{R}{2}\cos 2\omega t$ (B) $\frac{R}{4}(e^{2\omega t} + e^{-2\omega t})$ (C) $\frac{R}{2}\cos\omega t$ (D) $\frac{R}{4}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$

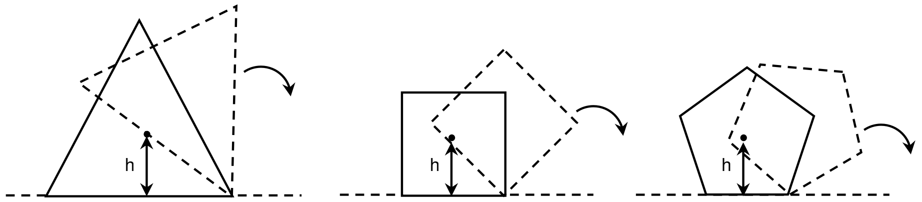
34. गुटके पर डिस्क की नेट प्रतिक्रिया (net reaction) है : **[JEE (Advanced) 2016 ; P-2, 3/62, –1]**

(A) $m\omega^2 R\sin\omega t\,\hat{j} - mg\hat{k}$ (B) $-m\omega^2 R\cos\omega t\,\hat{j} - mg\hat{k}$

(C) $\frac{1}{2}m\omega^2 R(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\hat{j} + mg\hat{k}$ (D) $\frac{1}{2}m\omega^2 R(e^{2\omega t} - e^{-2\omega t})\hat{j} + mg\hat{k}$

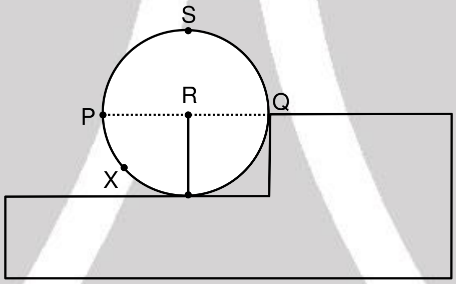
35. चित्र द्वारा दर्शाये समबहुभुजों की भुजाओं की संख्या n = 3, 4, 5 .... है। सभी बहुभुजों का संहति केन्द्र (centre of mass) अनुभूमिक तल से h ऊँचाई पर है। ये बिना फिसले क्षितिज तल पर प्रतिगामी शीर्ष (leading vertex) के चारों

ओर घूर्णन कर अग्रसरित हो रहे है। प्रत्येक बहुभुज के संहति केन्द्र के रेखापथ (locus) की ऊँचाई की अधिकतम वृद्धि Δ है। तब Δ की h और n पर निर्भरता निम्न में से दी जाएगी **[JEE (Advanced) 2017 ; P-2, 3/61, –1]**



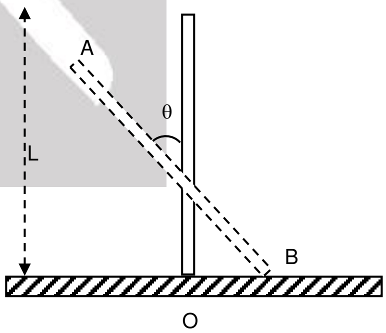
(A) $\Delta = h\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ (B) $\Delta = h\tan^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ (C) $\Delta = h\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$ (D) $\Delta = h\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right)$

36. एक त्रिज्या R एवं द्रव्यमान M का पहिया (wheel) एक R ऊँचाई वाले दृढ़ सोपान (step) के तल पर रखा है (जैसे चित्र में दिखाया गया है)। पहिये को सोपान चढ़ाने मात्र के लिए एक अचर बल पहिये के पृष्ठपर सतत् (continuous constant force) कार्यरत है। कागज के पृष्ठ से अभिलम्ब दिशा में (perpendicular to the plane of the paper) बिन्दु Q से जाने वाली अक्ष के सापेक्ष बलआघूर्ण τ मानिये। निम्न में से कौन(सा) से प्रकथन सही है/हैं ? **[JEE (Advanced) 2017 ; P-2, 4/61, –2]**



(A) यदि बिन्दु P पर पहिये की परिधि से अभिलंब दिशा में बल लगाया जाय तब τ शून्य रहेगा।
(B) यदि बिन्दु S पर स्पर्शीय बल लगाया जाए तब $\tau \neq 0$ है किन्तु पहिया सोपान पर कभी भी नहीं चढ़ेगा
(C) यदि बिन्दु P पर स्पर्शीय बल (tangential force) लगाया जाए तब जैसे पहिया सोपान पर चढ़ेगा वैसे τ सतत् घटेगा।
(D) यदि बिन्दु X पर पहिये की परिधि से अभिलंब दिशा (normal direction) में बल लगाया जाए तब τ अचर रहेगा।

37.* एक L लम्बाई का द्रढ दंड (rigid bar) AB अपनी उर्ध्वाधर स्थिति से घर्षणहीन अनुभूमिक तल (frictionless horizontal surface) पर चित्रानुसार फिसल रहा है। समय के किसी क्षण पर दंड उर्ध्वाधर से बनाया कोण θ है। निम्न में से कौनसा (से) प्रकथन सही है/हैं ? **[JEE (Advanced) 2017 ; P-2, 4/61, –2]**



(A) बिन्दु A का प्रपथ परवलयिक (parabolic path) है।
(B) दंड और भूतल के स्पर्श बिन्दु के चारों तरफ तात्क्षणिक बलयाघूर्ण (Instantaneous torque) sin θ के समानुपाती है।
(C) जब दंड उर्ध्वाधर से θ कोण बनाता है तब दंड के मध्य बिन्दु का विस्थापन उसके आरंभिक स्थिति (1– cosθ) के समानुपाती है।
(D) दंड का मध्य बिन्दु उर्ध्वाधर नीचे की ओर (vertically downward) गिरेगा।

प्रश्न 38 और 39 के लिए अनुच्छेद

एक वृत्ताकार वलय (circular ring) (द्रव्यमान M एवं त्रिज्या R) एक उंगली के परित ध्रुतघूर्णन करता है (जैसा चित्र 1 (Figure 1) में दर्शाया गया है)। इस प्रक्रम में उंगली वलय के अंतरिक पृष्ठ से हमेशा स्पर्श करती है। उंगली एक शंकु (cone) के पृष्ठ का अनुरखिय पथ का अनुसरण करती है जैसे की बिन्दुकित रेखा द्वारा दर्शाया गया है। उंगली एवं वलय के स्पर्श बिन्दु के अनुरेखिय पथ की त्रिज्या r है। उंगली कोणीय वेग ω_0 से घूर्णन कर रही है। वलय r त्रिज्यावाले वृत्त के बाहरी पृष्ठ पर फिसलन रहित घूर्णन (rolls without slipping) करता है। जैसा चित्र 2 (Figure 2) में वलय एवं उंगली के स्पर्श बिन्दु द्वारा दर्शाया गया है। वलय एवं उंगली के बीच घर्षण गुणांक (coefficient of friction) μ, एवं गुरूत्वीय त्वरण g है।

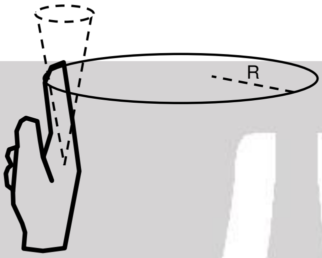


Figure-1

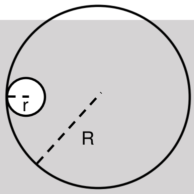


Figure-2

38. वलय की कुल गतिज उर्जा है **[JEE (Advanced) 2017 ; P-2, 3/61]**

(A) $\frac{1}{2}M\omega_0^2(R-r)^2$ (B) $\frac{3}{2}M\omega_0^2(R-r)^2$ (C) $M\omega_0^2R^2$ (D) $M\omega_0^2(R-r)^2$

39. न्यूनतम ω_0 जिसके कम होते ही वलय गिर जायेगा, वह है **[JEE (Advanced) 2017 ; P-2, 3/61]**

(A) $\sqrt{\frac{g}{\mu(R-r)}}$ (B) $\sqrt{\frac{g}{2\mu(R-r)}}$ (C) $\sqrt{\frac{3g}{2\mu(R-r)}}$ (D) $\sqrt{\frac{2g}{\mu(R-r)}}$

40*. 1.0 kg द्रव्यमान (mass) की एक वस्तु समय t = 0 पर मूल बिन्दु (origin) पर विरामावस्था में है। इस वस्तु पर एक बल $\vec{F} = (\alpha t\hat{i} + \beta)$ लगाया जाता है, जहाँ $\alpha = 1.0\ Ns^{-1}$ और $\beta = 1.0$ N है। समय t = 1.0s पर मूल बिन्दु के सापेक्ष वस्तु पर लगने वाला बल आघूर्ण (torque) $\vec{\tau}$ है। निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (से) सही है (हैं) ?

[JEE (Advanced) 2018 ; P-1, 4/60]

(A) $|\tau| = \frac{1}{3}Nm$

(B) बल आघूर्ण $\vec{\tau}$ मात्रक सदिश (unit vector) $+\hat{k}$ की दिशा में है।

(C) समय t = 1s पर वस्तु का वेग $\vec{v} = \frac{1}{2}(\hat{i} + 2\hat{j})ms^{-1}$ है।

(D) समय t = 1s पर वस्तु के विस्थापन का परिमाण $\frac{1}{6}m$ है।

41. एक वृत्ताकार वलय (ring) और एक वृत्ताकार चकती (disc), एक आनत बल (inclined plane) के शीर्ष पर अगल–बगल (side by side) विरामावस्था में है। आनत तल, क्षैतिज तल (horizontal plance) से 60° का कोण बनाता है। दोनों वस्तुए एक ही पल, न्यूनतम दूरी वाले पथ पर बिना फिसले लोटना (rolling without slipping) आरम्भ करती है। यदि दोनों वस्तुओं के क्षैतिज तल पर पहुँचने का समयान्तर $(2-\sqrt{3})/\sqrt{10}$ s, हो तो आनत तल के शीर्ष की ऊँचाई ________ मीटर है। g = 10 ms^{-2} लें। **[JEE (Advanced) 2018 ; P-1, 3/60]**

42. नीचे दी गयी सूची-I में, एक कण के चार विभिन्न पथ, समय के विभिन्न फलनों (functions) के रूप में दिये गये हैं। इन फलनों में α तथा β उचित विमाओं वाले धनात्मक नियतांक (positive constants) हैं, जहाँ $\alpha \neq \beta$। प्रत्येक पथ में कण पर लगने वाला बल या तो शून्य है या संरक्षी (conservative) है। सूची-II में कण की पाँच भौतिक राशियों का विवरण दिया गया है : $\vec{p}$ रेखीय संवेग (linear momentum) है, $\vec{L}$ मूल बिंदु (origin) के सापेक्ष कोणीय संवेग (angular momentum) है, K गतिज ऊर्जा (kinetic energy) है, U स्थितिज ऊर्जा (potential energy) है और E कुल ऊर्जा (total energy) है। सूची-I के प्रत्येक पथ का सूची-II में दिये गये उन राशियों से सुमेल कीजिये, जो उस पथ के लिए संरक्षी (conserved) हैं। **[JEE (Advanced) 2018 ; P-2, 3/60, –1]**

सूची-I		सूची-II	
P.	$\vec{r}(t) = \alpha t\hat{i} + \beta t\hat{j}$	1.	$\vec{p}$
Q.	$\vec{r}(t) = \alpha\cos\omega t\hat{i} + \beta\sin\omega t\hat{j}$	2.	$\vec{L}$
R.	$\vec{r}(t) = \alpha(\cos\omega t\hat{i} + \sin\omega t\hat{j})$	3.	K
S.	$\vec{r}(t) = \alpha t\hat{i} + \frac{\beta}{2}t^2\hat{j}$	4.	U
		5.	E

(A) P → 1, 2, 3, 4, 5; Q → 2, 5; R → 2, 3, 4, 5; S → 5
(B) P → 1, 2, 3, 4, 5; Q → 3, 5; R → 2, 3, 4, 5; S → 2, 5
(C) P → 2, 3, 4; Q → 5; R → 1, 2, 4; S → 2, 5
(D) P → 1, 2, 3, 5; Q → 2, 5; R →2, 3, 4, 5; S → 2, 5

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षों) के प्रश्न

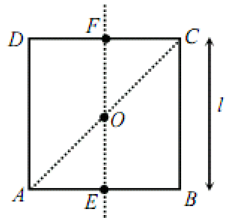
1. m द्रव्यमान और R त्रिज्या का एक पतला वृत्तीय वलय अपने अक्ष पर एक स्थिर कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रहा है। वलय के व्यास के विपरीत सिरों पर प्रत्येक M द्रव्यमान की दो वस्तुएँ धीरे से जोड़ी जाती है। वलय अब जिस कोणीय वेग ω' से घूर्णन करेगा वह है : **[AIEEE-2006, 4½/180]**

(1) $\frac{\omega m}{(m+2M)}$ (2) $\frac{\omega(m+2M)}{m}$ (3) $\frac{\omega(m-2M)}{(m+2M)}$ (4) $\frac{\omega m}{(m+M)}$

2. ℓ भुजा के एक वर्ग ABCD के चारों कोनो पर प्रत्येक m द्रव्यमान के चार बिन्दु द्रव्यमान रखे है। A से गुजरने वाले और BD के समान्तर अक्ष के परितः इस निकाय का जड़त्व आघूर्ण है : **[AIEEE-2006, 4½/180]**

(1) $m\ell^2$ (2) $2m\ell^2$ (3) $\sqrt{3}\, m\ell^2$ (4) $3m\ell^2$

3. दी गई एकसमान वर्गाकार पटल ABCD के लिए, जिसका केन्द्र O है : **[AIEEE 2007, 3/120]**



(1) $\sqrt{2}I_{AC} = I_{EF}$ (2) $I_{AD} = 2I_{EF}$ (3) $I_{AC} = I_{EF}$ (4) $I_{AC} = \sqrt{2}I_{EF}$

4. त्रिज्या R, द्रव्यमान M व जड़त्व आघूर्ण I का एक एकसमान गोल पिण्ड क्षैतिज से θ कोण पर झुके समतल पर बीना फिसलन के लुढ़कता है। इसका त्वरण है – **[AIEEE 2007, 3/120]**

(1) $\frac{g\sin\theta}{1+I/MR^2}$ (2) $\frac{g\sin\theta}{1+MR^2/I}$ (3) $\frac{g\sin\theta}{1-I/MR^2}$ (4) $\frac{g\sin\theta}{1-MR^2/I}$

5. केन्द्रीय बल के साथ घूमते एक कण का कोणीय संवेग नियत रहता है। इसका कारण है **[AIEEE 2007, 3/120]**

(1) नियत बल (2) नियत रैखिक संवेग (3) शून्य बल आघूर्ण (4) नियत बल आघूर्ण

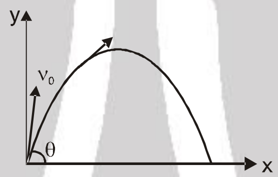
6. भुजा 'a' तथा द्रव्यमान 'm' की किसी एकसमान वर्गाकार प्लेट पर विचार कीजिए। इस प्लेट का उस अक्ष के परितः जो इसके तल के लम्बवत् है तथा इसके किसी एक कोने से गुजरती है, जड़त्व आघूर्ण **[AIEEE 2008, 3/105]**

(1) $\frac{1}{12}ma^2$ (2) $\frac{7}{12}ma^2$ (3) $\frac{2}{3}ma^2$ (4) $\frac{5}{6}ma^2$

7. लम्बाई ℓ और द्रव्यमान m की एक पतली एकसमान छड़ अपने एक सिरे से गुजर रही क्षैतिज अक्ष पर स्वतंत्र रूप से दोलायमान है। इसकी अधिकतम कोणीय चाल ω है। इसका द्रव्यमान केन्द्र इस महत्तम ऊँचाई तक उठेगा : **[AIEEE 2009, 4/144]**

(1) $\frac{1}{6}\frac{\ell\omega}{g}$ (2) $\frac{1}{2}\frac{\ell^2\omega^2}{g}$ (3) $\frac{1}{6}\frac{\ell^2\omega^2}{g}$ (4) $\frac{1}{3}\frac{\ell^2\omega^2}{g}$

8. x-अक्ष से θ कोण पर द्रव्यमान m के एक छोटे कण को एक प्रारम्भिक वेग v_0 से x-y तल में प्रक्षेपित किया जाता है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। समय $t < \frac{v_0 \sin\theta}{g}$ के लिए, कण का कोणीय संवेग है– **[AIEEE 2010, 4/144]**



(1) $-mg\, v_0\, t^2 \cos\theta\, \hat{j}$ (2) $mg\, v_0\, t \cos\theta\, \hat{k}$ (3) $-\frac{1}{2} mg\, v_0\, t^2 \cos\theta\, \hat{k}$ (4) $\frac{1}{2} mg\, v_0\, t^2 \cos\theta\, \hat{i}$

जहाँ $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ क्रमशः x, y और z-अक्ष पर इकाई सदिश है

9. एक पतली क्षैतिज वृत्तीय चकती अपने केन्द्र से गुजर रही ऊर्ध्वाधर अक्ष पर घूर्णन कर रही है। चकती की धुरी के समीप बिन्दु पर एक कीड़ा विराम अवस्था में है। कीड़ा अब एक व्यास पर एक सिरे से दूसरे सिरे तक गतिशील होता है। कीड़े की यात्रा के दौरान, चकती की कोणीय चाल : **[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

(1) अपरिवर्तित रहती है (2) लगातार घटती है (3) लगातार बढ़ती है (4) पहले बढ़ती है और फिर घटती है

10. एक घर्षणहीन बेयरिंग पर एक घिरनी के चारों ओर एक डोरी को लपेट कर द्रव्यमान m लटकाया गया है। घिरनी का द्रव्यमान m और त्रिज्या R है। यह मान लें कि घिरनी एक पूर्ण एक समान वृत्तीय चकती है। यदि डोरी घिरनी पर फिसलती नहीं है, तब द्रव्यमान m का त्वरण है : **[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

(1) $\frac{3}{2}g$ (2) g (3) $\frac{2}{3}g$ (4) $\frac{g}{3}$

11. स्पर्शरेखीय लगाये गये बल $F = (20t - 5t^2)$ न्यूटन (जहाँ t सेकण्ड में नापा गया है) के कारण 2m त्रिज्या की एक घिरनी अपनी अक्ष पर घूर्णन करती है। यदि घूर्णन अक्ष के इर्द–गिर्द, घिरनी का जड़त्व आघूर्ण 10 kg m² है, तब घिरनी की गति की दिशा प्रतिलोमित होने से पहले घिरनी द्वारा किये गये चक्करों की संख्या है : **[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

(1) 3 से कम (2) 3 से अधिक परन्तु 6 से कम
(3) 6 से अधिक परन्तु 9 से कम (4) 9 से अधिक

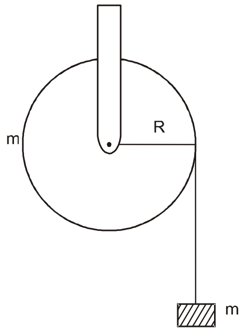
12. क्षैतिज से 30º के कोण पर वेग υ से द्रव्यमान 'm' के एक कण को प्रक्षेपित किया जाता है। जब कण अपनी अधिकतम ऊँचाई 'h' पर है, तब प्रक्षेप बिन्दु के सापेक्ष कण के कोणीय संवेग का परिमाण है :**[AIEEE 2011, 11 May; 4/120, –1]**

(1) शून्य (2) $\frac{m\upsilon^3}{\sqrt{2}g}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{16}\frac{m\upsilon^3}{g}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m\upsilon^2}{g}$

13. कोणीय वेग ω_0 से घूर्णन कर रहे द्रव्यमान m और त्रिज्या r के एक हूप को एक खुरदूरे क्षैतिज तल पर रखा है। हूप के केन्द्र का प्रारम्भिक वेग शून्य है। जब यह स्लिप करना बन्द कर दे, तब हूप के केन्द्र का वेग क्या होगा ? **[AIEEE 2013, 4/120, –1]**

(1) $\frac{r\omega_0}{4}$ (2) $\frac{r\omega_0}{3}$ (3) $\frac{r\omega_0}{2}$ (4) $r\omega_0$

14. त्रिज्या R एवं द्रव्यमान m के एक एकसमान खोखले बेलन के चारों तरफ एक द्रव्यमानविहीन डोरी से एक द्रव्यमान 'm' अवलंबित हैं। यदि डोरी बेलन पर फिसलती नहीं है, तब छोड़े जाने पर द्रव्यमान किस त्वरण से गिरेगा ? **[JEE (Main) 2014, 4/120, –1]**



(1) $\frac{2g}{3}$ (2) $\frac{g}{2}$ (3) $\frac{5g}{6}$ (4) g

15. लम्बाई l की एक अवितान्य ड़ोरी से बँधे द्रव्यमान m के एक बॉब को एक ऊर्ध्वाधर आधार से लटकाया जाता है। बॉब ऊर्ध्वाधर पर कोणीय चाल ω rad/s से एक क्षैतिज वृत्त में घूर्णन करता है। निलंबन बिन्दु पर : **[JEE (Main) 2014, 4/120, –1]**

(1) कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

(2) कोणीय संवेग परिमाण में परिवर्तनशील हैं परन्तु दिशा में नहीं।

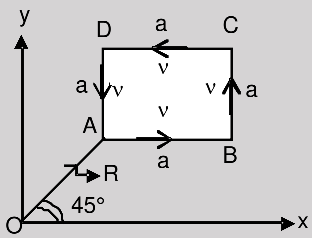
(3) कोणीय संवेग दिशा में परिवर्तनशील है परन्तु परिमाण में नहीं।

(4) कोणीय संवेग दोनों दिशा एवं परिमाण में परिवर्तनशील है।

16. किसी ठोस गोले का द्रव्यमान M तथा इसकी त्रिज्या R है। इसमें से अधिकतम सम्भव आयतन का एक क्यूब (घन) काट लिया जाता है। इस क्यूब का जड़त्व आघूर्ण कितना होगा, यदि इसकी घूर्णन अक्ष इसके केन्द्र से होकर गुजरती है तथा इसके किसी एक फलक के लम्बवत् है ? **[JEE (Main)-2015; 4/120, –1]**

(1) $\frac{MR^2}{32\sqrt{2}\pi}$ (2) $\frac{MR^2}{16\sqrt{2}\pi}$ (3) $\frac{4MR^2}{9\sqrt{3}\pi}$ (4) $\frac{4MR^2}{3\sqrt{3}\pi}$

17. चित्र में भुजा 'a' का वर्ग x-y तल में है। m द्रव्यमान का एक कण एकसामन गति v से इस वर्ग की भुजा पर चल रहा है जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। **[JEE (Main) 2016 ; 4/120, – 1]**



तब निम्न में कौनसा कथन, इस कण के मूल बिन्दु के गिर्द कोणीय आघूर्ण के लिये, गलत है।

(1) $\vec{L} = mv\left[\frac{R}{\sqrt{2}} - a\right]\hat{k}$ जब कण C से D की ओर चल रहा है।

(2) $\vec{L} = mv\left[\frac{R}{\sqrt{2}} + a\right]\hat{k}$ जब कण B से C की ओर चल रहा है।

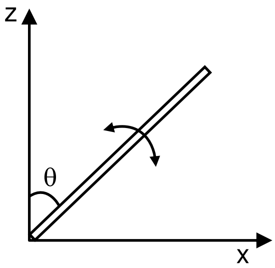
(3) $\vec{L} = \frac{mv}{\sqrt{2}}R\ \hat{k}$ जब कण D से A की ओर चल रहा है।

(4) $\vec{L} = -\frac{mv}{\sqrt{2}}R\ \hat{k}$ जब कण A से B की ओर चल रहा है।

18. एक त्रिज्या R तथा लम्बाई l के एक समान बेलन का उसके अभिलम्ब द्विभाजक के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है। जड़त्व आघूर्ण के निम्नतम् मान के लिए अनुपात l/R क्या होगा ? **[JEE (Main) 2017 ; 4/120, –1]**

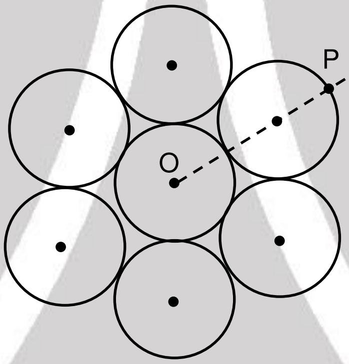
(1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (2) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) 1

19. एक द्रव्यमान M एवं लम्बाई l की पतली एवं एक समान छड़ का एक सिरा धुराग्रस्त है जिससे कि वह एक ऊर्ध्वाधर समतल में घूम सकती है। (चित्र देखिये)। धूरी का घर्षण नगण्य है। छड़ के दूसरे सिरे को धुरी के ऊपर ऊर्ध्वाधर रखकर छोड़ दिया जाता है। जब छड ऊर्ध्व से θ कोण बनाती है तो उसका कोणीय त्वरण होगा। **[JEE (Main) 2017; 4/120, –1]**



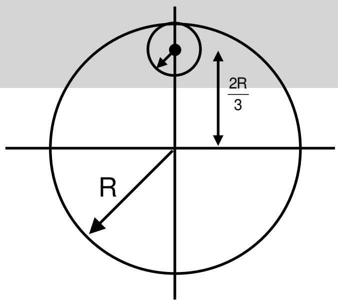
(1) $\frac{2g}{3l}\cos\theta$ (2) $\frac{3g}{2l}\sin\theta$ (3) $\frac{2g}{3l}\sin\theta$ (4) $\frac{3g}{2l}\cos\theta$

20. चित्रानुसार सात एक जैसी वृत्ताकार सतमल डिस्कों, जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है, को सममित रूप से जोड़ा जाता है। समतल के लम्बवत् तथा P से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष, इस संयोजन का जड़त्व आघूर्ण है : **[JEE (Main) 2018; 4/120, –1]**



(1) $\frac{73}{2}MR^2$ (2) $\frac{181}{2}MR^2$ (3) $\frac{19}{2}MR^2$ (4) $\frac{55}{2}MR^2$

21. R त्रिज्या तथा 9 M द्रव्यमान के एकसमान गोलाकार डिस्क से $\frac{R}{3}$ त्रिज्या का एक छोटा गोलाकार डिस्क काट कर निकाल लिया जाता है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। डिस्क के सतह के लम्बवत् एवं उसके केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष बची हुई डिस्क का जडत्व आघूर्ण होगा। **[JEE (Main) 2018; 4/120, –1]**



(1) 10 MR^2 (2) $\frac{37}{9}MR^2$ (3) 4 MR^2 (4) $\frac{40}{9}MR^2$

Answers

EXERCISE-1

भाग - I

खण्ड़ (A) :

A-1. 4 rev/s^2, 20 rev/s

A-2. 20 s

खण्ड़ (B) :

B-1. $\frac{ML^2}{12}$

B-2. $\frac{M\ell^2}{6}$

B-3. $\frac{MR^2}{2} - M\left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2$

B-4. $(K = \sqrt{\frac{3}{2}}\, r)$

खण्ड़ (C) :

C-1. $-14\hat{i} + 10\hat{j} - 9\hat{k}$

C-2. $mg\ell \sin\theta$, जब गेंद निम्नतम बिन्दु पर है, $\theta = 90^\circ$.

C-3. (a) $mv^2 \sin\alpha \cos\alpha$ गति के तल के लम्बवत्

(b) $2mv^2 \sin\alpha \cos\alpha$ गति के तल के लम्बवत्

C-4. 3N – m

खण्ड़ (D) :

D-1. 2.4 N बायीं रस्सी में तथा 2.6 N दायीं रस्सी में

D-2. $P = \frac{w}{2}\cot\theta$ या $P = \frac{mg}{2}\cot\theta$

D-3. 990 N, 960 N, $\frac{32}{33}$

D-4. (i) T = 250 N
(ii) $F_H = 150$ N ($\rightarrow$), $F_V = 50$ N ($\uparrow$)

खण्ड़ (E) :

E-1. (a) $\frac{2g(m_1 - m_2)}{\ell(m_1 + m_2)} = \frac{10}{3}$ rad/s^2

(b) (i) $\alpha' = \frac{2(m_1 - m_2)g}{\ell\left[m_1 + m_2 + \frac{m_3}{3}\right]} = 3$ rad/s^2,

(ii) 42 N ; 39 N

E-2. (a) $\frac{3g}{4L}$ (cw)

(b) $N = \frac{13\,mg}{16}\uparrow$, $F = \left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)mg \rightarrow$

E-3. 3 rad/s^2

E-4. $N = F\left(1 - \frac{3}{2}\frac{x}{\ell}\right)$

खण्ड़ (F) :

F-1. $\omega = \sqrt{5}$ rad/s

F-2. $\omega = \sqrt{\frac{9g}{4\ell}}$

F-3. $\frac{1}{2}m\omega^2\left(R^2 + \frac{L^2}{12}\right)$

F-4. 2 m/s

खण्ड़ (G) :

G-1. $2\hat{k}$ kg m^2/s

G-2. 16 kg m^2/s

G-3. $\frac{\left(I + \frac{mr^2}{2}\right)\omega_0}{I + 2mr^2}$

G-4. 10 rad/s

G-5. $\frac{4\pi m}{M + 2m}$

G-6. $3v / 4\ell$

खण्ड़ (H) :

H-1 $V_A = 25$ m/s, $V_B = 75$ m/s

H-2 $V_O = 4$ m/sec $\hat{i}$, $V_A = (4\hat{i} + 3\hat{j})$m/sec

H-3 $V_{CM} = 7$ m/s.

H-4 (a) $\frac{4v_0}{3}$ (b) $\frac{5v_0}{3\ell}$

(c) $v_x = \frac{v_0}{2}$, $v_y = -\frac{2v_0}{3}$

H-5. (a) $v_A = 2at = 10.0$ cm/s,
$v_B = \sqrt{2}\,at = 7.1$ cm/s, $v_0 = 0$;

(b) $a_A = 2a\sqrt{1 + \left(\frac{2t^2a}{R}\right)^2} = 5.6$ cm/s^2,

$a_B = a = 2.5$ cm/s^2, $a_0 = a^2t^2 / R = 2.5$ cm/s^2

खण्ड़ (I) :

I-1. $\sqrt{\frac{4gh}{3}}$

I-2. $\frac{7}{10}mv^2$

I-3. $\frac{2}{3}g$

I-4. $\frac{7}{3}mg$

I-5. $\sqrt{3g(R - r)}$

I-6. $4\pi R/5$

I-7. 5 μmg, 20 N

खण्ड़ (J) :

J-1. $\omega = 3\,v/2\ell$

J-2. (a) $\frac{m_2u}{m_1+m_2}$ (b) $\frac{m_1u}{m_1+m_2}$

(c) $-\frac{m_2u}{m_1+m_2}$

(d) $\frac{m_1^2m_2uL}{2\ (m_1+m_2)^2}, \frac{m_1m_2^2uL}{2\ (m_1+m_2)^2}$

(e) $\frac{m_1(m_1+4m_2)L^2}{12\ (m_1+m_2)}$

(f) $\frac{m_2u}{m_1+m_2}, \frac{6m_2u}{(m_1+4m_2)L}$

J-3. (a) $\frac{I}{m}, \frac{2I}{mR}$ (b) $\frac{\pi mR}{2I}$ (c) $\frac{\pi R}{2}$

J-4. 100 rad/sec.

खण्ड़ (K) :

K-1. $\frac{1}{2}$mg a sinθ, x = $\frac{a\tan\theta}{2}$

भाग - II

खण्ड़ (A) :

A-1. (B) **A-2.** (C)

खण्ड़ (B) :

B-1. (C) **B-2.** (A) **B-3.** (A)
B-4. (C) **B-5.** (D) **B-6.** (C)
B-7. (C) **B-8.** (B) **B-9.** (D)
B-10. (D) **B-11.** (D)

खण्ड़ (C) :

C-1. (A) **C-2.** (C) **C-3.** (C)

खण्ड़ (D) :

D-1. (B) **D-2.** (C) **D-3** (B)
D-4 (A) **D-5.** (C)

खण्ड़ (E) :

E-1. (A) **E-2.** (C) **E-3.** (D)
E-4. (A) **E-5.** (C)

खण्ड़ (F) :

F-1. (B) **F-2.** (C)

खण्ड़ (G) :

G-1. (C) **G-2.** (B) **G-3.** (D)
G-4. (B) **G-5.** (C)

खण्ड़ (H) :

H-1. (B) **H-2.** (B) **H-3.** (C)
H-4. (A) **H-5.** (A)

खण्ड़ (I) :

I-1. (B) **I-2.** (A) **I-3.** (B)
I-4. (D) **I-5.** (A) **I-6.** (D)
I-7. (A) **I-8.** (C) **I-9** (D)

खण्ड़ (J) :

J-1. (D) **J-2.** (B)

खण्ड़ (K) :

K-1. (A) **K-2.** (A) **K-3.** (A)

भाग - III

1. (A) $\rightarrow$p,q,r ; (B) $\rightarrow$ p,q,r ; (C) p,q (D) p,q,r

2. (A) $\rightarrow$ p ; (B) $\rightarrow$ q,s (C) p (D) q,s

EXERCISE-2

भाग - I

1. (D) **2.** (D) **3.** (D)
4. (C) **5.** (C) **6.** (B)
7. (D) **8.** (B) **9.** (B)
10. (D) **11.** (D) **12.** (B)
13. (C) **14.** (A) **15.** (D)
16. (A) **17.** (A) **18.** (D)
19. (B) **20.** (B) **21.** (B)
22. (D) **23.** (B) **24.** (A)

भाग - II

1.	16	**2.**	28	**3.**	2
4.	6	**5.**	2	**6.**	4
7.	4	**8.**	10	**9.**	1
10.	2	**11.**	8	**12.**	9
13.	5	**14.**	1	**15.**	2
16.	10	**17.**	(a) 10 (b) 20		
18.	25	**19.**	12	**20.**	20
21.	9	**22.**	5		

भाग - III

1.	(CD)	**2.**	(ABC)	**3.**	(ABC)
4.	(ABCD)	**5.**	(ACD)	**6.**	(BC)
7.	(ABC)	**8.**	(ACD)	**9.**	(CD)
10.	(ABCD)	**11.**	(BC)	**12.**	(ABD)
13.	(ABC)	**14.**	(BC)	**15.**	(ACD)
16.	(AD)	**17.**	(ACD)		

भाग - IV

1.	(B)	**2.**	(C)	**3.**	(D)
4.	(D)	**5.**	(C)	**6.**	(A)

EXERCISE-3

भाग - I

1.	(A)	**2.**	(CD)	**3.**	(AB)
4.	10	**5.**	(C)	**6.**	(A)
7.	(B)	**8.**	(D)	**9.**	(D)
10.	(D)	**11.**	(A)	**12.**	(BC)
13.	(B)	**14.**	4	**15.**	9
16.	(B)	**17.**	(C)	**18.**	3
19.	(D)	**20.**	(A)	**21.**	(D)
22.	(AB)	**23.**	8	**24.**	(CD)
25.	4	**26.**	2	**27.**	7
28.	(D)	**29.**	6	**30.**	(D)
30.	(D)	**31.**	(ABD)	**32.**	(D)
33.	(D)	**34.**	(C)	**35.**	(D)
36.	(A)	**37.**	(BCD)	**38.**	(Bonus)
39.	(A)	**40.**	(AC)	**41.**	0.75
42.	(A)				

भाग – II

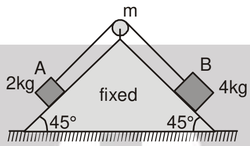
1.	(1)	**2.**	(4)	**3.**	(3)
4.	(1)	**5.**	(3)	**6.**	(3)
7.	(3)	**8.**	(3)	**9.**	(4)
10.	(3)	**11.**	(2)	**12.**	(3)
13.	(3)	**14.**	(2)	**15.**	(3)
16.	(3)	**17.**	(1,3)	**18.**	(2)
19.	(2)	**20.**	(2)	**21.**	(3)

High Level Problems (HLP)

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. छड़ का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो। (i) छड़ के बांये सिरे से पारित लम्बवत् अक्ष के परितः। (ii) छड़ के द्रव्यमान केन्द्र से पारित तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः जिसका रेखिक घनत्व $\lambda = ax$ के अनुसार परिवर्तित होता है, यहां a धनात्मक स्थिरांक है तथा 'x' छड़ के बांये सिरे से किसी भाग की दूरी है। छड़ की लम्बाई ℓ है–

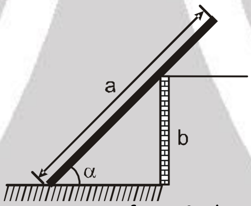
2. चित्र में दिखाई गई घिरनी की त्रिज्या 10 cm है तथा इसकी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I = 0.5$ kg-m^2 (B तथा A दोनो गति करते है।)



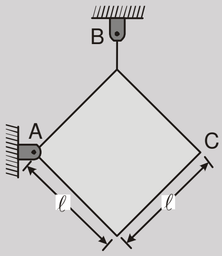
(a) सभी समतल सतह को घर्षण रहित मानते हुए तथा घिरनी एवं डोरी में कोई फिसलन नही है मानते हुए 4 kg के ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करो।

(b) यदि A ब्लॉक व नत तल के मध्य घर्षण गुणांक $\mu = 0.5$ है तथा B ब्लॉक के नीचे का तल घर्षण रहित है घिरनी एवं डोरी में कोई फिसलन नही है। मानते हुए 4kg के ब्लॉक का त्वरण ज्ञात करों।

3. 'a' लम्बाई की एक समान छड़ को एक चिकनी दीवार के विरूद्ध नीचे प्रदर्शित चित्रानुसार रखा गया है। यदि छड़ बिना फिसले, क्षैतिज से न्यूनतम कोण α बना सकती है, तो छड़ के निचले सिरे और क्षैतिज सतह के मध्य घर्षण गुणांक ज्ञात कीजिए।

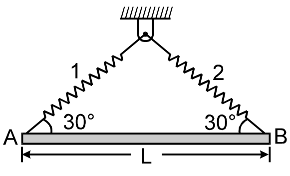


4. m द्रव्यमान की समरूप वर्गाकार प्लेट चित्रानुसार लटकाई जाती है। यदि अचानक रस्सी टूट जाये तो इस क्षण के तुरन्त बाद ज्ञात करो।

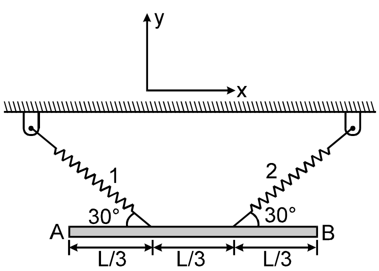


(a) प्लेट का कोणीय त्वरण (b) C कोने का त्वरण (c) A पर प्रतिक्रिया

5. m द्रव्यमान की एक समान बेलनाकार छड़ AB दो स्प्रिंग से चित्रानुसार लटकी है यदि स्प्रिंग 2 टूट जाए तो इस क्षण ज्ञात कीजिए-



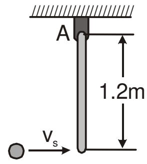
(i)



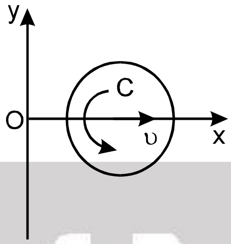
(ii)

(a) छड़ का कोणीय त्वरण (b) बिन्दु A का त्वरण (c) बिन्दु B का त्वरण

6. एक 2 kg द्रव्यमान का गोला दांयी ओर 5 m/s के प्रारम्भिक वेग से क्षैतिज दिशा में गति करता हुआ 8 kg द्रव्यमान की एक दृढ़ छड़ AB के निचले सिरे से टकराता है। छड़ बिन्दु A से कीलकित की जाती है तथा प्रारम्भ में विरामअवस्था में है। छड़ व गोले के मध्य प्रत्यावस्थान गुणांक 0.80 मानते हुए टक्कर के ठीक बाद छड़ का कोणीय वेग व गोले का वेग ज्ञात करो।



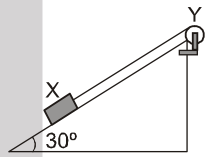
7. एक घूर्णित चकती (चित्र), x अक्ष की धनात्मक दिशा में गति करती है। तात्क्षणिक घूर्णन अक्ष की स्थिति को दर्शाने वाली y(x) की समीकरण ज्ञात कीजिए। यदि प्रारम्भ में चकती की अक्ष C बिन्दु O पर स्थित थी जिसके बाद वह गति



(a) नियत वेग v के साथ शुरू करती है, जबकि चकती नियत कोणीय त्वरण β से वामावर्त घूमना शुरू करती है। (प्रारम्भिक कोणीय वेग शून्य है।)

(b) नियत त्वरण a (व प्रारम्भिक वेग शून्य है) के साथ शुरू करती है, जबकि चकती नियत कोणीय वेग ω से वामावर्त घूमती है।

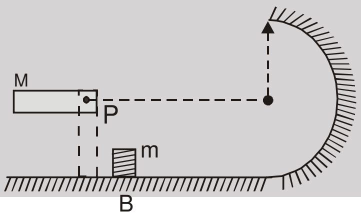
8. 0.5 kg का एक ब्लॉक X, एक लम्बी व द्रव्यमानरहित रस्सी की सहायता से घर्षणरहित नत तल जो क्षैतिज से 30º कोण पर झुका हुआ है, पर रखा जाता है। रस्सी को एक 2 kg द्रव्यमान व 0.2 m त्रिज्या के समरूप बेलन y पर चित्रानुसार लपेटा जाता है। बेलन को प्रारम्भिक कोणीय वेग इस प्रकार दिया जाता है कि ब्लॉक X, तल पर उपर की ओर गति प्रारम्भ करता है।



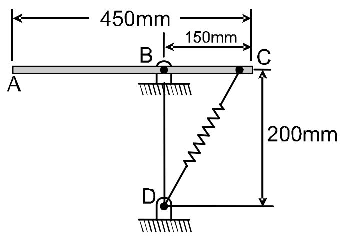
(a) गति के दौरान रस्सी में तनाव ज्ञात करो।

(b) किसी क्षण Y के कोणीय वेग का परिमाण 10 rad s^{-1} है, तो उस क्षण के बाद विरामावस्था तक आने में X द्वारा तय दूरी ज्ञात करो।

9. M द्रव्यमान व R लम्बाई की एक छड़ चित्रानुसार P पर निलम्बन से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष घूमने के लिये स्वतंत्र है। पहले इसे इस प्रकार लेते हैं कि यह क्षैतिज होती है और फिर छोड़ते हैं। छड़ निचले बिन्दु पर m द्रव्यमान के एक छोटे ब्लॉक B से टकराती है व रूक जाती है। द्रव्यमानों के अनुपात ज्ञात कीजिए, ताकि छोटा ब्लॉक B, R त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर पूरा चक्कर लगाता है। सभी घर्षण नगण्य है।



10. 3 kg की एक समान छड़ एक चिकने निलम्बन B के सापेक्ष एक ऊर्ध्वाधर तल में घूमती है। एक स्प्रिंग जिसका नियतांक k = 300 N/m तथा लम्बाई (बिना खींची अवस्था में) 100 mm है, छड़ से चित्रानुसार जुड़ी है। यह जानते हैं कि इस अवस्था में छड़ का कोणीय वेग 4 रेडियन/सेकण्ड दक्षिणावर्त है। छड़ का कोणीय वेग ज्ञात करो, जबकि यह क्रमशः घूमती है ; [g = 10 m/s^2]



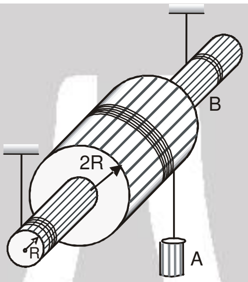
(D, B के उर्ध्वाधर नीचे है)

(a) 90º से (b) 180º से

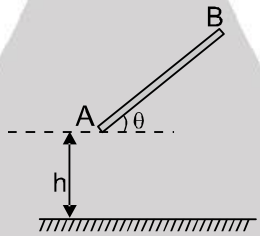
11. किसी कण का एक निश्चित बिन्दु 'O' के सापेक्ष कोणीय संवेग समय के साथ $\vec{M} = \vec{a} + \vec{b}t^2$ के अनुसार परिवर्तित होता है, जहाँ $\vec{a}$, $\vec{b}$ नियत सदिश व $\vec{a} \perp \vec{b}$ है। कण पर कार्यरत बल आघूर्ण N का बिन्दु 'O' के सापेक्ष मान ज्ञात कीजिए जब सदिश N व M के मध्य कोण 45° है।

12. m_1 द्रव्यमान का एक समान तख्ता, इस पर रखे m_2 द्रव्यमान के एक समान गोले सहित एक घर्षणहीन क्षैतिज तल पर विरामावस्था में स्थित है। F परिमाण का एक नियत क्षैतिज बल तख्ते पर आरोपित किया जाता है। तख्ता और इस पर स्थित गोले का केन्द्र किस त्वरण से गति करेंगे, जबकि तख्ते और गोले के मध्य कोई फिसलन नहीं है।

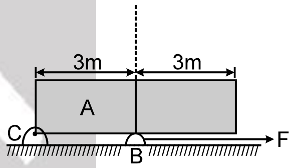
13. नीचे प्रदर्शित चित्र व्यवस्था में भार A का द्रव्यमान m तथा एक पुली B का द्रव्यमान M है। अपनी अक्ष के सापेक्ष पुली का जड़त्व आघूर्ण I है और पुली की त्रिज्याऐं क्रमशः R और 2R है। धागे के द्रव्यमान को नगण्य मानिए। निकाय को स्वतंत्र छोड़ने के पश्चात् भार A का त्वरण ज्ञात कीजिए। (बेलन की अक्ष क्षैतिज है एवं कहीं भी फिसलन नहीं मानें)



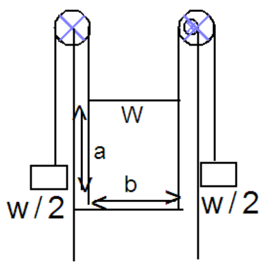
14. ℓ लम्बाई की समरूप छड़ AB को विरामावस्था से क्षैतिज से θ कोण पर झुकी हुई अवस्था से छोड़ा जाता है। यह h ऊँचाई से गिरकर घर्षण रहित क्षैतिज फर्श से प्रत्यास्थ टक्कर करती है। टक्कर के बाद छड़ का द्रव्यमान केन्द्र किस ऊँचाई तक वापस उछलता है।



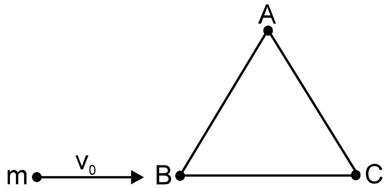
15. 25 kg तथा 6m लम्बाई का एक–समान ब्लॉक A,C बिन्दु पर निलम्बित है तथा छोटा ब्लॉक B सम्पर्क के लिए चित्रानुसार रखा जाता है। F = 400N का एक नियत बल ब्लॉक B पर चित्रानुसार क्षैतिज दिशा में लगाया जाता है। B की चाल क्या होगी ? जब यह 1.5 m दूरी तय करता है। B का द्रव्यमान 2.5 kg तथा सभी० सम्पर्क सतह पर घर्षण गुणांक 0.3 है। [ln(3/2) 0.41 तथा g = 10 ms^{-2}]



16. w भार की खिड़की को, दो रस्सियों से आदर्श घिरनी द्वारा चित्रानुसार जोड़ा जाता है। रस्सी के अन्तिम सिरे पर खिड़के के भार से आधे भार (w/2) के ब्लॉक जुड़े हुए है तथा खिड़की, खिड़की के फ्रेम में हल्के से रखी हुई है। एक रस्सी को काटा जाता है। जिससे खिड़की नीचे की ओर गति करती है। खिड़की का त्वरण क्या होगा यदि, μ फ्रेम तथा खिड़की की सतह के लिए घर्षण गुणांक हो व 'a' तथा 'b' खिड़की की ऊचाँई तथा चौड़ाई हो।



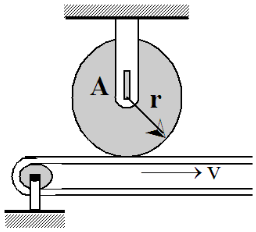
17. तीन कण A, B, C प्रत्येक का द्रव्यमान m है एक द्रव्यमान रहित दृढ़ छड़ द्वारा जुड़े हैं जो एक 'a' भुजा का समबाहु त्रिभुज बनाते हैं। कोई 'm' द्रव्यमान का अन्य कण v_0 वेग से BC भुजा की दिशा में 'B' कण से चित्रानुसार टकराता है। टकराने वाला कण टक्कर के तुरन्त बाद रूक जाता है -



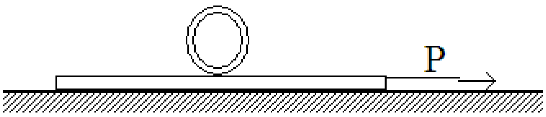
(a) त्रिभुज ABC द्वारा उसके अग्र गति के दौरान अर्द्ध घूर्णन में लगा समय ज्ञात करो।

(b) इस समयान्तराल में कण B का कुल विस्थापन क्या है।

18. 4 kg तथा r = 75 mm, त्रिज्या की एक चकती A विराम अवस्था में नियत चाल υ = 18 m/s से गति करती हुई बेल्ट के सम्पर्क में रखी जाती है। μ_k = 0.25 चकती की सतह तथा बेल्ट के बीच घर्षण गुणांक है। चकती के नियत कोणीय चाल तक पहुँचने से पहले चकती द्वारा तय चक्करों की संख्या क्या होगी। (माना बेल्ट द्वारा चकती पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल चकती के भार के बराबर है)



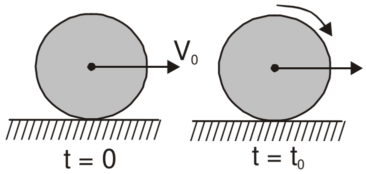
19. 6kg व 160 mm व्यास का एक बेलन 1.5 kg की प्लेट पर विराम में है। बेलन तथा प्लेट प्रारम्भ में विराम में है जब P = 25 N का बल 0.75 s के लिए प्लेट पर लगाया जाता है। प्लेट तथा बेलन व धरातल के बीच घर्षण गुणांक μ_s = 0.25 तथा μ_k = 0.20 है तो ज्ञात करो ;



(a) क्या बेलन प्लेट के सापेक्ष फिसलेगा। **(b)** बेलन तथा प्लेट का परिणामी वेग क्या होगा।

20. m द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक समरूप चकती खुरदरे नत तल, जो क्षैतिज से 30º कोण बनाता है, पर ऊपर की ओर गतिशील है। यदि स्थैतिक व गतिज घर्षण गुणांक, प्रत्येक μ के बराबर है और केवल गुरूत्वीय व घर्षण बल ही कार्यरत हो, तब चकती पर कार्यरत घर्षण बल का परिमाण _______ है और नत तल पर इसकी दिशा ________ ('उपर' या 'नीचे' लिखिए)। **[JEE - 1997]**

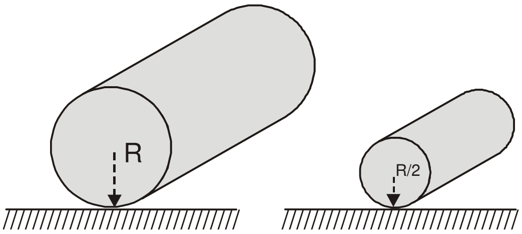
21. m द्रव्यमान व R त्रिज्या की एक समान चकती को एक खुरदरे क्षैतिज फर्श पर v_0 वेग से क्षैतिज दिशा में प्रक्षेपित किया जाता है, जिससे कि यह t = 0 समय पर शुद्ध फिसलन गति प्रारम्भ करती है। t_0 सेकण्ड पश्चात् यह शुद्ध लुढ़कन गति आरम्भ करती है, जैसा चित्र में प्रदर्शित किया गया है।



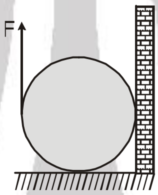
(a) t_0 पर चकती के द्रव्यमान केन्द्र का वेग ज्ञात कीजिए।

(b) घर्षण गुणांक μ मानते हुए t_0 की गणना कीजिए। समय के फलन में, घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य समय के फलन के रूप में तथा समय t, जो t_0 से बहुत अधिक है, में इसके द्वारा किया गया कुल कार्य ज्ञात कीजिए। **[JEE - 1997]**

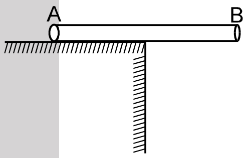
22. 'M' द्रव्यमान तथा अवितान्य पदार्थ की बनी हुई एक दरी (carpet) इसकी लम्बाई के अनुदिश 'R' त्रिज्या के बेलन के रूप में लपेटी जाती है तथा खुरदरे फर्श पर रखी जाती है। जब एक हल्का सा धक्का दिया जाता है तो दरी बिना फिसले खुलना शुरू हो जाती है। जब इसकी त्रिज्या R/2 है तो बेलनाकार भाग के अंक्ष का क्षैतिज वेग ज्ञात करो। **[JEE - 1990]**



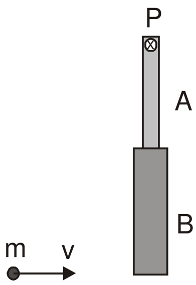
23. चित्र में ऊर्ध्वाधर बल F दर्शाया गया है जो W भार के एक समरूप बेलन के स्पर्श रेखीय लग रहा है। सभी सतह व बेलन के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.5 है। W के पदों में, बेलन को बिना घुमायें इस पर लगने वाला अधिकतम बल ज्ञात कीजिए।



24. 2m द्रव्यमान का एक पीने का पाईप (drinking straw) एक चिकनी टेबल पर समकोणीय रूप से इस प्रकार स्थित है। कि इसका आधा भाग टेबल से आगे तक फैला रहे। m द्रव्यमान की एक मक्खी, पाईप के आन्तरिक सिरे 'A' पर उतरती है और पाईप के अनुदिश तब तक चलती रहती है, जब तक कि यह दूसरे सिरे 'B' पर न पहुँच जाये। यह पाईप तब भी नहीं झुकता है, यदि एक अन्य मक्खी, पहली वाली मक्खी पर बैठ जाती है। वह अधिकतम द्रव्यमान ज्ञात कीजिए जो द्वितीय मक्खी रख सकती है। (यहाँ पाईप और टेबल के मध्य घर्षण को नगण्य मानिए)



25. दो समरूप पतली छड़ें A तथा B प्रत्येक 0.6 m लम्बाई व द्रव्यमान क्रमशः 0.01 kg व 0.02 kg की दृढ़ता पूर्वक किनारों से जोड़ी जाती है। चित्रानुसार निकाय की हल्की छड़ को बिन्दु P से कीलकित किया जाता है ताकि यह ऊर्ध्वाधर तल में बिन्दू P के परितः स्वतंत्रतापूर्वक घूर्णन कर सके। एक 0.05 kg द्रव्यमान की छोटी वस्तु क्षैतिज दिशा में गति करती हुई निकाय के निचले किनारे से टकराती है तथा इससे चिपक जाती है। वस्तु का वेग क्या हो कि निकाय को क्षैतिज स्थिति तक उठाया जा सके। **[JEE - 1994]**



26. एक समरूप m द्रव्यमान व a भुजा का घनाकार ब्लॉक खुरदरे क्षैतिज तल पर रखा है। एक क्षैतीज बल F घन के एक फलक पर केन्द्र के ठीक ऊपर आधार से $\frac{3a}{4}$ ऊचाई पर लगाया जाता है।

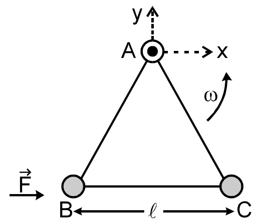
(i) घन के भुजा के सापेक्ष लुढ़कने के लिए 'F' का न्यूनतम मान क्या होगा? (माना कि घन फिसलता नहीं है)

(ii) μ_s का न्यूनतम मान क्या होना चाहिए ताकि घन पलट जाए।

(iii) यदि $\mu = \mu_{min}$, तो पलटने के लिए न्यूनतम बल ज्ञात करो।

(iv) न्यूनतम μ_s ताकि F_{min} के कारण पलट जाये।

27. तीन कण A, B और C प्रत्येक का द्रव्यमान m एक दूसरे से द्रव्यमानहीन दृढ़ छड़ों की सहायता से भुजा वाली दृढ़ त्रिभुजाकार वस्तु का निर्माण करते हैं। यह वस्तु क्षैतिज घर्षणरहित टेबल (x - y तल में) पर रखी गई है तथा इसे बिन्दु A पर इस प्रकार लटकाया हुआ है ताकि यह A से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष चित्रानुसार घर्षण रहित गति कर सके। वस्तु को A के परित टेबल पर नियत कोणीय वेग ω से घूर्णन गति दी जाती है।

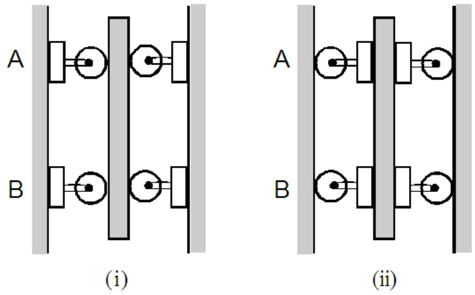


(a) निलम्बन (hinge) द्वारा वस्तु पर आरोपित क्षैतिज बल का परिमाण ज्ञात कीजिए।

(b) समय T पर जब भुजा BC, x-अक्ष के समान्तर है, चित्रानुसार BC के अनुदिश B पर F बल आरोपित किया जाता है। समय T के ठीक पश्चात् निलम्बन के द्वारा वस्तु पर, आरोपित बल का x–घटक व y–घटक ज्ञात कीजिए।

[JEE Mains 02, (1+4)/60]

28. m द्रव्यमान के एक ब्लॉक को चित्रानुसार 4 चकती, प्रत्येक का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या r = 75 mm के सम्पर्क में रखा जाता है। ब्लॉक को विराम से छोड़ने के तुरन्त बाद त्वरण क्या होगा। ध्यान रहे कि चकतियों पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल शुद्ध लौटनी गति के लिए पर्याप्त है। स्थिति (i) में चकतीयां दीवार से जुड़े सम्पर्क से जुड़ी हुई है तथा स्थिति (ii) में चकतीयां तख्तें से जुड़े सम्पर्क से जुड़ी हुई है।



(a) m = 5 kg तथा M = 2 kg.

(b) चकती का द्रव्यमान M नगण्य है।

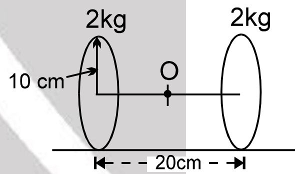
(c) ब्लॉक का द्रव्यमान m नगण्य है।

29. 2 kg द्रव्यमान व 10 cm त्रिज्या की दो पतली वृत्ताकार चकतियों को 20 cm लम्बाई की दृढ़ एवं द्रव्यमानरहित एक छड़ द्वारा जोड़ा गया है। छड़ की अक्ष, चकतियों के केन्द्रों से होकर जाती हुई तथा उनके तल के लम्बवत् है। इस समायोजन को एक ट्रक पर इस प्रकार रखा जाता है कि इस समायोजन की अक्ष क्षैतिज है तथा ट्रक की गति की दिशा के लम्बवत् है। ट्रक के फर्श के साथ इसका घर्षण पर्याप्त रूप से अधिक है, जिससे यह समायोजन बिना फिसले ट्रक पर लुढ़क सकता है। x-अक्ष ट्रक की गति की दिशा में तथा z-अक्ष ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर लीजिए। यदि ट्रक का त्वरण 9 m/s^2 है। गणना कीजिए -

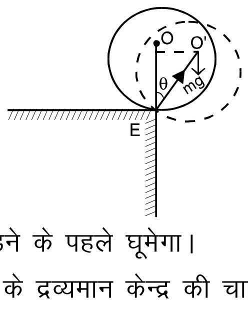
[JEE - 1997' 5/100]

(a) प्रत्येक चकती पर घर्षण बल

(b) समायोजन के द्रव्यमान केन्द्र O के परितः प्रत्येक चकती पर कार्यरत घर्षण बल आघूर्ण का परिमाण एवं दिशा। बल–आघूर्ण को x, y व z अक्षों पर एकांक सदिश $\hat{i}$, $\hat{j}$ & $\hat{k}$ के पदों में सदिश रूप में प्रदर्शित कीजिए।



30. एक आयताकार दृढ़ स्थिर ब्लॉक एक लम्बा क्षैतिज किनारा रखता है। एक ठोस समांगी बेलन जिसकी त्रिज्या r है, विरामावस्था में क्षैतिज रखा गया है कि इस बेलन की लम्बाई, किनारे के समान्तर इस प्रकार है कि बेलन का अक्ष तथा ब्लॉक का किनारा एक ही ऊर्ध्वाधर तल में है। यहाँ ब्लॉक के किनारे पर पर्याप्त घर्षण विद्यमान है ताकि एक छोटा सा विस्थापन, बेलन को किनारे पर बिना फिसले लुढ़का सकता है। ज्ञात करो।



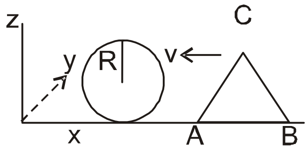
(a) कोण θ_c जिससे बेलन, किनारे को छोड़ने के पहले घूमेगा।

(b) किनारे को छोड़ने से ठीक पहले बेलन के द्रव्यमान केन्द्र की चाल होगी।

(c) बेलन की स्थानान्तरीय और घूर्णन गतिज ऊर्जाओं का अनुपात, जब बेलन का द्रव्यमान केन्द्र किनारे के साथ क्षैतिज रेखा में हो।

[JEE - 1995]

31. 'm' द्रव्यमान व त्रिभुजाकार अनुप्रस्थ काट का एक वेज (AB = BC = CA = 2R) नियत वेग $-v\hat{i}$ से R त्रिज्या के स्थिर गोले की तरफ चित्रानुसार चिकनी क्षैतिज टेबल पर गतिशील है। वेज स्थिर गोले के साथ पूर्ण प्रत्यास्थ टक्कर करता है तथा बिना घूर्णन किये हुए समान पथ से वापस आ जाता है। सभी प्रकार के घर्षण नगण्य मानिये तथा यह भी मानिये कि वेज गोले के साथ बहुत कम समय Δt के लिए संपर्क में रहता है। इस दौरान गोला वेज पर नियत बल $\vec{F}$ आरोपित करता है। टक्कर के बाद भी गोला स्थिर रहता है।



(a) Δt समय के दौरान वेज पर आरोपित बल $\vec{F}$ व टेबल द्वारा वेज पर आरोपित अभिलम्ब बल $\vec{N}$ ज्ञात कीजिए।

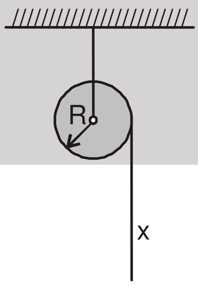
(b) माना कि 'h' वेज के द्रव्यमान केन्द्र व बल $\vec{F}$ की क्रिया रेखा के मध्य लम्बवत् दूरी है। अभिलम्ब बल $\vec{N}$ के कारण ब्लॉक के केन्द्र के परितः Δt समय के दौरान बलाघूर्ण का परिमाण ज्ञात कीजिए। **[JEE - 1998, 8]**

32. 'R' त्रिज्या की चकती का पृष्ठीय घनत्व (द्रव्यमान/क्षेत्रफल) चकती के केन्द्र से दूरी x पर निम्न प्रकार निर्भर करता है। $\sigma(x) = \alpha + \beta x$ जहां α तथा β धनात्मक अचर है। चकती के केन्द्र से पारित व तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

33. एक समान ठोस शंकु का उसकी सममीत अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण की गणना करो, यदि शंकु का द्रव्यमान m व आधार की त्रिज्या R है।

34. एक बिन्दु जिसका त्रिज्यीय सदिश मूल बिन्दु O के सापेक्ष $\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j}$ है, इस पर एक बल $\vec{F} = A\hat{i} + B\hat{j}$ आरोपित किया जाता है। जहाँ a, b व A, B अचर है तथा $\hat{i}$, $\hat{j}$ क्रमशः x व y अक्ष के इकाई सदिश है। बिन्दु O के सापेक्ष बल आघूर्ण N ($\vec{F}$ का बलाघूर्ण) तथा बलाघूर्ण भुजा ℓ ज्ञात कीजिए।

35. चित्रानुसार R त्रिज्या और M द्रव्यमान का एक एकसमान बेलन, एक स्थिर क्षैतिज अंक्ष O के पारितः स्वतंत्रापूर्वक घूर्णन कर सकता है। ℓ लम्बाई और m द्रव्यमान की एक पतली डोरी को एक एकल परत में बेलन के चारों ओर लपेटा गया है। बेलन का कोणीय त्वरण, डोरी के लटके हुए भाग की लम्बाई x के फलन के रूप में ज्ञात कीजिए। डोरी के लपटे हुए भाग का गुरूत्वीय केन्द्र बेलन के अक्ष पर माना गया है।



36. M द्रव्यमान व ℓ लम्बाई की ऊर्ध्वाधर एक समान छड़ उसके ऊपरी सिरे से गुजरने वाली क्षैतिज घर्षण रहित निलम्बन अक्ष के सापेक्ष घूम सकती है। एक क्षैतिज आती हुई m द्रव्यमान की गोली छड़ के निचले सिरे से टकराती है और चिपक जाती है। इसके परिणाम स्वरूप छड़, $\alpha(\alpha < 90^\circ)$ कोण से घूम जाती है। माना कि m << M, ज्ञात कीजिए।

(a) उड़ती हुई गोली का वेग ;

(b) इस टक्कर के दौरान "गोली+छड़" निकाय के संवेग में वृद्धि। संवेग में यह परिवर्तन किस कारण होगा।

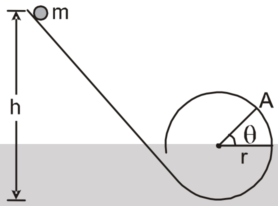
(c) गोली, छड़ के ऊपरी सिरे से नीचे कितनी दूरी x पर टकराए कि "गोली–छड़" निकाय का संवेग टक्कर के दौरान नियत रहे।

37. चित्रानुसार m द्रव्यमान की एक–गोलाकार गेंद लूप आकृति के पथ पर नीचे की ओर बिना फिसले लुढ़क रही है। रेखीय भाग में, गेंद को निम्नतम बिन्दु से h ऊँचाई से छोड़ा गया है। प्रदर्शित किये गये वृत्ताकार भाग की त्रिज्या r है।

(a) जब गेंद उस बिन्दु A पर है, जहाँ त्रिज्या, क्षेतिज से θ कोण बनाती है, तब गेंद की गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

(b) जब गेंद A पर है। तब इसके केन्द्र के त्रिज्यीय तथा स्पर्श रेखीय त्वरण ज्ञात कीजिये।

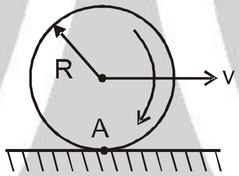
(c) यदि h = 50 सेमी, r = 10 सेमी, θ = 0 तथा m = 70 ग्राम है तो गेंद पर लगने वाले अभिलम्बवत् बल तथा घर्षणं बल ज्ञात कीजिये।



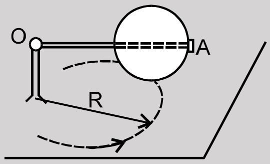
38. एक पहिये की त्रिज्या R = 0.50 m है। इसके परिधि पर एक बिन्दु A स्थित है। यह पहिया बिना फिसले एक क्षैतिज सतह के अनुदिश वेग v = 1.00 m/s. से लुढ़कता है। ज्ञात कीजिए -

(a) बिन्दु A के त्वरण सदिश का परिमाण व दिशा।

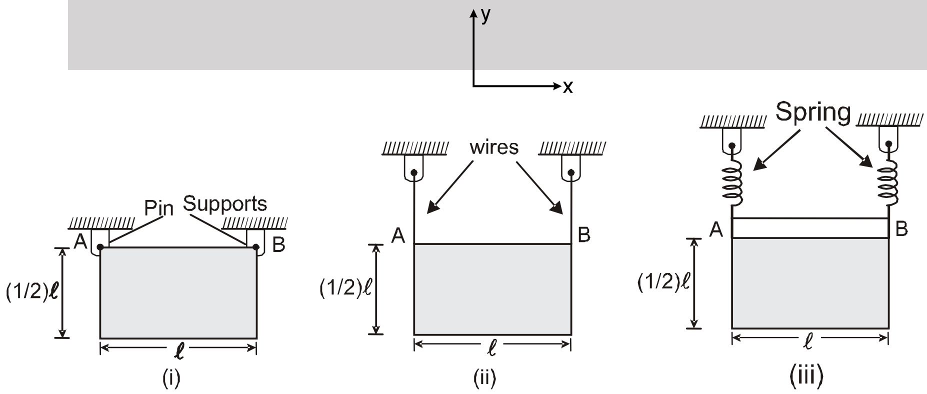
(b) उन दो क्रमागत क्षणों के मध्य, जब यह सतह पर स्पर्श करता है, बिन्दु A द्वारा तय की गई कुल दूरी



39. m द्रव्यमान तथा r त्रिज्या का एक समान गोला क्षैतिज अक्ष OA के परितः घूर्णन करना हुआ क्षैतिज तल पर शुद्व लोटनी गति कर रहा है। इस प्रक्रम में गोले का केन्द्र R त्रिज्या के वृत्त के अनुदिश वेग से गति करता है। गोले की गतिज ऊर्जा ज्ञात करो।



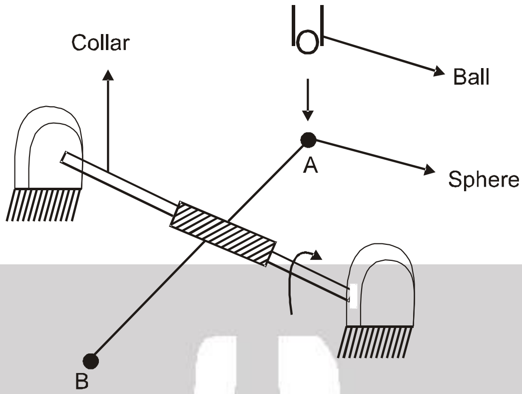
40. 'm' द्रव्यमान की एक समरूप प्लेट दिखाए गए तरीके से लटकायी जाती है। प्रत्येक स्थिति के लिए B से संबंध हटाने के ठीक बाद ज्ञात करो ;



(a) प्लेट का कोणीय त्वरण

(b) इसके द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण

41. चित्र (1) किसी भी प्रकार के क्षय से मुक्त यांत्रिक निकाय है। दो गोले (A तथा B) प्रत्येक का द्रव्यमान m है, 2r लम्बाई व 4m द्रव्यमान की एक समान छड़ AB से चित्रानुसार जुड़े हुए है। कॉलर द्रव्यमानहीन है। चित्र (1) में गोले A की स्थिति के ठीक ऊपर सुरंग है— **[Olympiad_2011]**



जिससे m द्रव्यमान की गेदें उपर्युक्त अन्तराल में ऊर्ध्वाधर गिरायी जाती है। गिरती हुई गेंद के कारण गोला तथा छड़ घूर्णन करती है, अब गोला B उस स्थिति पर पहुँचता है, जहाँ पर पहले गोला A था, अब इस गोले B की सुरंग से गिरने वाली अन्य गोले से टक्कर होती है तथा यह प्रक्रिया लगातार चलती रहती है। टक्कर से ठीक पहले सुरंग से गिरने वाली गेंद का वेग υ है, सभी टक्कर प्रत्यास्थ है तथा गोला व गिरने वाली गेदों के बिन्दु द्रव्यमान मान सकते है।

(a) सुरंग से निकलने वाली i वीं गेंद की निकाय से टक्कर के पश्चात् इस निकाय के घूर्णन भाग का {ω_i, υ, तथा r} कोणीय वेग ω_{i+1} ज्ञात करो।

ω_{i+1}

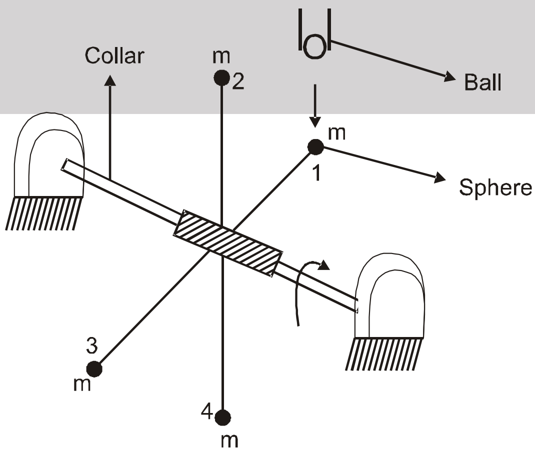
(b) इस निकाय के घूर्णन भाग की कोणीय चाल ω को नियत मानिये। भाग (a) मे प्राप्त समीकरणों को हल करके ω^* का मान υ तथा r के पदों में ज्ञात करो। स्पष्ट कीजिये कि नियत ω^* किस प्रकार ऊर्जा संरक्षण का उल्लंघन नहीं करता है।

ω^* =

(c) {i,υ, तथा r के पदों में} ω_i प्राप्त कर भाग (a) में प्राप्त व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।

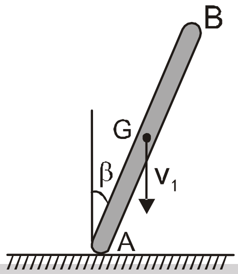
ω_i =

(d) यदि हम गोलों के एक युग्म के अतिरिक्त गोलों के दो युग्म पर चित्रानुसार विचार करते है। तब घूर्णी निकाय की नयी कोणीय चाल ω^* ज्ञात करो (अर्थात् भाग b के सगंत उत्तर दीजिये)



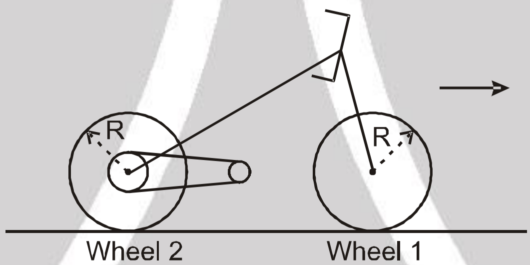
ω^* =

42. L लम्बाई की एक छड़ ऊर्ध्वाधर से β कोण पर घर्षण रहित फर्श पर A पर ऊर्ध्वाधर वेग v_1 से टकराती है तथा कोणीय वेग नहीं है। मानिये कि फर्श A के साथ टक्कर पूर्ण प्रत्यास्थ है, टक्कर के तुरन्त बाद छड़ के कोणीय वेग के लिए व्यंजक ज्ञात करो।



43. ऊर्ध्वाधर स्थिति में एक साईकिल पर विचार करते है जो सीधी क्षैतिज सड़क पर बिना फिसले आगे की ओर त्वरित गति कर रही है। साईकिल तथा साईकिल सवार का संयुक्त द्रव्यमान M है तथा पैडल व गियर निकाय द्वारा पिछले पहिये पर आरोपित त्वरित बलाघूर्ण का परिमाण τ है। प्रत्येक पहिये की त्रिज्या तथा जडत्व आघूर्ण (अक्ष के सापेक्ष) क्रमशः R तथा I है। गुरूत्वीय त्वरण g है **[INPhO-2013]**

(a) निकाय(साईकिल तथा साईकिल सवार) का मुक्त वस्तु चित्र बनाईयें।



(b) उपरोक्त बताई गई राशियों के पदों में त्वरण **a** ज्ञात करो।

a =

(c) सरल रूप में यह मानिए कि निकाय का द्रव्यमान केन्द्र धरातल से R ऊँचाई पर है तथा प्रत्येक पहिये के केन्द्र से समान दूरी 2R पर है। माना पहिये तथा धरातल के मध्य घर्षण गुणांक (स्थैतिक तथा गतिक दोनों) μ है। यह मानिए कि $M >> I/R^2$ तथा फिसलन नही है। साईकिल के अधिकतम त्वरण a_m के लिए शर्त प्राप्त कीजिए।

a_m =

(d) $\mu = 1.0$ के लिए a_m की गणना कीजिए।

a_m =

HLP Answers

1. (i) $I = \frac{a\ell^4}{4}$ (ii) $\frac{a\,\ell^4}{36}$

2. (a) 0.25 m/s^2 (b) 0.125 m/s^2

3. $\frac{a\cos\alpha\sin^2\alpha}{2b - a\cos^2\alpha\sin\alpha}$

4. (a) $\frac{3g}{2\sqrt{2}\ell}$ (cw) (b) $\frac{3}{2}g\downarrow$ (c) $\frac{Mg}{4}\uparrow$

5. (i) (a) 3 g/L (cw) (b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \hat{j}\right)g = 1.323\,g \angle 49.1^\circ$

(c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} - 2\hat{j}\right)g = 2.18\,g \angle -66.6^\circ$

(ii) (a) g/L (cw) (b) $-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)g\,\hat{i}$ (c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\hat{j}\right)$–g=$1.323g \angle -130.9^\circ$

6. $\omega = \frac{45}{14} = 3.21$ rad/s (ccw), $v_s = \frac{1}{7} = 0.143$ m/s $\leftarrow$

7. (a) $y = \frac{v^2}{\beta x}$ (अतिपरलवय) ; (b) $y = \frac{\sqrt{2ax}}{\omega}$ (परलवय)]

8. (a) 1.633N (b) 1.224 m

9. $\frac{M}{m} = \sqrt{15}$

10. (a) $\frac{2}{3}\sqrt{86}$ rad/s (b) 4 rad/s

11. $N = 2b\sqrt{\frac{a}{b}}$

12. $w_1 = F/(m_1 + 2/7m_2)$; $w_2 = 2/7\,w_1$

13. $w = 3g\,(M + 3m) / (M + 9m + I/R^2)$

14. $H = \left(\frac{1-3\cos^2\theta}{1+3\cos^2\theta}\right)^2 h$; $h = \frac{49\,\pi\,\ell}{144}$

15. $\sqrt{323.4}$ m/s or 18.52 m/sec.

16. $A = \left(\frac{a - \mu b}{3a + \mu b}\right) g$

17. (a) $t = \frac{6a\pi}{\sqrt{3}\,v_0}$ (b) $s = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\left(2\pi+\sqrt{3}\right)^2}$

18. $\frac{216}{\pi}$

19. (a) पाइप बिना फिसले घूर्णन गति करेगा (b) पाइप : $\frac{5}{6}$ m/s $\rightarrow$, $\frac{125}{24}$ rad/s (ccw) ; प्लेट : $\frac{5}{3}$ m/s $\rightarrow$

20. $\frac{mg}{6}$, up

21. (a) $v = \frac{2v_0}{3}$; $t_0 = \frac{v_0}{3\mu g}$ (b) $w = -\mu mg\,(v_0 t - \frac{3}{2}\mu g t^2)$; $-\frac{1}{6} m v_0^2$

22. $\upsilon = \sqrt{\frac{14gR}{3}}$

23. $\frac{3W}{8}$

24. 3m

25. 6.3 m/s

26. (i) $\frac{2}{3}$ mg, (ii) $\mu_{min} = 0$, (iii) F = 2 mg], (iv) $\mu_s = \frac{2}{3}$

27. (a) $\sqrt{3}\,m\,\omega^2\,\ell$ (b) $F_y = \sqrt{3}\,m\,\omega^2\,\ell$ $F_x = -F/4$]

28. (i) (a) 5g/9 $\downarrow$ (b) g $\downarrow$ (c) 0 (ii) (a) $\frac{13g}{17}\downarrow$ (b) g $\downarrow$ (c) $\frac{2g}{3}\downarrow$

29. (a) 6 N (b) $\vec{\tau}_1 = 0.6\hat{k} - 0.6\hat{j}$, $\vec{\tau}_2 = -0.6\hat{k} - 0.6\hat{j}$

30. (a) $\theta = \cos^{-1}\frac{4}{7}$ (b) $v = \sqrt{\frac{4}{7}gr}$ (c) $\frac{k_T}{k_R} = 6$

31. (a) $\vec{F} = \frac{2mV}{\Delta t}\hat{i} - \frac{2mV}{\sqrt{3}\Delta t}\hat{k}$; $\vec{N} = \left(\frac{2mV}{\sqrt{3}\Delta t} + mg\right)\hat{k}$, (b) $\vec{\tau} = -\left(\frac{4mVh}{\sqrt{3}\Delta t}\right)\hat{j}$

32. $2\pi\left(\frac{\alpha R^4}{4} + \frac{\beta R^5}{5}\right)$

33. $I = 3/10\,mR^2$

34. $N = (aB - bA)\ \hat{k}$, जहाँ k, Z - अक्ष का इकाई सदिश है। $\ell = |aB - bA|/\sqrt{A^2 + B^2}$

35. $\beta = 2mgx/R\ell(M + 2m)$

36. (a) $v = (M/m)\ \sqrt{2/3g\ell}\ \sin(\alpha/2)$; (b) $\Delta p = M\sqrt{1/6g\ell}\ \sin(\alpha/2)$; (c) $x \approx 2/3\ell$

37. (a) $mg(h\text{-}r\text{-}r\sin\alpha)$, (b) $\frac{10}{7}g\left(\frac{h}{r} - 1 - \sin\alpha\right)$, $-\frac{5}{7}g\cos\alpha$ (c) 4N, 0.2N ऊपर की ओर

38. (a) $\omega_A = \frac{v^2}{R} = 2.0\ m/s^2$, त्वरण सदिश ω_A स्थाई रूप से पहिये के केन्द्र की ओर निर्देशित हैं ; (b) $s = 8R = 4.0$ m

39. $T = 7/10\ mv^2\ (1 + 2/7r^2/R^2)]$

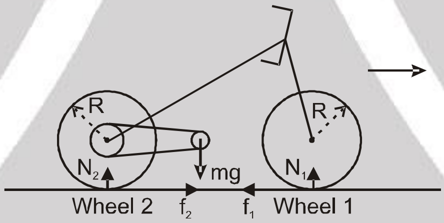
40. (i) (a) $\frac{1.2g}{\ell}$ (cw) (b) $-0.3(\hat{i} + 2\hat{j})$ g (ii) (a) $24g/17\ell$ (cw) (b) $12g/17\downarrow$ (iii) $2.4g/\ell$ (cw) (b) $0.5g\downarrow$

41. (a) $\omega_{i+1} = \frac{7}{13}\omega_i + \frac{6}{13}\frac{v}{r}$ (b) $\omega^* = \frac{v}{r}$ after this no further collision occurs

(c) $\omega_{i+1} = \frac{v}{r}\left(1 - \left(\frac{7}{13}\right)^i\right)$ (d) ω^* will remain same as in case b.

42. $\omega = \frac{v_1}{L}\frac{12\sin\beta}{3\sin^2\beta + 1}$ (cw)

43. (a) Here $f_1 f_2$ are frictional forces and N_1, N_2 are normal reactions



(b) $a = \frac{\tau}{MR^2 + 2I}R$ (c) $a \le \frac{\mu g/2}{(1 - \mu/4)}$ (d) $a_m = 2g/3$