सरल आवर्त गति (SIMPLE HARMONIC MOTION)

1. आवर्ती गति

जब कोई वस्तु या गतिशील कण, एक निश्चित समय–अन्तराल पश्चात् एक निश्चित पथ के अनुदिश अपनी गति को पुनः दोहराता है, तो ऐसी गति **आवर्ती गति** कहलाती है तथा इस समयान्तराल को **आवर्त–काल** या आवर्त गति काल (T) कहते है। आवर्ती गति का पथ रैखिक, वृत्ताकार, दीर्घवृत्ताकार या अन्य कोई वक्र हो सकता है। उदाहरणस्वरूप पृथ्वी का सूर्य के चारों ओर घूर्णन।

2. दोलन या कम्पन्न गति

इर्द–गिर्द (आना – जाना) प्रकार की गति दोलन गति कहलाती है। इसका आवर्त गति होना आवश्यक नहीं है तथा इसके निश्चित सीमान्त बिन्दु होना भी आवश्यक नहीं है। जैसे दीवार घड़ी के लोलक की गति।

जिस दोलन गति में ऊर्जा संरक्षित होती है, वह आवर्त गति भी होती है।

दोलन गति में कार्यरत बल / बल आघूर्ण (माध्य अवस्था की ओर इंगित) को प्रत्यानयन बल / बल आघूर्ण कहते हैं।

मंदित दोलनों में ऊर्जा प्रतिरोधी बलों के विरूद्ध व्ययित होती है तथा कुल यांत्रिक ऊर्जा घटती है।

3. सरल आवर्त गति (SHM)

यदि कम्पन गति में प्रत्यानयन बल / बल आघूर्ण, कण / वस्तु के विस्थापन के सीधे समानुपाती हो तथा हमेशा माध्य स्थिति की तरफ इंगित हो तो ऐसी गति को सरल–आवर्त गति कहते है। यह कम्पन गति का सबसे सरल (व्याख्या करने में आसान) रूप है।

3.1 सरल आवर्त गति के प्रकार

(a) रैखिक सरल आवर्त गति : जब कण साम्यावस्था स्थिति के इधर–उधर सरल रेखा के अनुदिश गतिमान होता है। A तथा B सीमान्त स्थितियाँ है। M माध्य स्थिति है।

AM = MB = आयाम

(b) कोणीय सरल आवर्त गति : जब वस्तु / कण दिये गये अक्ष के परितः वक्रीय पथ पर घूर्णन के लिए स्वतन्त्र हो तो कण कोणीय दोलन करता है।

3.2 सरल आवर्त गति का समीकरण :

सरल आवर्त गति के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है :

$$F = -kx$$

जहाँ k = सरल आवर्त गति के लिए धनात्मक स्थिरांक = बल नियतांक

x = माध्य स्थिति से विस्थापन

या $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$ [सरल आवर्त गति का अवकलन समीकरण]

$\Rightarrow \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ जहाँ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

इसका हल होगा $x = A\sin(\omega t + \phi)$

3.4 सरल आवर्त गति के अभिलक्षण

नोट : दर्शाए गए चित्र में कण का पथ सरल रेखा है।

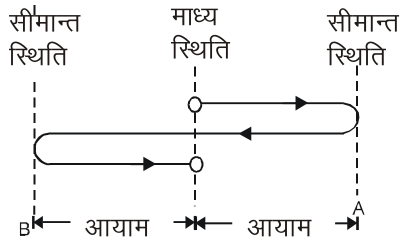
(a) विस्थापन - यह किसी क्षण कण की माध्य स्थिति से दूरी के रूप मे परिभाषित होता है।

समय t पर सरल आवर्त गति मे विस्थापन $x = A\sin(\omega t + \phi)$ से दिया जाता है।

(b) आयाम - यह कण का साम्य स्थिति से महत्तम–विस्थापन है।

आयाम = $\frac{1}{2}$ [दो सीमान्त बिन्दुओं या स्थितियों के बीच की दूरी]

यह निकाय की ऊर्जा पर निर्भर करता है।



(c) कोणीय आवृत्ति (ω) : $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ तथा इसका मात्रक रेडियन /सैकण्ड है।

(d) आवृत्ति (f) : एकांक समय में दोलनों की संख्या को दोलन की आवृत्ति कहते है।

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, इसका मात्रक sec^{-1} या Hz है।

(e) आवर्त काल (T) : वह न्यूनतम समयान्तराल है जिसमें दोलनी गति पुनः दोहराई जाती है, आवर्तकाल कहलाता है।

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Solved Examples

Example 1. सरल आवर्त गति करते हुए कण की गति को समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। आवर्तकाल ज्ञात करो।

Solution. $\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \qquad \omega^2 = 4 \quad \omega = 2$

आवर्त काल ; $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$

(f) कला : वह भौतिक राशि जो कण की गति की अवस्था निरूपित करती है (उदाहरणतः इसकी स्थिति तथा किसी क्षण गति की दिशा) ज्या **(sin)** फलन के कोणांक $(\omega t + \phi)$ को गति की तात्क्षणिक कला कहते है।

(g) कला–स्थिरांक (φ) : सरल आवर्त गति के समीकरण में स्थिरांक ϕ को कला स्थिरांक या प्रारम्भिक कला कहते है। यह प्रारम्भिक स्थिति तथा गति की दिशा पर निर्भर करती है।

(h) वेग (v) : वेग, किसी क्षण कण के विस्थापन में परिवर्तन की दर के बराबर होता है। माना कि माध्य स्थिति से विस्थापन $x = A \sin(\omega t + \phi)$ है।

वेग, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\sin(\omega t + \phi)\right]$

$v = A\omega \cos(\omega t + \phi)$ या, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

माध्य स्थिति (x = 0) पर वेग महत्तम होता है।

$v_{max} = \omega A$

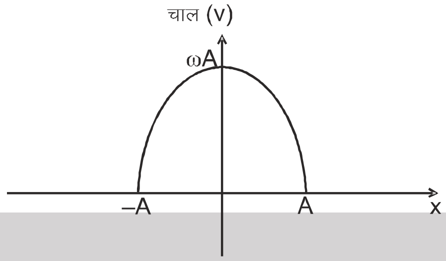
सीमान्त स्थिति (x = A) पर वेग न्यूनतम होता है।

v_{min} = शून्य

चाल (v) तथा विस्थापन (x) में ग्राफ :

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ $\qquad v^2 = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$

$v^2 + \omega^2x^2 = \omega^2A^2$ $\qquad \dfrac{v^2}{\omega^2A^2} + \dfrac{x^2}{A^2} = 1$



ग्राफ दीर्घवृत्ताकार होगा।

(i) त्वरण : किसी क्षण त्वरण, कण के वेग में परिवर्तन की दर के बराबर होता है।

त्वरण, $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}[A\omega\cos(\omega t + \phi)]$

$a = -\,\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$

$a = -\,\omega^2 x$

Note : ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि त्वरण सदैव माध्य स्थिति की ओर निर्देशित होता है। माध्य स्थिति (x = 0) पर त्वरण न्यूनतम होता है।

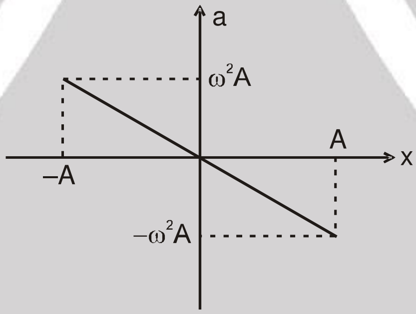
a_{min} = शून्य

सीमान्त स्थिति (x = A) पर त्वरण महत्तम होता है।

$a_{max} = \omega^2 A$

त्वरण (A) तथा विस्थापन (x) में ग्राफ

$a = -\,\omega^2 x$



Solved Examples

Example 2. सरल आवर्त गति करते हुए कण का समीकरण $x = (5\ m)\sin\left[(\pi s^{-1})t + \dfrac{\pi}{3}\right]$ है। कण का आयाम , आवर्तकाल तथा महत्तम चाल ज्ञात करो। t = 1 सैकण्ड पर वेग भी ज्ञात करो।

Solution. समीकरण $x = A\sin(\omega t + \delta)$ से तुलना करने पर, हम पाते है–

आयाम = 5 m

तथा आवर्तकाल = $\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\pi s^{-1}} = 2s.$

महत्तम चाल = $A\,\omega = 5\ m \times \pi\ s^{-1} = 5\pi$ m/s.

t समय पर वेग = $\dfrac{dx}{dt} = A\,\omega\cos(\omega t + \delta)$

t = 1 s पर

$v = (5\ m)\,(\pi\ s^{-1})\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{5}\right) = -\dfrac{5\pi}{2}$ m/s.

Example 3. सरल आवर्त गति करते हुए कण की कोणीय आवृत्ति 6.28 s^{-1} तथा आयाम 10 cm है। ज्ञात करो (a) आवर्तकाल (b) महत्तम चाल (c) महत्तम त्वरण (d) चाल जब माध्य स्थिति से विस्थापन 6 cm हो (e) t = 0 पर गति प्रारम्भ मानते हुए t = 1/6 सैकण्ड पर चाल।

Solution. (a) आवर्तकाल = $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6.28}$ s = 1 s.

(b) महत्तम चाल = $A\omega = (0.1 \text{ m})(6.28 \text{ s}^{-1}) = 0.628$ m/s.

(c) महत्तम त्वरण = $A\omega^2 = (0.1 \text{ m})(6.28 \text{ s}^{-1})^2 = 4 \text{ m/s}^2$.

(d) $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = (6.28 \text{ s}^{-1})\sqrt{(10\text{cm})^2 - (6\text{cm})^2} = 50.2$ cm/s.

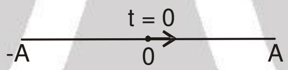
(e) t = 0 पर वेग शून्य है अर्थात् कण सीमान्त स्थिति में है। विस्थापन का समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$x = A \cos\omega t$.

वेग = $v = -A\omega \sin \omega t$.

$t = \frac{1}{6}$ s पर $v = -(0.1 \text{ m})(6.28 \text{ s}^{-1}) \sin\left(\frac{6.28}{6}\right) = (-0.628 \text{ m/s}) \sin\frac{\pi}{3} = 54.4$ cm/s.

Example 4. एक कण माध्य स्थिति से शुरू होकर धनात्मक सीमान्त स्थिति की ओर दर्शाये अनुसार गति करता है। सरल आवर्त गति का समीकरण ज्ञात करो। सरल आवर्त गति का आयाम A है।



Solution. सरल आवर्त गति के सामान्य समीकरण $x = A \sin(\omega t + \phi)$ से व्यक्त करते हैं।

$t = 0, x = 0$

$\therefore \quad 0 = A \sin\phi$

$\therefore \quad \phi = 0, \pi \qquad \phi \in [0, 2\pi)$

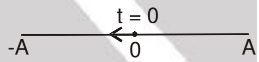
तथा $t = 0, v = +ve$

$\therefore \quad A\omega \cos\phi = +ve$ या $\phi = 0$

अतः कण t = 0 पर माध्य स्थिति पर होता है तथा धनात्मक सीमान्त स्थिति की ओर गतिमान है, तो सरल आवर्त गति का समीकरण

$x = A \sin\omega t$

इसी प्रकार



$\phi = \pi$ के लिए

$\therefore$ सरल आवर्त गति का समीकरण $x = A \sin(\omega t + \pi)$

या $x = -A \sin \omega t$

Note :

- यदि माध्य स्थिति मूल बिन्दु पर नहीं है, तो हम x को $x - x_0$ से प्रतिस्थापित करते है तथा समीकरण $x - x_0 = A \sin(\omega t + \phi)$ हो जाता है, यहाँ x_0 माध्य स्थिति का निर्देशांक है।

Example 5. एक कण "A" आयाम व "T" आवर्तकाल से सरल आवर्त गति कर रहा है। कण द्वारा 0 से A/2 तक जाने में लिया गया समय ज्ञात करो।

Solution. माना सरल आवर्त गति का समीकरण है ; $x = A \sin \omega t$

जब $x = 0, t = 0$

जब $x = A/2$ है तो ; $A/2 = A \sin \omega t$

या $\sin \omega t = 1/2 \qquad \omega t = \pi/6$

$\frac{2\pi}{T} t = \pi/6 \qquad t = T/12$

अतः लिया गया समय T/12 है, जहाँ T सरल आवर्त गति का आवर्तकाल है।

Example 6. 2 kg द्रव्यमान का कण एक सरल रेखा पर बल F = (8 – 2x) N के प्रभाव में गतिशील है। यह x = 6 m से विरामावस्था में छोड़ा जाता है।

(a) क्या कण सरल आवर्त गति करता है। (b) कण की साम्यावस्था ज्ञात करो।
(c) कण की गति का समीकरण ज्ञात करो। (d) सरल आवर्त गति का आवर्तकाल ज्ञात करो।

Solution. $F = 8 - 2x$ या $F = -2(x - 4)$

साम्यावस्था के लिए $F = 0$

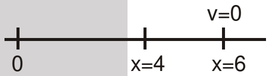
$\Rightarrow$ x = 4 पर साम्यावस्था स्थिति है।

इस प्रकार कण की गति सरल आवर्त गति है, जिसका बल नियातंक 2 व साम्यावस्था स्थिति x = 4 पर है।

(a) हाँ, गति सरल आवर्त गति है।

(b) साम्यावस्था स्थिति x = 4 पर है।

(c) x = 6 m पर कण विराम पर है ,अर्थात् यह एक सीमान्त स्थिति है।



इस प्रकार आयाम A = 2 m है तथा प्रारम्भ में कण एक सीमान्त स्थिति पर है।

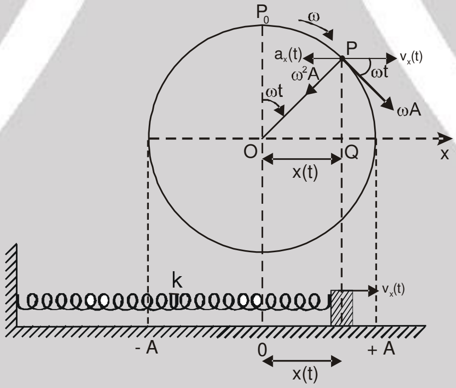
$\therefore$ सरल आवर्त गति का समीकरण

$x - 4 = 2\cos\omega t$, जहाँ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$ अर्थात् $x = 4 + 2\cos t$

(d) आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ sec.

4. एक समान वृत्ताकार गति के प्रक्षेप के रूप में सरल आवर्त गति

नियत कोणीय चाल ω से, A त्रिज्या के वृत्त में चित्रानुसार गति कर रहे एक कण पर विचार कीजिए।



माना t = 0 पर कण एक वृत्त (Y-अक्ष) के शीर्ष पर है। त्रिज्या OP, y-अक्ष के साथ t समय पर $\theta = \omega t$ कोण बनाती है। X-अक्ष पर एक लम्ब PQ डालिए। X-अक्ष के अनुदिश समय t पर स्थिति सदिश, वेग सदिश व त्वरण सदिश के घटक निम्न है।

$x(t) = A\sin\omega t$

$v_x(t) = A\omega\cos\omega t$

$a_x(t) = -\omega^2 A\sin\omega t$

उपरोक्त समीकरणें दर्शाती है कि लम्ब का पाद Q, X-अक्ष पर सरल आवर्त गति करता है। इसका आयाम A तथा कोणीय आवृत्ति ω है। इस प्रकार Y-अक्ष पर लम्ब का पाद भी A आयाम व कोणीय आवृत्ति ω[$y(t) = A\cos\omega t$] से सरल आवर्त गति करता है। दो सरल आवर्त गतियों की कला में π/2 का अन्तर है।

5. सरल आवर्त गति में विस्थापन,वेग तथा त्वरण का ग्राफीय निरूपण

विस्थापन, $x = A \sin \omega t$

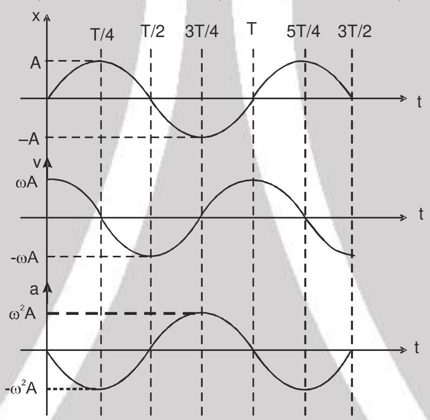
वेग, $v = A\omega \cos \omega t = A\omega \sin (\omega t + \frac{\pi}{2})$ या $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

त्वरण, $a = -\omega^2 A \sin\omega t = \omega^2 A \sin (\omega t + \pi)$ या $a = -\omega^2 x$

नोट : $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$ $a = -\omega^2 x$

ये सम्बन्ध x के किसी भी समीकरण के लिए सत्य है।

समय, t	**0**	**T/4**	**T/2**	**3T/4**	**T**
विस्थापन, x	0	A	0	– A	0
वेग, v	$A\omega$	0	$-A\omega$	0	$A\omega$
त्वरण, a	0	$-\omega^2 A$	0	$\omega^2 A$	0



1. समस्त तीनों राशियाँ विस्थापन, वेग तथा त्वरण समय के साथ आवर्ती रूप से समान आवर्तकाल में परिवर्तित होती है।
2. वेग आयाम, विस्थापन आयाम का ω गुना होता है। ($v_{max} = \omega A$).
3. त्वरण आयाम, विस्थापन आयाम का ω^2 गुना होता है। ($a_{max} = \omega^2 A$).
4. सरल आवर्त गति में वेग, विस्थापन से $\frac{\pi}{2}$ कला कोण आगे होता है।
5. सरल आवर्त गति में त्वरण, वेग से $\frac{\pi}{2}$ कला कोण आगे होता है।

6. सरल आवर्त गति की ऊर्जा

6.1 गतिज ऊर्जा (KE)

$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2)$ (x के फलन के रूप में)

$= \frac{1}{2} m A^2\omega^2 \cos^2 (\omega t + \theta) = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 (\omega t + \theta)$ (t के फलन के रूप में)

$KE_{max} = \frac{1}{2} kA^2$; $\langle KE \rangle_{0-T} = \frac{1}{4} kA^2$; $\langle KE \rangle_{0-A} = \frac{1}{3} kA^2$

गतिज ऊर्जा की आवृत्ति = 2 × (सरल आवर्त गति की आवृत्ति)

6.2 स्थितिज ऊर्जा (PE)

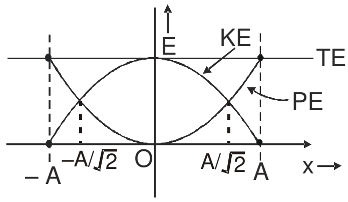
$\frac{1}{2} Kx^2$ (x के फलन के रूप में) $= \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 (\omega t + \theta)$ (t के फलन के रूप में)

6.3 कुल यांत्रिक ऊर्जा (TME)

कुल यांत्रिक ऊर्जा = गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}$ k $(A^2 - x^2)$ + $\frac{1}{2}$ Kx^2 = $\frac{1}{2}$ KA^2

अतः सरल आवर्त गति में कुल यांत्रिक ऊर्जा नियत होती है।

6.4 सरल आवर्त गति की ऊर्जा का ग्राफीय निरूपण



Solved Examples

Example 7. द्रव्यमान 0.50 किग्रा० का एक कण बल F = – (50 N/m)x के अन्तर्गत सरल आवर्त गति कर रहा है। यदि यह दोलन केन्द्र को 10 मीटर/सैकण्ड की चाल से पार करता हो, तो गति का आयाम ज्ञात करो।

Solution. कण की गतिज ऊर्जा जब यह दोलन केन्द्र पर है –

$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}$ (0.50 kg) $(10 \text{ m/s})^2$ = 25 J.

यहाँ स्थितिज ऊर्जा शून्य है। महत्तम विस्थापन x = A, पर चाल शून्य है, अतः गतिज ऊर्जा शून्य होगी। यहाँ स्थितिज ऊर्जा $\frac{1}{2}kA^2$ होगी। चूंकि यहाँ ऊर्जा–ह्रास नहीं होता है।

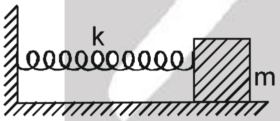
$\frac{1}{2}kA^2 = 25$ J .....(i)

कण पर बल F = – (50 N/m)x.

इस प्रकार, स्प्रिंग नियतांक k = 50 न्यूटन/मी० है।

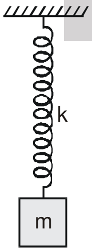
(i) समी० से $\frac{1}{2}$ (50 N/m) A^2 = 25 J या A = 1 m.

7. स्प्रिंग–द्रव्यमान निकाय

(1) 

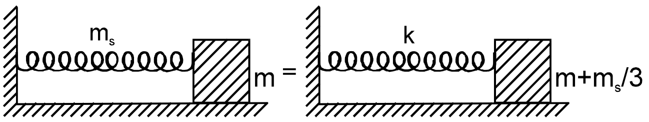
चिकनी सतह

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(2) 

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(3) यदि स्प्रिंग का द्रव्यमान m_s है तो



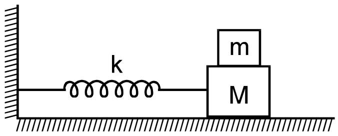
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_s}{3}}{k}}$

Solved Examples

Example 8. द्रव्यमान 200 ग्राम का एक कण सरल आवर्त गति करता है। स्प्रिंग नियतांक 80 न्यूटन/मी० की स्प्रिंग इसको प्रत्यानयन बल प्रदान करती है। आवर्त काल ज्ञात करो।

Solution. आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{200\times10^{-3}kg}{80\ N/m}} = 2\pi \times 0.05\ s = 0.31\ s$

Example 9. चित्र में दर्शाये अनुसार दो पिण्डों के बीच घर्षण गुणांक μ तथा क्षैतिज तल चिकना है। (a) यदि निकाय को थोड़ा विस्थापित करके मुक्त करें, तो आवर्तकाल ज्ञात करो। (b) पिण्डों के बीच घर्षण बल का परिमाण ज्ञात करो जब माध्य स्थिति से विस्थापन x है। (c) यदि ऊपर वाला पिण्ड नीचे वाले पिण्ड के सापेक्ष नहीं फिसले, तो महत्तम आयाम क्या हो सकता है ?



Solution. (a) लघु आयाम के लिए दोनों पिण्ड साथ–साथ कम्पन करेंगे तथा कोणीय आवृत्ति –

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

और आवर्त काल – $T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$

(b) माध्य स्थिति से x विस्थापन पर पिण्डों का त्वरण –

$$a = -\omega^2 x = \left(\frac{-kx}{M+m}\right)$$

अतः ऊपर वाले पिण्ड पर परिणामी बल –

$$ma = \left(\frac{-mkx}{M+m}\right)$$

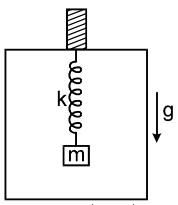
यह बल नीचे वाले पिण्ड के घर्षण बल द्वारा प्रदान किया जाता है। अतः घर्षण बल का परिमाण $\left(\frac{mk|x|}{M+m}\right)$ है।

(c) सीमान्त अवस्था में ऊपर वाले पिण्ड की सरल आवर्त गति के लिए आवश्यक महत्तम बल $\frac{mkA}{M+m}$ है। परन्तु महत्तम घर्षण बल μ mg हो सकता है। अतः

$$\frac{mkA}{M+m} = \mu\, mg \quad \text{या} \quad A = \frac{\mu(M+m)g}{k}$$

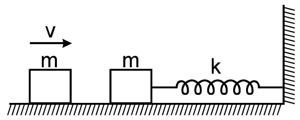
Example 10. द्रव्यमान m का पिण्ड k स्प्रिंग नियतांक की स्प्रिंग द्वारा स्थिर लिफ्ट की छत से साम्यवस्था में लटकाया जाता है। अचानक लिफ्ट की रस्सी टूट जाती है तथा लिफ्ट स्वतन्त्रतापूर्वक गिरती है। बताओ कि पिण्ड अब लिफ्ट के अन्दर mg/k आयाम से सरल आवर्त गति करेगा।

Solution. जब लिफ्ट स्थिर है, तो स्प्रिंग पिण्ड द्वारा खिंच जाती है। माना खिंचाव x तथा तनाव kx है जोकि पिण्ड के भार को सन्तुलित करती है।



इस प्रकार x = mg/k। जैसे ही रस्सी टूटती है, तो लिफ्ट 'g' त्वरण से गिरना प्रारम्भ करती है। हम लिफ्ट के निर्देश तन्त्र को लेते है तो हम छद्म बल, mg को पिण्ड पर ऊपर की ओर कार्यरत मानते है। यह बल भार को सन्तुलित करेगा। इस प्रकार, पिण्ड पर स्प्रिंग द्वारा kx परिणामी बल लगेगा जब यह स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई की स्थिति से x दूरी पर होगा। अतः इसकी गति लिफ्ट के अन्दर, स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई को माध्य स्थिति लेते हुए सरल आवर्त गति होगी। प्रारम्भ में स्प्रिंग x = mg/k से खिंची हुई है, यहाँ पिण्ड का वेग (लिफ्ट के सापेक्ष) शून्य है। इस प्रकार परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम mg/k है।

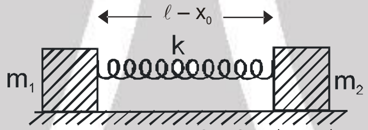
Example 11. चित्र में बांया पिण्ड, दांये पिण्ड से अप्रत्यास्थ टक्कर करता है तथा इसके साथ चिपक जाता है। परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम ज्ञात करो। सतह चिकनी है।



Solution. माना कि टक्कर बहुत अल्प समयान्तराल के लिए होती है तो हम संवेग संरक्षण के सिद्धान्त का प्रयोग कर सकते है। टक्कर के बाद उभयनिष्ठ वेग $\frac{v}{2}$ होगा। गतिज ऊर्जा = $\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$ है। चूंकि इस क्षण स्प्रिंग सामान्य लम्बाई की स्थिति में है, तो यह गतिज ऊर्जा कम्पन की कुल ऊर्जा होगी। यदि आयाम A हो तो कुल ऊर्जा को $\frac{1}{2}kA^2$ लिख सकते है। इस प्रकार

$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{4}mv^2$ से $A = \sqrt{\frac{m}{2k}}\,v$ प्राप्त होता है।

Example 12. द्रव्यमान m_1 व m_2 के दो गुटके सामान्य लम्बाई ℓ व स्प्रिंग नियतांक k वाली एक स्प्रिंग से जुड़े है। निकाय एक चिकनी क्षैतिज सतह पर रखा है। प्रारम्भ में स्प्रिंग चित्रानुसार x_0 से सम्पीड़ित है।

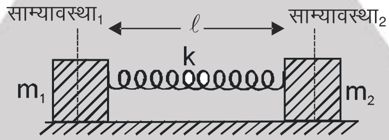


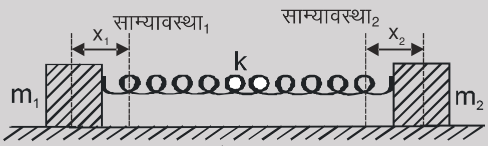
दर्शाइये कि दोनों गुटके उनकी साम्यावस्था की स्थिति के सापेक्ष सरल आवर्त गति करेंगे तथा ज्ञात करो।

(a) आवर्तकाल (b) प्रत्येक गुटके का आयाम

(c) समय के फलन के रूप में स्प्रिंग की लम्बाई

Solution : यहां दोनों गुटके समान समय पर साम्यावस्था में होंगे जब स्प्रिंग अपनी प्राकृतिक लम्बाई में है। माना साम्यावस्था$_1$ व साम्यावस्था$_2$ चित्रानुसार गुटके A व B की साम्यावस्था स्थिति है।





माना दोलनों के दौरान किसी समय पर गुटके उनकी साम्यावस्था स्थिति से x_1 व x_2 दूरी पर है।

चूंकि स्प्रिंग–गुटका निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है।

$\therefore \quad (m_1 + m_2)\Delta x_{cm} = m_1x_1 - m_2x_2 = 0$

या $m_1x_1 = m_2x_2$

प्रथम कण के लिए बल समीकरण –

$k(x_1 + x_2) = -m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}$ या $k\left(x_1 + \frac{m_1}{m_2}x_1\right) = -m_1a_1$

या $a_1 = -\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}x_1$ $\therefore$ $\omega^2 = \frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}$

इस प्रकार $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{K}}$ जहां $\mu = \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}$ जो प्रभावी द्रव्यमान के रूप में जाना जाता है।

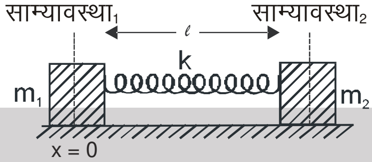
इसी प्रकार द्वितीय कण का आवर्तकाल भी ज्ञात किया जा सकता है। दोनों का आवर्तकाल समान होगा।

(b) माना गुटकों का आयाम A_1 व A_2 है। $m_1A_1 = m_2A_2$

ऊर्जा संरक्षण से ; $\frac{1}{2}k(A_1 + A_2)^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$ या $A_1 + A_2 = x_0$ या $A_1 + \frac{m_1}{m_2}A_1 = x_0$

या $A_1 = \frac{m_2x_0}{m_1+m_2}$ इसी प्रकार $A_2 = \frac{m_1x_0}{m_1+m_2}$

(c) माना प्रथम कण की साम्यावस्था स्थिति मूल बिन्दु पर है, अर्थात् x = 0 कण के x निर्देशांक को निम्न प्रकार लिख सकते है।

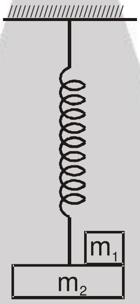


$x_1 = A_1\cos\omega t$ तथा $x_2 = \ell - A_2\cos\omega t$

इस प्रकार स्प्रिंग की लम्बाई लिखी जा सकती है ;

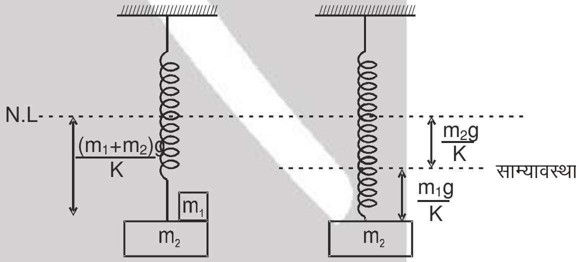
लम्बाई $= x_2 - x_1 = \ell - (A_1 + A_2)\cos\omega t$

Example 13. निकाय साम्यावस्था में एवं स्थिर है। अब द्रव्यमान m_1 को m_2 से हटा लेते है। परिणामी गति का आवर्तकाल एवं आयाम ज्ञात करो। स्प्रिंग नियतांक K है।



Solution. स्प्रिंग में प्रारम्भिक खिंचाव $x = \frac{(m_1+m_2)g}{K}$

अब यदि m_1 को हटा लेते है तो m_2 की साम्यावस्था स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई से $\frac{m_2g}{K}$ नीचे होगी।



प्रारम्भिक स्थिति पर चूंकि वेग शून्य है इसलिए यह सीमान्त स्थिति पर है।

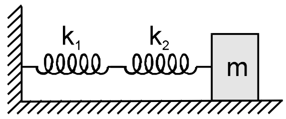
अतः आयाम $= \frac{m_1g}{K}$, आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K}}$ चुंकि केवल m_2 द्रव्यमान की वस्तु दोलन कर रही है

8. स्प्रिंगों का संयोजन

8.1 श्रेणीक्रम संयोजन :

कुल विस्थापन $x = x_1 + x_2$

दोनों स्प्रिंगों मे तनाव $= k_1x_1 = k_2x_2$



∴ श्रेणीक्रम संयोजन के लिए तुल्य स्थिरांक K_{eq} निम्न द्वारा व्यक्त किया जाता है

$1/k_{eq} = 1/k_1 + 1/k_2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$

नोट :

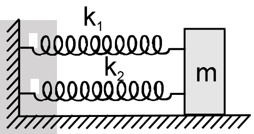
- श्रेणीक्रम संयोजन में, सभी स्प्रिंगों में तनाव समान होता है तथा खिंचाव अलग–अलग होता है। (यदि k समान हो तो खिंचाव भी समान होगा।)
- श्रेणीक्रम संयोजन में स्प्रिंग में खिंचाव, स्प्रिंग नियतांक के व्युत्क्रमानुपाती होता है।
- स्प्रिंग नियतांक, स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

  $\because k \propto 1/\ell$

  $\therefore k_1 \ell_1 = k_2 \ell_2 = k_3 \ell_3$
- यदि स्प्रिंग के 'n' टुकड़े कर दिये जायें तो प्रत्येक टुकड़े का स्प्रिंग नियतांक nk होगा।

8.2 समान्तर क्रम संयोजन :

दोनों स्प्रिंगों में खिंचाव समान होगा लेकिन दोनों पर कार्यरत बल अलग–अलग होगा। निकाय पर कार्यरत बल = F



$\therefore \quad F = -(k_1 x + k_2 x) \quad \Rightarrow \quad F = -(k_1 + k_2)x \quad \Rightarrow \quad F = -k_{eq}x$

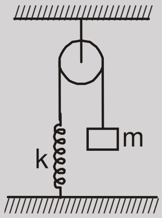
$\therefore \quad k_{eq} = k_1 + k_2 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}}$

9. सरल आवर्त गति में आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति ज्ञात करने की विधियाँ

(a) बल / बल आघूर्ण विधि **(b) ऊर्जा विधि**

Solved Examples

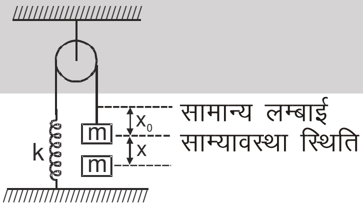
Example 14. चित्र में दर्शायी गई रस्सी, घिरनी तथा स्प्रिंग हल्की है। द्रव्यमान m का आवर्तकाल ज्ञात करो।



Solution. **(a) बल विधि**

माना ब्लॉक की साम्यावस्था में स्प्रिंग का विस्तार x_0 है।

$\therefore \quad kx_0 = mg \quad .....(1)$



अब यदि हम ब्लॉक को x दूरी से नीचे की ओर विस्थापित करें तो ब्लॉक पर माध्य स्थिति की ओर कुल बल निम्न है–

$F = k(x + x_0) - mg = kx \quad$ (1) का उपयोग करते हुए

इस प्रकार कुल बल माध्य स्थिति की ओर है एवं x के समानुपाती है। इसलिए कण सरल आवर्त गति करेगा तथा इसका आवर्त काल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

(b) ऊर्जा विधि

माना स्प्रिंग की साम्यावस्था लम्बाई पर गुटके की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य है। अब सामान्य लम्बाई से x दूरी नीचे गुटके की चाल v मानते है। चूंकि सरल आवर्त गति में कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित है।

$\therefore \quad -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 =$ नियतांक

समय के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते है

$-mgv + kxv + mva = 0$

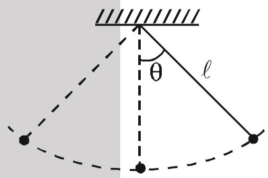
जहाँ a त्वरण है।

$\therefore \quad F = ma = -kx + mg$ या $F = -k(x - \frac{mg}{k})$

गति के लिए यह दर्शाता है कि बल नियतांक k तथा साम्यावस्था स्थिति $x = \frac{mg}{k}$ है।

इसलिए कण सरल आवर्त गति करेगा तथा इसका आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ होगा।

10. सरल लोलक



यदि एक भारी बिन्दुवत द्रव्यमान एक हल्की व अवितान्य डोरी के द्वारा एक दृढ़ आधार से लटकाया जाये तो यह व्यवस्था सरल लोलक कहलाती है। सरल लोलक का आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

(कभी–कभी हम गणना की सरलता के लिए $g = \pi^2$ लेते है)

Note :

- यदि सरल लोलक का कोणीय आयाम अधिक है तो आवर्तकाल

  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}\right)$ **(अन्य परीक्षाओं के लिए)**

  जहाँ θ_0 रेडियन में है।
- सरल लोलक के आवर्तकाल का सुत्र है यदि सरल लोलक की लम्बाई ℓ पृथ्वी की त्रिज्या R के तुलनात्मक है।

  $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\ell}\right)}}$ यहाँ, R = पृथ्वी की त्रिज्या
- अनन्त लम्बाई के सरल लोलक का आवर्त काल अधिकतम होता है जो कि $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ = 84.6 मिनट से दिया जाता है। (जहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या है।)
- सैकण्ड लोलक का आवर्तकाल 2 sec तथा $\ell = 0.993$ m है।
- सरल लोलक कोणीय सरल आवर्त गति करता है परन्तु अल्प कोणीय विस्थापन के लिए इसकी गति रेखीय सरल आवर्त गति मानी जाती है।
- यदि सरल लोलक पर आधारित घड़ी का आवर्त काल बढ़ता है तो घड़ी धीमी हो जाएगी परन्तु यदि आर्वतकाल घटता है तो घड़ी तीव्र हो जाती है।
- यदि g नियत व $\Delta\ell$ लम्बाई में परिवर्तन हो तो $\frac{\Delta T}{T}\times 100 = \frac{1}{2}\frac{\Delta\ell}{\ell}\times 100$
- यदि ℓ नियत व Δg त्वरण में परिवर्तन हो तो, $\frac{\Delta T}{T}\times 100 = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\times 100$
- यदि $\Delta\ell$ लम्बाई में परिवर्तन तथा Δg गुरूत्व के कारण त्वरण में परिवर्तन हो तो

  $$\frac{\Delta T}{T}\times 100 = \left[\frac{1}{2}\frac{\Delta\ell}{\ell} - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right]\times 100$$

Solved Examples

Example 15. 40 cm लम्बाई का एक सरल लोलक 0.04 rad के कोणीय आयाम से दोलन करता है। ज्ञात करो (a) आवर्तकाल (b) गोलक का रेखीय आयाम (c) गोलक की चाल जब डोरी ऊर्ध्वाधर से 0.02 rad का कोण बनाती है तथा (d) कोणीय त्वरण जब गोलक क्षणिक विरामावस्था पर है। $g = 10\ m/s^2$ लें।

Solution : (a) कोणीय आवृत्ति $\omega = \sqrt{g/\ell} = \sqrt{\frac{10 m/s^2}{0.4 m}} = 5\ s^{-1}$

आवर्तकाल $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5 s^{-1}} = 1.26$ s.

(b) रेखीय आयाम = 40 cm × 0.04 = 1.6 cm

(c) 0.02 rad विस्थापन पर कोणीय चाल $\omega = (5\ s^{-1})\ \sqrt{(0.04)^2 - (0.02)^2}$ rad = 0.17 rad/s.

यहाँ इस क्षण गोलक की चाल = (40 cm) × 0.175^{-1} = 6.8 cm/s.

(d) क्षणिक विरामावस्था पर, गोलक सीमान्त स्थिति पर है। अतः कोणीय त्वरण

$\alpha = (0.04\ rad)\ (25\ s^{-2}) = 1\ rad/s^2$.

10.1 त्वरित निर्देश तन्त्र में सरल लोलक का आवर्त काल :

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff.}}}$ जहाँ

$g_{eff.}$ = निर्देश तन्त्र में गुरूत्व के कारण प्रभावी त्वरण = $|\vec{g} - \vec{a}|$

$\vec{a}$ = निलम्बन बिन्दु का जमीन के सापेक्ष त्वरण

इस सूत्र को उपयोग करने की शर्त : $|\vec{g} - \vec{a}|$ = नियतांक

माध्य स्थिति पर $g_{eff} = \frac{\text{डोरी में त्वरण}}{\text{लोलक का द्रव्यमान}}$

Solved Examples

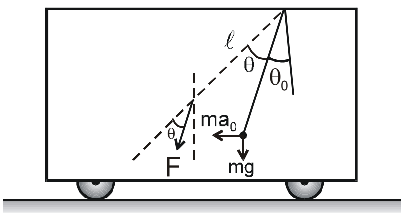
Example 16. एक क्षैतिज सड़क पर एक समान रूप से त्वरित कार की छत से एक सरल लोलक लटका हुआ है। यदि इसका त्वरण a_0 तथा लोलक की लम्बाई ℓ हो तो माध्य स्थिति के सापेक्ष अल्प दोलनों का दोलन काल ज्ञात कीजिए।

Solution. हम कार के तंत्र में कार्य करेंगे। क्योंकि यह सड़क के सापेक्ष त्वरित है, अतः m द्रव्यमान के गोलक पर एक छद्‌म बल ma_0 आरोपित करना होगा।

माध्य स्थिति के लिए कार के सापेक्ष गोलक का त्वरण शून्य होना चाहिए। यदि θ_0 डोरी द्वारा ऊर्ध्वाधर के साथ बनाया गया कोण हो तो इस स्थिति में तनाव, भार व छद्‌म बल का योग शून्य होगा।

इस प्रकार mg व ma_0 का परिणामी ($F = m\sqrt{g^2 + a_0^2}$) डोरी के अनुदिश होगा।

$\therefore\ \tan\theta_0 = \frac{ma_0}{mg} = \frac{a_0}{g}$



अब माना कि डोरी चित्रानुसार θ कोण से और विक्षेपित की जाती है।

अब, प्रत्यानयन बल आघुर्ण $(F \sin\theta)\ \ell = -m\ell^2\alpha$

F का मान रखने पर एवं अल्प θ के लिए $\sin\theta = \theta$ का उपयोग करने पर

$(m\sqrt{g^2 + a_0^2})\ell\theta = -m\ell^2\alpha$

या $\alpha = -\frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{\ell}\theta$ इसलिए $\omega^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{\ell}$

यह आवर्तकाल के साथ सरल आवर्त गति की समीकरण है।

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{\sqrt{\ell}}{(g^2 + a_0^2)^{1/4}}$

10.2 यदि m$\vec{g}$ के अतिरिक्त अन्य बल कार्य करते है तो :

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g_{eff.}}}$ जहाँ $g_{eff.} = \left|\vec{g} + \dfrac{\vec{F}}{m}\right|$

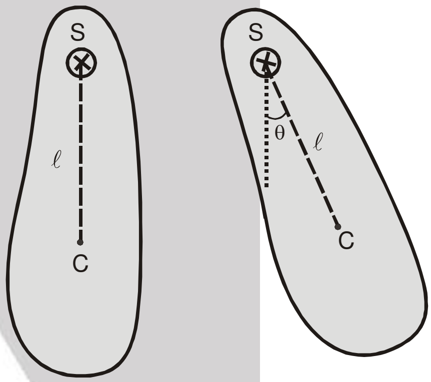
$\vec{F}$ = 'm' पर कार्यरत नियत बल।

Solved Examples

Example 17. 'ℓ' लम्बाई एवं 'm' द्रव्यमान के गोलक वाला सरल लोलक जल के अन्दर कोणीय सरल आवर्त गति कर रहा है। गोलक के भार के आधे भार के बराबर नियत उत्प्लावक बल गोलक पर कार्य कर रहा है। दोलनों का आवर्त काल ज्ञात करो ?

Solution. यहाँ $g_{eff.} = g - \dfrac{mg/2}{m} = g/2.$ इस प्रकार $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2\ell}{g}}$

11. पिण्ड लोलक/ भौतिक लोलक



जब एक दृढ़ पिण्ड को किसी अक्ष से लटकाकर इसके सापेक्ष दोलन करवाये जाये तो यह व्यवस्था पिण्ड लोलक कहलाता है।

C = द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

S = निलम्बन बिन्दु

ℓ = निलम्बन बिन्दु व द्रव्यमान केन्द्र के मध्य दूरी (यह गति के दौरान नियत रहती है।)

माध्य स्थिति से अल्प कोणीय विस्थापन "θ" के लिए

प्रत्यानयन बल आघूर्ण $\tau = -mg\ell \sin\theta$ है।

$\tau = -mg\ell\theta$ अल्प θ के लिए $\sin\theta = \theta$

या $I\alpha = -mg\ell\theta$ जहां I = निलम्बन बिन्दु के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

या $\alpha = -\dfrac{mg\ell}{I}\theta$ या $\omega^2 = \dfrac{mg\ell}{I}$ आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mg\ell}}$ $I = I_{CM} + m\ell^2$

जहाँ I_{CM} = दोलन अक्ष के समान्तर व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है।

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_{CM} + m\ell^2}{mg\ell}}$ जहाँ $I_{CM} = mk^2$

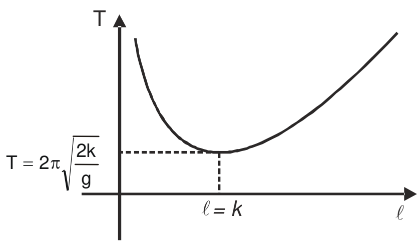
k = घूर्णन त्रिज्या (द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष)

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mk^2 + m\ell^2}{mg\ell}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k^2 + \ell^2}{\ell g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_{eq}}{g}}$ $L_{eq} = \dfrac{k^2}{\ell} + \ell$ = सरल लोलक की तुल्य लम्बाई ;

जब $\ell = k$ हो तो T न्यूनतम होगा

$T_{min} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2K}{g}}$

T व ℓ के माध्य ग्राफ



Solved Examples

Example 18. 1.00 m लम्बाई की समरूप छड़ एक सिरे से लटकायी जाती है तथा यह अल्प आयाम से गुरूत्व के प्रभाव में दोलन करती है। दोलन काल ज्ञात कीजिए। ($g = 10\ m/s^2$)

Solution. अल्प दोलनों के लिए कोणीय गति लगभग सरल आवर्त गति होती है तथा आवर्तकाल निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है –

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg(\ell/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{(m\ell^2/3)}{mg(\ell/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\times 1.00m}{3\times 10m/s^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}\ s$$

12. मरोड़ी लोलक

जब एक वस्तु को इसके केन्द्र पर एक हल्के मरोड़ी तार द्वारा लटकाया जाता है तो इस व्यवस्था को मरोड़ी लोलक कहते है। मरोड़ी तार आवश्यक रूप से अवितान्य होता है परन्तु यह इसकी अक्ष के सापेक्ष ऐंठन के लिए स्वतंत्र होता है। जब तार का निचला सिरा थोड़ा सा घुमाया जाता है तो तार वस्तु को घूर्णी दोलन प्रदान करने के लिए प्रत्यानयन बलाघूर्ण आरोपित करता है। तो उत्पन्न प्रत्यानयन बलाघूर्ण

$\tau = -C\theta$ जहाँ C = मरोड़ी नियतांक

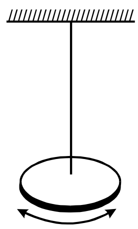
या $I\alpha = -C\theta$ जहाँ I = ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

या $\alpha = -\frac{C}{I}\theta$ ∴ आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$

Solved Examples

Example 19. त्रिज्या 5.0 cm व द्रव्यमान 200 g की एक समरूप चकती के केन्द्र पर एक धात्वीय तार बंधा है, जिसका दूसरा सिरा छत से स्थिर बंधा है। लटकी हुई चकती को तार के सापेक्ष कुछ कोण से घुमाकर छोड़ देते है। यदि चकती 0.20 s के आवर्तकाल से मरोड़ी दोलन करती हो, तो तार का मरोड़ी नियतांक ज्ञात करो।

Solution. प्रदर्शित चित्र की स्थिति में चकती का तार के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण



$$I = \frac{mr^2}{2} = \frac{(0.200kg)(5.0\times 10^{-2}m)^2}{2} = 2.5\times 10^{-4}\ kg - m^2.$$

आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$ या $C = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{4\pi^2(2.5\times 10^{-4}kg - m^2)}{(0.20\ \ s)^2} = 0.25\ \frac{kg - m^2}{s^2}$

13. दो सरल आवर्त गतियों (SHM) का अध्यारोपण

13.1 एक ही दिशा में, एक समान आवृत्ति के लिए

$x_1 = A_1 \sin \omega t$

$x_2 = A_2 \sin (\omega t + \theta)$, तब परिणामी विस्थापन

$x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin (\omega t + \theta) = A \sin (\omega t + \phi)$

जहाँ $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\theta}$ और $\phi = \tan^{-1}\left[\frac{A_2\sin\theta}{A_1 + A_2\cos\theta}\right]$

यदि $\theta = 0$, हो तो दोनों सरल आवर्त गतियाँ समान कला में होगी तथा $A = A_1 + A_2$

यदि $\theta = \pi$, हो तो दोनों सरल आवर्त गतियाँ विपरीत कला में होगी तथा $A = |A_1 - A_2|$

दो या दो से अधिक सरल आवर्त गतियो के अध्यारोपण के कारण परिणामी आयाम इस स्थिति में कला आरेख के द्वारा भी ज्ञात कर सकते है।

13.2 समान दिशा में परन्तु भिन्न–भिन्न आवृत्ति के लिए

$x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$

$x_2 = A_2 \sin \omega_2 t$

तो परिणामी विस्थापन $x = x_1 + x_2 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$

यह परिणामी गति सरल आवर्त गति नहीं है।

13.3 दो लम्बवत् दिशाओं में

$x = A \sin \omega t$

$y = B \sin (\omega t + \theta)$

स्थिति (i) : यदि $\theta = 0$ या π हो तो $y = \pm (B/A)\, x$ होगा, इसलिए पथ सरल रेखीय होगा व परिणामी विस्थापन $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = (A^2 + B^2)^{1/2} \sin\omega t$ होगा

जो कि $\sqrt{A^2 + B^2}$ आयाम की सरल आवर्त गति का समीकरण है।

स्थिति **(ii) :** यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$ हो तो $x = A \sin \omega t$

$y = B \sin (\omega t + \pi/2) = B \cos \omega t$

इसलिए परिणामी $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ होगा, अर्थात् यह एक दीर्घवृत्त की समीकरण है, यदि $A = B$ हो तो अध्यारोपण एक वृत्त की समीकरण होगा। परिणामी गति सरल आवर्त गति नही है।

13.4 एक ही दिशा के अनुदिश सरल आवर्त गतियों का अध्यारोपण (कला आरेख का उपयोग करते हुए)

दो या दो से अधिक सरल आवर्त गतियाँ एक ही रेखा के अनुदिश है तो उनका परिणामी, कला आरेख बनाकर सदिश योग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

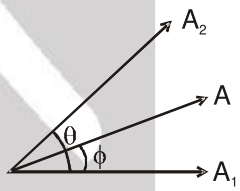
1. सरल आवर्त गति का आयाम, सदिश की लम्बाई (परिमाण) के रूप में लिया जाता है।
2. इन सदिशों के मध्य कलान्तर, इन सदिशों के मध्य कोण के रूप में लिया जाता है। सदिशों का परिणामी का परिमाण सरल आवर्त गति का परिणामी आयाम होता है तथा परिणामी सदिश का कोण परिणामी सरल आवर्त गति के लिए कला नियतांक को बताता है।

उदाहरण के लिए ;

$x_1 = A_1 \sin \omega t$

$x_2 = A_2 \sin (\omega t + \theta)$

यदि परिणामी सरल आवर्त गति की समीकरण $x = A \sin (\omega t + \phi)$ ली जाये तो



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\theta}$$

$$\tan \phi = \frac{A_2 \sin\theta}{A_1 + A_2 \cos\theta}$$

Solved Examples

Example 20 निम्न गतियों के संयोजन से प्राप्त सरल आवर्त गति का आयाम ज्ञात कीजिए।

$x_1 = (2.0 \text{ cm}) \sin\omega t$ तथा $x_2 = (2.0 \text{ cm}) \sin (\omega t + \pi/3)$.

Solution. दी गई दो समीकरणें आयाम $A_1 = 2.0$ cm तथा $A_2 = 2.0$ cm से X-अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त गतियों को प्रदर्शित करती है। दोनो सरल आवर्त गतियों के मध्य कलान्तर $\pi/3$ है। परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम A निम्न द्वारा दिया जाता है।

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} = \sqrt{(2.0\text{cm})^2 + (2.0\text{cm})^2 + 2(2.0\text{cm})^2\cos\frac{\pi}{3}} = 3.5 \text{ cm}$$

Example 21. $x_1 = 3 \sin \omega t$, $x_2 = 4 \cos \omega t$

ज्ञात कीजिए (i) परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम (ii) परिणामी सरल आवर्त गति की समीकरण।

Solution. सबसे पहले सभी सरल आवर्त गतियों को sine (ज्या) के फलन के रूप में "ωt" को धनात्मक रखते हुए, धनात्मक आयाम के साथ लिखते है।

$\therefore$ $x_1 = 3 \sin \omega t$, $x_2 = 4 \sin (\omega t + \pi/2)$

$$A = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan \phi = \frac{4 \sin\frac{\pi}{2}}{3 + 4\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \qquad \phi = 53^\circ$$

समीकरण $x = 5 \sin (\omega t + 53^\circ)$

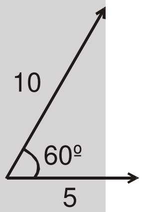
Example 22. $x_1 = 5 \sin (\omega t + 30^\circ)$

$x_2 = 10 \cos (\omega t)$

परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम ज्ञात करो।

Solution. $x_1 = 5 \sin (\omega t + 30^\circ)$

$x_2 = 10 \sin (\omega t + \frac{\pi}{2})$



कला आरेख $A = \sqrt{5^2 + 10^2 + 2 \times 5 \times 10 \cos 60^\circ}$

$= \sqrt{25 + 100 + 50} = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$

Example 23. एक कण दो सरल आवर्त गतियों $x_1 = A_1 \sin \omega t$ तथा $x_2 = A_2 \sin (\omega t + \pi/3)$ के अधीन गतिशील है। ज्ञात करो (a) t = 0 पर विस्थापन (b) कण की अधिकतम चाल व (c) कण का अधिकतम त्वरण।

Solution. (a) t = 0 पर $x_1 = A_1 \sin \omega t = 0$ तथा $x_2 = A_2 \sin (\omega t + \pi/3)$

$= A_2 \sin (\pi/3) = \frac{A_2\sqrt{3}}{2}$. अतः t = 0 पर परिणामी विस्थापन है –

$x = x_1 + x_2 = A_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) दोनों गतियों का परिणामी, समान कोणीय आवृत्ति ω की एक सरल आवर्त गतिं हो तो परिणामी गति का आयाम

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\pi/3)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2}$$

अधिकतम चाल $u_{max} = A\,\omega = \omega \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2}$

(c) अधिकतम त्वरण $a_{max} = A\,\omega^2 = \omega^2 \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2}$

Example 24. समान दिशा में समान आयाम तथा समान आवृत्ति की दो सरल आवर्त गतियो के अधीन एक कण गतिशील है। यदि परिणामी आयाम किसी एक सरल आवर्त गति के आयाम के बराबर है तो दोनों गतियों के मध्य कलान्तर ज्ञात कीजिए।

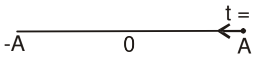
Solution. माना कि प्रत्येक गति का आयाम A है। परिणामी आयाम भी A है। यदि दोनो गतियों के मध्य कलान्तर δ हो तो

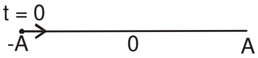
$A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A.\ A.\cos\delta}$ या $= A\sqrt{2(1+\cos\delta)} = 2A \cos\frac{\delta}{2}$

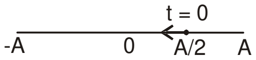
या $\cos\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}$ या $\delta = 2\pi/3$.

Solved Miscellaneous Problems

Problem 1. नीचे दिखाई गई स्थितियों के लिए सरल आवर्त गति का समीकरण लिखो ।

(a) 

(b) 

(c) 

Solution : (a) $t = 0$ पर $x = +A$

$x = A \sin(\omega t + \phi)$

$A = A \sin(\phi)$

$\phi = \pi/2$

$x = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos(\omega t)$

(b) $t = 0$ पर $x = -A$

$x = A \sin(\omega t + \phi)$

$-A = A \sin\phi$

$\phi = \frac{3\pi}{2}$

$x = A \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x = -A\cos(\omega t)$

(c) $t = 0$ पर $x = \frac{A}{2}$

$x = A \sin(\omega t + \phi)$; $\frac{A}{2} = A \sin(\omega t + \phi)$

$\frac{1}{2} = \sin\phi \Rightarrow f = 30°, 150$

कण साम्यावस्था की ओर ऋणात्मक दिशा में गतिशील है।

वेग $v = A\omega \cos(\omega t + \phi)$

$t = 0$ पर $v = -ve$

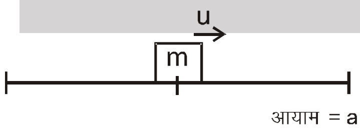
$v = A\omega\cos\phi$ अतः $\phi = 150°$

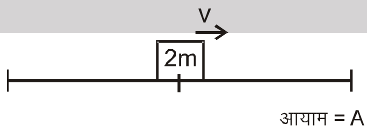
$x = A \sin(\omega t + 150°)$

Ans. **(a)** $x = A\cos\omega t$; **(b)** $x = -A\cos\omega t$; **(c)** $x = A\sin(\omega t + 150°)$

Problem 2. द्रव्यमान m का पिण्ड A, आयाम a से सरल आवर्त गति कर रहा है। जब पिण्ड A माध्य स्थिति से गुजरता है, तब द्रव्यमान m का एक अन्य पिण्ड B, धीरे से पिण्ड A पर रख देते है तथा B, A से चिपक जाता है। नई सरल आवर्त गति का आयाम तथा आवर्तकाल ज्ञात करो।

Solution :





द्रव्यमान m का आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

द्रव्यमान 2m का आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$

साम्यावस्था पर गतिज ऊर्जा = कुल ऊर्जा

द्रव्यमान m के लिए : $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$ .....(1)

द्रव्यमान 2m के लिए : $\frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{2}2m\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 A^2$ .....(2)

संवेग संरक्षण से mu = 2mv

$v = \frac{u}{2}$

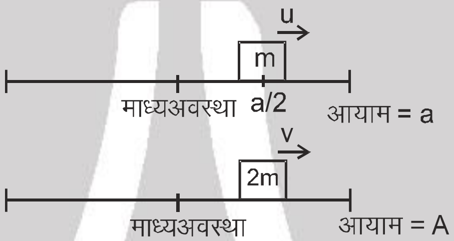
$\therefore \quad \frac{1}{2}2m\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}2m\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 A^2$ .....(3)

समीकरण (1) & (3) के भाग से $4 = \frac{2a^2}{A^2}$

नया आयाम $A = \frac{a}{\sqrt{2}}$ **Ans.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$ आयाम = $\frac{a}{\sqrt{2}}$

Problem 3. उपरोक्त प्रश्न में यदि B को माध्य स्थिति से $\frac{a}{2}$ दूरी पर A पर रख दिया जाय तो इसका नया आवर्तकाल व आयाम क्या होगा।

Solution : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$



$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$

संवेग संरक्षण से

$mu = 2mv \Rightarrow v = \frac{u}{2}$ $\quad \frac{a}{2}$ पर गतिज ऊर्जा

m द्रव्यमान के लिए : $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left[a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ ....(1)

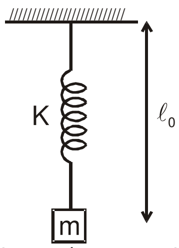
2m द्रव्यमान के लिए : $\frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{2}2m\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2\left[A^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$ ....(2)

$\frac{1}{2}2m\,\frac{u^2}{4} = \frac{1}{2}2m\,\frac{\omega^2}{2}\left[A^2 - \frac{a^2}{4}\right]$ ....(3)

समीकरण (1) & (3) के भाग से

$2 = \frac{a^2 - \frac{a^2}{4}}{A^2 - \frac{a^2}{4}}$ नया आयाम $A = \sqrt{\frac{5}{8}}\,a$ **Ans.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{K}}$, आयाम = $a\sqrt{\frac{5}{8}}$

Problem 4. पिण्ड को दर्शायी गयी स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई से धीरे–धीरे गिराया जाता है। स्प्रिंग में महत्तम खिंचाव ज्ञात करो।



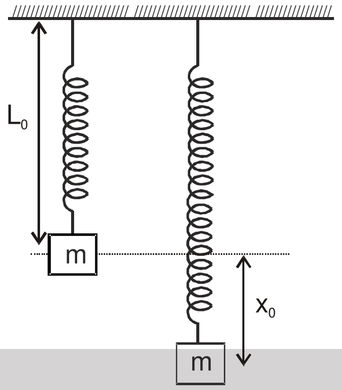
Solution : चूंकि ब्लॉक स्थिरावस्था से धीरे–धीरे गिरता है, अतः अधिकतम प्रसार होगा।

जब $mg = Kx_0$

$x_0 = \frac{mg}{K}$ अधिकतम प्रसार **Ans.** $\frac{mg}{K}$

Problem 5. उपरोक्त प्रश्न में यदि पिण्ड को मुक्त किया जाता है, तो महत्तम खिंचाव ज्ञात करो।

Solution :



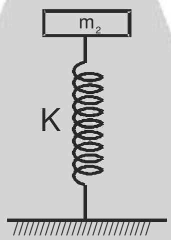
माना x_0 = अधिकतम प्रसार

ऊर्जा संरक्षण से $mgx_0 = \frac{1}{2}Kx_0^2$

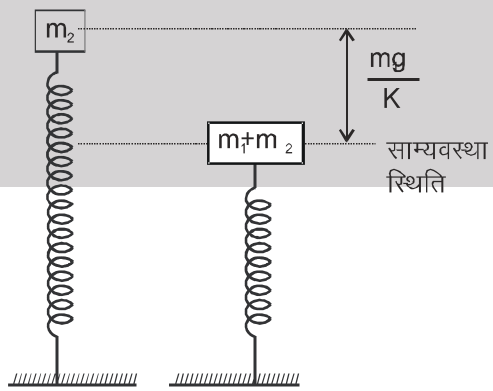
अधिकतम प्रसार पर वेग शून्य होगा

$x_0 = \frac{2mg}{K}$ अधिकतम प्रसार है। **Ans.** $\frac{2mg}{K}$

Problem 6. चित्रानुसार द्रव्यमान m_2 का ब्लॉक साम्यावस्था में है। द्रव्यमान m_1 का अन्य पिण्ड धीरे से m_2 पर रखते है। दोलन का आवर्त काल एवं आयाम ज्ञात करो।



Solution : आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{K}}$

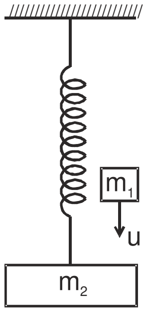


प्रारम्भिक अवस्था में चूंकि वेग शून्य है, अतः यह सीमान्त अवस्था है।

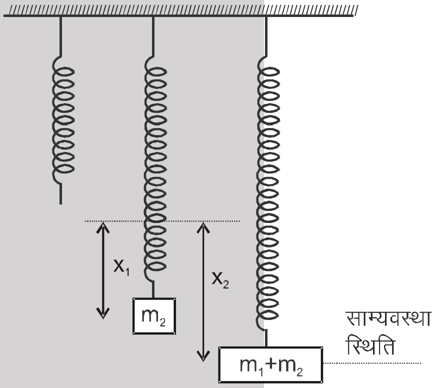
आयाम $A = \frac{m_1 g}{K}$

Ans. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{K}}$ आयाम $= \frac{m_1 g}{K}$

Problem 7. द्रव्यमान m_2 का पिण्ड स्थिर एवं साम्यावस्था में है। नीचे की ओर u वेग से गतिमान m_1 द्रव्यमान का पिण्ड m_2 से ऊर्ध्वाधर टकराता है तथा चिपक जाता है। दोलन की ऊर्जा ज्ञात करो।



Solution : माना टक्कर के पश्चात् m_1 व m_2 का वेग v है।



संवेग संरक्षण से

$m_1u = (m_1 + m_2)v$

$$v = \frac{m_1 u}{m_1 + m_2}$$

अतः, $KE = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1+m_2}u^2$

$m_2g = Kx_1$

$(m_1 + m_2)g = Kx_2$

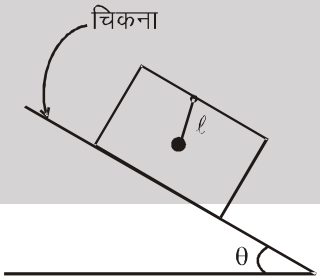
$$PE = \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{m_1 g}{K}\right)^2 \Rightarrow PE = \frac{1}{2}\frac{m_1^2 g^2}{K}$$

अतः दोलन की ऊर्जा है -

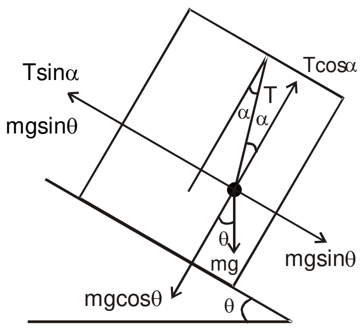
E = KE + PE

$$E = \frac{1}{2}\frac{m_1^2u^2}{m_1+m_2} + \frac{m_1^2g^2}{2K} \Rightarrow = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1^2u^2}{m_1+m_2} + \frac{m_1^2g^2}{K}\right]$$ **Ans.**

Problem 8. एक चिकने नततल पर एक ब्लॉक रखा जाता है यह गति करने के लिए स्वतंत्र है। ब्लॉक में एक सरल लोलक जुड़ा है। इसका आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।



Solution : माना F_p = छद्म बल



साम्यावस्था के लिए

$T\sin\alpha + F_P = mg\sin\theta$

$T\sin\alpha + ma = mg\sin\theta$

चूंकि $a = g\sin\theta$

$T\sin\alpha + mg\sin\theta = mg\sin\theta$

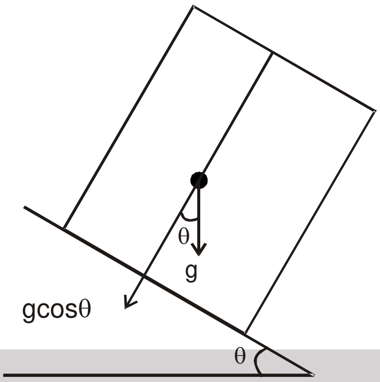
$T\sin\alpha = 0$

$\therefore \alpha = 0$

अतः साम्यावस्था में डोरी नत तल के लम्बवत् होगी।

अतः प्रभावी 'g' होगा -

$g_{eff} = g\cos\theta$



आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\cos\theta}}$ **Ans.**

Problem 9. $x_1 = 5\sin\omega t$

$x_2 = 5\sin(\omega t + 53^{\circ})$

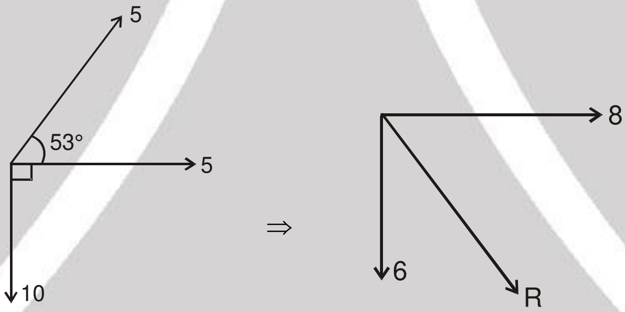
$x_3 = -10\cos\omega t$ परिणामी सरल आवर्त गति का आयाम ज्ञात करो।

Solution : $x_1 = 5\sin\omega t$

$x_2 = 5\sin(\omega t + 53^{\circ})$

$x_3 = -10\cos\omega t$ $\Rightarrow$ $x_3 = 10\sin(\omega t + 270^{\circ})$ लिख सकते हैं

सदिश निरूपण से परिणामी आयाम ज्ञात करने पर



परिणामी आयाम $|R| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ **Ans.**

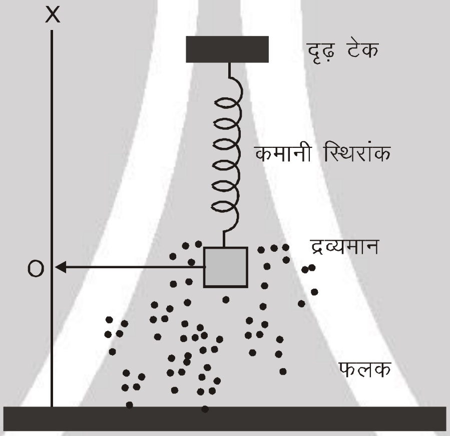
HANDOUT सरल आवर्त गति (SIMPLE HARMONIC MOTION)

अवमंदित सरल आवर्त गति (DAMPED SIMPLE HARMONIC MOTION)

हम जानते है कि वायु में दोलन करने वाले किसी सरल लोलक की गति धीरे धीरे समाप्त हो जाती है। ऐसा क्यो होता है? इसका कारण यह है कि वायु का कर्षण बल तथा आधार (Support) पर घर्षण बल लोलक की गति का विरोध करते है जिससे धीरे धीरे इसका ऊर्जा क्षय होता रहता है। लोलक के इस प्रकार के दोलनो को अवमंदित दोलन कहते है। अवमंदित दोलनों में यद्यपि निकाय की ऊर्जा का धीरे धीरे क्षय होता रहता है किन्तु अल्प दोलन के लिए दोलन आवर्ती रहते है। व्यापक रूप में क्षयकारी बल घर्षण बल ही होते है। इस प्रकार के बाह्य बलों का किसी दोलक की गति पर प्रभाव समझने के लिए आइए चित्र में दर्शाए किसी निकाय पर विचार करें। इसमें k कमानी से m द्रव्यमान का एक गुटका ऊर्ध्वाधरतः दोलन करता है। यदि ब्लॉक को नीचे की ओर थोडा सा धक्का देकर छोडा जाये तो इसके दोलन की कोणीय आवृति होगी

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

साधरणतया वातावरणीय माध्यम (वायु) ब्लॉक की गति पर अवमंदित बल लगाता है अतः स्प्रिंग ब्लॉक निकाय की यांत्रिक ऊर्जा घट जाती है। यह ऊर्जा हानि वातावरणीय माध्यम (तथा ब्लॉक भी) की उष्मा के रूप में प्रतित होती है।



चित्र : 1 वातावरणिय माध्यम स्प्रिंग दोलित्र को धीरे धीरे विरामावस्था में लाने के लिए अवमंदन बल लगाता है।

अवमंदन बल वातावरणिय माध्यम की प्रकृति पर निर्भर करता है। यदि ब्लॉक को द्रव में डुबोया जाए तब अवमंदन बल का परिमाण बढ जाता है तथा ऊर्जा हानि भी तेजी से होती है। अवमंदन बल सामान्यतः गोलक के वेग के समानुपाती होता है। (स्टोक के नियम से) तथा वेग की दिशा के विपरित कार्यरत होता है। यदि अवमंदन बल F_d से प्रदर्शित किया जाए तब $\vec{F}_d = -b\vec{V}$

जहाँ धनात्मक नियतांक b माध्यम (उदाहरण के लिए श्यानता) की प्रकृति पर तथा ब्लॉक के आकार तथा आकृति पर निर्भर करता है। यह समीकरण केवल अल्प वेग के लिए लागु होती है। जब स्प्रिंग से जुडे हुए द्रव्यमान m को छोड़ा जाता है। तब स्प्रिंग थोडी विस्तारित होती है तथा द्रव्यमान कुछ ऊँचाई पर रूक जाता है। यह स्थिति चित्र 1 में O द्वारा दर्शायी गई है। यह द्रव्यमान की साम्य स्थिति है। यदि द्रव्यमान को थोड़ासा नीचे खींचा जाता है तब ब्लॉक पर स्प्रिंग के कारण प्रत्यानयन बल $\vec{F}_s = -k\vec{x}$ कार्यरत होता है। जहाँ $\vec{x}$ द्रव्यमान का इसकी साम्यस्थिति से विस्थापन है अतः किसी समय t पर द्रव्यमान पर कार्यरत कुल बल $\vec{F} = -k\vec{x} - b\vec{v}$ होता है। यदि a(t), t समय पर द्रव्यमान का त्वरण है तब गति की दिशा के अनुदिश न्यूटन के नियम द्वारा हम प्राप्त करते है। $m\,a(t) = -k\,x(t) - b\,v(t)$

यहाँ हम सदिश संकेत को प्रयुक्त नही करते है। क्योंकि हम एक विमिय गति पर विचार कर रहे है। v (t) तथा a (t) के लिए x (t) के प्रथम तथा द्वितीय अवकलज से हम प्राप्त करते है।

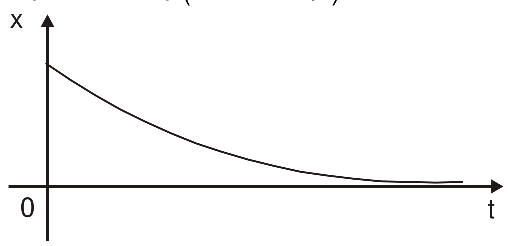
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad .....(1)$$

समीकरण 1 द्वितीय कोटि की रेखीय अवकलन समीकरण है तथा इसकी सहायक समीकरण $mr^2 + br + k = 0$ है। इसके मूल निम्न है।

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \qquad .....(2)$$

हमे तीन स्थितियों पर विचार करने की आवश्यकता है।

स्थिति : I : $b^2 - 4mk > 0$ (अति अवमंदित)



इस स्थिति में r_1 तथा r_2 पृथक वास्तविक मूल है तथा

$$x = b_1 e^{r_1 t} + b_2 e^{r_2 t}$$

चूंकि b, m, तथा k सभी धनात्मक होते है अतः $\sqrt{b^2 - 4mk} < b$, अतः समीकरण 2 द्वारा दिये गये मूल r_1 तथा r_2 दोनों ऋणात्मक होगें। यह प्रदर्शित करता है कि $x \to 0$ क्योंकि $t \to \infty$ । t के फलन के रूप में x का ग्राफ उपरोक्त चित्र में प्रदर्शित है। अब ध्यान दिजिए कि दोलन नहीं होते है (यह द्रव्यमान के इसकी साम्यस्थिति से केवल और केवल एक बार गुजरने पर संभव है।) ऐसा इसलिए होता है क्योंकि $b^2 > 4mk$ का अर्थ यह है कि यहाँ पर दुर्बल स्प्रिंग की तुलना में प्रबल अवमंदन बल (उच्च श्यानता वाला तेल या ग्रीस) कार्यरत है

स्थिति II : $b^2 - 4mk = 0$ (क्रांतिक अवमंदन)

यह स्थिति समान मूलों के संगत है।

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2m}$$

तथा हल निम्न प्रकार दिया जाता है।

$$x = (b_1 + b_2 t)e^{-(b/2m)t}$$

यह स्थिति I के समान है तथा ग्राफ उपरोक्त चित्र के समान प्राप्त होता है किन्तु अवमंदन दोलन को समाप्त करने के लिए ठिक पर्याप्त है। तरल की श्यानता में किसी भी तरह की कमी के कारण दोलन बढ़ने लग जाएगा।

स्थिति III: $b^2 - 4mk < 0$ (**न्यून अवमंदन**)

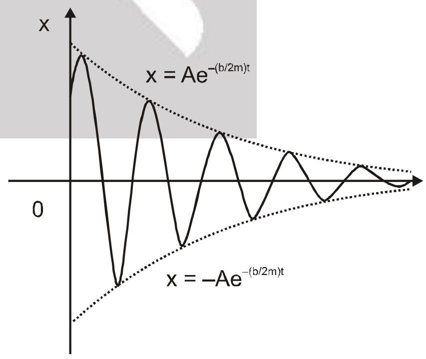
यहाँ मूल सम्मिश्र है

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{b}{2m} \pm \omega' i \qquad \text{जहाँ} \qquad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad .....(3)$$

हल निम्न प्रकार दिया जाता है।

$$x = e^{-(b/2m)t}(b_1 \cos \omega' t + b_2 \sin \omega' t) = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \phi)$$

हम देखते है कि दोलन, गुणांक $e^{-(b/2m)t}$ से अवमंदित होते है। चूंकि $b > 0$ तथा $m > 0$, से हम प्राप्त करते है $-(b/2m) < 0$ अतः $e^{-(c/2m)t} \to 0$ चूंकि $t \to \infty$ इसका अर्थ है कि $x \to 0$ क्योंकि $t \to \infty$; अर्थात गति समय के साथ–साथ शून्य तक क्षयित होती है। ग्राफ चित्र में प्रदर्शित है।



अब अवमंदित दोलित्र की यांत्रिक ऊर्जा $1/2\ kA^2$ होती है। अवमंदित दोलित्र के लिए आयाम नियत नही होता है किन्तु समय पर निर्भर करता है। अल्प अवमंदन के लिए हम समान व्यंजक को प्रयुक्त कर सकते है किन्तु आयाम $A\,e^{-bt/2m}$ के रूप में होता है।

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 e^{-bt/m} \qquad .....(4)$$

समीकरण प्रदर्शित करती है कि निकाय की कुल ऊर्जा समय के साथ चरघातांकी रूप से घटती है। ध्यान दिजिए कि अल्प अवमंदन का अर्थ है कि $\left(\frac{b}{2m}\right)$, ω से बहुत कम होता है यदि हम b = 0 रखे तब इस भाग में अवमंदित दोलित्र की सभी समीकरणें अनअवमंदित दोलित्र की संगत समीकरणों के रूप में परिवर्तित हो जाती है।

विशेषता गुणांक या Q मान (Quality Factor or Q value):

प्रायोगिक अनुप्रयोगों में दोलित्र की विशेषता पर विचार करने करने की आवश्यकता होती है। Q, दोलन के एक पूर्ण आवर्त काल T में कुल ऊर्जा E तथा ऊर्जा हानि ΔE,के अनुपात को दर्शाता है।

$$Q = 2\pi \frac{E}{|\Delta E|}$$

$$Q = \frac{\omega'}{2\omega_\gamma} \quad \text{जहाँ} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad \text{तथा } \omega_\gamma = \frac{b}{2m}$$

शून्य अवमंदन की सीमा में दोलित्र की कोई ऊर्जा हानि नहीं होती है तथा $Q \to \infty$। अल्प अवमंदन की सीमा में दोलित्र का विशेषता गुणांक लगभग निम्न प्रकार दिया जा सकता है।

$$Q \approx \frac{\omega}{2\omega_\gamma}$$

इन दोनों परिणामों को संयुक्त करके दुर्बल अवमंदन गति के एक पूर्ण दोलन के दौरान ऊर्जा हानि के लिए हैण्डी सूत्र प्राप्त करते है।

$$|\Delta E| = E\frac{2\pi}{Q} = E\frac{4\pi\omega_\gamma}{\omega} \quad \text{जहाँ} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Example 1. चित्र में प्रदर्शित अवमंदित दोलित्र के लिए ब्लॉक का द्रव्यमान m, 200 g, k = 90 N m^{-1} तथा अवमंदन नियतांक b, 40 gs^{-1} है। ज्ञात किजिए। (a) दोलन का आवर्तकाल (b) इसके दोलन का आयाम प्रारम्भिक मान का आधा होने में लगा समय(c) इसकी यांत्रिक ऊर्जा प्रारम्भिक मान की आधी होने में लगा समय

Solution : (a) समीकरण से आर्वतकाल T निम्न प्रकार दिया जाता है।

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}} = 0.3\,\text{sec}$$

(b) अब समीकरण से आयाम प्रारम्भिक मान का आधा होने में लगा समय $T_{1/2}$ निम्न प्रकार दिया जाता है।

$$A(t) = Ae^{-bt/2m}$$

$$\frac{A}{2} = Ae^{-\frac{bT_{1/2}}{2m}} \quad \Rightarrow \quad T_{1/2} = \frac{2m\ell n2}{b} = 6.93\text{ s}$$

(c) $t_{1/2}$, समय की गणना के लिए (यांत्रिक ऊर्जा प्रारम्भिक मान की आधी होने में लगा समय)हम इस समीकरण का उपयोग करते है।

$$E(t_{1/2}) = \frac{E(0)}{2} \quad \Rightarrow E(0)e^{-bt/m} = \frac{E(0)}{2}$$

$$t_{1/2} = \frac{(\ell n2)m}{b} = \frac{6.93}{2}$$

यह आयाम के लिए क्षयित काल का ठीक आधा है। यह आश्चर्य चकित नही है क्योंकि समीकरण 4 के अनुसार ऊर्जा आयाम के वर्ग पर निर्भर करती है।

Example 2. प्रदर्शित किजिए कि निकाय $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 3x = 0$ न्यून अवमंदित है। इसकी अवमंदित कोणीय आवृति ज्ञात किजिए।

Solution : m = 1, b = 1, k = 3

$b^2 < 4mk$

अतः निकाय अवमंदित है।

$$\omega_d = \sqrt{\left(\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}\right)} = \frac{\sqrt{11}}{2}\,s^{-1}$$

प्रणोदित दोलन तथा अनुनाद (FORCED OSCILLATIONS AND RESONANCE)

जब एक निकाय (जैसे एक सरल लोलक या कमानी से जुडा ब्लॉक) को इसकी साम्यस्थिति से विस्थापित करके छोडा जाता है तो यह इसकी स्वभाविक आवृति ω से दोलन करता है ऐसे दोलन मुक्त दोलन कहलाते है। सभी मुक्त दोलन वहां उपस्थित अवमंदित बल के कारण धीरे धीरे कम होते जाते है तथा बाहय कारक इन दोलनो का बनाये रखता है। इन्हे प्रणोदित या परिचालित दोलन कहते है। हम एक स्थिति पर विचार करते है जब बाह्रय बल आवर्ती है तथा इसकी आवृति ω_d को परिचालन आवृति कहते है। प्रणोदित आवर्ती दोलन का एक महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि निकाय इसकी मूल आवृति ω से दोलन नही करता है। किन्तु बाह्रय कारक की आवृति ω_d से दोलन करता है। मुक्त दोलन अवमंदन के कारण धीरे–धीरे समाप्त होते जाते है। प्रणोदित दोलन का एक महत्वपूर्ण उदाहरण यह है कि बगीचे में आवर्ती रूप से झुला झुलता हुआ एक बच्चा दोलनों को बनाये रखने के लिए अपने पैरो से धरातल को धक्का देता है। यह मानिए F_0 आयाम का एक बाह्रय बल F (t) अवमंदित दोलित्र पर आरोपित है तथा यह समय के साथ आवर्ती रूप से परिवर्तित होता है। ऐसे बल को निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है।

$$F(t) = F_o \cos \omega_d t$$

रेखीय प्रत्यानयन बल, अवमंदित बल तथा समीकरण द्वारा प्रदर्शित समय निर्भर परिचालित बल के संयुक्त प्रभाव के अन्तर्गत कण की गति को निम्न प्रकार दिया जाता है

$$m\, a(t) = -k\, x(t) - b\nu(t) + F_o \cos \omega_d t$$

समीकरण में त्वरण के लिए d^2x/dt^2 प्रतिस्थापित कर तथा इसे व्यवस्थित कर हम प्राप्त करते है कि

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos \omega_d t \qquad .....(5)$$

यह m द्रव्यमान के दोलित्र की समीकरण है जिस पर ω_d कोणीय आवृति का आवर्ती बल आरोपित है। प्रारम्भ में दोलित्र ω मूल आवृति से दोलन करता है। जब हम आवर्ती बाह्रय बल आरोतिप करते है।तब मूल आवृति दोलन समाप्त होते जाते है तथा फिर वस्तु आवर्ती बाह्रय बल की कोणीय आवृति से दोलन करता है। मूल दोलन समाप्त होने के पश्चात् इसका विस्थापन निम्न प्रकार दिया जाता है।

$$x(t) = A \cos (\omega_d t + \phi) \qquad .....(6)$$

जहाँ t उस क्षण से मापा गया समय है जब हम आवर्ती बल आरोपित करते है। आयाम A प्रणोदित आवृति ω_d तथा स्वभाविक आवृति ω का फलन होता है। विशलेषण प्रदर्शित करता है कि ये निम्न प्रकार दिया जाता है।

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{\left(m^2\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)^2 + \omega_d^2 b^2\right)}} \qquad .....(7)$$

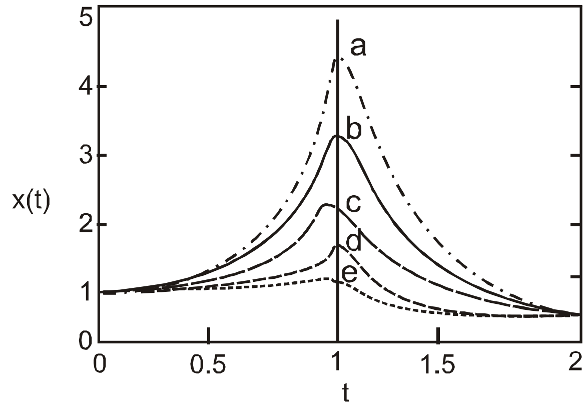
तथा $\tan\phi = \dfrac{-v_0}{\omega_d x_0}$

जहां m कण का द्रव्यमान है तथा v_0 तथा x_0 t = 0 समय पर कण के वेग तथा विस्थापन है t = 0 वह समय है जब हम आवर्ती बल लगाते है। (7) समीकरण प्रदर्शित करती है कि अवमंदित दोलित्र का आयाम परिचालित बल की आवृति (कोणीय आवृति) पर निर्भर करता है। हम दोलित्र के विभिन्न प्रकार के व्यवहार देख सकते है जब ω_d का मान ω से अधिक बडा है तथा जब यह ω के अधिक समीप है। अब हम इन दो स्थितियो पर विचार करते है।

(a) **अल्प अवमंदन जब परिचालक आवृति प्राकृतिक आवृति से अधिक भिन्न है :** इस स्थिति में ω_d b, $m\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)$ से अति कम होगा। अतः समीकरण में उस पद को नगण्य मान सकते है।

$$A = \frac{F_0}{m\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)} \qquad .....(8)$$

चित्र (3) में निकाय में उपस्थित विभिन्न सीमाओं के अवमंदक बलो के लिए किसी दोलक के विस्थापन आयाम की परिचालन बल की कोणीय आवृति पर निर्भरता दर्शायी गई है। ध्यान दीजिए तीनो परिस्थितयो में $\omega_d/\omega = 1$ होने पर ही आयाम अधिकतम होता है। इस चित्र के वक्र यह दर्शाते है कि अवमंदन कम होने पर ऊँचा और संकीर्ण अनुनाद शिखर प्राप्त होता है।



चित्र:3 ग्राफ समीकरण 7 का विश्लेषण करता है।अनुनादी आयाम ($\omega = \omega_d$) अवमंदन बढ़ने के साथ साथ घटता जाता है।

यदि हम प्रचालन आवृति में परिवर्तन करते है तब आयाम अनन्त की ओर अग्रसर होता है जब परिचालन आवृति मूल आवृति के बराबर हो जाती है। किन्तु यह शून्य अवमंदन की आदर्श स्थिति है ऐसी स्थिति जो वास्तविक निकाय में कभी उत्पन्न नहीं होती है क्योंकि अवमंदन पूर्ण रूप से कभी भी शून्य नहीं होता है। आप झुले में यह अनुभव करते है की जब आप के धक्का देने का समय झुले के आवर्त काल से ठीक सुमेलित हो जाता है। तब आपका झुला
अधिकतम आयाम से दोलन करता है। यह आयाम काफी बड़ा होता है किन्तु अनंत नहीं होता क्योकि आपके झुले में सदैव कुछ अवमंदन उपस्थित होता है। यह स्थिति b में स्पष्ट हो जाऐगा।

(b) **जब परिचालक आवृति प्राकृतिक आवृति के निकट हो :** यदि ω_d, ω, के अति निकट हो $m\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)$ के उचित मानो के लिए ω_d b, से बहुत कम होगा। इस अवस्था में समीकरण हो जाता है।

$$A = \frac{F_0}{\omega_d b}$$

इससे स्पष्ट है कि किसी निश्चित परिचालक आवृति के लिए अधिकतम संभव आयाम परिचालक आवृति तथा अवमंदन पर निर्भर करता है ओर इस प्रकार कभी भी अनंत नही होता है। परिचालक आवृति का वस्तु के दोलन की प्राकृतिक आवृति के बराबर होने की स्थिति में दोलन के आयाम के अधिकतम होने की परिघटना को अनुनाद कहते है।

Example 3. m द्रव्यमान का एक कण k स्प्रिंग नियतांक की एक स्प्रिंग से जुडा हुआ है तथा इसकी प्राकृतिक कोणिय आवृतिω_0 है। एक बाह्रय बल F(t) जोकि दोलित्र पर आरोपित है, cos ωt ($\omega \neq \omega_0$) के समानुपाती है। दोलित्र का समय के फलन के रूप में विस्थापन समानुपाति होगा।

(1) $\frac{m}{\omega_0^2 - \omega^2}$ (2) $\frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ (3) $\frac{1}{m(\omega_0^2 + \omega^2)}$ (4) $\frac{m}{\omega_0^2 + \omega^2}$

Solution : $x(t) = A\cos(\omega_d t + \phi_0)$

जहाँ $A = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)^2 + \omega_d^2 b^2}}$

अल्प अवमंदन के लिए

$$A \approx \frac{F_0}{[m(\omega^2 - \omega_d^2)]} \quad \Rightarrow \quad x\ (t) = \left[\frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_d^2)}\right]\cos(\omega_d + \phi_0) \qquad \text{Ans (2)}$$

Example 4. कण के प्रणोदित दोलन में आयाम बल की ω_1 आवृति के लिए अधिकतम है जबकि ऊर्जा बल की ω_2 आवृति के लिए अधिकतम है। तब

(1) $\omega_1 = \omega_2$ (2) $\omega_1 > \omega_2$

(3) $\omega_1 < \omega_2$ जब अवमंदन अल्प है तथा $\omega_1 > \omega_2$ जब अवमंदन अधिक है।

(4) $\omega_1 < \omega_2$

Solution : आयाम तथा ऊर्जा दोनों अनुनाद पर अधिकतम होती है जबकि आरोपित आवृति दोलन की प्राकृतिक आवृति के बराबर होती है। अतः$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$

Ans (1)

Example 5. यदि $t = 0s$ से $t = \tau$ s, के मध्य समय अन्तराल में यदि सरल लोलक का सार्थक आयाम (मूल के 1/e गुणांक तक) है तब τ लोलक का औसत आयुकाल कहलाता है। जब लोलक के गोलीय गोलक का मंदन (श्यान घर्षण के कारण) b के साथ इसके वेग के समानुपाती है (b समानुपाती नियतांक है) तब लोलक का औसल आयुकाल होगा (यह मानिये कि अवमंदन अल्प है।)

(1) $\frac{0.693}{b}$ (2) b (3) $\frac{1}{b}$ (4) $\frac{2}{b}$

Solution : $A(t) = A_0 e^{-bt/2m}$

$\frac{A_0}{e} = A_0 e^{-bt/2m}$

$\Rightarrow \tau = \frac{2m}{b}$

दी गई समीकरण में $\frac{b}{m}$ दिया गया है। $\left(\because a = \frac{-kx}{m} - bv\right)$ **Ans (4)**

Example 6. 5 सैकण्ड में अवमंदित दोलित्र का आयाम इसके प्रारम्भिक मान के 0.9 गुना तक घटता है। 10 सैकण्ड में यह इसके प्रारम्भिक मान के α गुना तक घटता है जहा α होगा।

(1) 0.7 (2) 0.81 (3) 0.729 (4) 0.6

Solution. $A(t) = A_0 e^{-bt/2m}$

दिया है $A(5) = 0.9 A_0$

$A(15) = \alpha A_0$

$0.9A_0 = A_0 e^{-b(5)/2m}$

$\alpha A_0 = A_0 e^{-b(15)/2m}$

$\Rightarrow \alpha = (0.9)^3 = 0.729$

Ans (3)

Example 7. ज्ञात कीजिए कि कौनसा निकाय न्यून अवमंदित, अति अवमंदित या क्रांतिक अवमंदित है।

(i) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$ (ii) $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$

Solution : $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$

यदि $b^2 < 4mk$ तब निकाय न्यून अवमंदित होता है।

यदि $b^2 > 4mk$ तब निकाय अति अवमंदित होता है।

यदि $b^2 = 4mk$ तब निकाय क्रांतिक अवमंदित होता है।

(i) न्यून अवमंदन (ii) क्रांतिक अवमंदन

Exercise-1

✎ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

खण्ड़ (A) : सरल आवर्त गति का समीकरण

A-1.✎ सरल आवर्त गति कर रहे एक कण का समीकरण $x = (5m)\sin\left[(\pi s^{-1})t + \frac{\pi}{6}\right]$ है। आयाम, प्रारम्भिक कला नियतांक, आवर्तकाल व अधिकतम चाल लिखिए।

A-2. 10 g द्रव्यमान का एक कण समीकरण x = (2.0 cm) sin [(100 s^{-1}) t+ π/6] के अनुसार दोलन करता है। ज्ञात करो (a) आयाम, आवर्तकाल व बल नियतांक (b) t = 0 पर स्थिति, वेग व त्वरण।

A-3.✎ एक सरल आवर्त गति का आयाम A व आवर्तकाल T है। इसके द्वारा निम्न दूरी तय करने के लिए आवश्यक समय ज्ञात कीजिए।

(a) x = 0 से x = A/2 तक (b) x = 0 से $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$ तक (c) x = A से x = A/2 तक (d) $x = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ से $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$ तक

(e) $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$ से x = A तक

A-4. एक कण A आयाम व v_0 अधिकतम वेग से सरल आवर्त गति कर रहा है। माध्य अवस्था से $\frac{A}{2}$ दूरी पर इसकी चाल ज्ञात करो।

A-5. एक कण आयाम 10 cm व आवर्तकाल 6 s से सरल आवर्त गति कर रहा है। t = 0 पर माध्य स्थिति से इसकी स्थिति x = 5 cm है तथा यह धनात्मक x-दिशा में जा रहा है। समय t पर विस्थापन x के लिए समीकरण लिखो। t = 4s पर कण के त्वरण का परिमाण ज्ञात करो।

A-6.✎ एक कण सरल आवर्त गति कर रहा है। कण की वह स्थितियां ज्ञात करों जहाँ कण की चाल 8 cm/s है, यदि कण की चाल तथा त्वरण के अधिकतम परिमाण क्रमशः 10 cm/s तथा 50 cm/s^2 है।

खण्ड़ (B) : ऊर्जा

B-1.✎ एक कण 10cm आयाम के साथ सरल आवर्त गति कर रहा है। माध्य स्थिति से किस दूरी पर कण की गतिज ऊर्जा उसकी स्थिति ऊर्जा की तीन गुनी होगी ?

B-2.✎ एक 0.2 kg द्रव्यमान की वस्तु x–अक्ष के अनुदिश (25/π)Hz की आवृत्ति से सरल आवर्त गति करती है। स्थिति x = 0.04m पर वस्तु की गतिज ऊर्जा 0.5 J व स्थितिज ऊर्जा 0.4 J है। दोलन का आयाम ज्ञात करो। **[1994 ; 2M]**

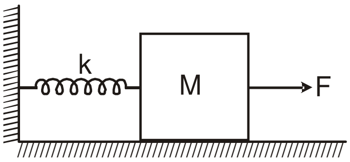
खण्ड़ (C) : स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय

C-1. एक स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय का आवर्तकल 2 सेकण्ड है। यदि ब्लॉक का द्रव्यमान 10 ग्राम हो, तो स्प्रिंग का स्प्रिंग नियतांक क्या होना चाहिए।

C-2.✎ एक ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग से लटकी 2 kg द्रव्यमान की वस्तु 4s के आवर्त काल से सरल आवर्त गति करती है। यदि दोलन रोक दिये जायें व वस्तु साम्यावस्था में लटकी रहती है, तो स्प्रिंग में संग्रहित स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो।

C-3. एक ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय जिसमें स्प्रिंग का नीचला सिरा स्थिर है, में अल्प दोलन करवाये जाते है। यदि स्प्रिंग को 25 cm से खींचा जाता है तो स्प्रिंग 5 J ऊर्जा संग्रहित करती है। यदि गुटका प्रत्येक सेकण्ड में 5 दोलन करता है तो गुटके का द्रव्यमान ज्ञात करो।

C-4. चित्र में एक स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय दिखाया गया है, स्प्रिंग प्रारम्भ में अविस्तारित है। एक व्यक्ति नियत बल F से वस्तु को खींचना प्रारम्भ करता है तो ज्ञात करो

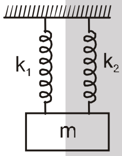


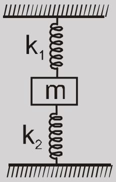
(a) वस्तु की गति का आयाम व आवर्तकाल

(b) माध्य अवस्था पर वस्तु की गतिज ऊर्जा

(c) स्प्रिंग में संग्रहित ऊर्जा जब ब्लॉक माध्य अवस्था से गुजरता है।

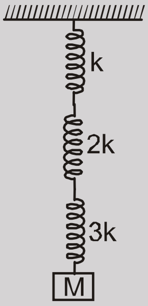
C-5. चित्रानुसार तीन स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय दिखाये गये है तथा गुरूत्वीय मुक्त क्षेत्र मानना है। प्रत्येक स्थिति में दोलन का आवर्तकाल ज्ञात करो। यदि क्षेत्र गुरूत्वहीन नही हो तो उत्तर क्या होंगे ?

(a) 

(b) 

(c)

C-6. चित्र में स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय दिखाया गया है। जब ब्लॉक माध्यवस्था पर है, तब प्रत्येक स्प्रिंग में संग्रहित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो। पिण्ड के ऊर्ध्वाधर दोलन का आवर्तकाल भी ज्ञात करो।



खण्ड़ (D) : सरल लोलक

D-1. उस स्थान पर सेकण्ड लोलक की लम्बाई ज्ञात करो, जहाँ $g = \pi^2$ m/s^2 ।

D-2. एक सरल लोलक की डोरी के द्वारा ऊर्ध्वाधर के साथ बनाया गया तात्क्षणिक कोण (रेडियन में) समय पर $\theta = \frac{\pi}{180}\sin 2\pi t$ के अनुसार निर्भर करता है। तो लोलक की लम्बाई ज्ञात करो यदि $g = \pi^2$ m/s^2 है।

D-3. एक लोलक घड़ी उस स्थान पर सही समय देती है जहां g = 9.8 m/s^2 है। यह किसी दूसरे स्थान पर ले जाई जाती है, जहां यह 24 घण्टे में 24 सैकण्ड पीछे रह जाती है तो इस नये स्थान पर g का मान ज्ञात करो।

D-4. एक लोलक एक लिफ्ट में लटका है व इसका दोलन काल T_0 है, जब लिफ्ट स्थिर है।

(i) लोलक का दोलन काल T क्या होगा, यदि लिफ्ट नीचे की ओर $\frac{3g}{4}$ त्वरण से चलना प्रारम्भ करे ?

(ii) लोलक का दोलनकाल $\frac{T_0}{2}$ होने के लिए लिफ्ट का त्वरण क्या होना चाहिए ?

खण्ड़ (E) : पिण्ड लोलक व मरोड़ी लोलक

E-1. भौतिक लोलक निम्न से बनाया जाता है

(a) एक ℓ लम्बाई की छड़ जो छड के केन्द्र से $\ell/4$ दूरी पर लटकी है।

(b) द्रव्यमान m व त्रिज्या r की एक वलय जो इसकी परिधि पर किसी बिन्दु से लटकी है।

(c) एक कोने से लटकी हुई a भुजा की एक समरूप वर्गाकार प्लेट

(d) केन्द्र से r/2 दूरी पर लटकी हुई m द्रव्यमान व r त्रिज्या की एक समरूप चकती। प्रत्येक स्थिति में अल्प दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

E-2. दो भोतिक लोलक निम्न से बनाये गये है।

(a) r त्रिज्या की एक चकती

(b) L लम्बाई की एक समान छड

अल्प दोलनों के लिए न्यूनतम संभव आवर्तकाल ज्ञात कीजिए तथा न्यूनतम संभव आवर्तकाल के लिए छिद्र की केन्द्र से दूरी भी ज्ञात करो।

खण्ड़ (F) : सरल आवर्त गति का अध्यारोपण

F-1. निम्न दो सरल आवर्त गतियों के अधीन एक कण गतिशील है $X_1 = a_1 \text{Sin}\omega t$ तथा $X_2 = a_2 \text{Sin}(\omega t + \phi)$ जहाँ $a_1 = 3.0$ cm, $a_2 = 4.0$ cm दोनों गतियों का परिणामी आयाम ज्ञात करो यदि इन गतियों के मध्य कलान्तर (a) 0°, (b) 60°, (c) 90° हो।

F-2. तीन सरल आवर्त गतियाँ जो समान आयाम a तथा समान आवर्त काल के साथ एक दिशा में हो रही है, के अधीन एक कण गति कर रहा है। द्वितीय गति, प्रथम से 30° कलान्तर आगे तथा तृतीय गति, द्वितीय गति से 30° कलान्तर आगे है, तो परिणामी गति का आयाम ज्ञात करो।

F-3. दो लम्बवत् दोलन $x = \sin \pi t$ तथा $y = 2\cos 2\pi t$ एक साथ एक कण पर कार्यरत है, तो कण के पथ का समीकरण लिखो।

खण्ड़ (G) : JEE-Main के लिए

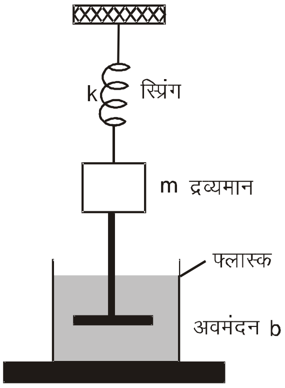
G-1. कण के प्रणोदित दोलन में आयाम बल की ω_1 आवृति के लिए अधिकतम होता है। जबकि ω_2 आवृति के लिए ऊर्जा अधिकतम होती है। ω_1 तथा ω_2 में सम्बन्ध क्या होगा।

G-2. चित्र में प्रदर्शित अवमंदित दोलन के लिए ब्लॉक का द्रव्यमान 200 g, $k = 80\ \text{Nm}^{-1}$ है तथा अवमंदन नियतांक $b = 40\ \text{g s}^{-1}$ है। गणना कीजिए।

(a) दोलन का आवर्तकाल

(b) दोलन का आयाम प्रारम्भिक मान के आधे होने में लिया गया समय

(c) यांत्रिक ऊर्जा प्रारम्भिक मान की आधी होने में लिया गया समय



भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

खण्ड़ (A) : सरल आवर्त गति की समीकरण

A-1. वैज्ञानिकों के अनुसार वह एक बल $F = -cx^{1/3}$ एक कण पर आरोपित करता है तथा कण सरलआवर्त गति करता है। कण पर अन्य कोई बल कार्यरत नहीं है तथा c नियतांक है या नही, यह नही बताया जाता है। (माना है कि सिर्फ x धनात्मक है)

(A) जैसाकि x बढ़ने पर c बढ़ेगा। (B) जैसाकि x बढ़ने पर c घटेगा।
(C) जैसाकि x बढ़ने पर c अपरिवर्तित रहेगा। (D) गति सरल आवर्ती नहीं हो सकती।

A-2. सरल आवर्त गति करता हुआ एक कण गति के एक निश्चित बिन्दु पर कण की दो क्रमागत उपस्थितियों के मध्य समयान्तराल T (सरल आवर्त गति का आर्वतकाल) लेता है यह बिन्दु है –

(A) सीमान्त स्थिति (B) माध्य स्थिति
(C) धनात्मक सीमान्त स्थिति व माध्य स्थिति के बीच (D) ऋणात्मक सीमान्त स्थिति व माध्य स्थिति के बीच

A-3. एक कण रेखीय सरल आवर्त गति कर रहा है। कण का आवर्तकाल कण द्वारा विशेष वेग $\vec{v}$ प्राप्त करने में लिये गये न्यूनतम समयान्तराल के बराबर होता है। $\vec{v}$ का परिमाण हो सकता है।

(A) शून्य (B) V_{max} (C) $\frac{V_{max}}{2}$ (D) $\frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$

A-4. यदि $\vec{F}$ बल सदिश $\vec{v}$ वेग सदिश $\vec{a}$ त्वरण सदिश तथा $\vec{r}$ माध्य स्थिति से विस्थापन सदिश है तो एक सरल रेखा के अनुदिश सरल आवर्त गति में निम्न में से कौनसी राशियाँ हमेशा अऋणात्मक रहती है ?

(A) $\vec{F}.\vec{a}$ (B) $\vec{v}.\vec{r}$ (C) $\vec{a}.\vec{r}$ (D) $\vec{F}.\vec{r}$

A-5. दो सरल आवर्त गतियों को $y = a \sin (\omega t - \phi)$ तथा $y = b \cos (\omega t - \phi)$ से प्रदर्शित करते है। इन दोनों के मध्य कलान्तर होगा।

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

A-6. आवर्ती दोलन करते कण की गति प्रारम्भ होने के कितने समय पश्चात् कण का विस्थापन, आयाम का आधा होगा यदि आवर्तकाल 24 सैकण्ड तथा कण स्थिरावस्था से प्रारम्भ होता है।

(A) 12s (B) 2s (C) 4s (D) 6s

A-7. सरल आवर्त गति मे साम्यावस्था से आधे आवर्त काल में औसत त्वरण का परिमाण होगा–

(A) $\frac{2A\omega^2}{\pi}$ (B) $\frac{A\omega^2}{2\pi}$ (C) $\frac{A\omega^2}{\sqrt{2}\pi}$ (D) शून्य

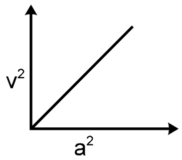
A-8. एक कण y-अक्ष पर समीकरण $y = A + B \sin \omega t$ के अनुसार सरल आवर्त गति करता है, तो इसका आयाम होगा।

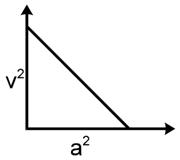
(A) A (B) B (C) A + B (D) $\sqrt{A^2 + B^2}$

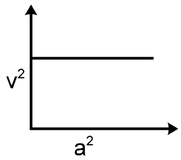
A-9. दो कण समान सरल रेखा के अनुदिश समान माध्य स्थिति से समान आयाम तथा समान आवृत्ति से सरल आवर्त गति करते हैं। जब वे एक दूसरे को बिना टक्कर के पार (cross) करते हैं, तब वे विपरीत दिशा में गति कर रहे होते हैं और उस क्षण जब माध्य स्थिति से उनका विस्थापन उनके आयाम का आधा होता है, तब उनके मध्य कलान्तर होगा–

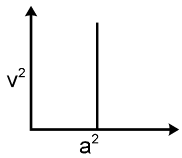
(A) 0° (B) 120° (C) 180° (D) 135°

A-10. एक द्रव्यमान M रेखीय सरल आवर्त गति कर रहा है। त्वरण a तथा संगत रेखीय वेग v के मध्य सही लेखाचित्र होगा–

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

खण्ड़ (B) : ऊर्जा

B-1. सरल आवर्त गति करती वस्तु साम्यावस्था से गुजरती है। इस क्षण, इसमें

(A) अधिकतम स्थितिज ऊर्जा होगी। (B) अधिकतम गतिज ऊर्जा होगी।

(C) न्यूनतम गतिज ऊर्जा होगी। (D) अधिकतम त्वरण होगा।

B-2. A आयाम से सरल आवर्त गति करते कण की K.E. तथा P.E. बराबर हो तो इसका विस्थापन होगा

(A) $\sqrt{2}A$ (B) $\frac{A}{2}$ (C) $\frac{A}{\sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{\frac{2}{3}}A$

B-3. 0.1 किग्रा. द्रव्यमान का एक बिन्दु कण 0.1 मीटर के आयाम से सरल आवर्त गति कर रहा है। जब कण अपनी माध्यावस्था से गुजरता है तो इसकी गतिज ऊर्जा 8×10^{-3} जूल है। गति का समीकरण क्या हो सकती है, जबकि दोलन की प्रारम्भिक कला 45° है: **[I.I.T. 1991]**

(A) $0.1 \cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $0.1 \sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$ (C) $0.4 \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ (D) $0.2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right)$

B-4. सरल आवर्त गति करते हुए कण के लिए :

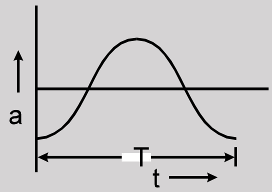
(A) गतिज ऊर्जा कभी भी स्थितिज ऊर्जा के बराबर नहीं होती है।

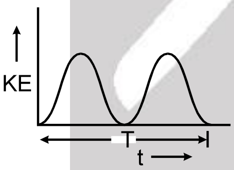
(B) गतिज ऊर्जा हमेशा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है।

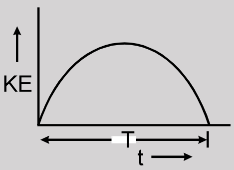
(C) एक आवर्त काल में औसत गतिज ऊर्जा इस आवर्त काल में औसत स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है।

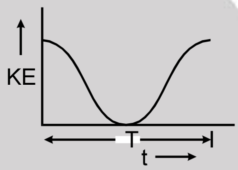
(D) किसी भी समयान्तराल में औसत गतिज ऊर्जा इस समयान्तराल में औसत स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है।

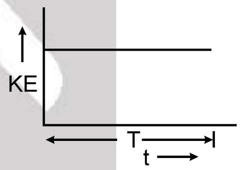
B-5. नीचे दिये गये लेखाचित्र में सरल आवर्त गति करती एक वस्तु के त्वरण a तथा आवर्तकाल T के मध्य संबंध प्रदर्शित किया गया है। इसके संगत गतिज ऊर्जा KE व समय t के मध्य सही लेखाचित्र होगा–



(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

B-6. एक कण A आयाम से सरल रेखा के अनुदिश सरल आवर्त गति करता है जब यह माध्य स्थिति से $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ दूरी पर है तब इसकी गतिज ऊर्जा, आवेगीय बल द्वारा $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ बढ़ा दी जाती है। अतः इसका नया आयाम है :

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}A$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}A$ (C) $\sqrt{2}\,A$ (D) $\sqrt{5}\,A$

खण्ड़ (C) : स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय

C-1. समान द्रव्यमान तथा स्प्रिंग नियतांक क्रमशः k_1 व k_2 के दो स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय है। यदि इनके अधिकतम वेग समान है तो 1st के आयाम का 2nd के आयाम के साथ अनुपात है–

(A) $\sqrt{k_1/k_2}$ (B) k_1/k_2 (C) k_2/k_1 (D) $\sqrt{k_2/k_1}$

C-2. एक m द्रव्यमान की खिलौना गाड़ी से दो समान रबर के रिबन चित्र में दिखाए अनुसार बांधे गये है। रबर के रिबन का बल नियतांक k तथा सतह घर्षणहीन है। साम्यावस्था पर रिबन अविरूपित अवस्था में है। कार को माध्यावस्था से x cm विस्थापित करके छोड़ दिया जाए तो कम्पन्न काल होगा।

(A) $2\pi\sqrt{\frac{m(2k)}{k^2}}$ (B) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m(2k)}{k^2}}$ (C) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (D) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k+k}}$

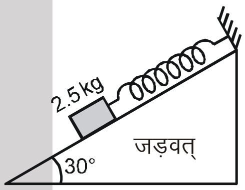
C-3. एक 1 किग्रा. का द्रव्यमान स्प्रिंग के निचले सिरे से जुड़ा है तथा किसी निश्चित आवृत्ति से कम्पन्न कर रहा है। आवृत्ति के इस निश्चित मान को आधा करने के लिए निम्न द्रव्यमान जोड़ना पड़ेगा : **[REE – 1988]**

(A) 1 kg (B) 2 kg (C) 3 kg (D) 4 kg

C-4. m किग्रा द्रव्यमान की एक गेंद, k स्प्रिंग नियतांक वाली स्प्रिंग से लटकायी जाती है। गेंद T सैकण्ड आवर्त काल से दोलन करती है। यदि गेंद को हटा दिया जाए तो स्प्रिंग निम्न लम्बाई से छोटी (माध्य स्थिति से लम्बाई के सापेक्ष) हो जायेगी –

(A) $\frac{gT^2}{(2\pi)^2}$ मीटर (B) $\frac{3T^2g}{(2\pi)^2}$ मीटर (C) $\frac{Tm}{k}$ मीटर (D) $\frac{Tk}{m}$ मीटर

C-5. दिये गये चित्र में एक चिकने नत तल का क्षैतिज के साथ कोण 30º है। इस नत तल पर 2.5 kg द्रव्यमान का एक गुटका रखा हुआ है जिसे स्प्रिंग के एक सिरे से जोड़ा हुआ है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा नत तल के ऊपरी सिरे से जुड़ा है। यदि द्रव्यमान को नत तल के अनुदिश 2.5 सेमी ऊपर ले जाया जाता है तो स्प्रिंग में तनाव घटकर शून्य हो जाता है। यदि अब द्रव्यमान को स्वतंत्र छोड़ दिया जाए तो दोलनों की कोणीय आवृत्ति रेडियन/सेकण्ड में होगी :

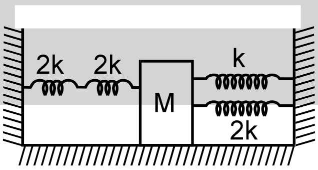


(A) 0.707 (B) 7.07 (C) 1.414 (D) 14.14

C-6. स्प्रिंग द्वारा आरोपित प्रत्यानयन बल के कारण एक कण सरल आवर्त गति करता है। आवर्त काल T है। यदि स्प्रिंग को दो भागों में विभाजित कर दिया जाये तथा इसके आधे एक भाग से सरल आवर्त गति कराई जाय तो आवर्त काल –

(A) T के बराबर होगा। (B) 2T हो जाएगा। (C) T/2 हो जाएगा। (D) $T/\sqrt{2}$ हो जाएगा।

C-7. चित्र में दिखायें अनुसार घर्षण रहित तल पर रखे हुए M द्रव्यमान के एक ब्लॉक से चार स्प्रिंग जुड़ी हुई है। जिनके बल नियतांक 2k, 2k, k तथा 2k है। यदि M द्रव्यमान को क्षैतिज दिशा में विस्थापित किया जाए तो निकाय की आवृत्ति होगी : **[JEE 1990]**



(A) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4M}}$ (B) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{M}}$ (C) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{7M}}$ (D) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{7k}{M}}$

C-8. एक स्प्रिंग की मदद से सरल आवर्त गति करते हुए m द्रव्यमान के एक कण की कुल यांत्रिक ऊर्जा $E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$ है। माना कण को दूसरे m/2 द्रव्यमान के कण से प्रतिस्थापित कर दिया जाता है जबकि आयाम A अपरिवर्तित है तो नई यांत्रिक ऊर्जा होगी।

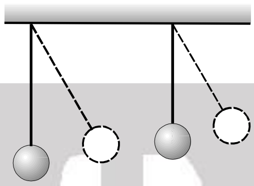
(A) $\sqrt{2}$ E (B) 2E (D) E/2 (D) E

खण्ड़ (D) : सरल लोलक

D-1. दो लोलक एक साथ दोलन प्रारम्भ करते है। पहला लोलक 9 दोलन पूरे करता है, जब दूसरा 7 पूरे करता है। दोनों लोलकों की लम्बाईयों का अनुपात होगा।

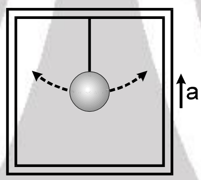
(A) $\frac{49}{81}$ (B) $\frac{7}{9}$ (C) $\frac{50}{81}$ (D) $\frac{1}{2}$

D-2. दो लोलक जो कि प्रारम्भ में स्थिरावस्था में है, एक साथ दोलन प्रारम्भ करते है। उनकी लम्बाई क्रमशः 1.44 मी. तथा 1 मी. है। वे पुनः एक साथ एक ही कला में होगे (लम्बे लोलक के सापेक्ष) –



(A) 1 कम्पन्न के बाद (B) 3 कम्पन्न के बाद (C) 4 कम्पन्न के बाद (D) 5 कम्पन्न के बाद

D-3. एक वैज्ञानिक एक स्थिर लिफ्ट में सरल लोलक का आवर्तकाल T मापता है। यदि लिफ्ट ऊपर की तरफ g/4 त्वरण से गति करे तो नया आवर्तकाल होगाः–



(A) $\frac{T}{4}$ (B) 4 T (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ T (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ T

D-4. एक सरल लोलक का आवर्तकाल T है। यदि इसका आयाम 5% कम हो जाये तो इसके आवर्तकाल में कितने प्रतिशत परिवर्तन हो जाएगा ?

(A) 6 % (B) 3 % (C) 1.5 % (D) 0 %

D-5. एक सरल लोलक जिसकी लम्बाई ℓ व गोलक का द्रव्यमान m है, A लघु आयाम से सरल आवर्त गति करता है। रस्सी में अधिकतम तनाव होगा –

(A) $mg(1 + A/\ell)$ (B) $mg (1 + A/\ell)^2$ (C) $mg[1 + (A/\ell)^2]$ (D) 2 mg

खण्ड़ (E) : पिण्ड लोलक व मरोड़ी लोलक

E-1. एक 25 किग्रा. द्रव्यमान का ठोस गोला जिसकी त्रिज्या 20 सेमी. है, एक उर्ध्व तार से इस प्रकार लटकाया जाता है कि निलम्बन बिन्दु गोले के केन्द्र से ठीक ऊपर (उर्ध्वाधर) है। गोले को 1.0 रेडियन कोण से घुमाने के लिए तथा उसके बाद अपनी स्थिति को बनाये रखने के लिए 0.10 न्यूटन–मी. का बल–आघूर्ण आवश्यक है। अगर तत्पश्चात् गोले को मुक्त छोड़ दिया जाये तो इसके दोलनों का आवर्तकाल होगा –

(A) π सैकण्ड (B) $\sqrt{2}\,\pi$ सैकण्ड (C) 2π सैकण्ड (D) 4π सैकण्ड

E-2. एक सिरे के सापेक्ष झूल रही एक मीटर छड़ f_0 आवृत्ति से दोलन करती है। अगर छड़ का नीचे का आधा भाग काट दिया जाए तो दोलनों की नयी आवृत्ति क्या होगी –

(A) f_0 (B) $\sqrt{2}\,f_0$ (C) $2f_0$ (D) $2\,f_0$

खण्ड़ (F) : सरल आवर्त गति का अध्यारोपण

F-1. जब समान आवृत्ति, समान आयाम तथा समान कला की दो परस्पर लम्बवत् सरल आवर्त गतियाँ अध्यारोपित होती हैं तो –
(A) परिणामी गति समरूप वृत्तीय गति होती है।
(B) परिणामी गति, गतियों की सरल रेखाओं के एक घटक से समान रूप से झुकी हुई सरल रेखा के अनुदिश रेखीय सरल आवर्त गति है।
(C) परिणामी गति, गति के घटकों की रेखा के सापेक्ष सममित दीर्घवृत्तीय गति होगी।
(D) दोनों सरल आवर्त गति एक दूसरे को निरस्त कर देंगी।

F-2. गति में एक कण की मूल बिन्दु के सापेक्ष स्थिति $y = C\sin\omega t + D\cos\omega t$ से दी जाती है तो कण की गति है
(A) C + D आयाम की सरल आवर्त गति है। (B) $\sqrt{C^2 + D^2}$ आयाम की सरल आवर्त गति है।
(C) (C + D)/2 आयाम की सरल आवर्त गति है। (D) सरल आवर्त गति नहीं है।

F-3. एक सरल आवर्त गति $y = 5(\sin 3\pi t + \sqrt{3}\cos 3\pi t)$ से प्रदर्शित की जाती है। गति का आयाम क्या होगा, यदि y मीटर में है?
(A) 100 cm (B) 5 m (C) 200 cm (D) 1000 cm

F-4. x-y तल में गति करते हुए एक कण का स्थिति सदिश $\vec{r} = (A\sin\omega t)\,\hat{i} + (A\cos\omega t)\,\hat{j}$ से दिया जाता है तो कण की गति
(A) सरल आवर्त गति है। (B) वृत्त पर गति है। (C) सरल रेखा पर गति है। (D) नियत त्वरण से होती है।

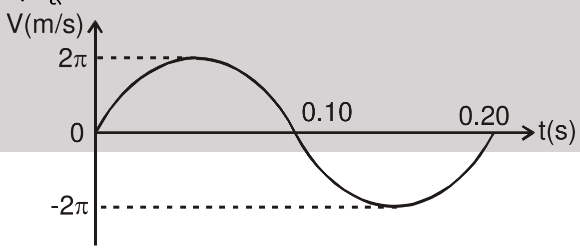
खण्ड़ (G) : JEE Main के लिए

G-1. जब एक अवमन्दित दोलक 100 दोलन पूरे करता है, तो उसका आयाम प्रारम्भिक मान का $\frac{1}{3}$ हो जाता है। 200 दोलन पूरे करने के पश्चात् इसका आयाम हो जायेगा : **[AIPMT 2002]**
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{9}$

G-2. किसी दोलित्र पर अवमन्दक–बल वेग के समानुपाती होता है तो, समानुपाती नियतांक का मात्रक है :
(A) $kgms^{-1}$ (B) $kgms^{-2}$ (C) kgs^{-1} (D) kgs

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. एक सरल आवर्त गति कम्पित्र में, k = 200 N/m की स्प्रिंग के साथ एक पिण्ड जुड़ा हैं। पिण्ड घर्षण रहित क्षैतिज सतह पर साम्यवस्था बिन्दु x = 0 के साथ सरकता है। पिण्ड के वेग v का समय t के फलन के रूप में चित्रण ग्राफ में दर्शाया गया है। बायें स्तम्भ में दी गई सूचना को दायें स्तम्भ में दिये गये परिमाणों से सही मिलाओ – ($\pi^2 = 10$ का प्रयोग करें)



बांया स्तम्भ	दायाँ स्तम्भ
(A) पिण्ड का द्रव्यमान किग्रा. में।	(p) – 0.20
(B) t = 0 पर पिण्ड का विस्थापन मीटर में।	(q) – 200
(C) t = 0.10 सेकण्ड पर पिण्ड का त्वरण मी./से.^{2} में।	(r) 0.20
(D) पिण्ड की महत्तम गतिज ऊर्जा जूल में।	(s) 4.0

2. स्तम्भ-I में एक निकाय की स्थिति को प्रत्येक विकल्प बताया गया है तथा उसके संगत आवर्तकाल स्तम्भ-II में दिया गया है। तो इनकों सुमेलित करो।

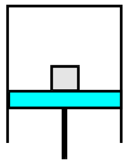
स्तम्भ-I	स्तम्भ-II
(A) एक सरल लोलक जो कि लम्बाई 'ℓ' का है जो कि एक अल्प आयाम के साथ लिफ्ट में दोलन कर रहा है। लिफ्ट नीचे की तरफ मन्दन g/2 से जा रही है।	(p) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$
(B) एक ब्लॉक को एक ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग के एक सिरे पर लगा दिया जाता है जिसका दूसरा सिरा एक स्थिर लिफ्ट की छत से जड़वत लगा है तथा साम्यवस्था में यह स्प्रिंग में ℓ विस्तार करती है। इसका आवर्तकाल क्या होगा जब लिफ्ट ऊपर की तरफ g/2 त्वरण से जा रही होगी।	(q) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
(C) ℓ लम्बाई की एक समरूप छड़ को एक सिरे पर बिना घर्षण के किलकीत कर दिया जाता है। यह छड़ ऊर्ध्वाधर तल में दोलन कर रही है। तो छोटे दोलनों के लिए इसका आवर्तकाल होगा।	(r) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$
(D) एक घनाकार ब्लॉक की भुजा ℓ है तथा विशिष्ट घनत्व (गुरूत्व) 1/2 है तथा इसका कुछ आयतन पानी के अन्दर है जो कि एक बड़े जड़वत पात्र में भरा हुआ है, यह साम्यावस्था में है। श्यान बलों व पृष्ठतनाव को नगण्य मानो तो ऊर्ध्वाधर दिशा में छोटे दोलनों के लिए ब्लॉक का आवर्तकाल होगा।	(s) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$

Exercise-2

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. दिये गये चित्र में एक गुटका जिसका द्रव्यमान m है, एक पिस्टन पर स्थिरावस्था में है। पिस्टन 1 sec. के आवर्तकाल से ऊर्ध्वाधर सरल आवर्त गति कर रहा है। गति का वह न्यूनतम आयाम क्या होगा, जिस पर गुटका तथा पिस्टन एक दूसरे से अलग हो जायें –

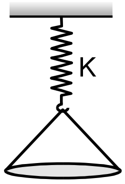


(A) 0.25 m (B) 0.52 m (C) 2.5 m (D) 0.15 m

2. m द्रव्यमान का एक कण जो कि एकविमीय स्थितिज क्षेत्र में स्थित है, की स्थितिज ऊर्जा $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$ से परिवर्तित होती है, जहाँ U_0 तथा a नियतांक हैं। माध्य अवस्था के सापेक्ष कण के लघु दोलनों का आवर्त काल होगा–

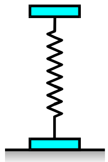
(A) $2\pi\sqrt{\frac{m}{aU_0}}$ (B) $2\pi\sqrt{\frac{am}{U_0}}$ (C) $2\pi\sqrt{\frac{m}{a^2U_0}}$ (D) $2\pi\sqrt{\frac{a^2m}{U_0}}$

3. चित्रानुसार एक m द्रव्यमान की ठोस गेंद H ऊँचाई से एक चौड़े पलड़े पर गिरती है जो k स्प्रिंग नियतांक वाली स्प्रिंग से लटका है। यदि पलड़ा द्रव्यमान रहित तथा गेंद टकराकर वापस नहीं उछलती है, तो दोलन का आयाम होगा–



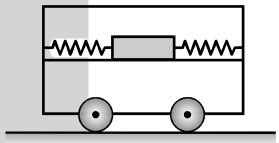
(A) $\frac{mg}{K}$ (B) $\frac{mg}{k}\left(1+\frac{2HK}{mg}\right)^{1/2}$ (C) $\frac{mg}{K}+\left(\frac{2HK}{mg}\right)^{1/2}$ (D) $\frac{mg}{K}\left[1+\left(1+\frac{2HK}{mg}\right)^{1/2}\right]$

4. चित्रानुसार दो समान द्रव्यमान की प्लेटें एक स्प्रिंग के दोनों सिरों से दृढ़ता पूर्वक जोड़ी जाती है। एक प्लेट क्षैतिज सतह पर विश्राम अवस्था में है जबकि दूसरी प्लेट के कारण स्प्रिंग में y संपीड़न है तथा यह स्थिर और साम्य अवस्था में है। वह न्यूनतम संपीडन जिसके लिये संपीडन बल को हटाने के पश्चात् नीचे वाली प्लेट गति के दौरान सतह से संपर्क छोड़ दे, होगा–



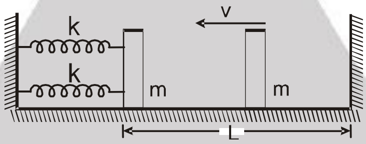
(A) 0.5 y (B) 3y (C) 2y (D) y

5. दो समान स्प्रिंग जिनका स्प्रिंग नियतांक k है, चित्रानुसार m द्रव्यमान के गुटके से जुड़ी हुई है। गुटका एक क्षैतिज चिकने प्लेटफॉर्म पर खिसक सकता है। क्षैतिज प्लेटफॉर्म M द्रव्यमान की ट्राली की विपरीत दीवारों से जुड़ा है। यदि गुटके को x सेमी विस्थापित करके छोड़ दिया जाये तो दोलन का आवर्तकाल होगा–



(A) $T = 2\pi\sqrt{\frac{Mm}{2k}}$ (B) $T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+m)}{kmM}}$ (C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{2k(M+m)}}$ (D) $T = 2\pi\,\frac{(M+m)^2}{k}$

6. चित्रानुसार दांयी ओर स्थित गुटका v चाल से साम्यावस्था में स्थित बायें गुटके की ओर गति कर रहा है। सभी टक्करें प्रत्यास्थ हैं तथा सभी सतह घर्षण रहित है। आवर्त गति का आवर्तकाल ज्ञात करो ? दोनों गुटको की चौड़ाई नगण्य मानिये।



(A) $\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}+\frac{2L}{v}$ (B) $\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}+\frac{L}{v}$ (C) $\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}-\frac{L}{v}$ (D) $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}+\frac{L}{v}$

7. एक ℓ लम्बाई के सरल लोलक के गोलक को t = 0 समय पर अल्प कोणीय विस्थापन θ_0 से छोड़ा जाता है। किसी समय t पर माध्य स्थिति से गोलक का रेखीय विस्थापन होगा :

(A) $\ell\theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$ (B) $\ell\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\cos\theta_0$ (C) $\ell g\sin\theta_0$ (D) $\ell\theta_0 \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$

8. ℓ लम्बाई के सरल लोलक के अल्प दोलनों का आर्वतकाल क्या होगा, यदि निलम्बन बिन्दु O पृथ्वी के सापेक्ष नियत त्वरण $\alpha = \alpha_1\hat{i} - \alpha_2\hat{j}$ से गति करता है ($\hat{i}$ तथा $\hat{j}$ क्रमश क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर दिशाओं में एकांक सदिश है।) –

(A) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\{(g-\alpha_2)^2+\alpha_1^2\}^{1/2}}}$ (B) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\{(g-\alpha_1)^2+\alpha_2^2\}^{1/2}}}$

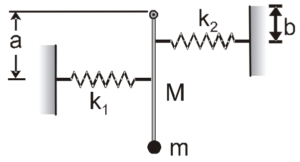
(C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ (D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{(g^2+\alpha_1^2)^{1/2}}}$

9. चार प्रकार के दोलन निकाय, एक सरल लोलक, एक भौतिक लोलक, एक मरोड़ी लोलक तथा एक स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय जिनका प्रत्येक की आवृत्ति समान है, को चन्द्रमा पर ले जाया जाता है। अगर चन्द्रमा पर आवृत्ति ज्ञात की जाए तो किन निकायों या निकाय में यह अपरिवर्तित होगा –

(A) स्प्रिंग–द्रव्यमान निकाय तथा मरोड़ी लोलक में (B) केवल स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय में

(C) स्प्रिंग–द्रव्यमान निकाय तथा भौतिक दोलित्र में (D) इनमें से कोई नहीं।

10. द्रव्यमान M तथा लम्बाई L की एक छड़ एक सिरे से लटकी हुई है तथा दूसरे निचले सिरे पर एक m द्रव्यमान का कण जुड़ा हुआ है। एक K_1 स्प्रिंग नियतांक की स्प्रिंग निलम्बित सिरे से a दूरी पर तथा K_2 स्प्रिंग नियतांक की एक दूसरी स्प्रिंग निलम्बित सिरे से b दूरी पर चित्रानुसार लगायी गयी है। यदि सम्पूर्ण निकाय एक क्षेतिज चिकनी मेज पर रखा हो तो कम्पन्नों की आवृत्ति होगी–



(A) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1a^2+k_2b^2}{L^2(m+\frac{M}{3})}}$ (B) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2+k_1}{M+m}}$ (C) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2+k_1\frac{a^2}{b^2}}{4\frac{M}{3}+m}}$ (D) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+\frac{k_2b^2}{a^2}}{\frac{4}{3}m+M}}$

11. X-अक्ष पर एक कण समीकरण $x = 10\sin^3(\pi t)$ के अनुसार गति कर रहा है। सरल आवर्त गतियों के घटकों का आयाम तथा आवृत्तियां है –

(A) आयाम 30/4, 10/4 ; आवृत्तियां 3/2, 1/2
(B) आयाम 30/4, 10/4 ; आवृत्तियां 1/2, 3/2
(C) आयाम 10, 10 ; आवृत्तियां 1/2, 1/2
(D) आयाम 30/4, 10 ; आवृत्तियां 3/2, 2

12. निम्नलिखित समान रेखा पर सरल आवर्त गतियों के अध्यारोपण द्वारा कण का आयाम होगा

$X_1 = 2\sin 50\pi t$; $X_2 = 10\sin(50\pi t + 37^\circ)$
$X_3 = -4\sin 50\pi t$; $X_4 = -12\cos 50\pi t$

(A) $4\sqrt{2}$ (B) 4 (C) $6\sqrt{2}$ (D) इनमें से कोई नहीं

13._ जब एक वस्तु को एक रस्सी द्वारा एक स्थिर बिन्दु से लटकाया जाता है तो इसके ऊर्ध्वाधर दोलनों की कोणीय आवृत्ति ω_1 है। जब अलग रस्सी को काम में लेते है तो कोणीय आवृत्ति ω_2 है। जब दोनों रस्सियों को एक साथ श्रेणी मे काम में लेते है, तो ऊर्ध्वाधर दोलनों की कोणीय आवृत्ति दी जाती है : **[Olympiad (Stage-1) 2017]**

(A) $\omega = \left[\omega_1^2+\omega_2^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (B) $\omega = \left[\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$ (C) $\omega = \left[\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_1^2+\omega_2^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$ (D) $\omega = \left[\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{2(\omega_1^2+\omega_2^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$

14._ एक कण एक f आवृत्ति पर सरल आवर्त गति करता है। आवृत्ति जिस पर इसकी गतिज ऊर्जा बदलती है।

(A) f (B) 2f (C) 4f (D) $\frac{f}{2}$ **[Olympiad (Stage-1) 2017]**

15._ एक कण प्रतिकर्षण के दो बलों के अन्दर साम्यावस्था में विराम करता है जिनके केन्द्र कण से a तथा b दूरी पर है। दोनों बल दूरी के घन के रूप में बदलते है। बलों के प्रति इकाई द्रव्यमान क्रमशः k तथा k' है। यदि कण को उनमें से किसी एक की तरफ थोड़ा सा विस्थापित कर दे तो गति सरल आवर्ती है, तो आवर्तकाल बराबर है – **[Olympiad (Stage-1) 2017]**

(A) $\frac{2\pi}{\sqrt{3\left(\frac{k}{a^3}+\frac{k'}{b^3}\right)}}$ (B) $\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{a^3}+\frac{k'}{b^3}\right)}}$ (C) $\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{a^4}+\frac{k'}{b^4}\right)}}$ (D) $\frac{2\pi}{\sqrt{3\left(\frac{k}{a}+\frac{k'}{b}\right)}}$

भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

1. दो कण A तथा B, x तथा y-अक्ष के अनुदिश समान आयाम तथा आवृत्ति क्रमशः 2 cm तथा 1 Hz से सरल आवर्त गति कर रहे हैं। A तथा B कणों की साम्यावस्था स्थितियां क्रमशः (3, 0) तथा (0, 4) निर्देशांकों पर है। t = 0, पर कण B साम्यावस्था पर है तथा मूल बिन्दु की तरफ जा रहा है और कण A मूलबिन्दु के सबसे निकट है तथा मूलबिन्दु से दूर जा रहा है। A तथा B के मध्य की अधिकतम तथा न्यूनतम दूरियां क्रमशः s_1 व s_2 है तब $s_1 + s_2$ (cm में) ज्ञात करो।

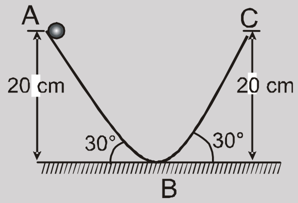
2. दो कण P तथा Q समान आयाम a तथा समान आवृत्ति f के साथ समान माध्य स्थिति से सरल रेखा के अनुदिश सरल आवर्त गति करते हैं। कणों के मध्य अधिकतम दूरी $a\sqrt{2}$ रहती हैं। कणों के मध्य प्रारम्भिक कलान्तर $\frac{\pi}{N}$ है तब N ज्ञात कीजिए:

3. स्थिरावस्था से एक कार स्टेशन A (यहाँ कार रूकती है) से अगले स्टेशन B (यहाँ भी कार रूकती है) तक f = a – bx के अनुसार परिवर्तित होने वाले त्वरण के साथ सरल रेखीय गति करती है। यहाँ a व b धनात्मक नियतांक हैं तथा x, स्टेशन A से दूरी है। दोनों स्टेशनों के बीच अधिकतम दूरी $x = \frac{Na}{b}$ है तब N ज्ञात कीजिए –

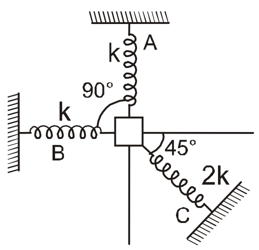
4. एक कण केन्द्र O के परितः एक सरल रेखा में दोलन करता है, जिस पर बल की दिशा O की ओर है। जब कण O से 'x' दूरी पर है तब कण पर बल mn^2x लगता है जहाँ 'm' द्रव्यमान व 'n' एक नियतांक है। आयाम a = 15 cm है। जब कण O से दूरी $\sqrt{3}\frac{a}{2}$ पर है तो कण गति की दिशा में एक झटका प्राप्त करता है जिससे अतिरिक्त वेग na प्राप्त होता है। यदि झटका प्राप्त करते समय वेग O से दूर की तरफ हो तो नया आयाम $k\sqrt{3}$ cm हो जाता है तो k ज्ञात कीजिए।

5. दो कण P_1 तथा P_2 एक ही रेखा के अनुदिश एक ही माध्य स्थिति के सापेक्ष सरल आवर्त गति कर रहे है। प्रारम्भ में यह धनात्मक चरम स्थितियों में होते है। अगर प्रत्येक कण का आवर्त काल 12 sec है तथा उनके आयाम का अन्तर 12 cm है तो वह न्यूनतम समय ज्ञात करो, जब कणों के बीच की दूरी 6 सेमी होती है –

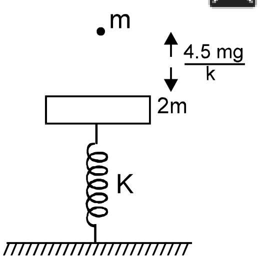
6. सभी सतहों को चिकना मानते हुए यदि चित्र में दिखायें गये कण की गति का आवर्त काल $N \times 10^{-1}$ sec है तो N ज्ञात करो। तली में मुड़े हुए छोटे भाग के प्रभाव को नगण्य मानना है। ($g = 10\ m/s^2$)



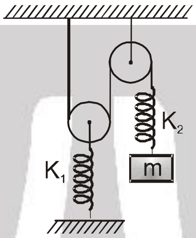
7. चित्रानुसार बल नियतांक k, k तथा 2k वाली तीन स्प्रिंगों A, B व C से m द्रव्यमान का कण जुड़ा है। यदि कण को स्प्रिंग C के विरूद्ध दबाकर छोड़े तो दोलन की कोणीय आवृत्ति $\sqrt{\frac{Nk}{m}}$ है तो N ज्ञात कीजिये। निकाय क्षैतिज चिकनी सतह पर स्थित है।



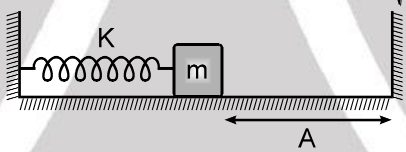
8. चित्र में 2m द्रव्यमान की प्लेट स्थिर तथा साम्यावस्था में है। m द्रव्यमान का एक कण प्लेट से $\frac{4.5mg}{k}$ ऊँचाई से छोड़ा जाता है। कण प्लेट से चिपक जाता है। टक्कर के अन्तराल को नगण्य मानते हुए कण के प्लेट से चिपकने से लेकर स्प्रिंग में प्रथम बार अधिकतम सम्पीड़न तक का समय $2\pi\sqrt{\frac{m}{ak}}$ है, तो a ज्ञात करो।



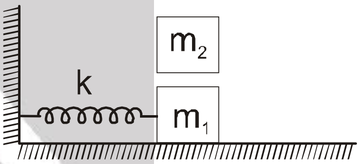
9. दिये स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय के लिए ब्लॉक का इसकी माध्य स्थिति के सापेक्ष अल्प दोलन का आवर्त काल $\pi\sqrt{\frac{nm}{K}}$ है तो n ज्ञात करो ? सभी स्थितियां आदर्श है। निकाय ऊर्ध्वाधर तल में है तथा $K_1 = 2K$, $K_2 = K$ लेवें



10. प्रदर्शित चित्र में स्प्रिंग सामान्य लम्बाई में है तथा द्रव्यमान m स्प्रिंग से जुड़ा है। स्प्रिंग को 2A से सम्पीड़ित करके t = 0 पर छोड़ दिया जाता है। द्रव्यमान m दीवार से टकराता है तथा अपनी गतिज ऊर्जा की दो तिहाई ऊर्जा ह्रास करके लोट जाता है। t = 0 से प्रारम्भ करने के पश्चात् ब्लॉक द्वारा प्रथम बार विराम (वह क्षण जब दुबारा स्प्रिंग अधिकतम संपीडन की स्थिति में होती है) को प्राप्त करने में लगा समय ज्ञात करों। ($\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{12}{\pi}$ लीजिये)

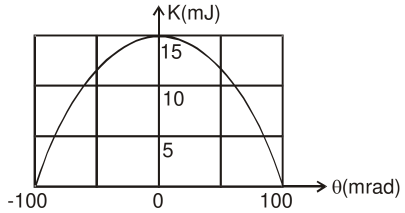


11. एक 4 kg का गुटका, 100 N/m स्प्रिंग नियतांक वाले स्प्रिंग के प्रत्यानयन बल के प्रभाव में चिकनी क्षेतिज सतह पर 0.1 m के आयाम से सरल आवर्त गति कर रहा है। जब यह माध्य स्थिति से गुजर रहा होता है तो चित्रानुसार उस क्षण एक 5 kg द्रव्यमान का गुटका इस पर धीरे से रखा जाता है, यह मानते हुए कि दोनों गुटके एक साथ गति करते है, गति का नया आयाम n^{-1} मीटर है, तो n ज्ञात कीजिए।



12. एक सरल लोलक जिसकी लम्बाई L है तथा यह $\alpha = 60°$ झुकाव वाले चिकने नततल पर नीचे की ओर गति करने वाले वाहन की छत पर लटका है, लोलक का आवर्त काल $\pi\sqrt{\frac{XL}{g}}$ द्वारा दिया गया है, तो X ज्ञात कीजिए। **[I.I.T. (Scr.) 2000, 1/35]**

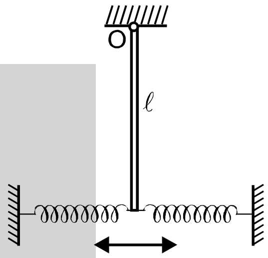
13. चित्र में सरल लोलक की गतिज ऊर्जा K तथा ऊर्ध्वाधर से कोण θ के बीच ग्राफ दर्शाया गया है। लोलक का द्रव्यमान 0.2 किग्रा. है। यदि सरल लोलक की लम्बाई $\frac{n}{g}$ मीटर के बराबर है तो n ज्ञात कीजिए – (g = 10 मी./से.^{2}).



14. किसी सरल लोलक का गोलक पानी में आवर्तकाल t के साथ सरल आवर्त गति करता है, जबकि इस गोलक के दोलन का वायु में आवर्तकाल t_0 है। पानी का घर्षण बल नगण्य मानते हुए तथा गोलक का घनत्व (4/3) × 1000 kg/m^3 दिया गया है। $\frac{t}{t_0}$ ज्ञात कीजिए। **[AIEEE 2004]**

15. R त्रिज्या का एक ठोस गोला ρ घनत्व वाले द्रव में आधा डूबा है। यदि गोले को अल्प विस्थापित कर छोड़ा जाए ओर यह सरल आवर्त गति करने लगे तो गोले के दोलनों की आवृत्ति लघु विस्थापन के लिए $\sqrt{\frac{3}{nR}}$ है, तो n ज्ञात कीजिए। $\pi = \sqrt{g}$ लीजिये। **[JEE (Mains) - 2004, 2/60]**

16. एक पतली एक समान ऊर्ध्वाधर छड़ जिसका द्रव्यमान m तथा लम्बाई ℓ है, चित्रानुसार O बिन्दु पर कीलकीत है। इस छड़ के दोलन की आवृत्ति $\sqrt{\frac{n}{\ell}}$ है तो n ज्ञात करो। प्रत्येक स्प्रिंग का बल नियतांक K/2 है तथा $K = \frac{2mg}{\ell}$ लीजिये। स्प्रिंगों के द्रव्यमान नगण्य है। (g = 10 m/s^2)



भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

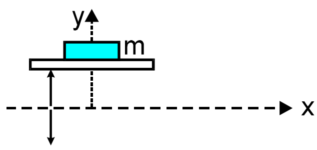
1. X-अक्ष पर एक कण समीकरण $x = x_0 \sin^2 \omega t$ के अनुसार गति कर रहा है। सरल आवर्त गति का
(A) आयाम $x_0/2$ है। (B) आयाम $2x_0$ है। (C) आवर्त काल $\frac{2\pi}{\omega}$ है। (D) आवर्त काल $\frac{\pi}{\omega}$ है।

2. निम्न में से कौनसे फलन सरल आवर्त गति प्रदर्शित करेंगे ?
(A) $\sin 2\omega t$ (B) $\sin^2 \omega t$ (C) $\sin \omega t + 2 \cos \omega t$ (D) $\sin \omega t + \cos 2\omega t$

3. एक कण जो कि एक सरल रेखा के अनुदिश गति कर रहा है जबकि यह कण सरल रेखा पर स्थित किसी निश्चित बिन्दु से x दूरी पर है तब कण की चाल $v^2 = 108 - 9x^2$ से प्रदर्शित की जाती है (माध्य अवस्था पर शून्य कला नियतांक मानते हुए) (समस्त राशियाँ cgs पद्धति में हैं)
(A) गति, सरल रेखा के अनुदिश समरूप त्वरित होगी।
(B) निश्चित बिन्दु से 3 सेमी की दूरी पर त्वरण का परिमाण 27 सेमी/सैकण्ड^2 है।
(C) दिये गये निश्चित बिन्दु के सापेक्ष गति सरल आवर्त गति है।
(D) निश्चित बिन्दु से अधिकतम विस्थापन 4 सेमी है।

4. एक क्षैतिज तख्ते पर एक आयताकार पिण्ड रखा है। तख्ता ऊर्ध्व दिशा में 40 सेमी. के आयाम से सरल आवर्ती रूप से दोलन करना प्रारम्भ करता है। यदि गति के दौरान तख्ते के क्षणिक रूप से स्थिरावस्था में आने पर पिण्ड का तख्ते से संबंध हट जाता है, तो :
(A) दोलनों का आवर्तकाल $\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ सेकण्ड है।
(B) तख्ते की किसी एक क्षणिक स्थिरावस्था की स्थिति में पिण्ड का वजन दुगुना होगा।
(C) पिण्ड का वजन आधा होगा जब तख्ता आधी ऊपरी ऊंचाई पर होगा।
(D) पिण्ड का वजन डेढ़ गुना होगा जब तख्ता नीचे की ओर आधी दूरी पर होगा।
(E) पिण्ड का वजन इसका वास्तविक सत्य वजन होगा जब तख्ता तीव्रतम वेग से चल रहा होगा।

5. दिये गये चित्र में एक क्षैतिज आधार पर एक द्रव्यमान m रखा है तथा आधार Y अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त गति करता है। यदि दोलनों का आयाम 2.5 सेमी है तो गति का न्यूनतम आवर्त काल क्या होगा ताकि द्रव्यमान आधार से अलग न हो, (g = 10 m/sec^2 = π^2 मानिये)



(A) $\frac{10}{\pi}$ s (B) $\frac{\pi}{10}$ s (C) $\frac{\pi}{\sqrt{10}}$ s (D) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ s

6. एक वस्तु, आयाम A, आवर्तकाल T, अधिकतम वेग v_{max} तथा प्रारम्भिक कला स्थिरांक शून्य से सरल आवर्त गति करती है। निम्न में से कौनसे कथन $0 \le t \le \frac{T}{4}$ के लिए सत्य हैं (माध्य स्थिति से विस्थापन y है)–

(A) $y = (A/2)$ पर $v > (v_{max}/2)$ (B) $v = (v_{max}/2)$ के लिए, $y > (A/2)$

(C) $t = (T/8)$ के लिए $y > (A/2)$ (D) $y = (A/2)$ के लिए $t < (T/8)$

7. एक कण जिसका द्रव्यमान 0.1 किग्रा है, x-अक्ष के अनुदिश गति करता है। इसकी स्थितिज ऊर्जा $U = 5x\,(x - 4)J$, समीकरण द्वारा दी जाती है, जहां x मीटर में है। यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि –

(A) कण पर नियत बल लग रहा है। (B) कण की चाल x = 2 मी. पर अधिकतम है।

(C) कण सरल आवर्त गति कर रहा है। (D) कण के दोलनों का आवर्तकाल $\pi/5$ सैकण्ड है।

8. एक कण जो कि x-अक्ष के अनुदिश गति करने के लिए स्वतंत्र है कि स्थितिज ऊर्जा $-\infty \le x \le +\infty$ के लिए समीकरण $U(x) = k[1 - e^{-x^2}]$ से प्रदर्शित है, जहाँ k उपयुक्त विमाओं के साथ धनात्मक नियतांक है तो असत्य कथनों का चुनिये :

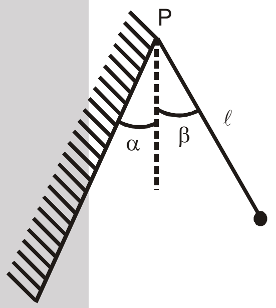
(A) मूल बिन्दु से दूर वाले बिन्दुओं पर कण अस्थाई साम्यावस्था में होगा। **[JEE - 1999, 2/200]**

(B) x के किसी भी निश्चित अशून्य मान के लिए हमेशा एक बल मूल बिन्दु से दूर लगेगा।

(C) यदि इसकी कुल यांत्रिक ऊर्जा k/2 है तो इसकी निम्नतम गतिज ऊर्जा मूल बिन्दु पर होगी।

(D) x = 0 से लघु विस्थापनों के लिए, गति सरल आवर्त गति है।

9. एक झुकी हुई दीवार जो कि ऊर्ध्व से 'α' कोण बनाती है, के एक बिन्दु P से एक " लम्बाई की रस्सी द्वारा एक गेंद को लटकाया जाता है। रस्सी को गेंद सहित अल्प कोण 'β' $(\beta > \alpha)$ द्वारा विस्थापित करके स्वतंत्र छोड़ते हैं। दीवार को पूर्णतः प्रत्यास्थ मानते हैं। इस प्रकार के लोलक का आवर्तकाल होगा/होगे–



(A) $2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$ (B) $2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$

(C) $2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$ (D) $2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$

10. यदि एक सरल आवर्त गति को $y = (\sin \omega t + \cos \omega t)$ m द्वारा प्रदर्शित करें तो निम्न से कौनसे कथन सत्य है।

(A) आयाम का मान 1 मी. है। (B) आयाम का मान $\sqrt{2}$ मी. है।

(C) y = 1 मी. से समय प्रारम्भ होगा। (D) y = 0 मी. से समय प्रारम्भ होगा।

11. x-y तल में गति करते हुए एक कण का स्थिति सदिश समय के साथ समीकरण $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j})\,A \cos \omega t$ के अनुसार बदलता है। कण की गति होगी –

(A) एक सरल रेखा पर (B) एक दीर्घ वृत्त पर (C) आवर्ती (D) सरल आवर्ती

12. तीन सरल आवर्त गतियां जो कि समान दिशा में हैं तथा इनका आयाम a व आवर्तकाल समान है, एक दूसरे पर अध्यारोपित होती हैं। यदि प्रत्येक अपने अगले वाली से 45° कलान्तर से भिन्न है, तो : **[IIT- 1999, 3/100]**

(A) परिणामी आयाम $(1+\sqrt{2})a$ होगा।

(B) परिणामी गति की कला प्रथम के सापेक्ष 90° पर होगी।

(C) परिणामी गति से सम्बन्धित ऊर्जा किसी भी एक गति से सम्बन्धित ऊर्जा की $(3+ 2\sqrt{2})$ गुना होगी।

(D) परिणामी गति सरल आवर्ती नहीं होगी।

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

अनुच्छेद-1

बल नियतांक 400 N/m की स्प्रिंग के निचले सिरे से 2 किग्रा. का पिण्ड बिना कम्पन्न के लटका है। स्प्रिंग का शीर्ष सिरा लिफ्ट की छत से जुड़ा है। लिफ्ट 5 मी./से.^{2} के ऊपरी त्वरण से उठ रही है। जब t = 0 पर त्वरण अचानक खत्म होता है, लिफ्ट एक समान चाल से ऊपर की ओर गतिमान है। (g = 10 मी./से.^{2})

1. त्वरण समाप्त होने के पश्चात् पिण्ड की कोणीय आवृत्ति क्या है –

(A) $10\sqrt{2}$ rad/s (B) 20 rad/s (C) $20\sqrt{2}$ rad/s (D) 32 rad/s

2. कम्पन्न का आयाम है –

(A) 7.5 cm (B) 5 cm (C) 2.5 cm (D) 1 cm

3. लिफ्ट में सवार व्यक्ति द्वारा प्रेक्षित प्रारम्भिक कला कोण है, जब कि ऊपरी दिशा को धनात्मक लें तथा धनात्मक सीमान्त अवस्था को $\pi/2$ कला कोण स्थिरांक पर मानें –

(A) $-\pi/4$ rad (B) $\pi/2$ rad (C) π rad (D) $3\pi/2$ rad

अनुच्छेद-2

एक 'm' द्रव्यमान का कण क्षैतिज चिकनी रेखा AB, जिसकी लम्बाई 'a' है, पर गति कर रहा है। जब कण रेखा के किसी बिन्दु P पर होता है तो उस पर दो बल कार्य करते हैं। A की ओर बल $\frac{mg(AP)}{a}$ तथा B की ओर दूसरा बल $\frac{2mg(BP)}{a}$ कार्यरत है।

4. जब इस कण को रेखा AB के मध्य विरामावस्था से छोड़ा जाता है तो इस कण का आवर्तकाल ज्ञात करो।

(A) $T = 2\pi\sqrt{\frac{3a}{g}}$ (B) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ (C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ (D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{3g}}$

5. गति के दौरान, कण की B से न्यूनतम दूरी ज्ञात करो।

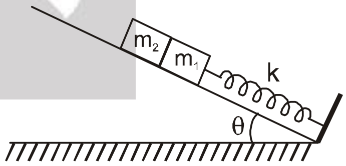
(A) $\frac{a}{6}$ (B) $\frac{a}{4}$ (C) $\frac{a}{3}$ (D) $\frac{a}{8}$

6. जब कण B के सबसे निकट होता है तो कण पर A की ओर लगने वाला बल कार्य करना बन्द कर देता है तो जिस वेग से यह बिन्दु B को पार करेगा वह वेग ज्ञात करो ?

(A) $\frac{\sqrt{2ga}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2ga}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{2ga}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{ga}}{3}$

अनुच्छेद-3

k स्प्रिंग नियतांक का स्प्रिंग m_1 द्रव्यमान के पिण्ड से जुड़ा है तथा दूसरा m_2 द्रव्यमान का पिण्ड पहले पिण्ड को दबाते हुए चित्रानुसार चिकने नत तल पर रखे हुए हैं।



7. जब निकाय साम्यावस्था में है तब स्प्रिंग का सम्पीड़न ज्ञात करो ?

(A) $\frac{(m_1+m_2)g\sin\theta}{2k}$ (B) $\frac{(m_1+m_2)g\sin\theta}{k}$

(C) $\frac{(m_1+m_2)g}{k}$ (D) $\frac{2(m_1+m_2)g\sin\theta}{k}$

8. साम्यावस्था से पिण्डों को (2/k) $(m_1 + m_2)$ g sin θ दूरी तक ओर ज्यादा दबाकर छोड़ा जाता है। जब यह पृथक्कृत होते हैं उस समय दोनों पिण्डों की उभयनिष्ठ चाल ज्ञात कीजिए।

(A) $\left(\sqrt{\frac{1}{3k}(m_1+m_2)}\right)g\sin\theta$ (B) $\left(\sqrt{\frac{2}{k}(m_1+m_2)}\right)g\sin\theta$

(C) $\left(\sqrt{\frac{3}{k}(m_1+m_2)}\right)g\sin\theta$ (D) $\left(\sqrt{\frac{1}{k}(m_1+m_2)}\right)g\sin\theta$

Exercise-3

✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

* चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है।

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1*.✍ $x = A\sin^2\omega t + B\cos^2\omega t + C\sin\omega t\cos\omega t$ फलन सरल आवर्त गति प्रदर्शित करेगा। **[JEE 2006, 5/184,–1]**

(A) A, B तथा C के किसी भी मान के लिए (C = 0 को छोड़कर)

(B) यदि A = – B, C = 2B, आयाम = $|B\sqrt{2}|$

(C) यदि A = B ; C = 0

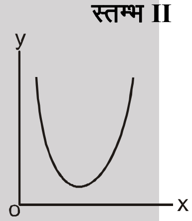
(D) यदि A = B ; C = 2B, आयाम = |B|

2.✍ **कॉलम I** में संभावी पैरामीटरों (parameters) के समुच्चय (set) की सूची दी गई है। इन पैरामीटरों के परिवर्तन को ग्राफ के रूप में दर्शाया गया है **(कॉलम II)**। **कॉलम I** में दिये गये पैरामीटरों का **कॉलम II** में दिये गये ग्राफ समुल (match) करें। अपने उत्तर को ORS में दिया गया 4 × 4 मैट्रिक्स के उचित बुल्लों को काला करके दर्शायें।

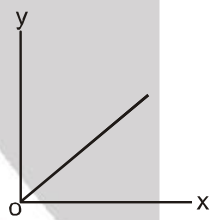
[IIT-JEE 2008, 6/163]

स्तम्भ I **स्तम्भ II**

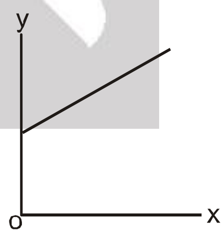
(A) एक सरल लोलक (simple pendulum) की स्थितिज ऊर्जा (y–अक्ष) बनाम विस्थापन (x–अक्ष)

(p)


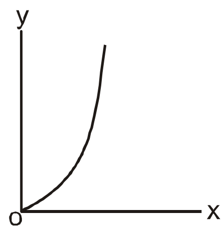
(B) शून्य अथवा स्थिर त्वरण पर एक विमीय गति के लिये विस्थापन (y–अक्ष) बनाम समय (x–अक्ष) (गति केवल + x दिशा में है)

(q)


(C) एक नियत कोण पर प्रक्षेपित प्रक्षेप्य की परास (y–अक्ष) बनाम उसका वेग (x–अक्ष)

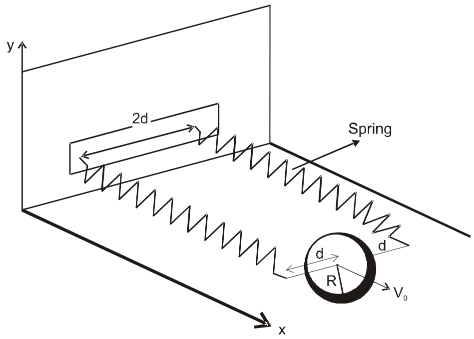
(r)


(D) एक सरल लोलक के आवर्त काल का वर्ग (y–अक्ष) बनाम उसकी लम्बाई (x–अक्ष)

(s)


अनुच्छेद-1

चित्रानुसार एकसमान (uniform) पतली बेलनाकार चकती, जिसका द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है, दो सर्वसम द्रव्यमान रहित स्प्रिंग (spring) के द्वारा, जिनका स्प्रिंग स्थिरांक k है, दीवार से जुड़ी हैं। दोनों स्प्रिंग चकती के केन्द्र से d की सममित (symmetric) दूरी पर, धुरी से संलग्न हैं। धुरी द्रव्यमान रहित है तथा दोनों स्प्रिंग और धुरी एक क्षैतिज समतल पर हैं। प्रत्येक स्प्रिंग की सामान्य लंबाई L है। प्रारंभ में चकती का द्रव्यमान केन्द्र साम्यावस्था में दीवार से L की दूरी पर है। डिस्क बिना फिसले $\vec{V}_0 = V_0\hat{i}$ की गति से लुढ़कती है। घर्षण गुणांक μ है। चित्र : **[JEE-2008, 3×4/163]**



3. जब चकती का द्रव्यमान केन्द्र (centre of mass) इसकी साम्यावस्था से x की दूरी पर विस्थापित है, चकती के ऊपर लगने वाला कुल बाहरी बल निम्न है

(A) $-kx$ (B) $-2kx$ (C) $-\frac{2kx}{3}$ (D) $-\frac{4kx}{3}$

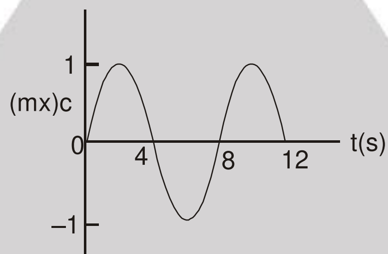
4. चकती का द्रव्यमान केन्द्र सरल आवर्त गति करता है, जिसकी कोणीय आवृत्ति ω का मान निम्न है

(A) $\sqrt{\frac{k}{M}}$ (B) $\sqrt{\frac{2k}{M}}$ (C) $\sqrt{\frac{2k}{3M}}$ (D) $\sqrt{\frac{4k}{3M}}$

5. V_0 का वह महत्तम मान जिसके लिये चकती बिना फिसले लुढ़कती है

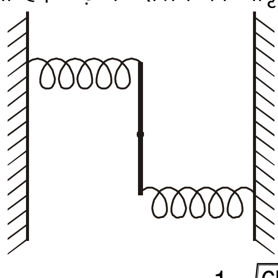
(A) $\mu g\sqrt{\frac{M}{k}}$ (B) $\mu g\sqrt{\frac{M}{2k}}$ (C) $\mu g\sqrt{\frac{3M}{k}}$ (D) $\mu g\sqrt{\frac{5M}{2k}}$

6. सरल आवर्त गति करते हुए किसी कण का x-t आरेख नीचे दर्शाया गया है। समय t = 4/3 सैकेण्ड पर कण का त्वरण है **[IIT-JEE 2009, 3/160, –1]**



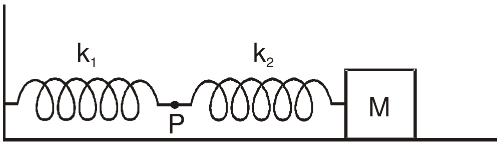
(A) $\frac{\sqrt{3}}{32}\pi^2$ cm/s² (B) $\frac{-\pi^2}{32}$ cm/s² (C) $\frac{\pi^2}{32}$ cm/s² (D) $\frac{\sqrt{3}}{32}\pi^2$ – cm/s²

7. चित्रानुसार लम्बाई L व द्रव्यमान M की एकसमान छड़ अपने केन्द्र पर कीलकित है। इस छड़ के सिरों पर k स्प्रिंग नियतांक के एक जैसे स्प्रिंग लगे है जिनके सिरे दृढ़ आलम्बों से जुड़े है। छड़ क्षैतिज तल में स्वतन्त्र रूप से दोलन कर सकती है। छड़ को एक छोटे कोण θ से घुमा कर छोड़ दिया जाता है। छड़ के दोलन की आवृत्ति होगी। **[IIT-JEE 2009, 3/160, –1]**



(A) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{M}}$ (B) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$ (C) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6k}{M}}$ (D) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{24k}{M}}$

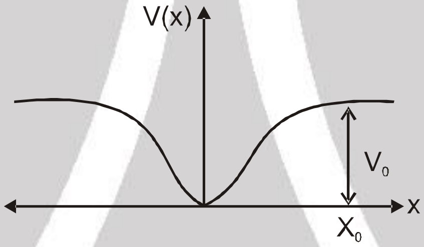
8. चित्र में दिखाया गया द्रव्यमान M सरल आवर्त गति कर रहा है जिसका आयाम A है। बिन्दु P का आयाम होगा **[JEE 2009, 3/160, –1]**



(A) $\frac{k_1A}{k_2}$ (B) $\frac{k_2A}{k_1}$ (C) $\frac{k_1A}{k_1+k_2}$ (D) $\frac{k_2A}{k_1+k_2}$

अनुच्छेद-2

जब m द्रव्यमान का एक कण x-अक्ष पर $V(x) = kx^2$ स्थितिज ऊर्जा से गतिमान होता है, तब यह सरल आवर्त गति करता है। इसका आवर्तकाल $\sqrt{\frac{m}{k}}$ के समानुपाती होता है, जो कि विमीय विश्लेषण द्वारा आसानी से निकाला जा सकता है। हांलाकि, यदि किसी एक कण की स्थितिज ऊर्जा x = 0 के दोनों तरफ kx^2 से भिन्न तरह से बढ़े, तथा कण की कुल ऊर्जा इतनी हो कि वह अनन्त तक पलायन न कर सके, तब भी कण की गति आवर्ती हो सकती है। m द्रव्यमान का एक कण x-अक्ष पर गति करता हैं जहां |x| के केन्द्र के पास होने पर स्थितिज ऊर्जा $V(x) = \alpha x^4$ ($\alpha > 0$) है तथा $|x| \geq X_0$ के लिए स्थितिज ऊर्जा $V(x) = V_0$ है (चित्र देखें) **[JEE 2010, 3×3/160, –1]**



9. यदि एक कण की समग्र ऊर्जा E है तो वह आवर्ती गति तभी सम्पन्न कर सकता है केवल जब

(A) $E < 0$ (B) $E > 0$ (C) $V_0 > E > 0$ (D) $E > V_0$

10. अल्प आयाम A के दोलन के लिए, कण का आवर्तकाल T निम्न में से किसके समानुपाती है ?

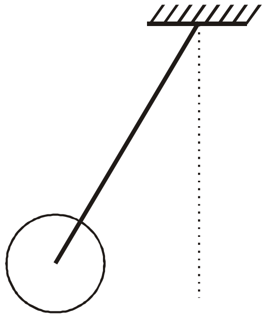
(A) $A\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$ (B) $\frac{1}{A}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$ (C) $A\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ (D) $\frac{1}{A}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

11. $|x| > X_0$ के लिये कण का त्वरण :

(A) V_0 के समानुपाती है (B) $\frac{V_0}{mX_0}$ के समानुपाती है

(C) $\sqrt{\frac{V_0}{mX_0}}$ के समानुपाती है (D) शून्य है

12*. लम्बाई 'L' व द्रव्यमान 'm' की एक धातु–छड़ अपने एक सिरे पर कीलित है। 'R' (<L) त्रिज्या व 'M' द्रव्यमान की एक डिस्क छड़ के मुक्त सिरे पर अपने केंद्र से दो तरह से कीलित की जाती है। (स्थिति A) डिस्क अपने केंद्र पर नहीं घूम सकती और (स्थिति B) डिस्क अपने केंद्र पर घूमनें को स्वतन्त्र है। एक ही विस्थापन अवस्था से छोड़ने पर यह छड़–डिस्क निकाय उर्ध्वाधर तल में सरल–आवर्त–दोलन (SHM) करता है। तब **[JEE 2011, 4/160]**



(A) स्थिति A में प्रत्यानयन आघूर्ण (Restoring torque) = स्थिति B में प्रत्यानयन आघूर्ण

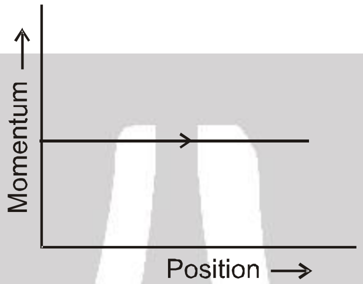
(B) स्थिति A में प्रत्यानयन आघूर्ण < स्थिति B में प्रत्यानयन आघूर्ण

(C) स्थिति A में कोणीय आवृत्ति > स्थिति B में कोणीय आवृत्ति

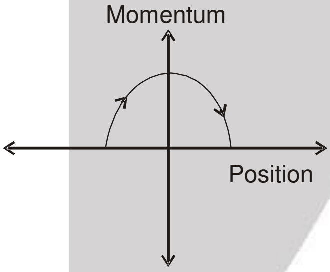
(D) स्थिति A में कोणीय आवृत्ति < स्थिति B में कोणीय आवृत्ति

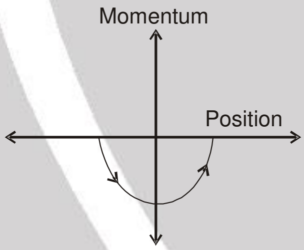
अनुच्छेद-3

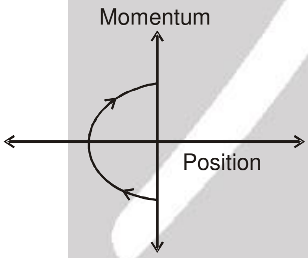
हर प्रकार की गतिकीय समस्याओं के विश्लेषण के लिये फेज–समष्टि चित्राम (Phase space diagrams) का उपयोग किया जाता है। प्रारम्भिक दशा, स्थिति व संवेग, में बदलाव होने पर इनका उपयोग चालन में उत्पन्न बदलावों को समझनें में बहुत उपयोगी है। यहाँ हम एक विमीय सरल गतिकीय निकायों की बात करते है। इनके लिये फेज–समष्टि समतल है जिसमें स्थिति X-अक्ष पर तथा संवेग Y-अक्ष पर रखते है। तब फेज–समष्टि चित्राम इस समतल में एक x(t) vs. p(t) वक्र होगा। वक्र पर तीर समय बढ़ने की दिशा दर्शाता है। उदाहरण के लिये, स्थिर वेग से चल रहे कण के लिये फेज–समष्टि चित्राम सरल–रेखा है जिसे चित्र में दिखाया गया है। चिन्ह परिपाटी में स्थिति या संवेग को ऊपर (या दाहिने) ओर धनात्मक तथा नीचे (या बाँयी) ओर ऋणात्मक माना जाता है। **[JEE 2011, 3×3/160, –1]**

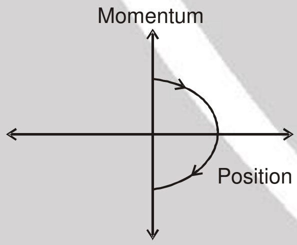


13. जमीन से ऊपर की ओर फेंकी गई गेंद का फेज–समष्टि चित्राम है

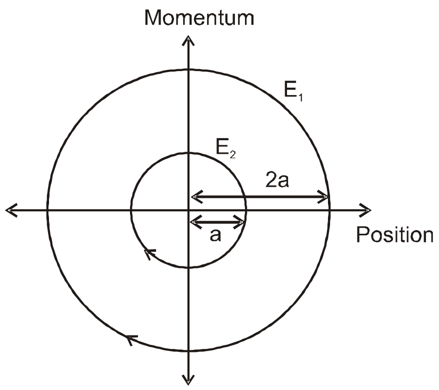
(A)


(B)


(C)


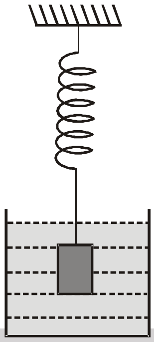
(D)


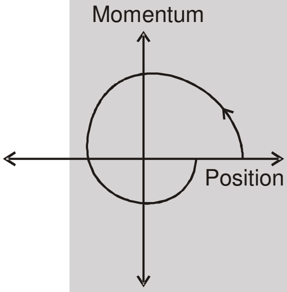
14. सरल–आवर्त–दोलन (SHM) का फेज–समष्टि चित्राम उदगम पर केंद्रित वृत्त है। चित्र में दर्शाये दो वृत्त, एक ही दोलक के लिये है, जब उसकी आरम्भिक अवस्थायें भिन्न हैं, तथा E_1 व E_2 क्रमशः दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जाए हैं। तब

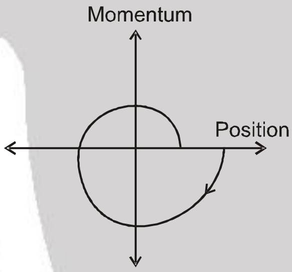


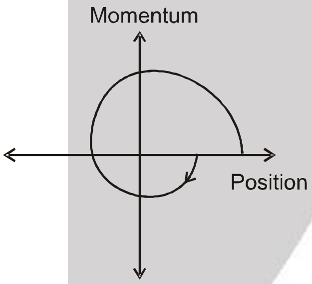
(A) $E_1 = \sqrt{2}E_2$ (B) $E_1 = 2E_2$ (C) $E_1 = 4E_2$ (D) $E_1 = 16E_2$

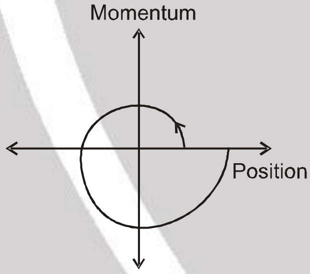
15. चित्र में दर्शाये अनुसार स्प्रिंग–गुटका निकाय पर ध्यान दे, जहाँ गुटका पानी में डूबा है। इस निकाय के एक दोलन करने का फेज–समष्टि चित्राम है।



(A)


(B)


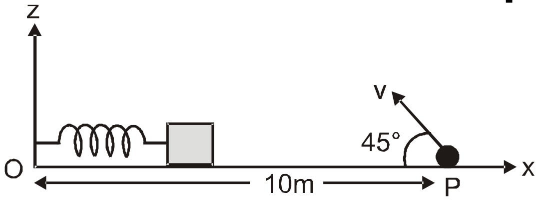
(C)


(D)


16. एक बिन्दु द्रव्यमान पर दो ज्यावक्रीय (sinusoidal) विस्थापन $x_1(t) = A \sin \omega t$ एवं $x_2(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ एक साथ x-दिशा में लग रहे हैं। इस द्रव्यमान पर तीसरा ज्यावक्रीय विस्थापन $x_3(t) = B \sin(\omega t + \phi)$ लगाने पर वह पूर्ण रूप से रूक जाता है। B तथा ϕ का मान है **[JEE 2011, 3/160, –1]**

(A) $\sqrt{2}A, \frac{3\pi}{4}$ (B) $A, \frac{4\pi}{3}$ (C) $\sqrt{3}A, \frac{5\pi}{6}$ (D) $A, \frac{\pi}{3}$

17. एक द्रव्यमान–रहित स्प्रिंग की तनाव–रहित लम्बाई 4.9cm है। उसका एक सिरा बंधित है और दूसरे पर एक छोटा गुटका लगा है (चित्र देखिये)। यह निकाय एक घर्षण–रहित क्षैतिज (horizontal)सतह पर रखा है। समय t = 0 पर गुटके को 0.2m खींच कर स्थिर अवस्था से छोडा जाता तब वह गुटका $\omega = \frac{\pi}{3} rad/s$ rad/s आवृत्ति का सरल–आवर्त–दोलन करता है। ठीक उसी समय (t = 0) पर छोटा कंकड v चाल से क्षैतिज से 45° कोण पर बिंदु P से प्रक्षेपित किया जाता है। बिंदु P की बिंदु O से दूरी (क्षैतिज) 10m है। यदि t = 1s पर कंकड गुटके पर गिरता है, तब v का मान है ($g = 10 m/s^2$ लें) **[IIT-JEE-2012, Paper-1; 3/70, –1]**



(A) $\sqrt{50} m/s$ (B) $\sqrt{51} m/s$ (C) $\sqrt{52} m/s$ (D) $\sqrt{53} m/s$

18*. घर्षणहीन क्षैतिज तल पर पड़ी हुई k बल स्थिरांक की द्रव्यमान रहित स्प्रिंग के एक सिरे से m द्रव्यमान का कण जुड़ा हुआ है। इस स्प्रिंग का दूसरा सिरा बद्ध है। यह कण अपनी साम्यावस्था से समय t = 0 पर प्रारम्भिक क्षैतिज वेग u_0 से गतिमान हो रहा है। जब कण की गति $0.5\ u_0$ होती है, यह एक दृढ़ दीवार से प्रत्यास्थ संघट्ट करता है। इस संघट्ट के बाद – **[JEE (Advanced) 2013, 4/60]**

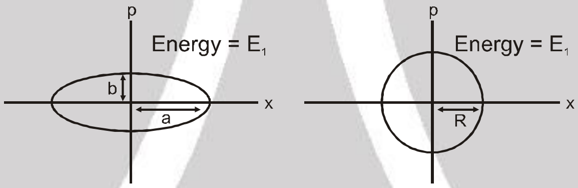
(A) जब कण अपनी साम्यावस्था से लौटता है इसकी गति u_0 होती है।

(B) जब कण अपनी साम्यावस्था से पहली बार गुजरता है वह समय $t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ है।

(C) जब स्प्रिंग से सम्पीड़न अधिकतम होता है वह समय $t = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$ है।

(D) जब कण अपनी साम्यावस्था से दूसरी बार गुजरता है वह समय $t = \frac{5\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$ है।

19*. दो निरवलंबित बराबर द्रव्यमान के आवर्त दोलक मूल बिन्दु के परितः कोणीय आवृत्तियों ω_1 एवं ω_2 तथा कुल ऊर्जाओं E_1 तथा E_2 से दोलन कर रहे हैं। उनके सवेंगों p के स्थिति x के साथ परिवर्तन संबंध चित्रों में दर्शाये गये हैं। यदि $\frac{a}{b} = n^2$ तथा $\frac{a}{R} = n$ है, तब सही कथन है (हैं) **[JEE (Advanced) 2015 ; P-1, 4/88, –2]**



(A) $E_1\omega_1 = E_2\omega_2$ (B) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = n^2$ (C) $\omega_1\omega_2 = n^2$ (D) $\frac{E_1}{\omega_1} = \frac{E_2}{\omega_2}$

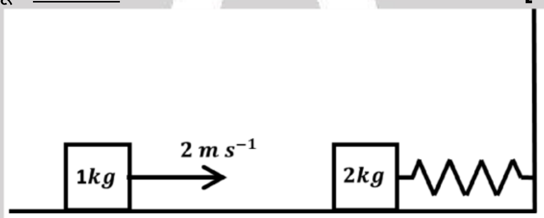
20. इकाई द्रव्यमान का एक कण एक बल के प्रभाव में x-अक्ष पर गति कर रहा है। कण की कुल ऊर्जा संरक्षित है। कॉलम I में कण की स्थितिज ऊर्जाओं के चार संभावित रूप दिये गये हैं (a तथा U_0 स्थिरांक हैं)। कॉलम I में दी गयी स्थितिज ऊर्जाओं का कॉलम II में दिये कथन/कथनों से उचित मिलान कीजिए। **[JEE (Advanced) 2015 ; 8/88, –1]**

कॉलम-I	**कॉलम-II**
(A) $U_1(x) = \frac{U_0}{2}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2$	(P) कण पर कार्य करने वाला बल x = a पर शून्य है।
(B) $U_2(x) = \frac{U_0}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2$	(Q) कण पर कार्य करने वाला बल x = 0 पर शून्य है।
(C) $U_3(x) = \frac{U_0}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$	(R) कण पर कार्य करने वाला बल x = –a पर शून्य है।
(D) $U_4(x) = \frac{U_0}{2}\left[\frac{x}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3\right]$	(S) क्षेत्र $\lvert x\rvert < a$ में कण x = 0 की ओर आकर्षण बल का अनुभव करता है।
	(T) $\frac{U_0}{4}$ कुल ऊर्जा वाला कण x = –a बिंदु के परितः दोलन कर सकता है।

21*. एक द्रव्यमान–रहित स्प्रिंग, जिसका द्रढ़ता गुणांक (stiffness constant) k है, के एक छोर पर M द्रव्यमान का एक गुटका जुड़ा है, तथा दूसरे छोर को द्रढ़ दीवार से जोड़ा गया है। यह गुटका एक समतल घर्षण–रहित सतह पर एक संतुलित स्थिति x_0 के गिर्द छोटे आयाम A से दोलन करता है। यहाँ दो परिस्थितियां मानिए : (i) जब गुटका x_0 पर है और (ii) जब गुटका $x = x_0 + A$ पर है। दोनों परिस्थितियों में द्रव्यमान m (< M) के एक कण को गुटके पर धीरे से इस प्रकार रखा जाता है की वह तुरंत गुटके से चिपक जाता है। कण को गुटके के ऊपर रखने के बाद गति के बारे में निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं ? **[JEE (Advanced) 2016 ; P-2, 4/62, –2]**

(A) पहली परिस्थिति में दोलन का आयाम $\sqrt{\frac{M}{m+M}}$ भाज्य (factor) से परिवर्तित होता है, जबकि दूसरी परिस्थिति में यह अपरिवर्तित रहता है।
(B) दोनों परिस्थितियों में दोलन का अंतिम समयकाल समान है।
(C) दोनों परिस्थितियों में सम्पूर्ण ऊर्जा कम हो जाती है।
(D) सम्मिलित द्रव्यमानों की x_0 पर तात्क्षणिक गति दोनों परिस्थितियों में कम हो जाती है।

22. एक कमानी–गुटका निकाय (spring-block system) एक घर्षण रहित फर्श (frictionless floor) पर विरामावस्था में है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। कमानी स्थिरांक (spring constant) 2.0 Nm^{-1} है और गुटके का द्रव्यमान (mass) 2.0 kg है। कमानी के द्रव्यमान की उपेक्षा कीजिए। शुरूआत मे कमानी अतनित (unstretched) अवस्था में है। एक दूसरा गुटका, जिसका द्रव्यमान 1.0 kg है और चाल 2.0 ms^{-1} है, पहले गुटके से प्रत्यास्थ संघट्ट (elastic collision) करता है। इस संघट्ट के बाद 2.0 kg का गुटका दीवार से नहीं टकराता है। जब कमानी संघट्ट के बाद पहली बार अपनी अतानित स्थिति में वापस आती है, तब दोंनो गुटकों के बीच की दूरी _______मीटर होगी। **[JEE (Advanced) 2018, P-1, 3/60]**



भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

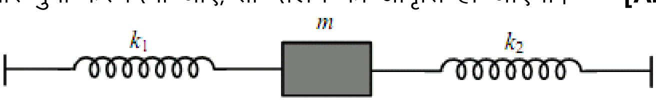
1. 7 मिमी. आयाम से एक सरल आवर्त गति करते हुए एक कण का अधिकतम वेग 4.4 मी/से है। दोलन काल है : **[AIEEE 2006; 3/165, –1]**
(1) 100 s (2) 0.01 s (3) 10 s (4) 0.1 s

2*. एक क्षैतिज प्लेटफॉर्म पर एक सिक्का रखा है। प्लेटफार्म ω कोणीय आवृत्ति से ऊर्ध्वाधर सरल आवर्त गति कर रहा है। दोलन का आयाम धीरे–धीरे बढ़ाया जाता है। प्रथम बार सिक्का प्लेटफॉर्म से स्पर्श छोड़ेगा :**[AIEEE 2006; 3/165, –1]**
(1) प्लेटफार्म की उच्चतम अवस्था पर (2) प्लेटफार्म की मध्य अवस्था पर
(3) $\frac{g}{\omega^2}$ के आयाम पर (4) $\frac{g^2}{\omega^2}$ के आयाम पर

3. एक स्प्रिंग से जुड़ी तथा सरल आवर्त गति करने वाली एक वस्तु का विस्थापन $x = 2 \times 10^{-2} \cos\pi t$ मीटर से दिया जाता है। समय जिस पर पहली बार अधिकतम चाल प्रकट होती है, है **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**
(1) 0.5 s (2) 0.75 s (3) 0.125 s (4) 0.25 s

4. एक बिन्दु द्रव्यमान नियम $x = x_0 \cos(\omega t - \pi/4)$ के अनुसार x-अक्ष के अनुदिश कम्पन करता है। यदि कण का त्वरण निम्न प्रकार लिखा जाता है, $a = A\cos(\omega t + \delta)$, तो **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**
(1) $A = x_0$, $\delta = -\pi/4$ (2) $A = x_0\omega^2$, $\delta = -\pi/4$ (3) $A = x_0\omega^2$, $\delta = -\pi/4$ (4) $A = x_0\omega^2$, $\delta = 3\pi/4$

5. बल नियतांक k_1 तथा k_2 की दो स्प्रिंगें द्रव्यमान m से चित्रानुसार जुड़ी है। द्रव्यमान के दोलन की आवृत्ति f है। यदि k_1 तथा k_2 दोनों को प्रारम्भिक मान का चार गुना कर दिया जाए, तो दोलन की आवृत्ति हो जाएगी। **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**



(1) $f/2$ (2) $f/4$ (3) 4f (4) $2f$

6. द्रव्यमान m का एक कण, आयाम a तथा आवृत्ति υ से सरल आवर्त गति करता है। इसकी माध्य स्थिति से एक सिरे तक गति के दौरान औसत गतिज ऊर्जा है : **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**

(1) $\pi^2 ma^2 \upsilon^2$ (2) $1/4\ ma^2 \upsilon^2$ (3) $4\pi^2 ma^2 \upsilon^2$ (4) $2\pi^2 ma^2\upsilon^2$

7.* यदि x, v तथा a क्रमशः आवर्तकाल T से सरल आवर्त गति करते किसी कण के विस्थापन, वेग तथा त्वरण को निरूपित करते हैं, तब समय के साथ निम्नलिखित में से किसमें परिवर्तन नहीं होता है ? **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**

(1) aT/x (2) $aT + 2\pi v$ (3) aT/v (4) $a^2T^2 + 4\pi^2v^2$

8. एक क्षैतिज कमानी से बँधा एक द्रव्यमान M आयाम A_1 से सरल आवर्त गति कर रहा है। जब द्रव्यमान M अपनी माध्य अवस्था से गुजर रहा है, तब एक छोटा द्रव्यमान m इसके ऊपर रख दिया जाता है और अब दोंनो आयाम A_2 से गति करते है। $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ का अनुपात है : **[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

(1) $\frac{M}{M+m}$ (2) $\frac{M+m}{M}$ (3) $\left(\frac{M}{M+m}\right)^{1/2}$ (4) $\left(\frac{M+m}{M}\right)^{1/2}$

9. यदि बल नियतांक 'k' वाली एक स्प्रिंग को लम्बाई $\ell_A : \ell_B = 2 : 3$, के अनुपात वाले दो भागों 'A' और 'B' में काटा जाता है, तब स्प्रिंग 'A' का बल नियतांक क्या होगा : **[AIEEE 2011, 11 May; 4/120 –1]**

(1) $\frac{3k}{5}$ (2) $\frac{2k}{5}$ (3) k (4) $\frac{5k}{2}$

10. x-अक्ष पर एकसमान आयाम A और आवृत्ति ω से दो कण सरल आवर्त गति कर रहे हैं। उनकी माध्य अवस्था के बीच दूरी X_0 ($X_0 > A$) हैं। यदि उनके बीच अधिकतम दूरी ($X_0 + A$) हैं, तब उनकी गति में कलान्तर है:**[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

(1) $\pi/2$ (2) $\pi/3$ (3) $\pi/4$ (4) $\pi/6$

11. यदि एक सरल दोलक का समय t = 0s एवं t = τs, के बीच एक सार्थक आयाम (अपने मूल आयाम के 1/e गुणक तक) रहता है तब τ को दोलक का औसत काल कहा जा सकता है। जब दोलक का गोलीय बॉब अपने वेग के समानुपाती मंदन (श्यान कर्षण के कारण) को सहता है, जहाँ 'b' समानुपाती गुणांक है, तब दोलक का औसत आयुकाल सेकण्ड में है (यह मान लें कि अवमंदन अल्प है) : **[AIEEE 2012 ; 4/120, –1]**

(1) 0.693/b (2) b (3) 1/b (4) 2/b

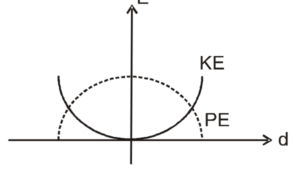
12. एक मन्दित दोलित्र का आयाम 5s में अपने मूल परिमाण से घटकर मूल परिमाण का 0.9 गुना हो जाता है। एक और 10s में यह घटकर मूल परिमाण का α गुना हो जाएगा, जहाँ α का मान है : **[JEE (Main) 2013, 4/120]**

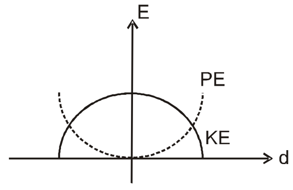
(1) 0.7 (2) 0.81 (3) 0.729 (4) 0.6

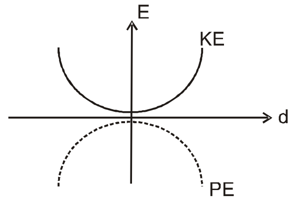
13. एक कण एक सरल रेखा में सरल आवर्त गति से गतिशील है। यह विरामावस्था से प्रारम्भ कर प्रथम τ सेकण्ड़ में दूरी a और अगले τ सेकण्ड़ में दूरी 2a उसी दिशा में तय करता है। तब : **[JEE (Main) 2014; 4/120, –1]**

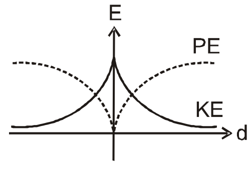
(1) गति का आयाम 3a है। (2) दोलनों का आवर्त काल 8τ है।
(3) गति का आयाम 4a है। (4) दोलनों का आवर्त काल 6τ है।

14. किसी सरल लोलक के लिये, उसके विस्थापन d तथा उसकी गतिज ऊर्जा के बीच और विस्थापन d तथा उसकी स्थितिज ऊर्जा के बीच ग्राफ खींचे गये है। निम्नांकित में से कौनसा ग्राफ (आलेख) सही है ? (यहाँ ग्राफ केवल व्यवस्था आरेख है और स्केल के अनुसार नहीं है।) **[JEE (Main) 2015; 4/120, –1]**

(1) 

(2) 

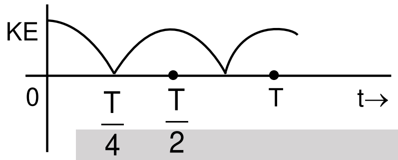
(3) 

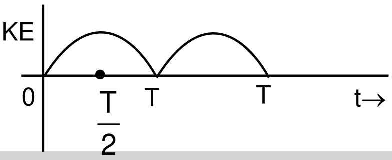
(4) 

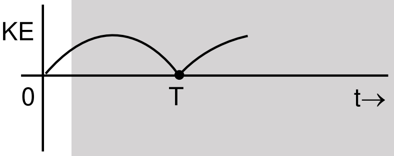
15. एक कण A आयाम से सरल आवर्त दोलन कर रहा है। जब यह अपने मूल स्थान से पर 2A/3 पहुँचता है, तब अचानक इसकी गति तिगुनी कर दी जाती है। तब इसका नया आयाम है **[JEE (Main) 2016; 4/120, –1]**

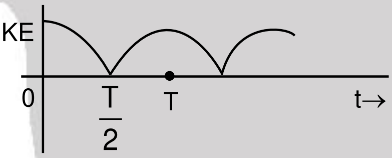
(1) 3A (2) $\sqrt{3}$ A (3) $\frac{7A}{3}$ (4) $\frac{A}{3}\sqrt{41}$

16. एक कण आवर्तकाल T से सरल आवर्त गति कर रहा है। समय t = 0 पर वह साम्यवस्था की स्थिति में है। निम्न में से कौनसा ग्राफ समय के साथ गतिज ऊर्जा का सही दर्शाता है। **[JEE (Main) 2017; 4/120, –1]**

(1)


(2)


(3)


(4)


17. किसी ठोस में चांदी का एक परमाणु 10^{12}/sec की आवृत्ति से किसी दिशा में सरल आवर्त गति करता है। एक परमाणु को दूसरे परामाणु से जोडने वाले बंध का बल नियतांक कितना होगा ? (चांदी का आण्विक भार = 108 और अवागाद्री (Avagadro) संख्या = 6.02×10^{23} gm $mole^{-1}$) **[JEE (Main) 2018; 4/120, –1]**

(1) 2.2 N/m (2) 5.5 N/m (3) 6.4 N/m (4) 7.1 N/m

Answers

EXERCISE-1

भाग - I

खण्ड़ (A) :

A-1. आयाम = 5 m, कला नियतांक = $\frac{\pi}{6}$,
आवर्त काल = 2 s, अधिकतम चाल = 5π m/s

A-2. (a) 2.0 cm, $\frac{\pi}{50}$ s = 0.063 s, 100 N/m
(b) 1.0 cm, $\sqrt{3}$ m/s, –100 m/s^2

A-3. (a) T/12, (b) T/8, (c) T/6, (d) T/4, (e) T/8

A-4. $\frac{\sqrt{3}v_0}{2}$

A-5. $x = (10\text{cm})\sin\left[\left(\frac{\pi}{3}s^{-1}\right)t+\frac{\pi}{6}\right], \frac{10}{9}\pi^2 \approx 11$ cm/s^2

A-6. माध्य स्थिति से $\pm\frac{6}{5}$ cm = ± 1.2 cm

खण्ड़ (B) :

B-1. ± 5 cm **B-2.** A = 0.06 m

खण्ड़ (C) :

C-1. 0.1 N/m **C-2.** 40 J

C-3. $\frac{16}{10\pi^2}$ = 0.16 Kg

C-4. (a) $\frac{F}{k}, 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$, (b) $\frac{F^2}{2k}$ (c) $\frac{F^2}{2k}$

C-5. (a) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$, $k_{eq.} = k_1 + k_2$; (b)
$2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$, $k_{eq.} = k_1 + k_2$; (c)
$2\pi\sqrt{\frac{m\ (k_1+k_2)}{k_1k_2}}$, $k_{eq.} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$
उत्तर समान ही होंगे

C-6. ऊपर से $\frac{M^2g^2}{2k}, \frac{M^2g^2}{4k}$ तथा $\frac{M^2g^2}{6k}$;
आवर्तकाल = $2\pi\sqrt{\frac{11}{6}\frac{M}{k}}$

खण्ड़ (D) :

D-1. 1 m **D-2.** 0.25 m

D-3. $\left(\frac{3600}{3601}\right)^2 g = 9.794 m/s^2$

D-4. (i) $2T_0$ (ii) 3g ऊपर की ओर

खण्ड़ (E) :

E-1. (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{7\ell}{12g}}$ (b) $2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$

(c) $2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{8}\ a}{3\ g}}$ (d) $2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

E-2. (a) $2\pi\sqrt{\frac{r\sqrt{2}}{g}}$, $r/\sqrt{2}$ (b) $2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{3}g}}$, $\frac{L}{2\sqrt{3}}$

खण्ड़ (F) :

F-1. (a) 7 cm (b) $\sqrt{37}$ cm= 6.1 cm
(c) 5 cm

F-2. $a\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ **F-3.** $2x^2 + \frac{y}{2} = 1$

खण्ड़ (G) :

G-1. कण का आयाम तथा ऊर्जा दोनो ही अनुनाद की स्थिति में अधिकतम हो सकता है। अनुनाद होने के लिए $\omega_1 = \omega_2$

G-2. (a) 0.3 s(b) 6.93 s (c) 3.4 s

भाग - II

खण्ड़ (A) :

A-1. (A) **A-2.** (A) **A-3.** (B)
A-4. (A) **A-5.** (A) **A-6.** (C)
A-7. (A) **A-8.** (B) **A-9.** (B)
A-10. (B)

खण्ड़ (B) :

B-1. (B) **B-2.** (C) **B-3.** (B)
B-4. (C) **B-5.** (A) **B-6.** (C)

खण्ड़ (C) :

C-1. (D) **C-2.** (C) **C-3.** (C)
C-4. (A) **C-5.** (D) **C-6.** (D)
C-7. (B) **C-8.** (D)

खण्ड़ (D) :

D-1. (A) **D-2.** (D) **D-3.** (C)
D-4. (D) **D-5.** (C)

खण्ड़ (E) :

E-1. (D) **E-2.** (B)

खण्ड़ (F) :

F-1. (B) **F-2.** (B) **F-3.** (D)
F-4. (B)

खण्ड़ (G) :

G-1. (D) **G-2.** (C)

भाग - III

1. (A) $\rightarrow$ r , (B) $\rightarrow$ p, (C) $\rightarrow$ q, (D) $\rightarrow$ s
2. (A) $\rightarrow$ p ; (B) $\rightarrow$ q ; (C) $\rightarrow$ p ; (D) $\rightarrow$ s

EXERCISE-2

भाग - I

1. (A) **2.** (C) **3.** (B)
4. (C) **5.** (C) **6.** (A)
7. (A) **8.** (A) **9.** (A)
10. (A) **11.** (B) **12.** (C)
13. (C) **14.** (B) **15.** (D)

भाग - II

1. 10 **2.** 2 **3.** 2
4. 15 **5.** 2 **6.** 16
7. 3 **8.** 3 **9.** 12
10. 17 **11.** 15 **12.** 8
13. 15 **14.** 2 **15.** 8
16. 75

भाग - III

1. (AD) **2.** (ABC) **3.** (BC)
4. (ABCDE) **5.** (BD) **6.** (ABCD)
7. (BCD) **8.** (ABC) **9.** (BD)
10. (BC) **11.** (ACD) **12.** (AC)

भाग - IV

1. (A) **2.** (C) **3.** (D)
4. (D) **5.** (A) **6.** (B)
7. (B) **8.** (C)

EXERCISE-3

भाग - I

1. (ABD)
2. (A)$\rightarrow$(p); (B) $\rightarrow$ (q, s) ; (C) $\rightarrow$ (s) ; (D) $\rightarrow$ (q)
3. (D) **4.** (D) **5.** (C)
6. (D) **7.** (C) **8.** (D)
9. (C) **10.** (B) **11.** (D)
12. (AD) **13.** (D) **14.** (C)
15. (B) **16.** (B) **17.** (A)
18. (AD) **19.** (BD)
20. (A) $\rightarrow$ P,Q,R,T ; (B) $\rightarrow$ Q,S ; (C) $\rightarrow$ P,Q,R,S ; (D) $\rightarrow$ P,R,T
21. (ABD) **22.** 2.09

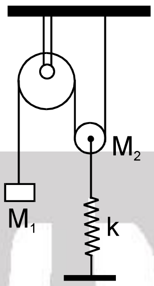
भाग - II

1. (2) **2.** (1, 3) **3.** (1)
4. (4) **5.** (4) **6.** (1)
7. (1,4) **8.** (4) **9.** (4)
10. (2) **11.** (4) **12.** (3)
13. (4) **14.** (2) **15.** (3)
16. (1) **17.** (4)

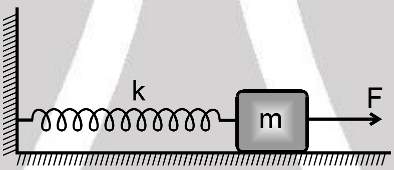
High Level Problems (HLP)

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

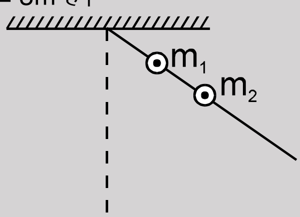
1. प्रदर्शित निकाय के मुक्त दोलनों का आवर्तकाल क्या होगा यदि M_1 द्रव्यमान को थोड़ा सा नीचे विस्थापित किया जाये। स्प्रिंग का बल नियतांक k है, स्थिर घिरनी का द्रव्यमान नगण्य है, और चलित घिरनी चिकनी है।



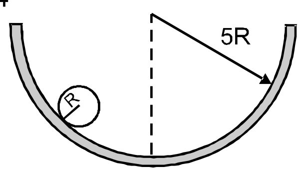
2. दिये गये चित्र में K स्प्रिंग नियतांक की स्प्रिंग से जुड़े ब्लॉक पर नियत बल F लगाने पर यह ब्लॉक को अधिकतम वेग V प्रदान करता है। अगर स्प्रिंग का बल नियतांक 4 K हो जाए तो ब्लॉक का अधिकतम वेग ज्ञात कीजिए। प्रारम्भ में स्प्रिंग अपनी प्राकृतिक अवस्था में है।



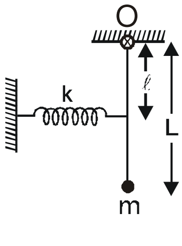
3. दो बिन्दु द्रव्यमान m_1 तथा m_2 एक हल्की छड़ पर जुड़े हुए है एवं छड़ एक सिरे पर किलकित है। m_1 तथा m_2 किलकित बिन्दु से क्रमशः ℓ_1 तथा ℓ_2 दूरी पर स्थित है। इस निकाय के दोलन का आवर्तकाल सेकण्ड़ में ज्ञात करो। (आयम अल्प मानिए) यदि $m_1 = m_2$, $\ell_1 = 1$m और $\ell_2 = 3$m है।



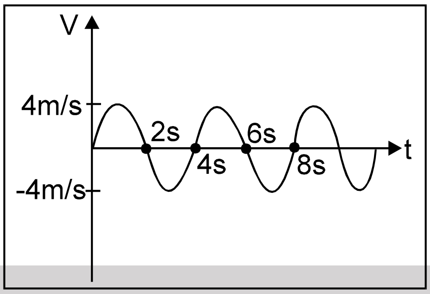
4. एक ठोस गोला (त्रिज्या = R) एक बेलन (त्रिज्या = 5R) में बिना फिसले लुढकता है। ठोस गोले के अल्प दोलनों का कोणीय आवृत्ति s^{-1} में ज्ञात करे। $R = \frac{1}{14}$ m तथा $g = 10\ m/s^2$ लीजिये। (बेलन का अक्ष स्थिर और क्षैतिज है।)



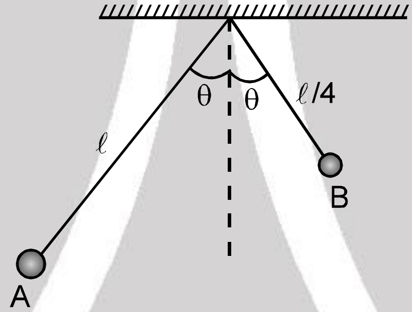
5. एक m द्रव्यमान का कण नगण्य द्रव्यमान की पतली छड़ के निचले सिरे से लटका है। छड़ का ऊपरी सिरा कागज के तल में O बिन्दु से पारित क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करने के लिए स्वतन्त्र है। चित्रानुसार जब छड़ ऊर्ध्वाधर स्थिति में है तो स्प्रिंग असम्पीड़ित है। यदि इसे साम्यावस्था से थोड़ा–सा विस्थापित करके छोड़ दिया जाये तो कण की गति सरल आवर्त गति है तथा दोलन का आवर्तकाल $\pi\sqrt{\frac{L}{n}}$ है तो n ज्ञात करो। $k = \frac{9mgL}{\ell^2}$ तथा $g = 10\ m/s^2$ लीजिये।



6. अगर सीधी रेखा के अनुदिश गति करते कण का वेग समय के साथ ज्या (sin) फलन के रूप में चित्रानुसार परिवर्तित होता है तो $t = 0$ से $t = 2\,(2n - 1)$ सेकण्ड के दौरान कण की औसत चाल क्या होगी, जहां n कोई भी धनात्मक पूर्णांक है।



7. दो सरल लोलको A तथा B की लम्बाई ℓ तथा $\ell/4$ है को चित्र में प्रदर्शित स्थिति से छोड़ा जाता है। छोड़ने के बाद वह समय ज्ञात करो जब दोनों रस्सीयां पहली बार समान्तर होती है। कोण θ बहुत ही अल्प है।



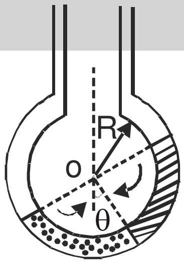
8. x-y तल में m द्रव्यमान का कण इस प्रकार गतिशील है कि इसके x तथा y निर्देशांक क्रमशः $x = a \sin \omega t$ तथा $y = a \cos \omega t$ के अनुसार परिवर्तित होते हैं। यहाँ 'a' तथा 'ω' धनात्मक स्थिरांक तथा 't' समय है। ज्ञात करो

(a) पथ का समीकरण तथा नाम।

(b) कण वामावर्त दिशा में गति करेगा या दक्षिणावर्त दिशा में गति करेगा ?

(c) t समय पर कण पर कार्यरत बल ?

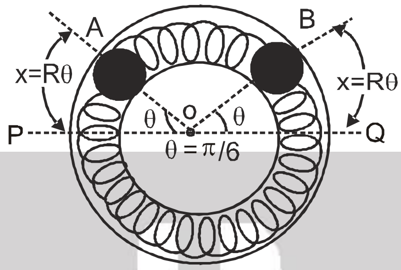
9. दो अश्यान, असपीड़िय तथा अघुलनशील द्रव जिनका घनत्व ρ तथा 1.5 ρ है। R त्रिज्या तथा अल्प अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की ऊर्ध्वाधर नली में चित्रानुसार भरे है। प्रत्येक द्रव नली की चौथाई परिधि में भरा है। **[1991 ; 4 + 4 M]**



(a) कोण θ ज्ञात करो जोकि दोंनो द्रव को मिलाने वाली त्रिज्या ऊर्ध्वाधर से बनाती है।

(b) यदि सम्पूर्ण द्रव को साम्यावस्था से अल्प विस्थापित कर दिया जाये तो सिद्ध करो कि परिणामी दोलन सरल आवृत्ति होंगे। इन दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात करो।

10. समान द्रव्यमान 0.1 kg की दो समरूप गेंदे A व B दो समान द्रव्यमानहीन स्प्रिंगों से जुड़ी है। स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय एक वृत्तीय दृढ़ चकनी नली में चित्रानुसार गति कर सकता है। नली क्षैतिज तल में जड़वत् है। गेंदो का केन्द्र 0.06 m त्रिज्या के वृत्त में गति कर सकता है। प्रत्येक स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई 0.06π मीटर तथा स्प्रिंग बल नियतांक 0.1 N/m है। प्रारम्भ में दोंनो गेंदे $\theta = \pi/6$ रेडियन कोण से PQ व्यास के सापेक्ष विस्थापित की जाती है तथा स्थिरावस्था से छोड़ी जाती है। (चित्रानुसार) **[1993 ; 6M]**

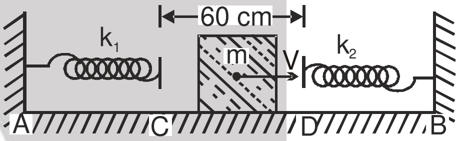


(i) गेंद B के दोलनों की आवृत्ति ज्ञात करो।

(ii) गेंद A की चाल ज्ञात करो, जब दोंनो गेंद व्यास PQ के दोंनो सिरों पर आती है।

(iii) निकाय की कुल ऊर्जा क्या है ?

11. चित्रानुसार k_1 तथा k_2 बल नियतांक की दो हल्की स्प्रिंग तथा m द्रव्यमान का ब्लॉक चिकनी क्षैतिज टेबल पर एक रेखा AB पर चित्रानुसार स्थित है। दोंनो स्प्रिंग के एक सिरे जड़वत् है तथा दूसरा सिरा मुक्त है। दोंनो मुक्त सिरों के बीच की दूरी CD = 60 cm है।



यदि ब्लॉक को रेखा AB के अनुदिश 120 cm/s का वेग दिया जाये तो ब्लॉक के दोलन का आवर्तकाल ज्ञात करो।
(k_1 = 1.8 N/m, k_2 = 3.2 N/m, m = 200 g) **[1985 ; 6M]**

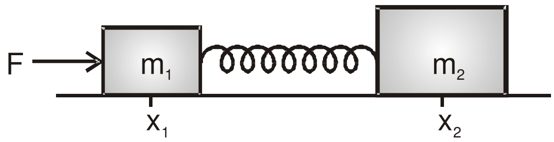
12. चित्रानुसार M द्रव्यमान की समरूप तख्ता क्षैतिज तथा सममित रूप से दो विपरीत दिशा में नियत कोणीय वेग से किसी बाह्य कारक द्वारा घूमते हुए पहियों पर रखी है। दोनों पहियों तथा तखता के मध्य घर्षण गुणांक μ है। यदि तखता को इसकी लम्बाई के अनुदिश विस्थापित करके छोड़ दिया जाये तो तखता की दोलन गति का आवर्तकाल ज्ञात करो।

13. **घनाभ विभव (Cubic Potential) :** m द्रव्यमान का एक कण लेते है, जो स्थितिज ऊर्जा u(x) के प्रभाव में एक विमीय गति करता है। $u(x) = \dfrac{m\omega^2 x^2}{2} - \delta x - \dfrac{\alpha x^3}{3}$ यहाँ ω, δ तथा a धनात्मक एवं वास्तविक है।

(a) u(x) का ग्राफ आरेखित करे एवं यदि कोई चरम है तो दर्शाये

(b) प्रकरण लेवें जहाँ m = 1, $\omega = \sqrt{2}$, α = 1 तथा δ = 1/2 है (उपयुक्त विमा में)। स्थितिज ऊर्जा u(x) को आरेखित कीजिए। यदि इस एक विमीय विभव में गतिशील कण की कुल ऊर्जा E = 0 है (समान मात्रक में)। अनुमत परास, परिबद्धता एवं आवृति (regions, boundedness and periodicity) के पदों में कण की गति को समझाइये।

14. m_1 = 1.0 kg व m_2 = 2.0 kg द्रव्यमान के दो ब्लॉक द्रव्यमानहीन प्रत्यास्थ स्प्रिंग द्वारा जड़े हुए तथा स्प्रिंग की प्राकृतिक लम्बाई में ये ब्लॉक प्रारम्भ में विरामावस्था में चिकनी क्षैतिज सतह पर रखे हुए है। m_1 द्रव्यमान के एक ब्लॉक पर निश्चित समय t के लिए एक नियत परिमाण का क्षैतिज बल F = 6.0 N आरोपित किया जाता है, जिससे m_1 में विस्थापन Δx_1 = 0.1 m तथा Δx_2 = 0.05 m होते है। द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष निकाय की गतिज ऊर्जा 0.1 J है। इसके पश्चात् बल F हटा दिया जाता है।



(a) t की गणन कीजिए।

(b) बल हटाने के बाद द्रव्यमान केन्द्र की चाल तथा गतिज ऊर्जा की गणना कीजिए।

(c) निकाय में संचित ऊर्जा की गणना कीजिए।

HLP Answers

1. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M_2 + 4M_1}{k}}$ **2.** V/2 **3.** π **4.** 5

5. 25 **6.** $\dfrac{8}{\pi}$ m/s **7.** $\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

8. (a) $x^2 + y^2 = a^2$, वृत्त (b) कण दक्षिणावर्त दिशा में गति करता है। (c) बल का परिमाण = $m\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = m\omega^2 a$

9. (a) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{5}\right)$ (b) $2\pi\sqrt{\dfrac{R}{6.11}}$

10. (i) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{4\times 0.1}{0.1}} = \dfrac{1}{\pi}$ Hz (ii) V = 0.0628 (iii) 3.9×10^{-4} J **11.** 2.82 s

12. $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{\mu g}}$ **13.** (b) x = 0 एवं $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$ में मध्य U ऋणातमक है। अतः गतिज ऊर्जा धनात्मक है।

14. (a) 0.26s, (b) 0.52 ms^{-1}, 0.40 J, (c) 0.20 J