Exercise-1

✍ Marked Questions may have for Revision Questions.
✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : SUBJECTIVE QUESTIONS
भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

SECTION (A) : EQUATION OF SHM सरल आवर्त गति का समीकरण

A-1.✍ The equation of a particle executing SHM is $x = (5\ \ m)\sin\left[(\pi\ \ s^{-1})t + \frac{\pi}{6}\right]$. Write down the amplitude, initial phase constant, time period and maximum speed.

सरल आवर्त गति कर रहे एक कण का समीकरण $x = (5\ \ m)\sin\left[(\pi\ \ s^{-1})t + \frac{\pi}{6}\right]$ है। आयाम, प्रारम्भिक कला नियतांक, आवर्तकाल व अधिकतम चाल लिखिए।

Ans. Amplitude = 5 m, Phase constant = $\frac{\pi}{6}$, Time period = 2 s, Maximum speed = 5π m/s

आयाम = 5 m, कला नियतांक = $\frac{\pi}{6}$, आवर्त काल = 2 s, अधिकतम चाल = 5π m/s

Sol. $x = 5\sin\left[\pi t + \frac{\pi}{6}\right]$

Compare this equation with

$x = A\sin(\omega t + \phi) \Rightarrow A = 5$

$\phi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ sec

$V_{max} = A\omega = 5\pi$ m/s

Sol. $x = 5\sin\left[\pi t + \frac{\pi}{6}\right]$

इस समीकरण की निम्न समीकरण के साथ तुलना करने पर

$x = A\sin(\omega t + \phi) \Rightarrow A = 5$

$\phi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ sec

$V_{max} = A\omega = 5\pi$ m/s

A-2. A particle having mass 10 g oscillates according to the equation x = (2.0 cm) sin [(100 s^{-1}) t+ π/6]. Find (a) the amplitude, the time period and the force constant (b) the position, the velocity and the acceleration at t = 0.

10 g द्रव्यमान का एक कण समीकरण x = (2.0 cm) sin [(100 s^{-1}) t+ π/6] के अनुसार दोलन करता है। ज्ञात करो (a) आयाम, आवर्तकाल व बल नियतांक (b) t = 0 पर स्थिति, वेग व त्वरण।

Ans. (a) 2.0 cm, $\frac{\pi}{50}$ s = 0.063 s, 100 N/m (b) 1.0 cm, $\sqrt{3}$ m/s, –100 m/s^2

Sol. $x = (2.0\text{ cm}) \sin\left[(100s^{-1})t + \frac{\pi}{6}\right]$

Compare this equation with

इसी समीकरण की तुलना करने पर

$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad \Rightarrow \quad A = 2.0\text{ cm}$

$T = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{100} = 0.0635$

$K = m\omega^2 = \frac{10}{100}\ 100^2 = 100\text{ N/m}$

$x_{t=0} = 2.0 \sin\left[100 \times 0 + \frac{\pi}{6}\right] = 1\text{ cm}$

$v = 200 \cos\left(100t + \frac{\pi}{6}\right)$

$v_{t=0} = 200 \cos\left(100 \times 0 + \frac{\pi}{6}\right)$

$= 100\sqrt{3}\text{ cm/s} = \sqrt{3}\text{ m/s}$

$a = -20000 \sin\left(100 \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) = 10000\text{ cm/s}^2$

$= -100\text{ m/s}^2$

A-3. A simple harmonic motion has an amplitude A and time period T. Find the time required by it to travel directly from

एक सरल आवर्त गति का आयाम A व आवर्तकाल T है। इसके द्वारा निम्न दूरी तय करने के लिए आवश्यक समय ज्ञात कीजिए।

(a) $x = 0$ to $x = A/2$ (b) $x = 0$ to $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$

(c) $x = A$ to $x = A/2$

(d) $x = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ to $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$ (e) $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$ to $x = A$.

(a) $x = 0$ से $x = A/2$ तक (b) $x = 0$ से $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$ तक (c) $x = A$ से $x = A/2$ तक

(d) $x = -\frac{A}{\sqrt{2}}$ से $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$ तक (e) $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$ से $x = A$ तक

Ans. (a) T/12 , (b) T/8 , (c) T/6 , (d) T/4 , (e) T/8

Sol. (A) $x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$

$o = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}o + \phi\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T}\ o + \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = 0$

$x = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$\frac{A}{2} = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi}{6}$

$t = \frac{T}{12}$

(D) $x = A \sin\left[\frac{2\pi t}{T} + \phi\right]$

$\frac{-A}{\sqrt{2}} = A \sin\left[\frac{2\pi 0}{T} + \phi\right]$

$\phi = \frac{-\pi}{4}$

$x = A \sin\left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right]$

$\frac{A}{\sqrt{2}} = A \sin\left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right]$

$\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow t = \frac{T}{4}$

A-4. A particle is executing SHM with amplitude A and has maximum velocity v_0. Find its speed when it is located at distance of $\frac{A}{2}$ from mean position.

एक कण A आयाम व v_0 अधिकतम वेग से सरल आवर्त गति कर रहा है। माध्य अवस्था से $\frac{A}{2}$ दूरी पर इसकी चाल ज्ञात करो।

Ans. $\frac{\sqrt{3}v_0}{2}$

Sol. $v_0 = A\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{A}$

$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$

$v^2 = \left(\frac{v_0}{A}\right)^2 \left(A^2 - \frac{A^2}{2^2}\right)$

$v^2 = v_0^2 \ \frac{3}{4} \qquad v = \frac{\sqrt{3}}{2}\ v_0$

A-5. A particle executes simple harmonic motion with an amplitude of 10 cm and time period 6 s. At t = 0 it is at position x = 5 cm from mean postion and going towards positive x-direction. Write the equation for the displacement x at time t. Find the magnitude of the acceleration of the particle at t = 4s.
एक कण आयाम 10 cm व आवर्तकाल 6 s से सरल आवर्त गति कर रहा है। t = 0 पर माध्य स्थिति से इसकी स्थिति x = 5 cm है तथा यह धनात्मक x-दिशा में जा रहा है। समय t पर विस्थापन x के लिए समीकरण लिखो। t = 4s पर कण के त्वरण का परिमाण ज्ञात करो।

Ans. $x = (10\text{ cm}) \sin\left[\left(\frac{\pi}{3}s^{-1}\right)t + \frac{\pi}{6}\right]$, $\frac{10}{9}\pi^2 \approx 11\text{ cm/s}^2$

Sol. A = 10 cm, T = 6 sec

So अतः $x = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$

$= (10\text{ cm}) \sin\left(\frac{2\pi}{6}t + \phi\right) = 10\text{ cm} \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \phi\right)$

at t = 0, x = 5 cm पर

$\Rightarrow \qquad 5\text{ cm} = 10\text{ cm} \sin(0 + \phi)$

$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} = \sin(\phi), \qquad \phi = \frac{\pi}{6}$

So, अतः $x = (10 \text{ cm}) \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$

acceleration त्वरण $a = -\omega^2 (10 \text{ cm}) \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) = -\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \times (10 \text{ cm}) \sin\left(\frac{\pi}{3} \times 4 + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\pi^2 \times 10}{9} \simeq 11 \text{ cm/s}^2$

A-6. A particle is executing SHM. Find the positions of the particle where its speed is 8 cm/s, If maximum magnitudes of its velocity and acceleration are 10 cm/s and 50 cm/s^2 respectively.
एक कण सरल आवर्त गति कर रहा है। कण की वह स्थितियां ज्ञात करों जहाँ कण की चाल 8 cm/s है, यदि कण की चाल तथा त्वरण के अधिकतम परिमाण क्रमशः 10 cm/s तथा 50 cm/s^2 है।

Ans. $\pm\frac{6}{5}$ cm = ± 1.2 cm from the mean position

माध्य स्थिति से $\pm\frac{6}{5}$ cm = ± 1.2 cm

Sol. $|v| = |A|\,\omega \quad \Rightarrow \quad 10 = |A|\,\omega$
$|a| = |A|\,\omega^2 \quad \Rightarrow \quad 50 = |A|\,\omega^2$
$\Rightarrow \quad \omega = 5 \quad \Rightarrow \quad |A| = 2$
$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$
$8^2 = 5^2 (2^2 - x^2)$
$4 - x^2 = \frac{64}{25} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{36}{25} \quad \Rightarrow x = \pm\frac{6}{5}$ cm

SECTION (B) : ENERGY ऊर्जा

B-1. A particle performing SHM with amplitude 10cm. At What distance from mean position the kinetic energy of the particle is thrice of its potential energy?
एक कण 10cm आयाम के साथ सरल आवर्त गति कर रहा है। माध्य स्थिति से किस दूरी पर कण की गतिज ऊर्जा उसकी स्थिति ऊर्जा की तीन गुनी होगी ?

Ans. ± 5 cm

Sol. According to question प्रश्नानुसार ,

$\frac{1}{2} mv^2 = 3 \times \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{3}{2} m\omega^2 x^2$

$\Rightarrow \quad A^2 = 4x^2 \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{A}{2} = \pm\frac{10\text{cm}}{2} = \pm 5$ cm.

B-2. An object of mass 0.2 kg executes simple harmonic oscillations along the x–axis with a frequency of (25 / π) Hz. At the position x = 0.04m, the object has kinetic energy of 0.5 J and potential energy 0.4 J. Find the amplitude of oscillations
एक 0.2 kg द्रव्यमान की वस्तु x–अक्ष के अनुदिश (25 / π) Hz की आवृत्ति से सरल आवर्त गति करती है। स्थिति x = 0.04m पर वस्तु की गतिज ऊर्जा 0.5 J व स्थितिज ऊर्जा 0.4 J है। दोलन का आयाम ज्ञात करो।

Ans. A = 0.06 m

Sol. Total energy कुल ऊर्जा $E = \frac{1}{2} m\,\omega^2 A^2$

$0.5 + 0.4 = \frac{1}{2} \times 0.2\left(2\pi \times \frac{25}{\pi}\right)^2 A^2$

$\Rightarrow \quad 9 = (50)^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad A = 0.06$ m

SECTION (C) : SPRING MASS SYSTEM स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय

C-1. A spring mass system has a time period of 2 second. What should be the spring constant of spring if the mass of the block is 10 grams?

एक स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय का आवर्तकल 2 सेकण्ड है। यदि ब्लॉक का द्रव्यमान 10 ग्राम हो, तो स्प्रिंग का स्प्रिंग नियतांक क्या होना चाहिए।

Ans. 0.1 N/m

Sol. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{10/1000}{K}} \Rightarrow K = 0.1$ N/m.

C-2. A body of mass 2 kg suspended through a vertical spring executes simple harmonic motion of period 4s. If the oscillations are stopped and the body hangs in equilibrium, find the potential energy stored in the spring.

एक ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग से लटकी 2 kg द्रव्यमान की वस्तु 4s के आवर्त काल से सरल आवर्त गति करती है। यदि दोलन रोक दिये जायें व वस्तु साम्यावस्था में लटकी रहती है, तो स्प्रिंग में संग्रहित स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो।

Ans. **40 J**

Sol. $K = m\omega^2 \Rightarrow K = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$

$mg = Kx$ equilibrium साम्यवस्था

$x = \frac{mg}{K} \Rightarrow U = \frac{1}{2}Kx^2$

$= \frac{1}{2}K\frac{m^2g^2}{K^2} = \frac{m^2g^2T^2}{2\times 4\pi^2 m} = \frac{2^2\times 10^2\times 4^2}{2\times 4\times 10\times 2} = 40$ J

C-3. A vertical spring-mass system with lower end of spring is fixed, made to undergo small oscillations. If the spring is stretched by 25cm, energy stored in the spring is 5J .Find the mass of the block if it makes 5 oscillations each second.

एक ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय जिसमें स्प्रिंग का नीचला सिरा स्थिर है, में अल्प दोलन करवाये जाते है। यदि स्प्रिंग को 25 cm से खींचा जाता है तो स्प्रिंग 5 J ऊर्जा संग्रहित करती है। यदि गुटका प्रत्येक सेकण्ड में 5 दोलन करता है तो गुटके का द्रव्यमान ज्ञात करो।

Ans. $\frac{16}{10\pi^2} = 0.16$ Kg

Sol. $\frac{1}{2}Kx^2 = 5$

$\frac{1}{2}k\times\left(\frac{25}{100}\right)^2 = 5$

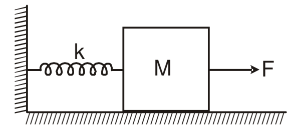
$k = 160$

$\omega = 10\pi = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$m = \frac{K}{100\pi^2}$

$m = \frac{160}{100\pi^2} = \frac{16}{10\pi^2} = 0.16$ kg

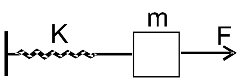
C-4.# A spring mass system is shown in figure, spring is initially unstretched. A man starts pulling the block with constant force F. Find
(a) The amplitude and the time period of motion of the block
(b) The K.E. of the block at mean position
(c) The energy stored in the spring when the block passes through the mean position
चित्र में एक स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय दिखाया गया है, स्प्रिंग प्रारम्भ में अविस्तारित है। एक व्यक्ति नियत बल F से वस्तु को खींचना प्रारम्भ करता है तो ज्ञात करो
(a) वस्तु की गति का आयाम व आवर्तकाल
(b) माध्य अवस्था पर वस्तु की गतिज ऊर्जा
(c) स्प्रिंग में संग्रहित ऊर्जा जब ब्लॉक माध्य अवस्था से गुजरता है।



Ans. (a) $\frac{F}{k}$, $2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$, (b) $\frac{F^2}{2k}$ (c) $\frac{F^2}{2k}$

Sol. (a) Initial position of block is an extreme position. ब्लॉक की प्रारम्भिक अवस्था एक सीमान्त स्थिति है
At equilibrium साम्यवस्था पर $F = KA \Rightarrow \quad A = F/K$
Time period आवर्तकाल

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$



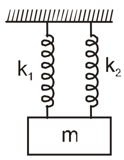
(b) Kinetic energy at mean position माध्य अवस्था पर गतिज ऊर्जा

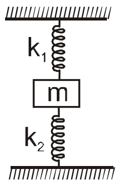
$$K.E. = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{F}{K}\right)^2 = \frac{F^2}{2K}$$

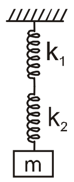
(c) Total energy of the block. ब्लॉक की कुल ऊर्जा

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}K\left(\frac{2F}{K}\right)^2 = \frac{F^2}{2K}$$

C-5.# Three spring mass systems are shown in figure. Assuming gravity free space, find the time period of oscillations in each case. What should be the answer if space is not gravity free ?
चित्रानुसार तीन स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय दिखाये गये है तथा गुरूत्वीय मुक्त क्षेत्र मानना है। प्रत्येक स्थिति में दोलन का आवर्तकाल ज्ञात करो। यदि क्षेत्र गुरूत्वहीन नही हो तो उत्तर क्या होंगे ?

(a) 

(b) 

(c) 

Ans. (a) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$, $k_{eq.} = k_1 + k_2$; (b) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$, $k_{eq.} = k_1 + k_2$; (c) $2\pi\sqrt{\frac{m\ (k_1+k_2)}{k_1k_2}}$, $k_{eq.} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

Answers will remian same उत्तर समान ही होंगे

Sol. (a) When spring is stretched by x then restoring force.
जब स्प्रिंग को x से खींचा जाता है, तो प्रत्यानयन बल
$F = K_1 x + K_2 x$
$F = K_{eq} x$
$K_{eq} x = K_1 x + K_2 x$
$K_{eq} = K_1 + K_2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1+K_2}}$$

(b) When bock is displaced by x from mean position then restoring force.
जब ब्लॉक को माध्य अवस्था से x खींचा जाता है तब प्रत्यानयन बल
$F = K_1 x + K_2 x$
$K_{eq} x = K_1 x + K_2 x$
$K_{eq} = K_1 + K_2$
$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_1 + K_2}}$

(c) When block is displaced by x and extension in upper spring is x_1, extension in lower spring is x_2
जब ब्लॉक को x विस्थापित किया जाता है तथा ऊपरी स्प्रिंग में विस्तार x_1, तथा निचली स्प्रिंग में विस्तार x_2 है।

then तब $F = K_1 x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{F}{K_1}$

$F = K_2 x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{F}{K_2}$

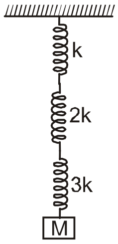
$F = K_{eq} x \Rightarrow x = \frac{F}{K_{eq}}$

$x = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{F}{K_{eq}} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2} \Rightarrow K_{eq} = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}}$

When space is not gravity free then answers do not change as time period of spring mass system is independent of gravity.
जब वातावरण गुरूत्व मुक्त नहीं है तो उत्तर नही बदलता है क्योंकि स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय का आवर्तकाल गुरूत्व से स्वतंत्र होता है।

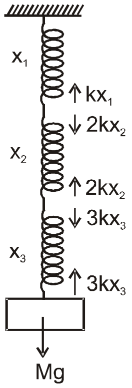
C-6.# Spring mass system is shown in figure. Find the elastic potential energy stored in each spring when block is at its mean position. Also find the time period of vertical oscillations. The system is in vertical plane.
चित्र में स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय दिखाया गया है। जब ब्लॉक माध्यवस्था पर है, तब प्रत्येक स्प्रिंग में संग्रहित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करो। पिण्ड के ऊर्ध्वाधर दोलन का आवर्तकाल भी ज्ञात करो।



Ans. $\frac{M^2g^2}{2k}$, $\frac{M^2g^2}{4k}$ and $\frac{M^2g^2}{6k}$ from above, time period = $2\pi \sqrt{\frac{11M}{6k}}$

ऊपर से $\frac{M^2g^2}{2k}$, $\frac{M^2g^2}{4k}$ तथा $\frac{M^2g^2}{6k}$; आवर्तकाल = $2\pi \sqrt{\frac{11M}{6k}}$

Sol. Let at equilibrium, elongation in springs are x_1, x_2 and x_3 then by force balance
मानाकि साम्यवस्था में स्प्रिंगो में विस्तार x_1, x_2 तथा x_3 है तो बल संतुलन से



$3kx_3 = Mg = 2kx_2 = k\,x_1$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{Mg}{k}$; $x_2 = \dfrac{Mg}{2k}$; $x_3 = \dfrac{Mg}{3k}$

So potential energy stored in each spring
अतः प्रत्येक स्प्रिंग में संचित ऊर्जा

$$(P.E.)_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{M^2g^2}{2k}$$

$$(P.E.)_2 = \frac{1}{2}2kx_2^2 = \frac{M^2g^2}{4k}$$

$$(P.E.)_3 = \frac{1}{2}3kx_3^2 = \frac{M^2g^2}{6k}$$

and Net spring constant और कुल बल नियतांक $= \dfrac{1}{1/k + 1/2k + 1/3k} = \dfrac{6k}{11}$

So Time period इसलिये आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{keq.}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{11}{6}\dfrac{M}{k}}$

Section (D) : Simple Pendulum सरल लोलक

D-1. Find the length of seconds pendulum at a place where $g = \pi^2$ m/s^2.
उस स्थान पर सेकण्ड लोलक की लम्बाई ज्ञात करो, जहाँ $g = \pi^2$ m/s^2 ।

Ans 1 m

Sol. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ $\qquad 2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ $\qquad \Rightarrow \ell = 1\text{m}$

D-2. Instantaneous angle (in radian) between string of a simple pendulum and vertical is given by $\theta = \dfrac{\pi}{180}\sin 2\pi t$. Find the length of the pendulum if $g = \pi^2$ m/s^2
एक सरल लोलक की डोरी के द्वारा ऊर्ध्वाधर के साथ बनाया गया तात्क्षणिक कोण (रेडियन में) समय पर $\theta = \dfrac{\pi}{180}\sin 2\pi t$ के अनुसार निर्भर करता है। तो लोलक की लम्बाई ज्ञात करो यदि $g = \pi^2$ m/s^2 है।

Ans. 0.25 m

Sol. Time period आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\pi^2}} \Rightarrow 1 = 2\sqrt{\ell} \Rightarrow \ell = 0.25$ m.

D-3. A pendulum clock is accurate at a place where g = 9.8 m/s^2. Find the value of g at another place where clock becomes slow by 24 seconds in a day (24 hrs).
एक लोलक घड़ी उस स्थान पर सही समय देती है जहां g = 9.8 m/s^2 है। यह किसी दूसरे स्थान पर ले जाई जाती है, जहां यह 24 घण्टे में 24 सैकण्ड पीछे रह जाती है तो इस नये स्थान पर g का मान ज्ञात करो।

Ans. $\left(\frac{3600}{3601}\right)^2 g = 9.794 \quad m/s^2$

Sol. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}}$

$\frac{T}{T'} = \sqrt{\frac{g'}{g}} \Rightarrow \frac{24\times3600}{24\times3600+24} = \sqrt{\frac{g'}{g}} \Rightarrow g' = \left(\frac{3600}{3601}\right)^2 g = 9.794 \quad m/s^2$

D-4. A pendulum is suspended in a lift and its period of oscillation is T_0 when the lift is stationary.
एक लोलक एक लिफ्ट में लटका है व इसका दोलन काल T_0 है, जब लिफ्ट स्थिर है।

(i) What will be the period T of oscillation of pendulum, if the lift begins to accelerate downwards with an acceleration equal to $\frac{3g}{4}$?

लोलक का दोलन काल T क्या होगा, यदि लिफ्ट नीचे की ओर $\frac{3g}{4}$ त्वरण से चलना प्रारम्भ करे ?

(ii) What must be the acceleration of the lift for the period of oscillation of the pendulum to be $\frac{T_0}{2}$?

लोलक का दोलनकाल $\frac{T_0}{2}$ होने के लिए लिफ्ट का त्वरण क्या होना चाहिए ?

Ans. (i) $2T_0$ (ii) 3g upwards ऊपर की ओर

Sol. (i) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}} \qquad g_{eff} = g - \frac{3g}{4} = \frac{g}{4}$

So, time period अतः आर्वत काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g/4}} \Rightarrow T = 2T_0$

(ii) $\frac{T_0}{2} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}}, \quad \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}}$

$g_{eff} = 4g \Rightarrow a = 3g$ upwards ऊपर की और

SECTION (E) : COMPOUND PENDULUM & TORSIONAL PENDULUM
पिण्ड लोलक व मरोड़ी लोलक

E-1. Compound pendulums are made of :
(a) A rod of length ℓ suspended through a point located at distance $\ell/4$ from centre of rod.
(b) A ring of mass m and radius r suspended through a point on its periphery.
(c) A uniform square plate of edge a suspended through a corner.
(d) A uniform disc of mass m and radius r suspended through a point r/2 away from the centre.
Find the time period in each case.

भौतिक लोलक निम्न से बनाया जाता है

(a) एक ℓ लम्बाई की छड़ जो छ़ड के केन्द्र से $\ell/4$ दूरी पर लटकी है।

(b) द्रव्यमान m व त्रिज्या r की एक वलय जो इसकी परिधि पर किसी बिन्दु से लटकी है।

(c) एक कोने से लटकी हुई a भुजा की एक समरूप वर्गाकार प्लेट

(d) केन्द्र से r/2 दूरी पर लटकी हुई m द्रव्यमान व r त्रिज्या की एक समरूप चकती।

प्रत्येक स्थिति में अल्प दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।

Ans. (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{7\ell}{12g}}$ (b) $2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$ (c) $2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{8}}{3}\frac{a}{g}}$ (d) $2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$

Sol. (a) Time period of compound pendulum is भौतिक लोलक का आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + md^2}{mg\ell}}$

For rod of length ℓ, ℓ लम्बाई की छड के लिए $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2}{mg\ell/4}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2(4+3)}{48}}{mg\ell/4}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{7\ell}{12g}}$ **Ans.**

(b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mr^2 + mr^2}{mgr}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$ **Ans.**

(c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ma^2}{6} + m\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{mg\frac{a}{\sqrt{2}}}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{8}}{3}\frac{a}{g}}$ **Ans.**

(d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mr^2}{2} + m\left(\frac{r}{2}\right)^2}{mg\frac{r}{2}}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$ **Ans.**

E-2. Two compound pendulums are made of :

(a) A disc of radius r and

(b) A uniform rod of length L. Find the minimum possible time period and distance between centre and point of suspension in each case.

दो भोतिक लोलक निम्न से बनाये गये है।

(a) r त्रिज्या की एक चकती

(b) L लम्बाई की एक समान छ़ड

अल्प दोलनों के लिए न्यूनतम संभव आवर्तकाल ज्ञात कीजिए तथा न्यूनतम संभव आवर्तकाल के लिए छिद्र की केन्द्र से दूरी भी ज्ञात करो।

Ans. (a) $2\pi\sqrt{\frac{r\sqrt{2}}{g}}$, $r/\sqrt{2}$ (b) $2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{3}g}}$,. $\frac{L}{2\sqrt{3}}$

Sol. (a) For minimum time period $\ell = K$, where ℓ is distance between centre and point of suspension
न्यूनतम आवर्तकाल के लिए $\ell = K$, जहाँ ℓ केन्द्र तथा निलम्बन बिन्दु के बीच की दूरी है

Moment of inertia about centre $= \dfrac{mr^2}{2} = mK^2 \Rightarrow K = \dfrac{r}{\sqrt{2}} = \ell$

केन्द्र के परित जड़त्वाघूर्ण $= \dfrac{mr^2}{2} = mK^2 \Rightarrow K = \dfrac{r}{\sqrt{2}} = \ell$

minimum time period $T_{min} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2k}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r\sqrt{2}}{g}}$

न्यूनतम आवर्तकाल $T_{min} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2k}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{r\sqrt{2}}{g}}$

(b) Moment of inertia about centre $= \dfrac{mL^2}{12} = mK^2$

(b) केन्द्र के परित जड़त्वाघूर्ण $= \dfrac{mL^2}{12} = mK^2$

$\Rightarrow K = \dfrac{L}{2\sqrt{3}} = \ell$ where ℓ is distance between centre and point of suspension

जहाँ ℓ केन्द्र तथा निलम्बन बिन्दु के बीच की दूरी है

Minimum time period $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2k}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{\sqrt{3}g}}$

न्यूनतम आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2k}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{\sqrt{3}g}}$

SECTION (F) : SUPERPOSITION OF SHM सरल आवर्त गति का अध्यारोपण

F-1. A particle is subjected to two SHM's simultaneously
$X_1 = a_1\sin\omega t$ and $X_2 = a_2\sin(\omega t + \phi)$
Where $a_1 = 3.0$ cm, $a_2 = 4.0$ cm.
Find resultant amplitude if the phase difference ϕ has values (a) 0° (b) 60° (c) 90°
निम्न दो सरल आवर्त गतियों के अधीन एक कण गतिशील है
$X_1 = a_1\sin\omega t$ तथा $X_2 = a_2\sin(\omega t + \phi)$
जहाँ $a_1 = 3.0$ cm, $a_2 = 4.0$ cm
दोनों गतियों का परिणामी आयाम ज्ञात करो यदि इन गतियों के मध्य कलान्तर (a) 0°, (b) 60°, (c) 90° हो।

Ans. (a) 7 cm (b) $\sqrt{37}$ cm = 6.1 cm (c) 5 cm

Sol. $A_r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\theta}$

(a) $A_r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2\times3\times4\times\cos 0} = 7$ cm

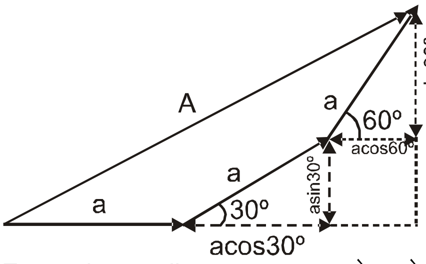
(b) $A_r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2\times3\times4\times\cos 60} = \sqrt{37}$ cm = 6.1 cm

(c) $A_r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 2\times3\times4\times\cos 90} = 5$ cm

F-2. A particle is subjected to three SHM's in same direction simultaneously each having equal amplitude a and equal time period. The phase of the second motion is 30^0 ahead of the first and the phase of the third motion is 30° ahead of the second. Find the amplitude of the resultant motion.
तीन सरल आवर्त गतियाँ जो समान आयाम a तथा समान आवर्त काल के साथ एक दिशा में हो रही है, के अधीन एक कण गति कर रहा है। द्वितीय गति, प्रथम से 30° कलान्तर आगे तथा तृतीय गति, द्वितीय गति से 30° कलान्तर आगे है, तो परिणामी गति का आयाम ज्ञात करो।

Ans. $a\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

Sol.



From phasor diagram, कला आरेख से

$$A = \sqrt{\left(a + \frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}a + \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$A = \frac{a}{2}\sqrt{(3+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = a\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

F-3. A particle simultaneously participates in two mutually perpendicular oscillations $x = \sin \pi t$ & $y = 2\cos 2\pi t$. Write the equation of trajectory of the particle.
दो लम्बवत् दोलन $x = \sin \pi t$ तथा $y = 2\cos 2\pi t$ एक साथ एक कण पर कार्यरत है, तो कण के पथ का समीकरण लिखो।

Ans. $2x^2 + \frac{y}{2} = 1$

Sol. $x = \sin \pi t$, $y = 2[1 - 2 \sin^2 \pi t]$

$y = 2 [1 - 2x^2]$ or $2x^2 + \frac{y}{2} = 1$

Section (G) : For JEE-Main के लिए

G-1. In forced oscillation of a particle, the amplitude is maximum for a frequency ω_1 of the force, while the energy is maximum for a frequency ω_2 of the force. What is the relation between ω_1 and ω_2 ?
कण के प्रणोदित दोलन में आयाम बल की ω_1 आवृत्ति के लिए अधिकतम होता है। जबकि ω_2 आवृत्ति के लिए ऊर्जा अधिकतम होती है। ω_1 तथा ω_2 में सम्बन्ध क्या होगा।

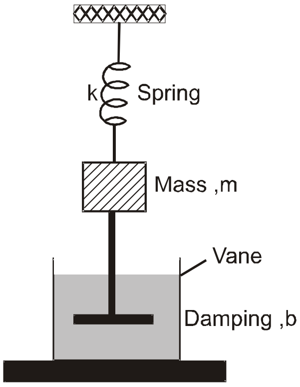
Ans. Both amplitude and energy of the particle can be maximum only in the case of resonance. For resonance to occur, $\omega_1 = \omega_2$
कण का आयाम तथा ऊर्जा दोनो ही अनुनाद की स्थिति में अधिकतम हो सकता है। अनुनाद होने के लिए $\omega_1 = \omega_2$

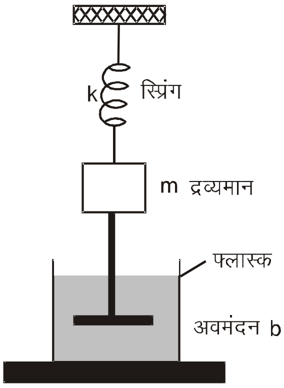
G-2.# For the damped oscillator shown in Figure, the mass of the block is 200 g, k = 80 Nm^{-1} and the damping constant b is 40 gs^{-1} Calculate
चित्र में प्रदर्शित अवमंदित दोलन के लिए ब्लॉक का द्रव्यमान 200 g, k = 80 N m^{-1} है तथा अवमंदन नियतांक b = 40 g s^{-1} है। गणना कीजिए।

(a) The period of oscillation,
दोलन का आवर्तकाल

(b) Time taken for its amplitude of vibrations to drop to half of its initial value
दोलन का आयाम प्रारम्भिक मान के आधे होने में लिया गया समय

(c) The time for the mechanical energy to drop to half initial value.
यांत्रिक ऊर्जा प्रारम्भिक मान की आधी होने में लिया गया समय





Ans. (a) 0.3 s(b) 6.93 s (c) 3.4 s

Sol. (a) As the damping constant, b
चुंकि अवमदंन नियतांक b
(= 0.04 kg s^{-1}) << $\sqrt{km}$
the time period T from the equation
समीकरण से आवर्तकाल T

$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$ is given by, निम्न प्रकार दिया जाता है

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.2\text{kg}}{80\text{Nm}^{-1}}} = 0.314\text{s}$$

(b) From the equation x (t) = x_m $e^{-\frac{bt}{2m}}$ the time $T_{1/2}$ for the amplitude to drop to half of its intial value is

समीकरण से x (t) = x_m $e^{-\frac{bt}{2m}}$ आयाम प्रारम्भिक मान के आधे तक होने में लिया गया समय $T_{1/2}$ होगा।

$$\frac{1}{2} = e^{\frac{-bT_{1/2}}{2m}}$$

or या $\log_e 2 = \frac{bT_{1/2}}{2m}$

or या $0.693 = \frac{bT_{1/2}}{2m}$

or या $T_{1/2} = \frac{0.693 \times 2 \times 0.2}{40 \times 10^{-3}} = 6.93$ s

(c) $E(t) = E(0)\, e^{-\frac{bt}{m}}$;

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{bt_{1/2}}{m}} \;;\; \log_e 2 = \frac{bt_{1/2}}{m}$$

$$t_{1/2} = \frac{0.693 \times 0.2}{40 \times 10^{-3}} = 3.4\,\text{sec}$$

PART - II : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

SECTION (A) : EQUATION OF SHM सरल आवर्त गति की समीकरण

A-1. According to a scientists, he applied a force $F = -cx^{1/3}$ on a particle and the particle is performing SHM. No other force acted on the particle. He refuses to tell whether c is a constant or not. Assume that he had worked only with positive x then:

(A*) as x increases c also increases (B) as x increases c decreases
(C) as x increases c remains constant (D) the motion cannot be SHM

वैज्ञानिकों के अनुसार वह एक बल $F = -cx^{1/3}$ एक कण पर आरोपित करता है तथा कण सरलआवर्त गति करता है। कण पर अन्य कोई बल कार्यरत नहीं है तथा c नियतांक है या नही, यह नही बताया जाता है। (माना है कि सिर्फ x धनात्मक है)

(A*) जैसाकि x बढ़ने पर c बढ़ेगा। (B) जैसाकि x बढ़ने पर c घटेगा।
(C) जैसाकि x बढ़ने पर c अपरिवर्तित रहेगा। (D) गति सरल आवर्ती नहीं हो सकती।

Sol. Comparing $F = -kx$
with $F = -cx^{1/3}$ के साथ तुलना करने पर
$\Rightarrow \quad kx = cx^{1/3} \quad \Rightarrow \quad c = kx^{2/3}$
As x increases c also increases. x बढने पर c भी बढ़ता है

A-2. A particle performing SHM takes time equal to T (time period of SHM) in consecutive appearances at a particular point. This point is:
(A*) An extreme position
(B) The mean position
(C) Between positive extreme and mean position
(D) Between negative extreme and mean position

सरल आवर्त गति करता हुआ एक कण गति के एक निश्चित बिन्दु पर कण की दो क्रमागत उपस्थितियों के मध्य समयान्तराल T (सरल आवर्त गति का आर्वतकाल) लेता है यह बिन्दु है –
(A*) सीमान्त स्थिति
(B) माध्य स्थिति
(C) धनात्मक सीमान्त स्थिति व माध्य स्थिति के बीच
(D) ऋणात्मक सीमान्त स्थिति व माध्य स्थिति के बीच

Sol. Position where we see the particle once in a time period that is only extreme position. twice through every other position
वह स्थिति जहॉं कण एक आवर्तकाल में एक बार ही आता है केवल सीमान्त स्थिति है। दूसरी सभी स्थितियो पर दो बार आता है।

A-3. A particle executing linear SHM. Its time period is equal to the smallest time interval in which particle acquires a particular velocity $\vec{v}$,. the magnitude of $\vec{v}$ may be :
एक कण रेखीय सरल आवर्त गति कर रहा है। कण का आवर्तकाल कण द्वारा विशेष वेग $\vec{v}$ प्राप्त करने में लिये गये न्यूनतम समयान्तराल के बराबर होता है। $\vec{v}$ का परिमाण हो सकता है।

(A) Zero शून्य (B*) V_{max} (C) $\frac{V_{max}}{2}$ (D) $\frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$

Sol. $\vec{V}_{max}$ only केवल $\vec{V}_{max}$

If initial velocity is $\vec{V}_{max}$
then after one time period particle acquires same speed V_{max} in same direction means same velocity $\vec{V}_{max}$

यदि प्रारम्भिक वेग $\vec{V}_{max}$ हो तो एक आवर्तकाल के पश्चात् कण समान दिशा में समान चाल V_{max} प्राप्त कर लेता है अर्थात् समान वेग $\vec{V}_{max}$ प्राप्त करता है।

A-4. If $\vec{F}$ is force vector, $\vec{v}$ is velocity vector, $\vec{a}$ vector is acceleration vector and $\vec{r}$ vector is displacement vector with respect to mean position than which of the following quantities are always non-negative in a simple harmonic motion along a straight line?
यदि $\vec{F}$ बल सदिश $\vec{v}$ वेग सदिश $\vec{a}$ त्वरण सदिश तथा $\vec{r}$ माध्य स्थिति से विस्थापन सदिश है तो एक सरल रेखा के अनुदिश सरल आवर्त गति में निम्न में से कौनसी राशियाँ हमेशा अऋणात्मक रहती है ?

(A*) $\vec{F}.\vec{a}$ (B) $\vec{v}.\vec{r}$ (C) $\vec{a}.\vec{r}$ (D) $\vec{F}.\vec{r}$

Sol. (A) $\vec{F}.\vec{a}$
$m\vec{a}\cdot\vec{a}$ [It is always non-negative] [ये हमेशा अऋणात्मक है]

A-5. Two SHM's are represented by y = a sin (ωt – ϕ) and y = b cos (ωt – ϕ). The phase difference between the two is :
दो सरल आवर्त गतियों को y = a sin (ωt – ϕ) तथा y = b cos (ωt – ϕ) से प्रदर्शित करते है। इन दोनों के मध्य कलान्तर होगा।

(A*) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

Sol. y = a sin (ωt – ϕ)

y = b cos (ωt – ϕ) $\Rightarrow$ $y = b\sin(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2})$

So phase difference is $\pi/2$
अतः कलान्तर $\pi/2$ है।

A-6. How long after the beginning of motion is the displacement of a harmonically oscillating particle equal to one half its amplitude if the period is 24s and particle starts from rest.
आवर्ती दोलन करते कण की गति प्रारम्भ होने के कितने समय पश्चात् कण का विस्थापन , आयाम का आधा होगा यदि आवर्तकाल 24 सैकण्ड तथा कण स्थिरावस्था से प्रारम्भ होता है।

(A) 12s (B) 2s (C*) 4s (D) 6s

Sol. y = a cos ωt

$\frac{a}{2}$ = a cos ωt

$\omega t = \frac{\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{24}t = \frac{\pi}{3}$

t = 4 sec.

A-7. The magnitude of average acceleration in half time period from equilibrium position in a simple harmonic motion is
सरल आवर्त गति मे साम्यावस्था से आधे आवर्त काल में औसत त्वरण का परिमाण होगा–

(A*) $\frac{2A\omega^2}{\pi}$ (B) $\frac{A\omega^2}{2\pi}$ (C) $\frac{A\omega^2}{\sqrt{2}\pi}$ (D) Zero शून्य

Sol. $a_{avg} = \frac{\int_0^{T/2} -\omega^2 A \sin\omega t \quad dt}{\int_0^{T/2} dt} \Rightarrow \frac{-\omega^2 A\left[\frac{\cos \quad \omega t}{\omega}\right]_0^{T/2}}{T/2}$

$|a|_{avg} = \frac{-\omega^2 A[-1-1]}{T/2} \Rightarrow \frac{4\omega A}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{2\omega^2 A}{\pi}$

A-8. A particle performing SHM on the y axis according to equation y = A + B sinωt. Its amplitude is :
एक कण y-अक्ष पर समीकरण y = A + B sin ωt के अनुसार सरल आवर्त गति करता है, तो इसका आयाम होगा।

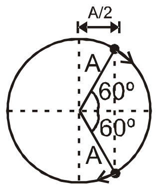
(A) A (B*) B (C) A + B (D) $\sqrt{A^2+B^2}$

Sol. X = A + B sin ωt
x – A = B sin ωt
Hence, Amplitude = B
अतः आयाम = B

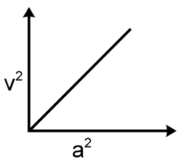
A-9. Two particles execute S.H.M. of same amplitude and frequency along the same straight line from same mean position. They cross one another without collision, when going in opposite directions, each time their displacement from mean position is half of their amplitudes. The phase-difference between them is
दो कण समान सरल रेखा के अनुदिश समान माध्य स्थिति से समान आयाम तथा समान आवृत्ति से सरल आवर्त गति करते हैं। जब वे एक दूसरे को बिना टक्कर के पार (cross) करते हैं, तब वे विपरीत दिशा में गति कर रहे होते हैं और उस क्षण जब माध्य स्थिति से उनका विस्थापन उनके आयाम का आधा होता है, तब उनके मध्य कलान्तर होगा–

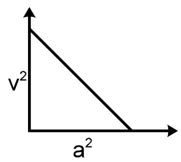
(A) 0° (B*) 120° (C) 180° (D) 135°

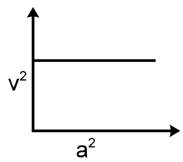
Sol. Consider SHM as projection of uniform circular motion.
From figure the phase difference between two particles is 120º.
सरल आवर्त को एकसमान वृन्तीय गति का प्रक्षेप मानते हुए
चित्र से दो कणो के मध्य कलान्तर 120º है।

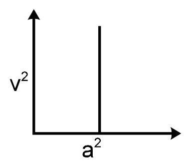


A-10. A mass M is performing linear simple harmonic motion, then correct graph for acceleration a and corresponding linear velocity v is
एक द्रव्यमान M रेखीय सरल आवर्त गति कर रहा है। त्वरण a तथा संगत रेखीय वेग v के मध्य सही लेखाचित्र होगा–

(A) 

(B*) 

(C) 

(D) 

Sol. Velocity वेग $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ $\Rightarrow$ $v^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2$ ....(1)
Acceleration त्वरण $a = -\omega^2 x$ $\Rightarrow$ $a^2 = \omega^4 x^2$ ....(2)
From (1) and (2) : $v^2 = \omega^2 A^2 - a^2 / \omega^2$ $\Rightarrow$ $v^2 + a^2 / \omega^2 = \omega^2 A^2$
(1) तथा (2) से

$$\Rightarrow \quad \frac{v^2}{\omega^2 A^2} + \frac{a^2}{\omega^4 A^2} = 1$$

$\Rightarrow$ $v^2 = -a^2\left(\frac{1}{\omega^2}\right) + 1$ its straight line with -ve slope and +ve intercept

ये ऋणात्मक ढाल तथा धनात्मक अन्तःखण्ड वाली सरलरेखा है।

SECTION (B) : ENERGY ऊर्जा

B-1. A body executing SHM passes through its equilibrium. At this instant, it has
सरल आवर्त गति करती वस्तु साम्यावस्था से गुजरती है। इस क्षण, इसमें
(A) maximum potential energy (B*) maximum kinetic energy
(C) minimum kinetic energy (D) maximum acceleration
(A) अधिकतम स्थितिज ऊर्जा होगी। (B*) अधिकतम गतिज ऊर्जा होगी।
(C) न्यूनतम गतिज ऊर्जा होगी। (D) अधिकतम त्वरण होगा।

Sol. At equilibrium position K.E. is maximum. साम्यावस्था पर गतिज ऊर्जा अधिकतम होती है।

B-2. The K.E. and P.E of a particle executing SHM with amplitude A will be equal when its displacement is
A आयाम से सरल आवर्त गति करते कण की K.E. तथा P.E. बराबर हो तो इसका विस्थापन होगा
(A) $\sqrt{2}A$ (B) $\frac{A}{2}$ (C*) $\frac{A}{\sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{\frac{2}{3}}A$

Sol. $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$
or या $x = \frac{A}{\sqrt{2}}$.

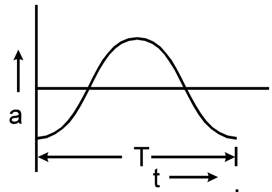
B-3. A point particle of mass 0.1 kg is executing S.H.M. of amplitude of 0.1 m. When the particle passes through the mean position, its kinetic energy is 8×10^{-3} J. The equation of motion of this particle when the initial phase of oscillation is 45° can be given by
0.1 किग्रा. द्रव्यमान का एक बिन्दु कण 0.1 मीटर के आयाम से सरल आवर्त गति कर रहा है। जब कण अपनी माध्यावस्था से गुजरता है तो इसकी गतिज ऊर्जा 8×10^{-3} जूल है। गति का समीकरण क्या हो सकती है, जबकि दोलन की प्रारम्भिक कला 45° है:
(A) $0.1\cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$ (B*) $0.1\sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$ (C) $0.4\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ (D) $0.2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right)$

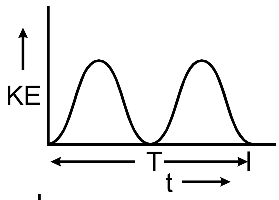
Sol. From question प्रश्न से
$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 = 8 \times 10^{-3}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} \times 0.1 \times \omega^2 \times (0.1)^2 = 8 \times 10^{-3}$ $\Rightarrow$ $\omega = 4$
So, equation of SHM is अतः स. आ. ग. की समीकरण है $x = A\sin(\omega t + \phi) = 0.1\sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$.

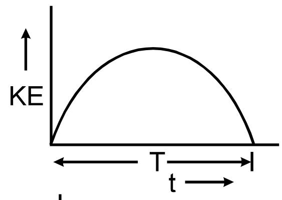
B-4. For a particle performing SHM :
(A) The kinetic energy is never equal to the potential energy
(B) the kinetic energy is always equal to the potential energy
(C*) The average kinetic energy in one time period is equal to the average potential in this period
(D) The average kinetic energy in any time interval is equal to average potential energy in that interval
सरल आवर्त गति करते हुए कण के लिए :
(A) गतिज ऊर्जा कभी भी स्थितिज ऊर्जा के बराबर नहीं होती है।
(B) गतिज ऊर्जा हमेशा स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है।
(C*) एक आवर्त काल में औसत गतिज ऊर्जा इस आवर्त काल में औसत स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है।
(D) किसी भी समयान्तराल में औसत गतिज ऊर्जा इस समयान्तराल में औसत स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है।

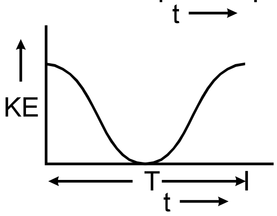
Sol. $P_{AV} = \frac{1}{4}$ KA^2 and और $K_{AV} = \frac{1}{4}$ KA^2

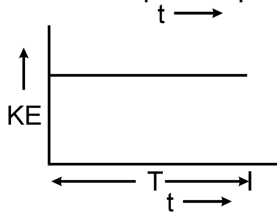
B-5.# Acceleration a versus time t graph of a body in SHM is given by a curve shown below. T is the time period. Then corresponding graph between kinetic energy KE and time t is correctly represented by
नीचे दिये गये लेखाचित्र में सरल आवर्त गति करती एक वस्तु के त्वरण a तथा आवर्तकाल T के मध्य संबंध प्रदर्शित किया गया है। इसके संगत गतिज ऊर्जा KE व समय t के मध्य सही लेखाचित्र होगा–



(A*) 

(B) 

(C) 

(D) 

Sol. $x = A\cos\omega t$

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2\omega t$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 \frac{(1-\cos 2\omega t)}{2}$$

$$= \frac{kA^2}{4}(1 - \cos 2\omega t)$$

Frequency of K.E. is double of acceleration.
गतिज ऊर्जा की आवृत्ति त्वरण की दुगुनी है।

B-6. A particle performs S.H.M. of amplitude A along a straight line. When it is at a distance $\frac{\sqrt{3}}{2}$A from mean position, its kinetic energy gets increased by an amount $\frac{1}{2}$m ω^2 A^2 due to an impulsive force. Then its new amplitude becomes:

एक कण A आयाम से सरल रेखा के अनुदिश सरल आवर्त गति करता है जब यह माध्य स्थिति से $\frac{\sqrt{3}}{2}$A दूरी पर है तब इसकी गतिज ऊर्जा, आवेगीय बल द्वारा $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ बढ़ा दी जाती है। अतः इसका नया आयाम है :

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$A (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$A (C*) $\sqrt{2}$ A (D) $\sqrt{5}$ A

Sol. Due to impulse force, the total energy of the particle becomes :

$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 + \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = m\omega^2A^2$

Let ; A' be the new amplitude. (Apply energy conservation law)

$\therefore \quad \frac{1}{2}m\omega^2(A')^2 = m\omega^2A^2 \quad \Rightarrow \quad A' = \sqrt{2}$ A. **Ans.**

Sol. आवेगीय बल के कारण, कण की कुल ऊर्जा :

$\frac{1}{2}m\omega^2A^2 + \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = m\omega^2A^2$

माना A' नया आयाम है। (ऊर्जा संरक्षण के नियम से)

$\therefore \quad \frac{1}{2}m\omega^2(A')^2 = m\omega^2A^2 \quad \Rightarrow \quad A' = \sqrt{2}$ A. **Ans.**

SECTION (C) : SPRING MASS SYSTEM स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय

C-1. Two spring mass systems have equal mass and spring constant k_1 and k_2.If the maximum velocities in two systems are equal then ratio of amplitude of 1st to that of 2nd is :

समान द्रव्यमान तथा स्प्रिंग नियतांक क्रमशः k_1 व k_2 के दो स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय है। यदि इनके अधिकतम वेग समान है तो 1st के आयाम का 2nd के आयाम के साथ अनुपात है–

(A) $\sqrt{k_1/k_2}$ (B) k_1/k_2 (C) k_2/k_1 (D*) $\sqrt{k_2/k_1}$

Sol. $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K_1x_1^2$

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K_2x_2^2$

$K_1x_1^2 = K_2x_2^2$

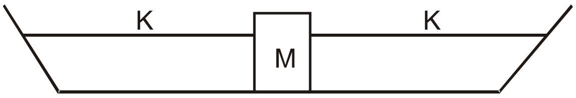
$\frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$

C-2.# A toy car of mass m is having two similar rubber ribbons attached to it as shown in the figure. The force constant of each rubber ribbon is k and surface is frictionless. The car is displaced from mean position by x cm and released. At the mean position the ribbons are undeformed. Vibration period is

एक m द्रव्यमान की खिलौना गाड़ी से दो समान रबर के रिबन चित्र में दिखाए अनुसार बांधे गये है। रबर के रिबन का बल नियतांक k तथा सतह घर्षणहीन है। साम्यावस्था पर रिबन अविरूपित अवस्था में है। कार को माध्यावस्था से x cm विस्थापित करके छोड़ दिया जाए तो कम्पन्न काल होगा।

(A) $2\pi\sqrt{\frac{m\ (2k)}{k^2}}$ (B) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m\ (2k)}{k^2}}$ (C*) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (D) $2\pi\sqrt{\frac{m}{k+k}}$

Sol.



Rubber ribbon can exert only tension not compression so at a time only one is effective.
रबर रिबन केवल तनाव आरोपित कर सकता है, सम्पीडन नही अतः एक समय में केवल एक ही प्रभावी रहेगा।

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

C-3. A mass of 1 kg attached to the bottom of a spring has a certain frequency of vibration. The following mass has to be added to it in order to reduce the frequency by half :
एक 1 किग्रा. का द्रव्यमान स्प्रिंग के निचले सिरे से जुड़ा है तथा किसी निश्चित आवृत्ति से कम्पन्न कर रहा है। आवृत्ति के इस निश्चित मान को आधा करने के लिए निम्न द्रव्यमान जोड़ना पड़ेगा :

(A) 1 kg (B) 2 kg (C*) 3 kg (D) 4 kg

Sol. $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m_1}}$

$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m_2}}$

$f_2 = \frac{f_1}{2}$ or $m_2 = 4m_1$ or या $m_2 - m_1 = 3$ kg

C-4. A ball of mass m kg hangs from a spring of spring constant k. The ball oscillates with a period of T seconds. If the ball is removed, the spring is shortened(with respect to length in mean position) by
m किग्रा द्रव्यमान की एक गेंद, k स्प्रिंग नियतांक वाली स्प्रिंग से लटकायी जाती है। गेंद T सैकण्ड आवर्त काल से दोलन करती है। यदि गेंद को हटा दिया जाए तो स्प्रिंग निम्न लम्बाई से छोटी (माध्य स्थिति से लम्बाई के सापेक्ष) हो जायेगी –

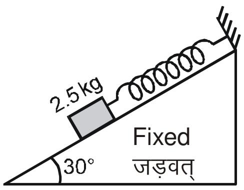
(A*) $\frac{gT^2}{(2\pi)^2}$ metre मीटर (B) $\frac{3T^2g}{(2\pi)^2}$ metre मीटर (C) $\frac{Tm}{k}$ metreमीटर (D) $\frac{Tk}{m}$ metre मीटर

Sol. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ $m = \frac{T^2}{4\pi^2}k$

$mg = Kx$ $x = \frac{mg}{K}$

$x = \frac{T^2K}{4\pi^2}\frac{g}{K}$ $x = \frac{T^2g}{4\pi^2}$

C-5.# A smooth inclined plane having angle of inclination 30° with horizontal has a mass 2.5 kg held by a spring which is fixed at the upper end as shown in figure. If the mass is taken 2.5 cm up along the surface of the inclined plane, the tension in the spring reduces to zero. If the mass is then released, the angular frequency of oscillation in radian per second is
दिये गये चित्र में एक चिकने नत तल का क्षैतिज के साथ कोण 30º है। इस नत तल पर 2.5 kg द्रव्यमान का एक गुटका रखा हुआ है जिसे स्प्रिंग के एक सिरे से जोड़ा हुआ है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा नत तल के ऊपरी सिरे से जुड़ा है। यदि द्रव्यमान को नत तल के अनुदिश 2.5 सेमी ऊपर ले जाया जाता है तो स्प्रिंग में तनाव घटकर शून्य हो जाता है। यदि अब द्रव्यमान को स्वतंत्र छोड़ दिया जाए तो दोलनों की कोणीय आवृत्ति रेडियन/सेकण्ड में होगी :–



(A) 0.707 (B) 7.07 (C) 1.414 (D*) 14.14

Sol. $kx = mg \sin 30^\circ$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g \sin 30^\circ}{x}} = \sqrt{\frac{5 \times 100}{2.5}} = 14.14$ **Ans.**

C-6. A particle executes simple harmonic motion under the restoring force provided by a spring. The time period is T. If the spring is divided in two equal parts and one part is used to continue the simple harmonic motion, the time period will

स्प्रिंग द्वारा आरोपित प्रत्यानयन बल के कारण एक कण सरल आवर्त गति करता है। आवर्त काल T है। यदि स्प्रिंग को दो भागों में विभाजित कर दिया जाये तथा इसके आधे एक भाग से सरल आवर्त गति कराई जाय तो आवर्त काल –

(A) remain T (B) become 2T (C) become T/2 (D*) become $T/\sqrt{2}$

(A) T के बराबर होगा। (B) 2T हो जाएगा। (C) T/2 हो जाएगा। (D*) $T/\sqrt{2}$ हो जाएगा।

Sol. Time period आवर्तकाल $= T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

Spring divided into two equal parts so length is reduced to half

स्प्रिंग दो बराबर भागो में विभाजित की गयी है अतः लम्बाई आधी हो जायेगी

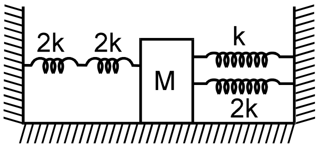
We know हम जानते है $K \propto \frac{1}{\ell}$

$\therefore$ K become twice K दुगुना हो जायेगा।

$T_{new} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{new}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2K}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}\right) = \frac{T}{\sqrt{2}}$

C-7.# Four massless springs whose force constants are 2k, 2k, k and 2k respectively are attached to a mass M kept on a frictionless plane (as shown in figure). If the mass M is displaced in the horizontal direction, then the frequency of the system.

चित्र में दिखायें अनुसार घर्षण रहित तल पर रखे हुए M द्रव्यमान के एक ब्लॉक से चार स्प्रिंग जुड़ी हुई है। जिनके बल नियतांक 2k, 2k, k तथा 2k है। यदि M द्रव्यमान को क्षैतिज दिशा में विस्थापित किया जाए तो निकाय की आवृत्ति होगी :



(A) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4M}}$ (B*) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{M}}$ (C) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{7M}}$ (D) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{7k}{M}}$

Sol. $k_{eq} = 2k + k + \frac{2k \times 2k}{2k + 2k} = 4k$

so, frequency, अतः आवृत्ति $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_{eq}}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4K}{M}}$

C-8. The total mechanical energy of a particle of mass m executing SHM with the help of a spring is $E = (1/2)m\omega^2A^2$. If the particle is replaced by another particle of mass m/2 while the amplitude A remains same. New mechanical energy will be :

एक स्प्रिंग की मदद से सरल आवर्त गति करते हुए m द्रव्यमान के एक कण की कुल यांत्रिक ऊर्जा $E = \frac{1}{2} m\,\omega^2 A^2$ है। माना कण को दूसरे m/2 द्रव्यमान के कण से प्रतिस्थापित कर दिया जाता है जबकि आयाम A अपरिवर्तित है तो नई यांत्रिक ऊर्जा होगी।

(A) $\sqrt{2}$ E (B) 2E (D) E/2 (D*) E

Sol. $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$

$= \frac{1}{2} m \times \frac{k}{m} \times A^2$

$= \frac{1}{2} kA^2$

E is independent of mass.
E द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है।

SECTION (D) : SIMPLE PENDULUM सरल लोलक

D-1. Two pendulums begin to swing simultaneously. The first pendulum makes 9 full oscillations when the other makes 7. Find the ratio of length of the two pendulums.
दो लोलक एक साथ दोलन प्रारम्भ करते है। पहला लोलक 9 दोलन पूरे करता है, जब दूसरा 7 पूरे करता है। दोनों लोलकों की लम्बाईयों का अनुपात होगा।

(A*) $\frac{49}{81}$ (B) $\frac{7}{9}$ (C) $\frac{50}{81}$ (D) $\frac{1}{2}$

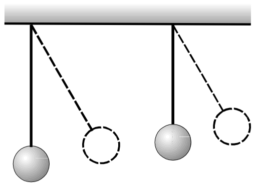
Sol. Given time for both are same दिया समय दोनो के लिये समान है।

$9T_1 = 7T_2$

$9 \times 2\pi \sqrt{\frac{\ell_1}{g}} = 7 \times 2\pi \sqrt{\frac{\ell_2}{g}}$

$\Rightarrow \quad 9\sqrt{\ell_1} = 7\sqrt{\ell_2} \Rightarrow \quad \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{49}{81}$

D-2.# Two pendulums at rest start swinging together. Their lengths are respectively 1.44 m and 1 m. They will again start swinging in same phase together after (of longer pendulum) :
दो लोलक जो कि प्रारम्भ में स्थिरावस्था में है, एक साथ दोलन प्रारम्भ करते है। उनकी लम्बाई क्रमशः 1.44 मी. तथा 1 मी. है। वे पुनः एक साथ एक ही कला में होगे (लम्बे लोलक के सापेक्ष) –



(A) 1 vibration (B) 3 vibrations (C) 4 vibrations (D*) 5 vibrations
(A) 1 कम्पन्न के बाद (B) 3 कम्पन्न के बाद (C) 4 कम्पन्न के बाद (D*) 5 कम्पन्न के बाद

Sol. Let माना $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ and $x_2 = A_2 \sin \omega_2 t$

Two pendulums will vibrate in same phase again when there phase difference $(\omega_2 - \omega_1)t = 2\pi$
दो लोलक दुबारा समान कला मे कम्पन्न करेगे जब उनका कलान्तर $(\omega_2 - \omega_1)t = 2\pi$ होगा।

$\Rightarrow \quad \left(\frac{2\pi}{T_2} - \frac{2\pi}{T_1}\right)t = 2\pi$

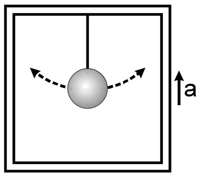
$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{\frac{g}{1}} - \sqrt{\frac{g}{1.44}}\right) n \times T_1 = 2\pi$ (where n is number of vibrations completed by longer pendulum)

(जहाँ n लम्बे लोलक द्वारा पूरे किये गये दोलनो की संख्या है)

$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{\frac{g}{1}} - \sqrt{\frac{g}{1.44}}\right) n \times 2\pi\sqrt{\frac{1.44}{g}} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad n = 5$

Thus after 5 vibrations of longer pendulum they will again start swinging in same phase.
अतः बडे लोलक के 5 कम्पन्नो के बाद ये दुबारा समान कला में दोलन प्रारम्भ करेगें।

D-3.# A scientist measures the time period of a simple pendulum as T in a lift at rest. If the lift moves up with acceleration as one fourth of the acceleration of gravity, the new time period is
एक वैज्ञानिक एक स्थिर लिफ्ट में सरल लोलक का आवर्तकाल T मापता है। यदि लिफ्ट ऊपर की तरफ g/4 त्वरण से गति करे तो नया आवर्तकाल होगाः–



(A) $\frac{T}{4}$ (B) 4 T (C*) $\frac{2}{\sqrt{5}}T$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}T$

Sol. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+g/4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}T$

D-4. A simple pendulum has some time period T. What will be the percentage change in its time period if its amplitude is decreased by 5%?
एक सरल लोलक का आवर्तकाल T है। यदि इसका आयाम 5% कम हो जाये तो इसके आवर्तकाल में कितने प्रतिशत परिवर्तन हो जाएगा ?

(A) 6 % (B) 3 % (C) 1.5 % (D*) 0 %

Sol. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, As it does not depend on amplitude चूंकि ये आयाम पर निर्भर नही करता है

$\therefore$ % change in time period is 0 % Hence option (D) is correct.
आर्वत काल में प्रतिशत परिवर्तन 0 % है अतः विकल्प (D) सही है।

D-5. A simple pendulum with length ℓ and bob of mass m executes SHM of small amplitude A. The maximum tension in the string will be
एक सरल लोलक जिसकी लम्बाई ℓ व गोलक का द्रव्यमान m है, A लघु आयाम से सरल आवर्त गति करता है। रस्सी में अधिकतम तनाव होगा –

(A) $mg(1 + A/\ell)$ (B) $mg(1 + A/\ell)^2$ (C*) $mg[1 + (A/\ell)^2]$ (D) 2 mg

Sol. $T_{max} = mg + m\omega^2\ell = mg + m\frac{v^2}{\ell} = mg + m\frac{(\omega A)^2}{\ell} = mg + m\,\frac{g}{\ell}\times\frac{A^2}{\ell}\quad\left(\because \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right)$

or या $T_{max} = mg + mg\left(\frac{A}{\ell}\right)^2 = mg\left[1+\left(\frac{A}{\ell}\right)^2\right]$

SECTION (E) : COMPOUND PENDULUM & TORSIONAL PENDULUM
पिण्ड लोलक व मरोड़ी लोलक

E-1. A 25 kg uniform solid sphere with a 20 cm radius is suspended by a vertical wire such that the point of suspension is vertically above the centre of the sphere. A torque of 0.10 N-m is required to rotate the sphere through an angle of 1.0 rad and then the orientation is maintained. If the sphere is then released, its time period of the oscillation will be :
एक 25 किग्रा. द्रव्यमान का ठोस गोला जिसकी त्रिज्या 20 सेमी. है, एक उर्ध्व तार से इस प्रकार लटकाया जाता है कि निलम्बन बिन्दु गोले के केन्द्र से ठीक ऊपर (उर्ध्वाधर) है। गोले को 1.0 रेडियन कोण से घुमाने के लिए तथा उसके बाद अपनी स्थिति को बनाये रखने के लिए 0.10 न्यूटन–मी. का बल–आघूर्ण आवश्यक है। अगर तत्पश्चात् गोले को मुक्त छोड़ दिया जाये तो इसके दोलनों का आवर्तकाल होगा –

(A) π second (B) $\sqrt{2}\,\pi$ second (C) 2π second (D*) 4π second
(A) π सैकण्ड (B) $\sqrt{2}\,\pi$ सैकण्ड (C) 2π सैकण्ड (D*) 4π सैकण्ड

Sol. $I = \frac{2}{5} mR^2 = \frac{2}{5} \times 25 \times (0.2)^2 = \frac{2}{5}$

$\tau = C\theta \qquad c = \frac{\tau}{\theta} = \frac{0.1}{1} = 0.1$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{5 \times 0.1}} = 2\pi \times 2 = 4\pi$ secs

E-2. A metre stick swinging about its one end oscillates with frequency f_0. If the bottom half of the stick was cut off, then its new oscillation frequency will be:

एक सिरे के सापेक्ष झूल रही एक मीटर छड़ f_0 आवृत्ति से दोलन करती है। अगर छड़ का नीचे का आधा भाग काट दिया जाए तो दोलनों की नयी आवृत्ति क्या होगी –

(A) f_0 (B*) $\sqrt{2}\, f_0$ (C) $2f_0$ (D) $2\, f_0$

Sol. $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$

where, ℓ is distance between point of suspension and centre of mass of the body.

Thus, for the stick of length ℓ and mass m :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m.g.\frac{\ell}{2}}{(mL^2/3)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

when bottom half of the stick is cut of

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{m}{2}.g.\frac{\ell}{4}}{\frac{m}{2}\frac{(\ell/2)^2}{3}}} = \frac{1}{2\pi}\times\sqrt{\frac{3g}{\ell}} = \sqrt{2}\, f_0 \qquad \textbf{Ans.}$$

Sol. $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\ell}{I}}$

यहाँ, ℓ निलम्बन बिन्दु व वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र के बीच की दूरी है।

अतः द्रव्यमान m तथा ℓ लम्बाई की छड़ के लिए

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m.g.\frac{\ell}{2}}{(mL^2/3)}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

जब छड़ को आधा काट लें तो

$$f_0' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{m}{2}.g.\frac{\ell}{4}}{\frac{m}{2}\frac{(\ell/2)^2}{3}}} = \frac{1}{2\pi}\times\sqrt{\frac{3g}{\ell}} = \sqrt{2}\, f_0 \qquad \textbf{Ans.}$$

SECTION (F) : SUPERPOSITION OF SHM सरल आवर्त गति का अध्यारोपण

F-1. When two mutually perpendicular simple harmonic motions of same frequency, amplitude and phase are superimposed

जब समान आवृत्ति, समान आयाम तथा समान कला की दो परस्पर लम्बवत् सरल आवर्त गतियाँ अध्यारोपित होती हैं तो –

(A) the resulting motion is uniform circular motion.
परिणामी गति समरूप वृत्तीय गति होती है।

(B*) the resulting motion is a linear simple harmonic motion along a straight line inclined equally to the straight lines of motion of component ones.
परिणामी गति , गतियों की सरल रेखाओं के एक घटक से समान रूप से झुकी हुई सरल रेखा के अनुदिश रेखीय सरल आवर्त गति है।

(C) the resulting motion is an elliptical motion, symmetrical about the lines of motion of the components.
परिणामी गति , गति के घटकों की रेखा के सापेक्ष सममित दीर्घवृत्तीय गति होगी।

(D) the two S.H.M. will cancel each other.
दोनों सरल आवर्त गति एक दूसरे को निरस्त कर देंगी।

Sol. $y = A \sin(\omega t + \phi)$ and तथा $x = A \sin(\omega t + \phi)$
then तो $y = x$ so path is straight line. अतः पथ सरल रेखा है

F-2. The position of a particle in motion is given by $y = C\sin\omega t + D\cos\omega t$ w.r.t. origin. Then motion of the particle is:
गति में एक कण की मूल बिन्दु के सापेक्ष स्थिति $y = C\sin\omega t + D\cos\omega t$ से दी जाती है तो कण की गति है

(A) SHM with amplitude C+D
(B*) SHM with amplitude $\sqrt{C^2 + D^2}$
(C) SHM with amplitude $\frac{(C+D)}{2}$
(D) not SHM

(A) C + D आयाम की सरल आवर्त गति है।
(B*) $\sqrt{C^2 + D^2}$ आयाम की सरल आवर्त गति है।
(C) (C + D)/2 आयाम की सरल आवर्त गति है।
(D) सरल आवर्त गति नहीं है।

Sol. $x = C \sin \omega t + D \sin(\omega t + \pi/2)$

$A_r = \sqrt{C^2 + D^2 + 2CD\cos\frac{\pi}{2}}$ $A_r = \sqrt{C^2 + D^2}$

F-3. A simple harmonic motion is given by $y = 5(\sin 3\pi t + \sqrt{3}\cos 3\pi t)$. What is the amplitude of motion if y is in m ?
एक सरल आवर्त गति $y = 5(\sin 3\pi t + \sqrt{3}\cos 3\pi t)$ से प्रदर्शित की जाती है। गति का आयाम क्या होगा, यदि y मीटर में है?

(A) 100 cm (B) 5 m (C) 200 cm (D*) 1000 cm

Sol. $y = 10\left(\frac{1}{2}\sin 3\pi t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3\pi t\right) = 10\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

thus amplitude is अतः आयाम 10 m or या 1000 cm

F-4. The position vector of a particle moving in x-y plane is given by
$\vec{r} = (A\sin\omega t)\,\hat{i} + (A\cos\omega t)\,\hat{j}$ then motion of the particle is :

(A) SHM (B*) on a circle (C) on a straight line (D) with constant acceleration

x-y तल में गति करते हुए एक कण का स्थिति सदिश $\vec{r} = (A\sin\omega t)\,\hat{i} + (A\cos\omega t)\,\hat{j}$ से दिया जाता है तो कण की गति

(A) सरल आवर्त गति है।
(B*) वृत्त पर गति है।
(C) सरल रेखा पर गति है।
(D) नियत त्वरण से होती है।

Sol. $x = A\sin\omega t$, $y = A\cos\omega t$ or या $x^2 + y^2 = A^2$
Thus the motion of the particle is on a circle. अतः कण की गति वृत्त पर है।

SECTION (G) : FOR JEE MAIN

G-1. When an oscillator completes 100 oscillations its ampliutde reduced to $\frac{1}{3}$ of initial value. What will be its amplitude, when it completes 200 oscillations :
जब एक अवमन्दित दोलक 100 दोलन पूरे करता है, तो उसका आयाम प्रारम्भिक मान का $\frac{1}{3}$ हो जाता है। 200 दोलन पूरे करने के पश्चात् इसका आयाम हो जायेगा :

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4*) $\frac{1}{9}$

Sol. In case of damped vibration, amplitude at any instant is
अवमन्दित कम्पन्न की स्थिति में किसी क्षण पर आयाम है।

$a = a_0\, e^{-bt}$

where a_0 = initial amplitude
जहाँ a_0 = प्रारम्भिक आयाम

b = damping constant अवमन्दन गुणांक

Ist caes : $t = 100\,T$ and तथा $a = \dfrac{a_0}{3}$

$\therefore \quad \dfrac{a_0}{3} = a_0\, e^{-b(100\,T)}$

$\Rightarrow \quad e^{-100\,bT} = \dfrac{1}{3}$

IInd caes : $t = 200\,T$

$a = a_0\, e^{-bt} = a_0\, e^{-b(200\,T)}$

$= a_0\,(e^{-100\,bT})^2 = a_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{a_0}{9}$

G-2. The damping force on an oscillator is directly proportional to the velocity. The units of the constant of proportionality are:
किसी दोलित्र पर अवमन्दक–बल वेग के समानुपाती होता है तो, समानुपाती नियतांक का मात्रक है :

(1) $kgms^{-1}$ (2) $kgms^{-2}$ (3*) kgs^{-1} (4) kgs

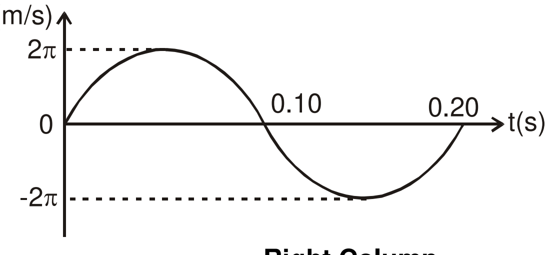
Sol. $F \propto v \Rightarrow F = kV$

$k = \dfrac{F}{v} \Rightarrow [k] = \dfrac{[kgms^{-2}]}{[ms^{-1}]} = kg\ s^{-1}$

PART - III : MATCH THE COLUMN

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1.# A simple harmonic oscillator consists of a block attached to a spring with k = 200 N/m. The block slides on a frictionless horizontal surface, with equilibrium point x = 0. A graph of the block's velocity v as a function of time t is shown. Correctly match the required information in the left column with the values given in the right column. (use $\pi^2 = 10$)
एक सरल आवर्त गति कम्पित्र में, k = 200 N/m की स्प्रिंग के साथ एक पिण्ड जुड़ा हैं। पिण्ड घर्षण रहित क्षैतिज सतह पर साम्यवस्था बिन्दु x = 0 के साथ सरकता है। पिण्ड के वेग v का समय t के फलन के रूप में चित्रण ग्राफ में दर्शाया गया है। बायें स्तम्भ में दी गई सूचना को दायें स्तम्भ में दिये गये परिमाणों से सही मिलाओ – ($\pi^2 = 10$ का प्रयोग करें)



	Left Column		Right Column
(A)	The block's mass in kg	(p)	– 0.20
(B)	The block's displacement at t = 0 in metres	(q)	– 200
(C)	The block's acceleration at t = 0.10 s in m/s^2	(r)	0.20
(D)	The block's maximum kinetic energy in Joule	(s)	4.0

	बांया स्तम्भ	दायाँ स्तम्भ
(A)	पिण्ड का द्रव्यमान किग्रा. में।	(p) – 0.20
(B)	$t = 0$ पर पिण्ड का विस्थापन मीटर में।	(q) – 200
(C)	$t = 0.10$ सेकण्ड पर पिण्ड का त्वरण मी./से.^{2} में।	(r) 0.20
(D)	पिण्ड की महत्तम गतिज ऊर्जा जूल में।	(s) 4.0

Ans. (A) r , (B) p , (C) q , (D) s

Sol. $V_{max} = A\omega$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{V_{max}}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} \times (0.2) = 0.20\text{m}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{T^2k}{4\pi^2} = 0.2 \text{ kg}$$

At t = 0.1, acc. is maximum

$t = 0.1$ पर त्वरण महत्तम है –

$$\Rightarrow \quad a_{max} = -\omega^2 A = -\left(\frac{2\pi}{0.2}\right)^2 \times 0.2$$

$$= -200 \text{ m/s}^2$$

Maximum energy $= \frac{1}{2} mV_{max}^2 = 4$ J

महत्तम ऊर्जा $= \frac{1}{2} mV_{max}^2 = 4$ J

2. In the column-I, a system is described in each option and corresponding time period is given in the column-II. Suitably match them.

स्तम्भ-I में एक निकाय की स्थिति को प्रत्येक विकल्प बताया गया है तथा उसके संगत आवर्तकाल स्तम्भ-II में दिया गया है। तो इनकों सुमेलित करो।

	Column-I	Column-II
(A)	A simple pendulum of length 'ℓ' oscillating with small amplitude in a lift moving down with retardation g/2.	(p) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$
(B)	A block attached to an end of a vertical spring, whose other end is fixed to the ceiling of a stationary lift, stretches the spring by length 'ℓ' in equilibrium. It's time period when lift moves up with an acceleration g/2 is	(q) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
(C)	The time period of small oscillation of a uniform rod of length 'ℓ' smoothly hinged at one end. The rod oscillates in vertical plane.	(r) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$
(D)	A cubical block of edge 'ℓ' and specific gravity 1/2 is in equilibrium with some volume inside water filled in a large fixed container. Neglect viscous forces and surface tension. The time period of small oscillations of the block in vertical direction is	(s) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$

	स्तम्भ-I	स्तम्भ-II
(A)	एक सरल लोलक जो कि लम्बाई 'ℓ' का है जो कि एक अल्प आयाम के साथ लिफ्ट में दोलन कर रहा है। लिफ्ट नीचे की तरफ मन्दन g/2 से जा रही है।	(p) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$
(B)	एक ब्लॉक को एक ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग के एक सिरे पर लगा दिया जाता है जिसका दूसरा सिरा एक स्थिर लिफ्ट की छत से जड़वत लगा है तथा साम्यवस्था में यह स्प्रिंग में ℓ विस्तार करती है। इसका आवर्तकाल क्या होगा जब लिफ्ट ऊपर की तरफ g/2 त्वरण से जा रही होगी।	(q) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
(C)	ℓ लम्बाई की एक समरूप छड़ को एक सिरे पर बिना घर्षण के किलकीत कर दिया जाता है। यह छड़ ऊर्ध्वाधर तल में दोलन कर रही है। तो छोटे दोलनों के लिए इसका आवर्तकाल होगा।	(r) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$
(D)	एक घनाकार ब्लॉक की भुजा ℓ है तथा विशिष्ट घनत्व (गुरूत्व) 1/2 है तथा इसका कुछ आयतन पानी के अन्दर है जो कि एक बड़े जड़वत पात्र में भरा हुआ है, यह साम्यावस्था में है। श्यान बलों व पृष्ठतनाव को नगण्य मानो तो ऊर्ध्वाधर दिशा में छोटे दोलनों के लिए ब्लॉक का आवर्तकाल होगा।	(s) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$

Ans. (A) p (B) q (C) p (D) s

Sol. (A) In frame of lift effective acceleration due to gravity is $g+\frac{g}{2}=\frac{3g}{2}$ downwards

लिफ्ट के फ्रेम में गुरूत्व के कारण त्वरण = $g+\frac{g}{2}=\frac{3g}{2}$ नीचे की तरफ

$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$

(B) $K\ell = mg$ $\quad\therefore \frac{k}{m}=\frac{g}{L}$

constant acceleration of lift has no effect in time period of oscillation.
लिफ्ट का नियत त्वरण, दोलन के आवर्तकाल पर कोई असर नहीं डालता है।

$$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

(C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{3}}{mg\frac{\ell}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$

(D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho Ag}} = 2\pi\sqrt{\frac{(\rho/2)\ A\ell}{\rho Ag}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{2g}}$

Exercise-2

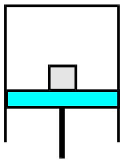
✍ Marked Questions may have for Revision Questions.
✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

PART - I : ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

SECTION (A) : EQUATION OF SHM सरल आवर्त गति का समीकरण

1.# A block of mass m is resting on a piston as shown in figure which is moving vertically with a SHM of period 1 s. The minimum amplitude of motion at which the block and piston separate is :
दिये गये चित्र में एक गुटका जिसका द्रव्यमान m है, एक पिस्टन पर स्थिरावस्था में है। पिस्टन 1 sec. के आवर्तकाल से ऊर्ध्वाधर सरल आवर्त गति कर रहा है। गति का वह न्यूनतम आयाम क्या होगा, जिस पर गुटका तथा पिस्टन एक दूसरे से अलग हो जायें –



(A*) 0.25 m (B) 0.52 m (C) 2.5 m (D) 0.15 m

Sol. Acceleration त्वरण (a) = $\omega^2 x$ $\Rightarrow a_{max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$

When $a_{max} = g$ then block and piston will be separated
जब $a_{max} = g$ वस्तु तथा पिस्टन अलग हो जायेगे।

$$a_{max} = g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \quad ; \quad (g = \pi^2)$$

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} A \Rightarrow A = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ m}$$

SECTION (B) : ENERGY ऊर्जा

2.✍ The potential energy of a particle of mass 'm' situated in a unidimensional potential field varies as $U(x) = U_0 [1 - \cos ax]$, where U_0 and a are constants. The time period of small oscillations of the particle about the mean position :
m द्रव्यमान का एक कण जो कि एकविमीय स्थितिज क्षेत्र में स्थित है, की स्थितिज ऊर्जा $U(x) = U_0(1 - \cos ax)$ से परिवर्तित होती है, जहाँ U_0 तथा a नियतांक हैं। माध्य अवस्था के सापेक्ष कण के लघु दोलनों का आवर्त काल होगा–

(A) $2\pi\sqrt{\frac{m}{a\ U_0}}$ (B) $2\pi\sqrt{\frac{a\ m}{U_0}}$ (C*) $2\pi\sqrt{\frac{m}{a^2 U_0}}$ (D) $2\pi\sqrt{\frac{a^2 m}{U_0}}$

Sol. Restoring force प्रत्यानयन बल $F = \frac{-du}{dx} = \frac{-d}{dx}(u_0 (1\text{-}\cos ax))$

$$F(x) = -u_0 a \sin ax$$

for small angle लघु कोण के लिये $\sin ax \approx ax$

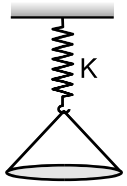
$F = -u_0 a^2 x$ $\Rightarrow$ acc. त्वरण $= \frac{-u_0 a^2 x}{m} = -\omega^2 x = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times x$

So, Time period आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{u_0 a^2}}$

SECTION (C) : SPRING MASS SYSTEM स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय

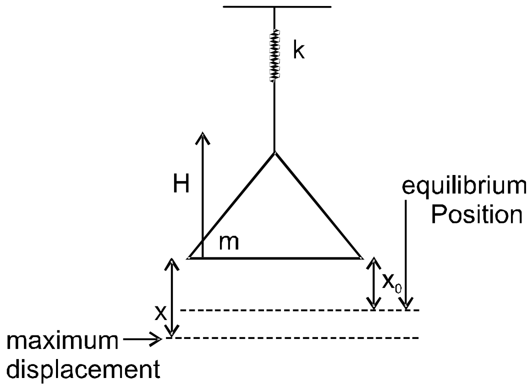
3.# A solid ball of mass m is made to fall from a height H on a pan suspended through a spring of spring constant K as shown in figure. If the ball does not rebound and the pan is massless, then amplitude of oscillation is

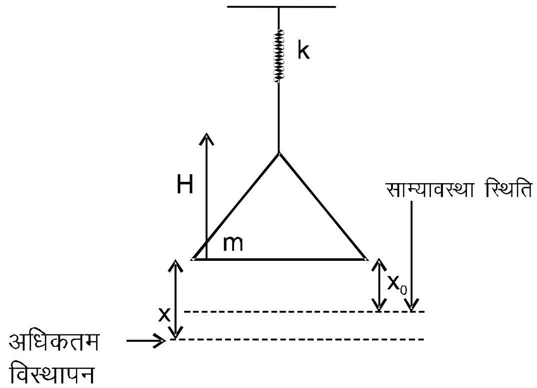
चित्रानुसार एक m द्रव्यमान की ठोस गेंद H ऊँचाई से एक चौड़े पलड़े पर गिरती है जो k स्प्रिंग नियतांक वाली स्प्रिंग से लटका है। यदि पलड़ा द्रव्यमान रहित तथा गेंद टकराकर वापस नहीं उछलती है, तो दोलन का आयाम होगा–



(A) $\frac{mg}{K}$ (B*) $\frac{mg}{k}\left(1+\frac{2HK}{mg}\right)^{1/2}$ (C) $\frac{mg}{K}+\left(\frac{2HK}{mg}\right)^{1/2}$ (D) $\frac{mg}{K}\left[1+\left(1+\frac{2HK}{mg}\right)^{1/2}\right]$

Sol.





velocity before collision टकराने से पहले वेग = $\sqrt{2gH}$

pan is massless so velocity after collision
बर्तन भी द्रव्यमानहीन है अतः टक्कर के बाद वेग

$= \sqrt{2gH}$

by energy conservation
ऊर्जा संरक्षण से

$$mg(x) + \frac{1}{2}m\left(\sqrt{2gH}\right)^2 = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$Kx^2 - 2mgx - 2mgH = 0$$

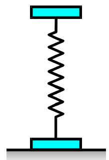
$$x = \frac{mg}{K} + \frac{mg}{K}\sqrt{1+\frac{2HK}{mg}}$$

at equilibrium साम्यवस्था पर $Kx_0 = mg \Rightarrow x_0 = mg/K$

mean Amplitude माध्य आयाम $= x - x_0 = \frac{mg}{K}\sqrt{1+\frac{2HK}{mg}}$

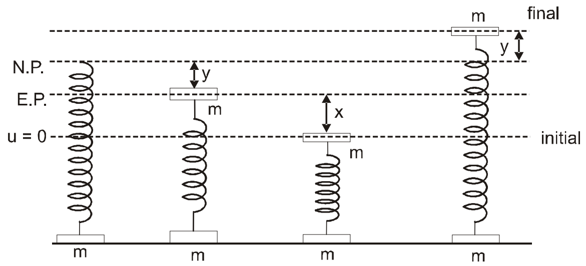
4 .# Two plates of same mass are attached rigidly to the two ends of a spring as shown in figure. One of the plates rests on a horizontal surface and the other results a compression y of the spring when it is in equilibrium state. The further minimum compression required, so that after the force causing compression is removed the lower plate is lifted off the surface, will be:

चित्रानुसार दो समान द्रव्यमान की प्लेटें एक स्प्रिंग के दोनों सिरों से दृढ़ता पूर्वक जोड़ी जाती है। एक प्लेट क्षैतिज सतह पर विश्राम अवस्था में है जबकि दूसरी प्लेट के कारण स्प्रिंग में y संपीड़न है तथा यह स्थिर और साम्य अवस्था में है। वह न्यूनतम संपीडन जिसके लिये संपीडन बल को हटाने के पश्चात् नीचे वाली प्लेट गति के दौरान सतह से संपर्क छोड़ दे, होगा–



(A) 0.5 y (B) 3y (C*) 2y (D) y

Sol.



Let upper block is pushed down by x, at equilibrium mg = ky, i.e., weight of upper block is balanced by spring When it is deformed by y, upper block will perform SHM with amplitude x about equilibrium position, lower block will leave surface when spring is extended by y, means upper block is at distance 2y from its mean position. That should be upper extreme position of upper block. So amplitude x = 2y

माना उच्च ब्लॉक नीचे x धकेला जाता है। साम्यवस्था पर mg = ky है अर्थात् उच्च ब्लॉक का भार स्प्रिंग द्वारा संतुलित होता है, जब स्प्रिंग मे संकुचन y है। उच्च ब्लॉक साम्यवस्था के परित आयाम x के साथ स.आ.ग. करेगा। जब स्प्रिंग y से विस्तारित होती है, निम्न ब्लॉक सतह को छोड देगा अर्थात उच्च ब्लॉक इसकी माध्यवस्था से 2y दूरी पर होता है। यह उच्च ब्लॉक की उच्च सीमान्त स्थिति होनी चाहिये अतः आयाम x = 2y.

Alternative :

at equilibrium of upper block mg = ky

साम्यवस्था पर उच्च ब्लॉक के लिये mg = ky

lower plate will leave the surface if the extension in spring is y

यदि स्प्रिंग मे विस्तार y है तो निम्न प्लेट सतह छोड देगी

Let upper plate is displaced by x downward and left

माना उच्च प्लेट x नीचे विस्थापित करते हुये छोडी जाती है

so by energy conservation between compressed to extended positions

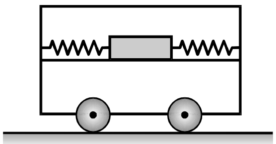
तो ऊर्जा संरक्षण से (संपीडित तथा विस्तारित अवस्थाओं के मध्य)

$$0 + \frac{1}{2}k(x+y)^2 = mg(x+2y) + \frac{1}{2}ky^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + kxy = mgx + mg2y + \frac{1}{2}ky^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2y$$

5.# Two springs, each of spring constant k, are attached to a block of mass m as shown in the figure. The block can slide smoothly along a horizontal platform clamped to the opposite walls of the trolley of mass M. If the block is displaced by x cm and released, the period of oscillation is :

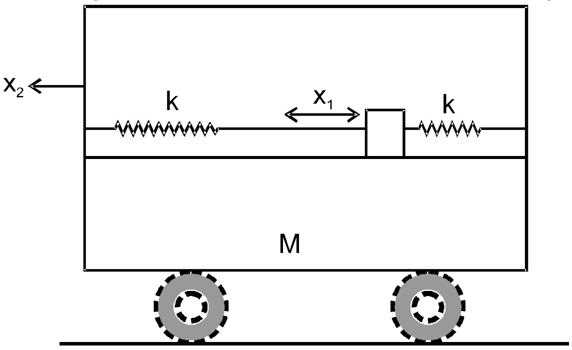
दो समान स्प्रिंग जिनका स्प्रिंग नियतांक k है, चित्रानुसार m द्रव्यमान के गुटके से जुड़ी हुई है। गुटका एक क्षैतिज चिकने प्लेटफॉर्म पर खिसक सकता है। क्षैतिज प्लेटफॉर्म M द्रव्यमान की ट्राली की विपरीत दीवारों से जुड़ा है। यदि गुटके को x सेमी विस्थापित करके छोड़ दिया जाये तो दोलन का आवर्तकाल होगा–



(A) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Mm}{2k}}$ (B) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(M+m)}{kmM}}$ (C*) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m\ \ M}{2k\,(M+m)}}$ (D) $T = 2\pi\,\dfrac{(M+m)^2}{k}$

Sol. Let displacement of block is x_1 and of cart is x_2 as shown

माना वस्तु का विस्थापन x_1 तथा गाडी का x_2 है चित्रानुसार



by linear momentum conservation

रेखीय संवेग संरक्षण से

$$mv_1 = Mv_2 \quad \Rightarrow v_2 = \frac{mv_1}{M} \text{ so } x_2 = \frac{mx_1}{M}$$

For block Force equation can be written as

गुटके के लिये बल समीकरण ऐसे लिखी जा सकती है।

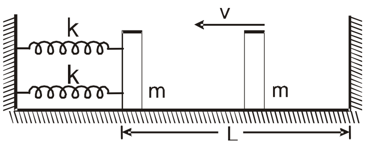
$$F = 2k(x_1 + x_2) = m\omega^2 x_1$$

$$\Rightarrow \quad 2k\left(x_1 + \frac{m}{M}x_1\right) = m\omega^2 x_1 \Rightarrow \omega^2 = 2k\left(\frac{M+m}{Mm}\right)$$

So अतः $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Mm}{2k(M+m)}}$

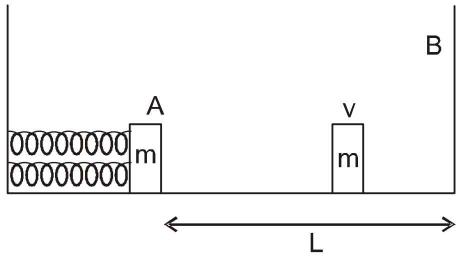
6.# The right block in figure moves at a speed V towards the left block placed in equilibrium. All the surfaces are smooth and all the collisions are elastic. Find the time period of periodic motion. Neglect the width of the blocks.

चित्रानुसार दांयी ओर स्थित गुटका v चाल से साम्यावस्था में स्थित बायें गुटके की ओर गति कर रहा है। सभी टक्करें प्रत्यास्थ हैं तथा सभी सतह घर्षण रहित है। आवर्त गति का आवर्तकाल ज्ञात करो ? दोनों गुटको की चौड़ाई नगण्य मानिये।



(A*) $\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}} + \dfrac{2L}{v}$ (B) $\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}} + \dfrac{L}{v}$ (C) $\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}} - \dfrac{L}{v}$ (D) $\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} + \dfrac{L}{v}$

Sol.



since all collision are elastic and total energy is conserved
चूंकि सारी टक्करें प्रत्यास्थ है और कुल ऊर्जा संरक्षित है।

Time period of motion of right block is $t_1 = \frac{2L}{v}$.

दाँये गुटके का आवर्तकाल है $t_1 = \frac{2L}{v}$.

Time period of motion of left block is $t_2 = \frac{1}{2} 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\ \ k}}$

बाँये गुटके का आवर्तकाल है $t_2 = \frac{1}{2} 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\ \ k}}$

So, total time period अतः कुल आवर्त काल = $\frac{2L}{v} + \frac{1}{2}\left[2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}\right]$

SECTION (D) : SIMPLE PENDULUM सरल लोलक

7. The bob in a simple pendulum of length ℓ is released at t = 0 from the position of small angular displacement θ_0. Linear displacement of the bob at any time t from the mean position is given by
एक ℓ लम्बाई के सरल लोलक के गोलक को t = 0 समय पर अल्प कोणीय विस्थापन θ_0 से छोड़ा जाता है। किसी समय t पर माध्य स्थिति से गोलक का रेखीय विस्थापन होगा :

(A*) $\ell\theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$ (B) $\ell\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\cos\theta_0$ (C) $\ell g \sin\theta_0$ (D) $\ell\theta_0 \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$

Sol. For simple pendulum $\omega = \sqrt{g/\ell}$ and maximum linear displacement $x_0 = \ell\theta_0$ and equation of S.H.M
सरल लोलक के लिये $\omega = \sqrt{g/\ell}$ और अधिकतम रेखीय विस्थापन $x_0 = \ell\theta_0$ और स.आ.ग. की समीकरण

$x = x_0 \cos \omega t$

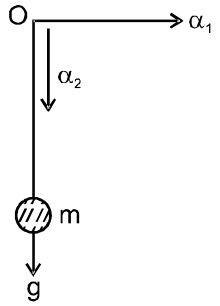
$x = \ell\theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}t$

8. The period of small oscillations of a simple pendulum of length ℓ if its point of suspension O moves a with a constant acceleration $\alpha = \alpha_1\hat{i} - \alpha_2\hat{j}$ with respect to earth is ($\hat{i}$ and $\hat{j}$ are unit vectors in horizontal and vertically upward directions respectively)
ℓ लम्बाई के सरल लोलक के अल्प दोलनों का आर्वतकाल क्या होगा, यदि निलम्बन बिन्दु O पृथ्वी के सापेक्ष नियत त्वरण $\alpha = \alpha_1\hat{i} - \alpha_2\hat{j}$ से गति करता है ($\hat{i}$ तथा $\hat{j}$ क्रमश क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर दिशाओं में एकांक सदिश है।) –

(A*) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\{(g-\alpha_2)^2 + \alpha_1^2\}^{1/2}}}$ (B) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\{(g-\alpha_1)^2 + \alpha_2^2\}^{1/2}}}$

(C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ (D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{(g^2 + \alpha_1^2)^{1/2}}}$

Sol. Point O is moving as shown बिन्दु O चित्रानुसार गति कर रहा है।



So acc. Of particle w.r.t O अतः कण का O के सापेक्ष त्वरण

$= (-\alpha_1\hat{i} + (\alpha_2 - g)\hat{j}$

So अतः $g_{eff.} = \sqrt{\alpha_1^2 + (g-\alpha_2)^2}$

So time period अतः आवर्तकाल

$= 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{(\alpha_1^2 + (g-\alpha_2)^2)^{1/2}}}$

SECTION (E) : COMPOUND PENDULUM & TORSIONAL PENDULUM
पिण्ड लोलक व मरोड़ी लोलक

9. A simple pendulum ; a physical pendulum; a torsional pendulum and a spring–mass system, each of same frequency are taken to the Moon. If frequencies are measured on the moon, which system or systems will have it unchanged ?

चार प्रकार के दोलन निकाय, एक सरल लोलक, एक भौतिक लोलक, एक मरोड़ी लोलक तथा एक स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय जिनका प्रत्येक की आवृत्ति समान है, को चन्द्रमा पर ले जाया जाता है। अगर चन्द्रमा पर आवृत्ति ज्ञात की जाए तो किन निकायों या निकाय में यह अपरिवर्तित होगा –

(A*) spring–mass system and torsional pendulum. स्प्रिंग–द्रव्यमान निकाय तथा मरोड़ी लोलक में
(B) only spring–mass system. केवल स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय में
(C) spring–mass system and physical pendulum. स्प्रिंग–द्रव्यमान निकाय तथा भौतिक दोलित्र में
(D) None of these इनमें से कोई नहीं।

Sol. **(B)** For simple pendulum $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}\begin{bmatrix}\ell - \text{const}\\ g - \text{change}\end{bmatrix}$

For physical pendulum $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mg\ell}}$ (g–change) $I, m, \ell \to$ const

For Torsional pendulum $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{C}}\left(\dfrac{I}{C} = \text{Const}\right)$ for any planet

For spring mass system $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$

$\therefore mg = k\ell \qquad \left(\dfrac{m}{K} = \dfrac{\ell}{g} = \dfrac{\ell}{g'} = \text{Const} \quad \text{for} \quad \text{all} \quad \text{planet}\right)$

Both the spring–mass system & torsional pendulum have no dependence on gravitational acceleration for their frequencies .

Sol. **(B)** सरल लोलक के लिए $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\begin{bmatrix}\ell - \text{नियत} \\ g - \text{परिवर्तित}\end{bmatrix}$

भौतिक लोलक $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}}$ (g–परिवर्तित) $I, m, \ell \to$ अचर

मरोड़ी लोलक $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$ $\left(\frac{I}{C} = \text{Const}\right)$ सभी ग्रहों के लिए

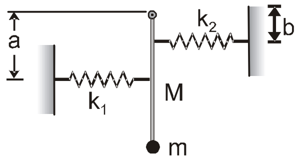
स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय के लिए $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

$\therefore mg = k\ell$ $\left(\frac{m}{K} = \frac{\ell}{g} = \frac{\ell}{g'} = \text{सभी ग्रहों के लिए अचर}\right)$

स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय तथा मरोड़ी लोलक दोनों की आवृत्ति गुरूत्वीय त्वरण पर निर्भर नहीं करता है।

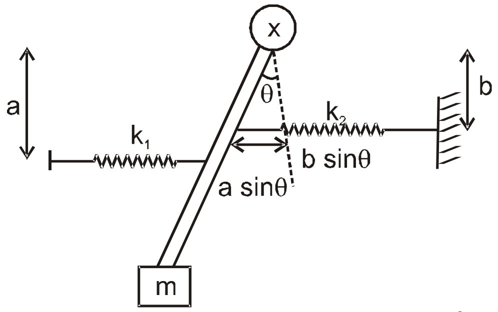
10.# A rod of mass M and length L is hinged at its one end and carries a particle of mass m at its lower end. A spring of force constant k_1 is installed at distance a from the hinge and another of force constant k_2 at a distance b as shown in the figure. If the whole arrangement rests on a smooth horizontal table top, the frequency of vibration is

द्रव्यमान M तथा लम्बाई L की एक छड़ एक सिरे से लटकी हुई है तथा दूसरे निचले सिरे पर एक m द्रव्यमान का कण जुड़ा हुआ है। एक K_1 स्प्रिंग नियतांक की स्प्रिंग निलम्बित सिरे से a दूरी पर तथा K_2 स्प्रिंग नियतांक की एक दूसरी स्प्रिंग निलम्बित सिरे से b दूरी पर चित्रानुसार लगायी गयी है। यदि सम्पूर्ण निकाय एक क्षेतिज चिकनी मेज पर रखा हो तो कम्पन्नों की आवृत्ति होगी–



(A*) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1a^2 + k_2b^2}{L^2(m + \frac{M}{3})}}$ (B) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2 + k_1}{M + m}}$ (C) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_2 + k_1\frac{a^2}{b^2}}{4\frac{M}{3} + m}}$ (D) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + \frac{k_2b^2}{a^2}}{\frac{4}{3}m + M}}$

Sol. For small angular displacement (θ)
लघु कोणीय विस्थापन के लिये



Net torque on body वस्तु पर कुल बलाघुर्ण $= I\alpha$

$= (k_1a\sin\theta)a + (k_2b\sin\theta)b = \left(mL^2 + \frac{ML^2}{3}\right)\alpha$

For small θ लघु θ के लिये $\Rightarrow \alpha = \frac{k_1a^2 + k_2b^2}{mL^2 + \frac{ML^2}{3}}\theta$

$\Rightarrow$ frequency आवृत्ति $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1a^2 + k_2b^2}{L^2(m + M/3)}}$

SECTION (F) : SUPERPOSITION OF SHM सरल आवर्त गति का अध्यारोपण

11. A particle moves along the X-axis according to the equation $x = 10 \sin^3 (\pi t)$. The amplitudes and frequencies of component SHMs are

X-अक्ष पर एक कण समीकरण $x = 10 \sin^3 (\pi t)$ के अनुसार गति कर रहा है। सरल आवर्त गतियों के घटकों का आयाम तथा आवृत्तियां है –

(A) amplitude 30/4, 10/4 ; frequencies 3/2, 1/2 (B*) amplitude 30/4, 10/4 ; frequencies 1/2, 3/2
(C) amplitude 10, 10 ; frequencies 1/2, 1/2 (D) amplitude 30/4, 10 ; frequencies 3/2, 2
(A) आयाम 30/4, 10/4 ; आवृत्तियां 3/2, 1/2 (B*) आयाम 30/4, 10/4 ; आवृत्तियां 1/2, 3/2
(C) आयाम 10, 10 ; आवृत्तियां 1/2, 1/2 (D) आयाम 30/4, 10 ; आवृत्तियां 3/2, 2

Sol. $x = 10 \sin^3(\pi t)$; $\left(\sin^3 A = \dfrac{3\sin A - \sin(3A)}{4}\right)$

$\Rightarrow x = 10\left[\dfrac{3\sin(\pi t) - \sin(3\pi t)}{4}\right] \Rightarrow x = \dfrac{30}{4}\sin \pi t - \dfrac{10}{4}\sin 3\pi t$

So Amplitude अतः आयाम $= \dfrac{30}{4}, \dfrac{10}{4}$

frequency आवृत्ति = 1/2 , 3/2

12. The amplitude of a particle due to superposition of following S.H.Ms. Along the same line is

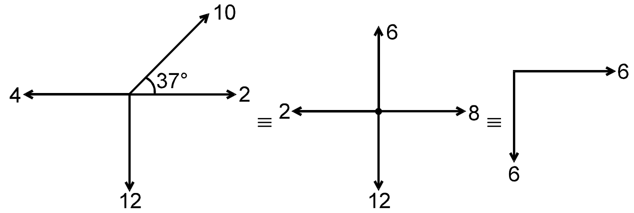
$X_1 = 2 \sin 50 \pi t$; $X_2 = 10 \sin (50 \pi t + 37^\circ)$
$X_3 = -4 \sin 50 \pi t$; $X_4 = -12 \cos 50 \pi t$

निम्नलिखित समान रेखा पर सरल आवर्त गतियों के अध्यारोपण द्वारा कण का आयाम होगा

$X_1 = 2 \sin 50 \pi t$; $X_2 = 10 \sin (50 \pi t + 37^\circ)$
$X_3 = -4 \sin 50 \pi t$; $X_4 = -12 \cos 50 \pi t$

(A) $4\sqrt{2}$ (B) 4 (C*) $6\sqrt{2}$ (D) none of these इनमें से कोई नहीं

Hint : Amplitude phasor diagram :
आयाम कला आरेख द्वारा



$\therefore$ resultant amplitude परिणामी आयाम $= 6\sqrt{2}$

13. When a body is suspended from a fixed point by a spring, the angular frequency of its vertical oscillations is ω_1. When a different spring is used, the angular frequency is ω_2. The angular frequency of vertical oscillations when both the springs are used together in series is given by

जब एक वस्तु को एक रस्सी द्वारा एक स्थिर बिन्दु से लटकाया जाता है तो इसके ऊर्ध्वाधर दोलनों की कोणीय आवृत्ति ω_1 है। जब अलग रस्सी को काम में लेते है तो कोणीय आवृत्ति ω_2 है। जब दोनों रस्सियों को एक साथ श्रेणी मे काम में लेते है, तो ऊर्ध्वाधर दोलनों की कोणीय आवृत्ति दी जाती है :

(A) $\omega = \left[\omega_1^2 + \omega_2^2\right]^{\frac{1}{2}}$ (B) $\omega = \left[\dfrac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$ (C*) $\omega = \left[\dfrac{\omega_1^2\omega_2^2}{\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$ (D) $\omega = \left[\dfrac{\omega_1^2\omega_2^2}{2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$

Ans. **(C)**

Sol. $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$ $\qquad \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_2}{m}}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}} = \sqrt{\frac{1}{m\left(\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_1}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\omega_2^2}+\frac{1}{\omega_1^2}}} = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}$$

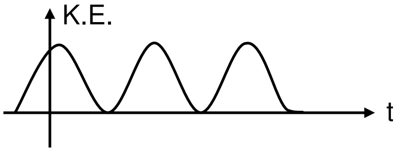
14._ A particle performs simple harmonic motion at a frequency f. The frequency at which its kinetic energy varies is :

एक कण एक f आवृत्ति पर सरल आवर्त गति करता है। आवृत्ति जिस पर इसकी गतिज ऊर्जा बदलती है।

(A) f (B*) 2f (C) 4f (D) $\dfrac{f}{2}$

Ans. **(B)**

Sol. K.E. = $\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$



15._ A particle rests in equilibrium under two forces of repulsion whose centres are at distance of a and b from the particle. The forces vary as the cube of the distance. The forces per unit mass are k and k' respectively. If the particle be slightly displaced towards one of them the motion is simple harmonic with the time period equal to

एक कण प्रतिकर्षण के दो बलों के अन्दर साम्यावस्था में विराम करता है जिनके केन्द्र कण से a तथा b दूरी पर है। दोनों बल दूरी के घन के रूप में बदलते है। बलों के प्रति इकाई द्रव्यमान क्रमशः k तथा k' है। यदि कण को उनमें से किसी एक की तरफ थोड़ा सा विस्थापित कर दे तो गति सरल आवर्ती है, तो आवर्तकाल बराबर है –

(A) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3\left(\frac{k}{a^3}+\frac{k'}{b^3}\right)}}$ (B) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{a^3}+\frac{k'}{b^3}\right)}}$ (C) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{a^4}+\frac{k'}{b^4}\right)}}$ (D*) $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3\left(\frac{k}{a}+\frac{k'}{b}\right)}}$

Ans. **(D)**

Sol. $C_1a^3 = C_2b^3$

$$\frac{C_1a^3}{m} = k$$

$$\frac{C_2b^3}{m} = k'$$

$F_{rs} = C_1(a-x)^3 - C_2(b+x)^3$

$= C_1a^3\left(1-\dfrac{3x}{a}\right) - C_2b^3\left(1+\dfrac{3x}{b}\right)$

$= -3(C_1a^2 + C_2b^2)x$

$\because$ time period = $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3\left(\frac{k}{a}+\frac{k'}{b}\right)}}$

PART - II : SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE

भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

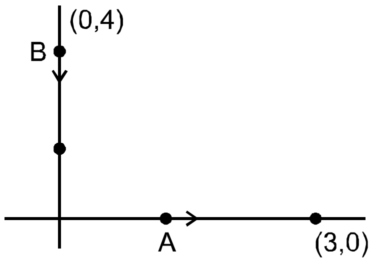
SECTION (A) : EQUATION OF SHM सरल आवर्त गति का समीकरण

1. Two particles A and B are performing SHM along x and y-axis respectively with equal amplitude and frequency of 2 cm and 1 Hz respectively. Equilibrium positions of the particles A and B are at the co-ordinates (3, 0) and (0, 4) respectively. At t = 0, B is at its equilibrium position and moving towards the origin, while A is nearest to the origin and moving away from the origin. If the maximum and minimum distances between A and B is s_1 and s_2 then find $s_1 + s_2$ (in cm).

दो कण A तथा B, x तथा y-अक्ष के अनुदिश समान आयाम तथा आवृत्ति क्रमशः 2 cm तथा 1 Hz से सरल आवर्त गति कर रहे हैं। A तथा B कणों की साम्यावस्था स्थितियां क्रमशः (3, 0) तथा (0, 4) निर्देशांकों पर है। t = 0, पर कण B साम्यावस्था पर है तथा मूल बिन्दु की तरफ जा रहा है और कण A मूलबिन्दु के सबसे निकट है तथा मूलबिन्दु से दूर जा रहा है। A तथा B के मध्य की अधिकतम तथा न्यूनतम दूरियां क्रमशः s_1 व s_2 है तब $s_1 + s_2$ (cm में) ज्ञात करो।

Ans. 10

Sol.



At t = 0 Particle 2 is at point B and moving towards origin so displacement

t = 0 पर कण 2 बिन्दु B पर है तथा मूल बिन्दु की तरफ जा रहा है अतः

$Y = 4 - A \sin \omega t$

$Y = 4 - 2 \sin \omega t$

and displacement of particle 1 is

और कण 1 का विस्थापन है

$X = 3 - A \cos \omega t$

$X = 3 - 2 \cos \omega t$

So distance between them अतः अनके मध्य दूरी = $\sqrt{X^2 + Y^2}$

$s^2 = 29 - (16 \sin \omega t + 12 \cos \omega t) = 29 - 4 (4 \sin\omega t + 3 \cos\omega t)$

$\Rightarrow 29 - 20 (\sin\omega t + 37^\circ)$

So अतः $s^2_{max} = 49 \Rightarrow s_{max} = 7cm = S_1$

$s^2_{max} = 9 \Rightarrow s_{min} = 3cm = S_2$ $\quad \therefore S_1 + S_2 = 10cm$

2. Two particles P and Q describe S.H.M. of same amplitude a, same frequency f along the same straight line from the same mean position. The maximum distance between the two particles is $a\sqrt{2}$. If the initial phase difference between the particles is $\frac{\pi}{N}$ then find N:

दो कण P तथा Q समान आयाम a तथा समान आवृत्ति f के साथ समान माध्य स्थिति से सरल रेखा के अनुदिश सरल आवर्त गति करते हैं। कणों के मध्य अधिकतम दूरी $a\sqrt{2}$ रहती हैं। कणों के मध्य प्रारम्भिक कलान्तर $\frac{\pi}{N}$ है तब N ज्ञात कीजिए: –

Ans 2

Sol. $x_1 = A\sin(\omega t + \phi_1)$

$x_2 = A\sin(\omega t + \phi_2)$

$\Rightarrow \quad |x_1 - x_2| = 2A \sin(2\omega t + \dfrac{\phi_1 + \phi_2}{2}) \cos\left(\dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$

To maximize अधिकतम के लिए $|x_1 - x_2|$:

$\sin(2\omega t + \dfrac{\phi_1 + \phi_2}{2}) = 1$

$\Rightarrow \quad a\sqrt{2} = 2a \times 1 \times \cos\left(\dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi_1 - \phi_2 = \dfrac{\pi}{2} \quad \therefore \quad N = 2$

3. A street car moves rectilinearly from station A (here car stops) to the next station B (here also car stops) with an acceleration varying according to the law f = a - bx, where a and b are positive constants and x is the distance from station A. If the maximum distance between the two stations is $x = \dfrac{Na}{b}$ then find N.

स्थिरावस्था से एक कार स्टेशन A (यहाँ कार रूकती है) से अगले स्टेशन B (यहाँ भी कार रूकती है) तक $f = a - bx$ के अनुसार परिवर्तित होने वाले त्वरण के साथ सरल रेखीय गति करती है। यहाँ a व b धनात्मक नियतांक हैं तथा x, स्टेशन A से दूरी है। दोनों स्टेशनों के बीच अधिकतम दूरी $x = \dfrac{Na}{b}$ है तब N ज्ञात कीजिए –

Ans. 2

Sol. $f = a - bx$

For maximum velocity, acceleration should be zero.

i.e. $\quad a - bx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{a}{b}$

$\therefore$ At $x = \dfrac{a}{b}$, the particle has its maximum velocity.

$f = \dfrac{vdv}{dx} = a - bx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{v^2}{2} = ax - \dfrac{bx^2}{2} + c$

At x = 0 ; v = 0 $\quad \Rightarrow \quad c = 0$

Substituting ; $\quad x = \dfrac{a}{b}$; gives

$v_{max} = \dfrac{a}{\sqrt{b}}$

Also, the velocity of the car should become zero at station B.

i.e. $\quad ax - \dfrac{bx^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \; ; \; x = \left(\dfrac{2a}{b}\right)$

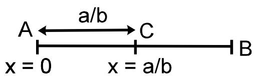
$\therefore$ Distance between the two stations is $\dfrac{2a}{b}$

$\therefore \quad N = 2$

Alternate : f = a – bx means particle will do SHM.

At mean position ; f = 0

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{a}{b}$



In the figure shown, 'C' is the mean position and A & B are extreme positions

$\therefore \quad x_{max} = \dfrac{2a}{b}$

Sol. $f = a - bx$

अधिकतम वेग के लिए त्वरण शून्य होना चाहिए

i.e. $a - bx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{b}$

$\therefore \quad x = \frac{a}{b}$ पर, कण अपनी अधिकतम चाल पर है।

$$f = \frac{vdv}{dx} = a - bx \Rightarrow \frac{v^2}{2} = ax - \frac{bx^2}{2} + c$$

$x = 0$ पर ; $v = 0 \Rightarrow c = 0$

प्रतिस्थापित करने पर ; $x = \frac{a}{b}$; प्राप्त करते हैं।

$$v_{max} = \frac{a}{\sqrt{b}}$$

तथा स्टेशन B पर कार का वेग शून्य हो जाएगा

i.e. $ax - \frac{bx^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \; ; \; x = \left(\frac{2a}{b}\right)$

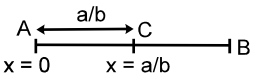
$\therefore$ दोंनो स्टेशनों के बीच की दूरी $= \frac{2a}{b}$

$\therefore \quad N = 2$

विकल्प : $f = a - bx$ अर्थात कण सरल आवर्त गति करेगा।

माध्य स्थिति पर ; $f = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{b}$



प्रदर्शित चित्र में 'C' माध्य स्थिति है तथा A , B चरम स्थितियाँ हैं।

$\therefore \quad x_{max} = \frac{2a}{b}$

SECTION (B) : ENERGY ऊर्जा

4. A particle is oscillating in a straight line about a centre O, with a force directed towards O. When at a distance 'x' from O, the force is mn^2x where 'm' is the mass and 'n' is a constant. The amplitude is a = 15 cm. When at a distance $\sqrt{3}\frac{a}{2}$ from O the particle receives a blow in the direction of motion which generates an extra velocity na. If the velocity is away from O at the time of blow and the new amplitude becomes $k\sqrt{3}$ cm, then find k.

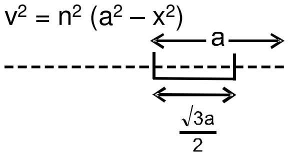
एक कण केन्द्र O के परितः एक सरल रेखा में दोलन करता है, जिस पर बल की दिशा O की ओर है। जब कण O से 'x' दूरी पर है तब कण पर बल mn^2x लगता है जहाँ 'm' द्रव्यमान व 'n' एक नियतांक है। आयाम a = 15 cm है। जब कण O से दूरी $\sqrt{3}\frac{a}{2}$ पर है तो कण गति की दिशा में एक झटका प्राप्त करता है जिससे अतिरिक्त वेग na प्राप्त होता है। यदि झटका प्राप्त करते समय वेग O से दूर की तरफ हो तो नया आयाम $k\sqrt{3}$ cm हो जाता है तो k ज्ञात कीजिए।

Ans. 15

Sol. $\frac{1}{2}$ K x^2 + $\frac{1}{2}$ mv^2 = $\frac{1}{2}$ KA^2

$mn^2x^2 + mv^2 = mn^2a^2$

$v^2 = n^2 (a^2 - x^2)$



$$\frac{1}{2} m (v + na)^2 + \frac{1}{2} K \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} K A_1^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} mn^2a^2 + \frac{2}{2} mnav + \frac{1}{2} mn^2 \frac{3a^2}{4} = \frac{1}{2} mn^2 A_1^2$$

$$mn^2 (a^2 - x^2) + mn^2a^2 + 2mna\, n \sqrt{a^2 - x^2} + mn^2 \frac{3a^2}{4} = mn^2A_1^2$$

$$a^2 - x^2 + a^2 + 2a \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^2}{4} = A_1^2$$

$$11a^2 - 4x^2 + 8a \sqrt{a^2 - 3a^2} = 4A_1^2$$

Putting x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$a रखने पर

$12a^2 = 4A_1^2$ $\quad$ $A_1 = \sqrt{3}a = 15\sqrt{3}$ cm $\quad$ $\therefore$ $\quad$ k = 15

5. Two particles P_1 and P_2 are performing SHM along the same line about the same mean position. Initially they are at their positive extreme positions. If the time period of each particle is 12 sec and the difference of their amplitudes is 12 cm then find the minimum time after which the separation between the particles become 6 cm.

दो कण P_1 तथा P_2 एक ही रेखा के अनुदिश एक ही माध्य स्थिति के सापेक्ष सरल आवर्त गति कर रहे है। प्रारम्भ में यह धनात्मक चरम स्थितियों में होते है। अगर प्रत्येक कण का आवर्त काल 12 sec है तथा उनके आयाम का अन्तर 12 cm है तो वह न्यूनतम समय ज्ञात करो, जब कणों के बीच की दूरी 6 सेमी होती है –

Sol. The coordinates of the particles are

कण के निर्देशांक

$x_1 = A_1 \cos \omega t$, $x_2 = A_2 \cos \omega t$

separation बीच की दूरी $= x_1 - x_2 = (A_1 - A_2) \cos \omega t = 12 \cos \omega t$

Now अब $x_1 - x_2 = 6 = 12 \cos \omega t$

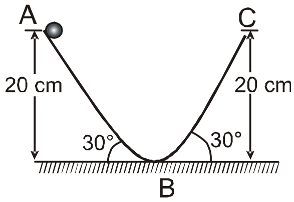
$\Rightarrow \quad \omega t = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{12} . t = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \quad t = 2s$

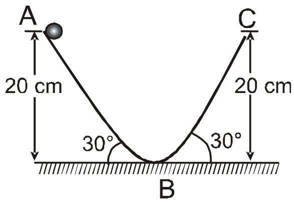
Ans. t = 2s

6.# Assuming all the surfaces to be smooth, if the time period of motion of the ball is N × 10^{-1} sec then find N. Neglect the small effect of bend near the bottom. (g = 10m/s^2)
सभी सतहों को चिकना मानते हुए यदि चित्र में दिखायें गये कण की गति का आवर्त काल N × 10^{-1} sec है तो N ज्ञात करो। तली में मुड़े हुए छोटे भाग के प्रभाव को नगण्य मानना है। (g = 10 m/s^2)



Ans. 16

Sol.



$S = \dfrac{h}{\sin 30}$, a = g sin 30, h = 20 cm, u = 0

$S = ut + \dfrac{1}{2}at^2$

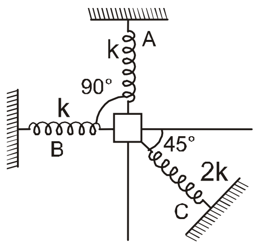
$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\dfrac{2S}{a}} = \sqrt{\dfrac{2 \times (0.2 \times 2)}{10 \times (0.5)}} = 0.4$

v = 0 + (g sin30) (0.4) = 2

For BC max height reached by the particle will be same as h = 20 cm
(by energy conservation)
and for BA and BC t = 0.4
Total time period = 0.4 × 4 = 1.6 second = 16×10^{-1} sec
$\therefore$ N= 16
BC के लिये कण द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई h = 20 cm के समान की है
(ऊर्जा संरक्षण से)
तथा BA एवं BC के लिये t = 0.4
कुल आवर्तकाल = 0.4 × 4 = 1.6 second = 16×10^{-1} sec $\therefore$ N= 16

SECTION (C) : SPRING MASS SYSTEM स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय

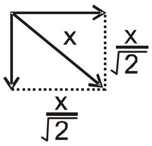
7.# A block of mass m is attached to three springs A,B and C having force constants k, k and 2k respectively as shown in figure. If the block is slightly pushed against spring C. If the angular frequency of oscillations is $\sqrt{\dfrac{Nk}{m}}$, then find N. The system is placed on horizontal smooth surface.
चित्रानुसार बल नियतांक k, k तथा 2k वाली तीन स्प्रिंगों A, B व C से m द्रव्यमान का कण जुड़ा है। यदि कण को स्प्रिंग C के विरूद्ध दबाकर छोड़े तो दोलन की कोणीय आवृत्ति $\sqrt{\dfrac{Nk}{m}}$ है तो N ज्ञात कीजिये। निकाय क्षैतिज चिकनी सतह पर स्थित है।



Ans. 3

Sol. After displacement x against spring C

स्प्रिंग C के विरूद्ध x विस्थापन के बाद



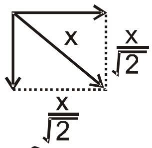
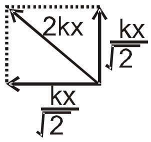


Figure-1 चित्र-1

Deformation in springs ABC is shown in figure 1.

चित्र – 1 में स्प्रिंगो A, B तथा C संकुचन दिखाया गया है।



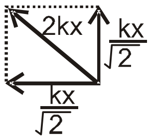


Figure-2 चित्र-2

Forces applied by three springs ABC is shown in figure-2.

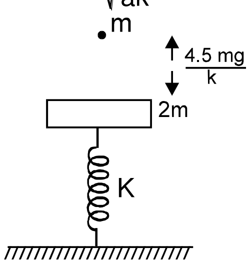
चित्र-2 में तीनो स्प्रिंगो A, B, C के द्वारा आरोपित बल दर्शाया गया है।

$F = \frac{kx}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 + 2kx = 3\,kx = m\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

$\therefore$ N= 3

8.# In the figure shown mass 2m is at rest and in equilibrium. A particle of mass m is released from height $\frac{4.5mg}{k}$ from plate. The particle sticks to the plate. Neglecting the duration of collision. Starting from the time when the particle sticks to plate to the time when the spring is in maximum compression for the first time is $2\pi\sqrt{\frac{m}{ak}}$ then find a.

चित्र में 2m द्रव्यमान की प्लेट स्थिर तथा साम्यावस्था में है। m द्रव्यमान का एक कण प्लेट से $\frac{4.5mg}{k}$ ऊँचाई से छोड़ा जाता है। कण प्लेट से चिपक जाता है। टक्कर के अन्तराल को नगण्य मानते हुए कण के प्लेट से चिपकने से लेकर स्प्रिंग में प्रथम बार अधिकतम सम्पीड़न तक का समय $2\pi\sqrt{\frac{m}{ak}}$ है तो a ज्ञात करो।



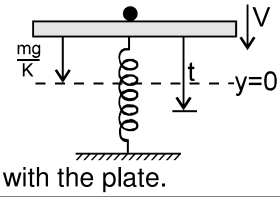
Ans. 3

Sol. Velocity of the particle just before collision

टक्कर के तुरन्त पहले कण का वेग

$$u = \sqrt{2g \times \frac{4.5mg}{K}}$$

$$u = 3g\sqrt{\frac{m}{K}}$$



Now it collides with the plate.

Now just after collision velocity of system of plate + particle
अब यह प्लेट से टकराता है
टक्कर के बाद (प्लेट + कण) निकाय का वेग

$$mu = 3mv$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{u}{3} = g\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Now system perform's SHM with time period $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{K}}$ and mean position as $\frac{mg}{K}$ distance below the point of collision.
Let the equation of motion be.

निकाय SHM करेगा इसका आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{K}}$ तथा माध्य स्थिति, टकराने वाली स्थिति से $\frac{mg}{K}$ नीचे है।

गति की समीकरण

$y = A \sin(\omega t + \phi)$
for $t = 0$ के लिए $y = mg/K$

$$\frac{mg}{K} = A \sin\phi \qquad ...(1)$$

Now for amplitude अतः आयाम

$$V = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$g\sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{\frac{K}{3m}}\sqrt{A^2 - \frac{m^2g^2}{K^2}}$$

$$\left(\sqrt{3}\ \frac{mg}{K}\right)^2 = A^2 - \frac{m^2g^2}{K^2}$$

$$A = \frac{2mg}{K} \qquad ...(2)$$

By (1) & (2) समीकरण (1) व (2) से

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{K}}$$

$x = \frac{A}{2}$ to से $x = 0$ तक $\Rightarrow$ $t = \frac{T}{12}$

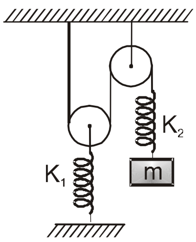
$x = 0$ to से $x = A$ तक $\Rightarrow$ $t = T/4$

total time कुल समय $= \frac{T}{12} + \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{3m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$

$\therefore a = 3$

9.# For given spring mass system, If the time period of small oscillations of block about its mean position is $\pi\sqrt{\frac{nm}{K}}$, then find n. Assume ideal conditions. The system is in vertical plane and take $K_1 = 2K$, $K_2 = K$.

दिये स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय के लिए ब्लॉक का इसकी माध्य स्थिति के सापेक्ष अल्प दोलन का आवर्त काल $\pi\sqrt{\frac{nm}{K}}$ है तो n ज्ञात करो ? सभी स्थितियां आदर्श है। निकाय ऊर्ध्वाधर तल में है तथा $K_1 = 2K$, $K_2 = K$ लेवें



Ans. 12

Sol. Let block is pushed down by x from its equilibrium position.
माना ब्लॉक को इसकी साम्यवस्था स्थिति से x दूरी नीचे धकेला जाता है।
Let extension in springs be y_1 and y_2 as shown in figure.
माना चित्रानुसार स्प्रिंगो में विस्तार क्रमशः y_1 तथा y_2 है।
so restoring force on block $F = K_2y_2$
अतः ब्लॉक पर प्रत्यानयन बल $F = K_2y_2$
Force in left spring is बॉयी स्प्रिंग पर बल $2F = K_1y_1$
From constraint motion बंधित गति से $2y_1 + y_2 = x$

$$\Rightarrow \quad 2 \times \frac{2F}{K_1} + \frac{F}{K_2} = x$$

$$\Rightarrow \quad F = \left(\frac{K_1K_2}{K_1+4K_2}\right)x = \omega^2 x$$

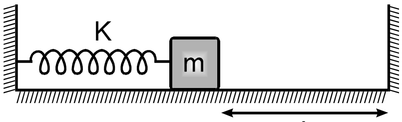
So अतः, $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{K_1K_2}{K_1+4K_2}\right)} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m\ (K_1+4K_2)}{K_1K_2}}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ (K_1+4K_2)}{K_1K_2}} = \pi\sqrt{\frac{12m}{K}}$$

$\therefore \quad n = 12$

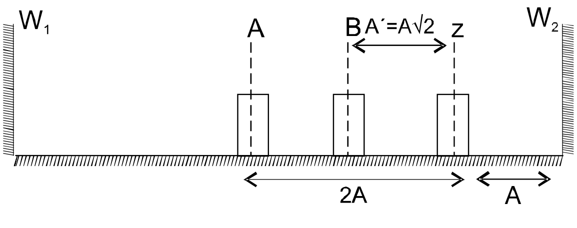
10.# In the figure shown the spring is relaxed and mass m is attached to the spring. The spring is compressed by 2 A and released at t = 0. Mass m collides with the wall and loses two third of its kinetic energy and returns. Starting from t = 0, find the time taken by it to come back to rest again (instant at which spring is again under maximum compression). Take $\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{12}{\pi}$

प्रदर्शित चित्र में स्प्रिंग सामान्य लम्बाई में है तथा द्रव्यमान m स्प्रिंग से जुड़ा है। स्प्रिंग को 2 A से सम्पीड़ित करके t = 0 पर छोड़ दिया जाता है। द्रव्यमान m दीवार से टकराता है तथा अपनी गतिज ऊर्जा की दो तिहाई ऊर्जा ह्रास करके लोट जाता है। t = 0 से प्रारम्भ करने के पश्चात् ब्लॉक द्वारा प्रथम बार विराम (वह क्षण जब दुबारा स्प्रिंग अधिकतम संपीडन की स्थिति में होती है) को प्राप्त करने में लगा समय ज्ञात करों। ($\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{12}{\pi}$ लीजिये)



Ans. 17

Sol.



The motion starts from position A the time taken from A to W_2 $(t_1) = \frac{T}{4} + \frac{T}{12}$

Before collision the energy of the system is conserved,
Kinetic energy of the block just before collision

$K_i = \frac{1}{2}K(2A)^2 - \frac{1}{2}KA^2 = \frac{3}{2}KA^2$ & just after collision $K_f = \frac{K_i}{3}$ (given) $= \frac{1}{2}KA^2$

Now during motion after collision , the energy is again conserved

Hence , $K_f + \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA'^2$

A' = maximum compression after collision $\Rightarrow A' = A\sqrt{2}$

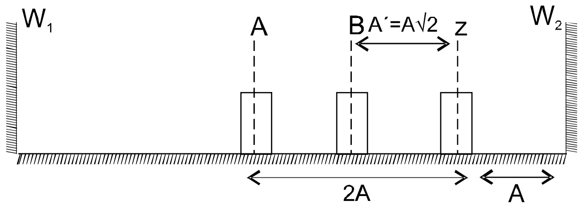
ie. Now motion has amplitude $A\sqrt{2}$

Now time taken by block from

W_2 to position B $= \frac{T}{4} + \frac{T}{8}$

total time taken = $t_1 + t_2 = \frac{T}{4} + \frac{T}{12} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{17}{24}T = \frac{17\pi}{12}\sqrt{\frac{m}{K}} = 17\text{sec}\left\{\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{12}{\pi}\right\}$

Sol.



स्थिति A से गति प्रारम्भ करता है तो A से W_2 तक लिया गया समय $(t_1) = \frac{T}{4} + \frac{T}{12}$

टक्कर के पहले निकाय की ऊर्जा संरक्षित है।

टक्कर के ठीक पहले ब्लॉक की गतिज ऊर्जा

$K_i = \frac{1}{2}K(2A)^2 - \frac{1}{2}KA^2 = \frac{3}{2}KA^2$ और टक्कर के ठीक बाद $K_f = \frac{K_i}{3}$ (दिया है)$= \frac{1}{2}KA^2$

अब टक्कर के बाद, गति के दौरान ऊर्जा दुबारा संरक्षित होगी

अतः , $K_f + \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA'^2$

A' = टक्कर के बाद अधिकतम सम्पीड़िन $\Rightarrow A' = A\sqrt{2}$

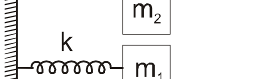
अर्थात गति का आयाम $A\sqrt{2}$ होगा

अब ब्लॉक द्वारा W_2 से B तक गति में लिया गया समय $(t_2) = \frac{T}{4} + \frac{T}{8}$

कुल समय = $t_1 + t_2 = \frac{T}{4} + \frac{T}{12} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{17}{24}T = \frac{17\pi}{12}\sqrt{\frac{m}{K}} = 17\text{sec}\left\{\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{12}{\pi}\right\}$

11.# A block of mass 4kg attached with spring of spring constant 100 N/m is executing SHM of amplitude 0.1m on smooth horizontal surface as shown in figure. If another block of mass 5 kg is gently placed on it, at the instant it passes through the mean position and new amplitude of motion is n^{-1} meter then find n. Assuming that two blocks always move together.

एक 4 kg का गुटका, 100 N/m स्प्रिंग नियतांक वाले स्प्रिंग के प्रत्यानयन बल के प्रभाव में चिकनी क्षेतिज सतह पर 0.1 m के आयाम से सरल आवर्त गति कर रहा है। जब यह माध्य स्थिति से गुजर रहा होता है तो चित्रानुसार उस क्षण एक 5 kg द्रव्यमान का गुटका इस पर धीरे से रखा जाता है, यह मानते हुए कि दोनों गुटके एक साथ गति करते है, गति का नया आयाम n^{-1} मीटर है तो n ज्ञात कीजिए।



Ans. 15

Sol. Frequency (आवृत्ति) $n_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$

$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100}{4+5}}$

$= \frac{1}{2\pi}\times\frac{10}{3} = \frac{5}{3\pi}$

By conservation of linear momentum at mean position,
माध्य अवस्था पर रेखीय संवेग संरक्षण से

$P_i = P_f$

$\Rightarrow$ $m_1\omega_1A_1 = (m_1 + m_2)\ \omega_2A_2$

$\Rightarrow$ $m_1\sqrt{\frac{k}{m_1}}A_1 = (m_1 + m_2)\ \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}A_2$

$\Rightarrow$ $\sqrt{km_1}A_1 = \sqrt{k(m_1+m_2)}\ A_2$

$\Rightarrow$ $A_2 = \frac{2}{30}$ m.

SECTION (D) : SIMPLE PENDULUM सरल लोलक

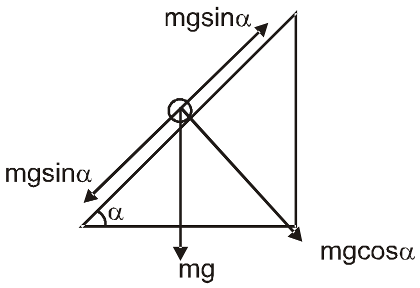
12. The period of oscillation of a simple pendulum of length L suspended from the roof of a vehicle which moves without friction down on inclined plane of inclination $\alpha = 60°$ is given by $\pi\sqrt{\frac{XL}{g}}$ then find X.

एक सरल लोलक जिसकी लम्बाई L है तथा यह $\alpha = 60°$ झुकाव वाले चिकने नततल पर नीचे की ओर गति करने वाले वाहन की छत पर लटका है , लोलक का आवर्त काल $\pi\sqrt{\frac{XL}{g}}$ द्वारा दिया गया है तो X ज्ञात कीजिए –

Ans 8

Sol. Free body diagram of bob of the pendulum with respect to the accelerating frame of reference is as follows:

$\therefore$ Net tension in the string is $T = mg\cos\alpha$



So, $g_{eff} = \frac{T}{m} = \frac{mg\cos\alpha}{m} = g\cos\alpha$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}}$ or $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\cos\alpha}}$

Alternative :

Whenever point of suspension is accelerating

Take $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}}$ Where $\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{a}$

$\vec{a}$ = Acceleration of point of suspension.

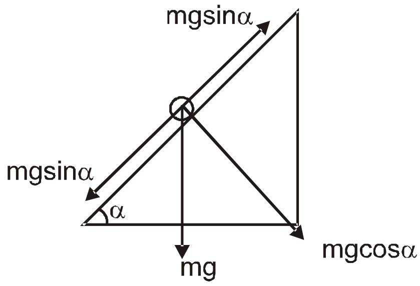
In this question $\vec{a} = g\sin\alpha$ (down the plane)

$\therefore \quad |\vec{g}-\vec{a}| = g_{eff} = \sqrt{g^2 + (g\sin\alpha)^2 + 2(g)(g\sin\alpha)\cos(90^\circ + \alpha)} = g\cos\alpha$

$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g\cos\alpha}}\ (\alpha = 60^\circ) \qquad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2L}{g}} \qquad \therefore \quad x = 2$

त्वरित निर्देश तंत्र के सापेक्ष पेन्डूलम के लोलक का मुक्त वस्तु रेखा चित्र ऐसा होगा।

$\therefore$ रस्सी में कुल तनाव $T = mg\cos\alpha$



और लोलक का कुल त्वरण $g_{eff} = \dfrac{T}{m} = \dfrac{mg\cos\alpha}{m} = g\cos\alpha$

$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g_{eff}}}$ या $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g\cos\alpha}}$

वैकल्पिक

जब भी आलम्बन बिन्दु त्वरित होता है।

लीजिये $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g_{eff}}}$ जहाँ $\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{a}$

$\vec{a}$ = आलम्बन बिन्दु का त्वरण

इस प्रशन में $\vec{a} = g\sin\alpha$ (तल के नीचे की ओर)

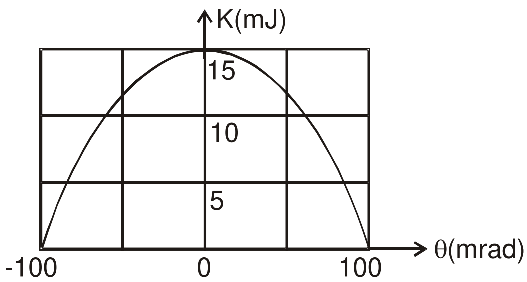
$\therefore \quad |\vec{g}-\vec{a}| = g_{eff} = \sqrt{g^2 + (g\sin\alpha)^2 + 2(g)(g\sin\alpha)\cos(90^\circ + \alpha)} = g\cos\alpha$

$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g\cos\alpha}} \qquad (\alpha = 60^\circ)$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2L}{g}} \qquad \therefore \quad x = 2$

13.# Figure shows the kinetic energy K of a simple pendulum versus its angle θ from the vertical. The pendulum bob has mass 0.2 kg. If the length of the pendulum is equal to $\dfrac{n}{g}$ meter, then find n (g = 10 m/s²).

चित्र में सरल लोलक की गतिज ऊर्जा K तथा ऊर्ध्वाधर से कोण θ के बीच ग्राफ दर्शाया गया है। लोलक का द्रव्यमान 0.2 किग्रा. है। यदि सरल लोलक की लम्बाई $\dfrac{n}{g}$ मीटर के बराबर है तो n ज्ञात कीजिए – (g = 10 मी./से.²).



Ans. 15

Sol. $\frac{1}{2}mV_m^2 = 15 \times 10^{-3}$

$V_m = \sqrt{0.150}\ \text{m/s}$

$A\omega = \sqrt{0.150}\ \text{m/s}$

$L\theta_m \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{0.150}\ \text{m/s}$

$\sqrt{gL} = \frac{\sqrt{0.150}}{100 \times 10^{-3}}$ $\qquad gL = \frac{0.150}{0.01} = 1.5\ \text{m}$

$l = \frac{15}{g}\text{m}$

$\therefore$ n =15

14. The bob of a simple pendulum executes simple harmonic motion in water with a period 't', while the period of oscillation of the bob is t_0 in air. Neglecting frictional force of water and given that the density of the bob is (4/3) × 1000 kg/m³. Find $\frac{t}{t_0}$.

किसी सरल लोलक का गोलक पानी में आवर्तकाल t के साथ सरल आवर्त गति करता है, जबकि इस गोलक के दोलन का वायु में आवर्तकाल t_0 है। पानी का घर्षण बल नगण्य मानते हुए तथा गोलक का घनत्व (4/3) × 1000 kg/m³ दिया गया है। $\frac{t}{t_0}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. 2

Sol. The time period of simple pendulum in air
वायु में सरल लोलक का आवर्त काल

$T = t_0 = 2\pi\sqrt{\left(\frac{\ell}{g}\right)}$ .... (i)

ℓ, being the length of simple pendulum.
ℓ, सरल लोलक की लम्बाई हैं।
In water, effective weight of bob
जल में गोलक का प्रभावी भार
w' = weight of bob in air – upthrust
w´ = वायु में गोलक का भार – ऊपर की ओर बल

$\Rightarrow \quad \rho V g_{eff} = mg - m'g$

$= \rho Vg - \rho' Vg = (\rho - \rho')Vg$

where ρ = density of bob, जहाँ ρ = गोलक का घनत्व
ρ' = density of water जल का घनत्व

$\therefore \quad g_{eff} = g\left(\frac{\rho-\rho'}{\rho}\right) = \left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)g$

$\therefore \quad t = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\left[\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)g\right]}}$ ....(ii)

Thus अतः, $\quad \frac{t}{t_0} = \sqrt{\frac{1}{\left[\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)\right]}} = \sqrt{\left(\frac{1}{1-\frac{1000}{(4/3)\times 1000}}\right)} = 2$

$\Rightarrow \quad t = 2\,t_0\ ;\ \frac{t}{t_0} = 2 \qquad \therefore \qquad N = 2$

SECTION (E) : COMPOUND PENDULUM & TORSIONAL PENDULUM
पिण्ड लोलक व मरोड़ी लोलक

15. A solid sphere of radius R is half submerged in a liquid of density ρ. The sphere is slightly pushed down and released, If the frequency of small oscillations is $\sqrt{\frac{3}{nR}}$, then find n. Take $\pi = \sqrt{g}$.

R त्रिज्या का एक ठोस गोला ρ घनत्व वाले द्रव में आधा डूबा है। यदि गोले को अल्प विस्थापित कर छोड़ा जाए ओर यह सरल आवर्त गति करने लगे तो गोले के दोलनों की आवृत्ति लघु विस्थापन के लिए $\sqrt{\frac{3}{nR}}$ है तो n ज्ञात कीजिए। $\pi = \sqrt{g}$ लीजिये।

Ans. 8

Sol. Half of the volume of sphere is submerged.
For equilibrium of sphere,
weight = upthrust

$\therefore \quad V\rho_s g = \frac{V}{2}(\rho_L)(g) \quad \Rightarrow \quad \rho_s = \frac{\rho_L}{2}$

When slightly pushed down by x weight will remain as it is while upthrust will increase. The increased upthrust will become the net restoring force (upwards).

F = – (extra upthrust)
= (extra volume immersed) (ρ_L) (g)

or $\quad ma = -(\pi R^2)\, x\rho_L g \qquad$ (a = acceleration)

$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{\rho_L}{2}\right)a = -(\pi R^2\rho_L g)\,x \qquad \therefore \quad a = -\left(\frac{3g}{2R}\right)x$

as $a \propto -x$ motion is simple harmonic
Frequency of oscillation,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left|\frac{a}{x}\right|} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2R}}.$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{8R}} \left\{\pi = \sqrt{g}\right\} \qquad \therefore \qquad N = 8$$

गोले का आधा आयतन डूबा हुआ है
गोले की साम्यावस्था के लिए
भार = उत्प्लावक बल

$\therefore \quad V\rho_s g = \frac{V}{2}(\rho_L)(g) \quad \Rightarrow \quad \rho_s = \frac{\rho_L}{2}$

जब थोड़ा सा नीचे की ओर x से धकेला जाता है भार अपरिवर्तित रहता परन्तु उत्प्लावक बल बढ़ जाता है। बढ़ा हुआ उत्प्लावक बल परिणामी प्रत्यानयन बल (ऊपर की ओर) बन जायेगा।

F = – (अतिरिक्त उत्प्लावक बल)
= (अतिरिक्त डूबा हुआ आयतन) (ρ_L) (g)

या $\quad ma = -(\pi R^2)\, x\rho_L g \qquad$ (a = त्वरण)

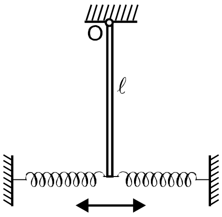
$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi R^3 a\left(\frac{\rho_L}{2}\right) = -(\pi R^2\rho_L g)\,x \qquad \therefore \quad a = -\left(\frac{3g}{2R}\right)x$

क्योंकि $a \propto -x$ गति सरल आवर्त है
दोलन की आवृत्ति

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left|\frac{a}{x}\right|} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2R}}$$

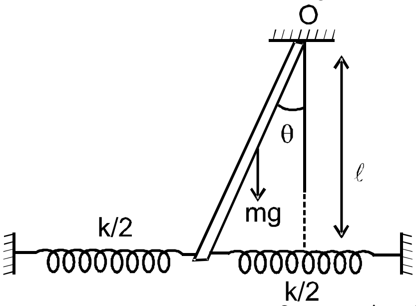
$$f = \sqrt{\frac{3}{8R}} \left\{\pi = \sqrt{g}\right\} \qquad \therefore \qquad N = 8$$

16.# If the angular frequency of small oscillations of a thin uniform vertical rod of mass m and length ℓ hinged at the point O (Fig.) is $\sqrt{\frac{n}{\ell}}$, then find n. The force constant for each spring is K/2 and take K = $\frac{2mg}{\ell}$. The springs are of negligible mass. (g = 10 m/s^2)
एक पतली एक समान ऊर्ध्वाधर छड़ जिसका द्रव्यमान m तथा लम्बाई ℓ है, चित्रानुसार O बिन्दु पर कीलकीत है। इस छड़ के दोलन की आवृत्ति $\sqrt{\frac{n}{\ell}}$ है तो n ज्ञात करो। प्रत्येक स्प्रिंग का बल नियतांक K/2 है तथा K = $\frac{2mg}{\ell}$ लीजिये। स्प्रिंगों के द्रव्यमान नगण्य है। (g = 10 m/s^2)



Ans. 75

Sol. For small Angular displacement लघु कोणीय विस्थापन के लिये



Restoring torque about point O बिन्दु O के परित प्रत्यानयन बलापूर्ण

$(mg \; \frac{\ell}{2} \; \sin\theta) + (K\ell\sin\theta)\,\ell = \frac{m\ell^2}{3}\alpha$, (for small θ $\sin\theta \approx \theta$) (लघु θ के लिये $\sin\theta \approx \theta$)

$\alpha = \frac{(mg\frac{\ell}{2} + K\ell^2)\theta}{\frac{m\ell^2}{3}}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \left[\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{m}\right]\theta = -\omega^2\theta$

So angular speed अतः कोणीय वेग $\omega = \sqrt{\left(\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{m}\right)}$

$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}\left(1 + \frac{2k\ell}{mg}\right)} = \sqrt{\frac{75}{\ell}}$ $\therefore$ N = 75

PART - III : ONE OR MORE THAN ONE OPTIONS CORRECT TYPE
भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1.* A particle moves on the X-axis according to the equation $x = x_0 \sin^2 \omega t$. The motion is simple harmonic
X-अक्ष पर एक कण समीकरण $x = x_0 \sin^2 \omega t$ के अनुसार गति कर रहा है। सरल आवर्त गति का

(A*) with amplitude $x_0/2$ (B) with amplitude $2x_0$ (C) with time period $\frac{2\pi}{\omega}$ (D*)with time period $\frac{\pi}{\omega}$

(A*) आयाम $x_0/2$ है। (B) आयाम $2x_0$ है। (C) आवर्त काल $\frac{2\pi}{\omega}$ है। (D*) आवर्त काल $\frac{\pi}{\omega}$ है।

Sol. $x = x_0 \sin^2 \omega t \quad = \dfrac{x_0(1-\cos 2\omega t)}{2}$

So अतः $A = \dfrac{x_0}{2}$ Time period आवर्तकाल $= \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{2\pi}{2\omega} = \pi/\omega$

2.* Which of the following functions represent SHM?
निम्न में से कौनसे फलन सरल आवर्त गति प्रदर्शित करेंगे ?
(A*) $\sin 2\omega t$ (B*) $\sin^2 \omega t$ (C*) $\sin \omega t + 2 \cos \omega t$ (D) $\sin \omega t + \cos 2\omega t$

Sol. Equation of S.H.M $x - x_0 = a \sin (\omega t + \phi)$ $\Rightarrow x = x_0 + a \sin (\omega t + \phi)$
स.आ.ग. की समीकरण $x - x_0 = a \sin (\omega t + \phi)$ $\Rightarrow x = x_0 + a \sin (\omega t + \phi)$

(A) $x = \sin 2\omega t$

(B) $x = \sin^2 \omega t = \left(\dfrac{1-\cos 2\omega t}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cos 2\omega t$

$\Rightarrow x - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} \cos 2\omega t$

(C) $x = \sin \omega t + 2\cos \omega t = \sin (\omega t + \phi)$ $\{\phi = \tan^{-1} 2\}$
So represent equation of S.H.M
अतः समीकरण स.आ.ग. की समीकरण को प्रस्तुत करती है

(D) But $\sin \omega t + \cos 2 \omega t$ cannot write as $\sin (\omega t+\phi)$
$\sin \omega t + \cos 2 \omega t$ को $\sin (\omega t+\phi)$ के जैसे नहीं लिखा जा सकता है।
So it is not S.H.M equation
ये स.आ.ग. की समीकरण नही है।

3.* The speed v of a particle moving along a straight line, when it is at a distance (x) from a fixed point of the line is given by $v^2 = 108 - 9x^2$ (assuming mean position to have zero phase constant) (all quantities are in cgs units) :
एक कण जो कि एक सरल रेखा के अनुदिश गति कर रहा है जबकि यह कण सरल रेखा पर स्थित किसी निश्चित बिन्दु से x दूरी पर है तब कण की चाल $v^2 = 108 - 9x^2$ से प्रदर्शित की जाती है (माध्य अवस्था पर शून्य कला नियतांक मानते हुए) (समस्त राशियाँ cgs पद्धति में हैं)
(A) the motion is uniformly accelerated along the straight line
गति, सरल रेखा के अनुदिश समरूप त्वरित होगी।
(B*) the magnitude of the acceleration at a distance 3cm from the fixed point is 27 cm/s^2
निश्चित बिन्दु से 3 सेमी की दूरी पर त्वरण का परिमाण 27 सेमी/सैकण्ड^2 है।
(C*) the motion is simple harmonic about the given fixed point.
दिये गये निश्चित बिन्दु के सापेक्ष गति सरल आवर्त गति है।
(D) the maximum displacement from the fixed point is 4 cm.
निश्चित बिन्दु से अधिकतम विस्थापन 4 सेमी है।

Sol. $v^2 = 108 - 9x^2$

$\dfrac{2vdv}{dx} = -18x \Rightarrow$ acc. $A = -9x$ (non-uniform) असमान

at x = 3cm पर

$a = -27$ or $|a| = 27 \text{cm/s}^2$

also $a = -9x$ is a S.H.M equation so particle perform S.H.M about the give fixed point
तथा $a = -9x$ एक स.आ.ग. समीकरण है अतः कण दिये गये स्थिर बिन्दु के सापेक्ष स.आ.ग. करेगा।

V is maximum at x = 0 — V, x = 0 पर अधिकतम है।

and V is Zero at $x = \sqrt{12}$ — तथा V, $x = \sqrt{12}$ पर शून्य है।

So Amplitude $= 2\sqrt{3}$ cm — अतः आयाम $= 2\sqrt{3}$ cm

4.* A horizontal plank has a rectangular block placed on it. The plank starts oscillating vertically and simple harmonically with an amplitude of 40 cm. The block just loses contact with the plank when the latter is at momentary rest. Then :
एक क्षैतिज तख्ते पर एक आयताकार पिण्ड रखा है। तख्ता ऊर्ध्व दिशा में 40 सेमी. के आयाम से सरल आवर्ती रूप से दोलन करना प्रारम्भ करता है। यदि गति के दौरान तख्ते के क्षणिक रूप से स्थिरावस्था में आने पर पिण्ड का तख्ते से संबंध हट जाता है, तो :

(A*) the period of oscillation is $\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ seconds दोलनों का आवर्तकाल $\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ सेकण्ड है।

(B*) the block weighs double its weight, when the plank is at one of the positions of momentary rest.
तख्ते की किसी एक क्षणिक स्थिरावस्था की स्थिति में पिण्ड का वजन दुगुना होगा।

(C*) the block weighs 0.5 times its weight on the plank halfway up
पिण्ड का वजन आधा होगा जब तख्ता आधी ऊपरी ऊंचाई पर होगा।

(D*) the block weighs 1.5 times its weight on the plank halfway down
पिण्ड का वजन डेढ़ गुना होगा जब तख्ता नीचे की ओर आधी दूरी पर होगा।

(E*) the block weights its true weight on the plank when the latter moves fastest
पिण्ड का वजन इसका वास्तविक सत्य वजन होगा जब तख्ता तीव्रतम वेग से चल रहा होगा।

Sol. Given दिया है $A = 0.4\text{m}$, and और $a = g$

so अतः $\omega^2 A = g \Rightarrow \omega^2 = \frac{10}{0.4} = 25$

$\Rightarrow \omega = 5 \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi/5$ sec.सैकण्ड

At lowest position acceleration.निम्नतम बिन्दु पर त्वरण $= \omega^2 A + g = g + g = 2g$

So weight अतः भार $= m(2g) = 2mg$

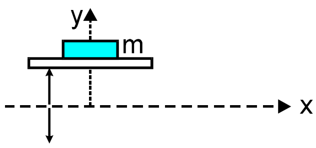
at half distance आधी दूरी पर $a = g/2$

So weight at upper half distance अतः भार ऊपरी आधी दूरी पर $= m(g - g/2) = mg/2$

and weight at lower half distance तथा निचली आधी दूरी पर भार $= m(g + g/2) = \frac{3mg}{2}$

actual weight at equilibrium position (maximum v)
सही भार साम्यावस्था स्थिति पर (अधिकतम वेग)

5*.# As shown in figure a horizontal platform with a mass m placed on it is executing SHM along y-axis. If the amplitude of oscillation is 2.5 cm, the minimum period of the motion for the mass not to be detached from the platform is :($g = 10$ m/sec$^2 = \pi^2$)
दिये गये चित्र में एक क्षैतिज आधार पर एक द्रव्यमान m रखा है तथा आधार Y अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त गति करता है। यदि दोलनों का आयाम 2.5 सेमी है तो गति का न्यूनतम आवर्त काल क्या होगा ताकि द्रव्यमान आधार से अलग न हो, ($g = 10$ m/sec$^2 = \pi^2$ मानिये)



(A) $\frac{10}{\pi}$ s (B*) $\frac{\pi}{10}$ s (C) $\frac{\pi}{\sqrt{10}}$ s (D*) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ s.

Sol. acceleration त्वरण $a = \omega^2 x$

maximum acceleration अधिकतम त्वरण $a_{max} = \omega^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{2.5}{100}$

When block and platform are separated
जब वस्तु तथा प्लेटफार्म अलग होते है।

$a_{max} = g = 10$

$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{40} = 10 \Rightarrow T^2 = \frac{\pi^2}{100} \qquad T = \pi/10\text{sec}$

6.* For a body executing SHM with amplitude A, time period T, maximum velocity v_{max} and phase constant zero, which of the following statements are correct for $0 \le t \le \frac{T}{4}$ (y is displacement from mean position) ?

एक वस्तु, आयाम A, आवर्तकाल T, अधिकतम वेग v_{max} तथा प्रारम्भिक कला स्थिरांक शून्य से सरल आवर्त गति करती है। निम्न में से कौनसे कथन $0 \le t \le \frac{T}{4}$ के लिए सत्य हैं (माध्य स्थिति से विस्थापन y है)–

(A*) At $y = (A/2)$, $v > (v_{max}/2)$
(B*) for $v = (v_{max}/2)$, $y > (A/2)$
(C*) For $t = (T/8)$, $y > (A/2)$
(D*) For $y = (A/2)$, $t < (T/8)$

(A*) $y = (A/2)$ पर $v > (v_{max}/2)$
(B*) $v = (v_{max}/2)$ के लिए, $y > (A/2)$
(C*) $t = (T/8)$ के लिए $y > (A/2)$
(D*) $y = (A/2)$ के लिए $t < (T/8)$

Sol. For S.H.M स.आ.ग. के लिये

$y = A \sin \omega t = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$v = \omega\sqrt{A^2 - y^2}$ $\qquad v_{max} = \omega A$

(A) At $y = A/2$ पर

$v = \omega\sqrt{A^2 - A^2/4} = \frac{\sqrt{3}\omega A}{2} > \frac{\omega A}{2}$

(B) For $v = \frac{V_{max}}{2}$ के लिये $\Rightarrow \omega\sqrt{A^2 - y^2} = \frac{\omega A}{2}$

$\Rightarrow A^2 - y^2 = \frac{A^2}{4}$ $\qquad \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}A}{2} > \frac{A}{2}$

(C) for $t = T/8$ के लिये

$y = A \sin\left(\frac{2\pi.T}{8.T}\right) = A/\sqrt{2} > \frac{A}{2}$

(D) for $y = A/2$ के लिये $A/2 = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$\Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi/6 \quad \Rightarrow t = \frac{T}{12} < T/8$

7.* The potential energy of a particle of mass 0.1 kg, moving along the x-axis, is given by $U = 5x\,(x - 4)$ J, where x is in meters. It can be concluded that

एक कण जिसका द्रव्यमान 0.1 किग्रा है, x-अक्ष के अनुदिश गति करता है। इसकी स्थितिज ऊर्जा $U = 5x\,(x - 4)$ J, समीकरण द्वारा दी जाती है, जहां x मीटर में है। यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि –

(A) the particle is acted upon by a constant force
कण पर नियत बल लग रहा है।
(B*) the speed of the particle is maximum at x = 2 m
कण की चाल x = 2 मी. पर अधिकतम है।
(C*) the particle executes SHM
कण सरल आवर्त गति कर रहा है।
(D*) the period of oscillation of the particle is $(\pi/5)$ sec
कण के दोलनों का आवर्तकाल $\pi/5$ सैकण्ड है।

Sol. $F = \frac{-du}{dx} = -[10x - 20] = 20 - 10x$

acceleration त्वरण $a = \frac{20-10x}{m} = 100(2-x) = -\omega^2(x-2)$

$a = 0$ at $x = 2$ So V is maximum at $x = 2$

$x = 2$ पर $a = 0$ है अतः V, $x = 2$ पर अधिकतम है।

This is equation of S.H.M so particle executes S.H.M

यह स.आ.ग. की समीकरण है अतः कण स.आ.ग. करता है।

also तथा $\omega^2 = 100 \Rightarrow \omega = 10$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi/5 \text{ sec.}$$

8.* A particle free to move along the x-axis has potential energy given by $U(x) = k[1-e^{-x^2}]$ for $-\infty \le x \le +\infty$, where k is a positive constant of appropriate dimensions. Then select the incorrect options:

एक कण जो कि x-अक्ष के अनुदिश गति करने के लिए स्वतंत्र है कि स्थितिज ऊर्जा $-\infty \le x \le +\infty$ के लिए समीकरण $U(x) = k[1-e^{-x^2}]$ से प्रदर्शित है, जहाँ k उपयुक्त विमाओं के साथ धनात्मक नियतांक है तो असत्य कथनों का चुनिये :

(A*) at points away from the origin, the particle is in unstable equilibrium.

मूल बिन्दु से दूर वाले बिन्दुओं पर कण अस्थाई साम्यावस्था में होगा।

(B*) for any finite non-zero value of x, there is a force directed away from the origin.

x के किसी भी निश्चित अशून्य मान के लिए हमेशा एक बल मूल बिन्दु से दूर लगेगा।

(C*) if its total mechanical energy is k/2, it has its minimum kinetic energy at the origin.

यदि इसकी कुल यांत्रिक ऊर्जा k/2 है तो इसकी निम्नतम गतिज ऊर्जा मूल बिन्दु पर होगी।

(D) for small displacements from x = 0, the motion is simple harmonic.

x = 0 से लघु विस्थापनों के लिए , गति सरल आवर्त गति है।

Sol. $U(x) = 1-e^{-x^2}$

It is an exponentially increasing graph of potential energy (U) with x^2. Therefore U versus x graph will be as shown.

From the graph it is clear that at origin

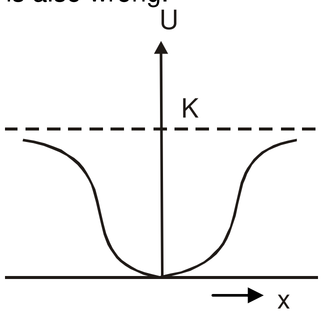
Potential energy U is minimum (therefore, kinetic energy will be maximum) and force acting on the particle is also zero because $F = \frac{-dU}{dx}$ = –(slope of U – x graph) = 0.

Therefore, origin is the stable equilibrium position. Hence particle will oscillate simple harmonically about x = 0 for small displacements. Therefore, correct option is (D).

(A) At equilibrium position $F = \frac{-dU}{dx} = 0$ i.e. slope of U-X graph should be zero and from the graph we can see that slope is zero at x = 0 and x = ± ∞ . Now among these equilibriums stable equilibrium position is that where U is minimum (Here x = 0). Unstable equilibrium position is that where U is maximum (Here none). Neutral equilibrium position is that where U is constant (Here x = ± ∞). Therefore, option (A) is wrong.

(B) For any finite non-zero value of x, force is directed towards the origin, because origin is in stable equilibrium position. Therefore, option (B) is incorrect.

(C) At origin, potential energy is minimum, hence kinetic energy will be maximum. Therefore, option (C) is also wrong.



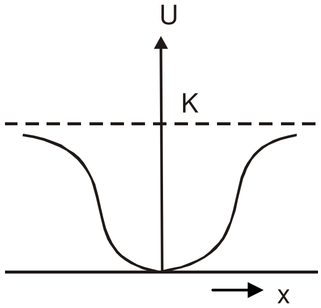
SOL. $U(x) = K(1-e^{-x^2})$

यह स्थितिज ऊर्जा (U) का x^2 के साथ चरघातांकी बढता हुआ ग्राफ है। अतः U और X के मध्य ग्राफ चित्रानुसार होगा। ग्राफ से यह स्पष्ठ हे कि मूलबिन्दू पर स्थितिज ऊर्जा U न्यूनतम है (अतः गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी) और कण पर लगने वाला बल भी शून्य होगा क्योकि $F = \frac{-dU}{dx}$ = –(U – x ग्राफ का ढाल) = 0

अतः मूलबिन्दु स्थायी साम्यावस्था की स्थिति है अतः कण x = 0 के सापेक्ष छोटे विस्थापन के लिये कण सरल आवर्त गति करेगा। अतः विकल्प (D) सही है।

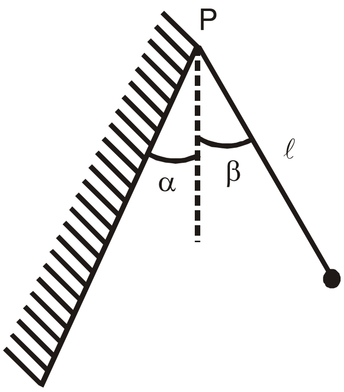
(A) साम्यवस्था पर $F = \frac{-dU}{dx} = 0$ है अतः U-X ग्राफ का ढाल शून्य होगा और ग्राफ से हम कह सकते है कि x = 0 तथा $x = \pm\infty$ पर ढाल शून्य है। अब इन साम्यावस्थाओ में से स्थायी साम्यावस्था पर U का मान न्यूनतम होगा। (यहाँ x = 0) अस्थायी साम्यावस्था पर U अधिकतम होती है। (यहां पर कोई नही) तथा उदासीन साम्यवास्था पर U नियत (यहां $x = \pm\infty$) होती है अतः विकल्प (A) गलत है।

(B) x के किसी भी परिमित अशून्य मान के लिए बल मूलबिन्दु की ओर होगा क्योकि
मूलबिन्दु स्थायी साम्यावस्था की स्थिति है। अतः विकल्प (B) गलत है।
(C) मूलबिन्दु पर स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम है अतः गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी।
अतः विकल्प (C) भी गलत है।



9.*# A ball is hung vertically by a thread of length '' from a point 'P' of an inclined wall that makes an angle 'α' with the vertical. The thread with the ball is then deviated through a small angle 'β' ($\beta > \alpha$) and set free. Assuming the wall to be perfectly elastic, the period of such pendulum is/are

एक झुकी हुई दीवार जो कि ऊर्ध्व से 'α' कोण बनाती है, के एक बिन्दु P से एक '' लम्बाई की रस्सी द्वारा एक गेंद को लटकाया जाता है। रस्सी को गेंद सहित अल्प कोण 'β' ($\beta > \alpha$) द्वारा विस्थापित करके स्वतंत्र छोड़ते हैं। दीवार को पूर्णतः प्रत्यास्थ मानते हैं। इस प्रकार के लोलक का आवर्तकाल होगा/होगे–



(A) $2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$ (B*) $2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$

(C) $2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\cos^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$ (D*) $2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$

Sol. max^m amplitude अधिकतम आयाम $= \beta\ell$

So time to travel angle α अतः α कोण तय करने में लगा समय

$$x = x_0 \sin \omega t$$

$$\alpha\ell = \beta\ell \sin \omega t$$

$$t = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{\alpha}{\beta}$$

Now period of pendulum $= \frac{1}{2}$ (actual time period) +2 (time to travel angle α)

अब लोलक का आर्वतकाल $= \frac{1}{2}$ (वास्तविक आवर्तकाल) +2 (α कोण तय करने मे लगा समय)

$$= \frac{1}{2} . 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} + 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \sin^{-1}\frac{\alpha}{\beta}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\pi/2 + \sin^{-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$$

Also if time taken to travel from right extreme position to wall is t then
यदि दांयी सीमान्त स्थिति से दीवार तक जाने में लगा समय t है तो

$$-\alpha = \beta \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \cos\omega t = -\frac{\alpha}{\beta}$$

$$t = \frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)$$

$$T = 2t = \frac{2}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)$$

$$T = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cos^{-1}\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)$$

10.* If a SHM is given by $y = (\sin \omega t + \cos \omega t)$ m, which of the following statements are true?
यदि एक सरल आवर्त गति को $y = (\sin \omega t + \cos \omega t)$ m द्वारा प्रदर्शित करें तो निम्न से कौनसे कथन सत्य है।

(A) The amplitude is 1m — आयाम का मान 1 मी. है।
(B*) The amplitude is $\sqrt{2}$ m — आयाम का मान $\sqrt{2}$ मी. है।
(C*) Time is considered from y = 1 m — y = 1 मी. से समय प्रारम्भ होगा।
(D) Time is considered from y = 0 m — y = 0 मी. से समय प्रारम्भ होगा।

Sol. Given दिया है $y = (\sin \omega t + \cos \omega t)$ $\quad y = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)$

So अतः $A = \sqrt{2}$ m and तथा at $t = 0$ पर $y = 1$m

11.* The position of a particle at time t moving in x-y plane is given by $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j})$ A cos ωt. Then, the motion of the particle is :
x - y तल में गति करते हुए एक कण का स्थिति सदिश समय के साथ समीकरण $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j})$ A cos ωt. के अनुसार बदलता है। कण की गति होगी –

(A*) on a straight line — एक सरल रेखा पर
(B) on an ellipse — एक दीर्घ वृत्त पर
(C*) periodic — आवर्ती
(D*) SHM — सरल आवर्ती

Sol. $\vec{r} = A\cos\omega t\,\hat{i} + 2A\cos\omega t\,\hat{j} \Rightarrow$ $x = A\cos\omega t$, $y = 2A\cos\omega t$ so अतः $y = 2x$

$|\vec{r}| = A\cos\omega t.\sqrt{5} = \sqrt{5}\,A\cos\omega t$

So motion is at straight line, periodic and S.H.M

अतः गति सरल रेखा पर आवर्ती व स.आ.ग. है।

12*. Three simple harmonic motions in the same direction having the same amplitude a and same period are superposed. If each differs in phase from the next by 45^0, then,

तीन सरल आवर्त गतियां जो कि समान दिशा में हैं तथा इनका आयाम a व आवर्तकाल समान है , एक दूसरे पर अध्यारोपित होती हैं। यदि प्रत्येक अपने अगले वाली से 45^0 कलान्तर से भिन्न है, तो :

(A*) the resultant amplitude is $(1+\sqrt{2})a$

परिणामी आयाम $(1+\sqrt{2})a$ होगा।

(B) the phase of the resultant motion relative to the first is 90^0.

परिणामी गति की कला प्रथम के सापेक्ष 90^0 पर होगी।

(C*) the energy associated with the resulting motion is $(3+2\sqrt{2})$ times the energy associated with any single motion.

परिणामी गति से सम्बन्धित ऊर्जा किसी भी एक गति से सम्बन्धित ऊर्जा की $(3+2\sqrt{2})$ गुना होगी।

(D) the resulting motion is not simple harmonic.

परिणामी गति सरल आवर्ती नहीं होगी।

Sol. From superposition principle

$\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3$

$= a\sin\omega t + a\sin(\omega t + 45^\circ) + a\sin(\omega t + 90^\circ)$

$= a\{\sin\omega t + \sin(\omega t + 90^\circ)\} + a\sin(\omega t + 45^\circ)$

$= 2a\sin(\omega t + 45^\circ)\cos 45^\circ + a\sin(\omega t + 45^\circ)$

$= (\sqrt{2} + 1)\,a\sin(\omega t + 45^\circ)$

$= A\sin(\omega t + 45^\circ)$

Therefore, resultant motion is simple harmonic of amplitude

$$A = (\sqrt{2} + 1)\,a$$

and which differ in phase by 45° relative to the first.

Energy in SHM (amplitude)^2 $\left[E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2\right]$

$$\therefore \quad \frac{E_{resultant}}{E_{single}} = \left(\frac{A}{a}\right)^2 = (\sqrt{2}+1)^2 = (3+2\sqrt{2})$$

$$\therefore \quad E_{resultant} = (3 + 2\sqrt{2})\,E_{single}$$

अध्यारोपण सिद्वान्त से $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3$

$= a\sin\omega t + a\sin(\omega t + 45^\circ) + a\sin(\omega t + 90^\circ)$

$= a\{\sin\omega t + \sin(\omega t + 90^\circ)\} + a\sin(\omega t + 45^\circ)$

$= 2a\sin(\omega t + 45^\circ)\cos 45^\circ + a\sin(\omega t + 45^\circ)$

$= (\sqrt{2} + 1)\,a\sin(\omega t + 45^\circ)$

$= A\sin(\omega t + 45^\circ)$

अतः परिणामी गति सरल आवर्त्त गति है जिसका आयाम

$$A = (\sqrt{2} + 1)\,a$$

और यह प्रथम के सापेक्ष 45° कलान्तर पर है।

SHM मे ऊर्जा (आयाम)^2 $\left[E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2\right]$

$$\therefore \quad \frac{E_{\text{परिणामी}}}{E_{\text{एकल}}} = \left(\frac{A}{a}\right)^2 = (\sqrt{2}+1)^2 = (3+2\sqrt{2}) \quad \therefore \quad E_{\text{परिणामी}} = (3 + 2\sqrt{2})\,E_{\text{एकल}}$$

PART - IV : COMPREHENSION

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

Comprehension # 1

A 2kg block hangs without vibrating at the bottom end of a spring with a force constant of 400 N/m. The top end of the spring is attached to the ceiling of an elevator car. The car is rising with an upward acceleration of 5 m/s^2 when the acceleration suddenly ceases at time t = 0 and the car moves upward with constant speed. (g = 10 m/s^2)

बल नियतांक 400 N/m की स्प्रिंग के निचले सिरे से 2 किग्रा. का पिण्ड बिना कम्पन्न के लटका है। स्प्रिंग का शीर्ष सिरा लिफ्ट की छत से जुड़ा है। लिफ्ट 5 मी./से.^{2} के ऊपरी त्वरण से उठ रही है। जब t = 0 पर त्वरण अचानक खत्म होता है, लिफ्ट एक समान चाल से ऊपर की ओर गतिमान है। (g = 10 मी./से.^{2})

1. What is the angular frequency of oscillation of the block after the acceleration ceases?
त्वरण समाप्त होने के पश्चात् पिण्ड की कोणीय आवृत्ति क्या है –

(A*) $10\sqrt{2}$ rad/s (B) 20 rad/s (C) $20\sqrt{2}$ rad/s (D) 32 rad/s

Sol. $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = \sqrt{200}$ rad/s

2. The amplitude of the oscillations is
कम्पन्न का आयाम है –

(A) 7.5 cm (B) 5 cm (C*) 2.5 cm (D) 1 cm

3. The initial phase angle observed by an observer in the elevator, taking upward direction to be positive and positive extreme position to have $\pi/2$ phase, is equal to
लिफ्ट में सवार व्यक्ति द्वारा प्रेक्षित प्रारम्भिक कला कोण है, जब कि ऊपरी दिशा को धनात्मक लें तथा धनात्मक सीमान्त अवस्था को $\pi/2$ कला कोण स्थिरांक पर मानें –

(A) $-\pi/4$ rad (B) $\pi/2$ rad (C) π rad (D*) $3\pi/2$ rad

Sol. 1 to 3

Maximum extension the spring from natural position is x.

Then mg + ma = kx

$\Rightarrow x = \dfrac{2\ (10+5)}{400} = 7.5$ cm

Extension of the spring when it is stretched to equilibrium line is x'.

mg =kx'

$\Rightarrow \quad x' = \dfrac{2 \times 10}{400} = 5$ cm

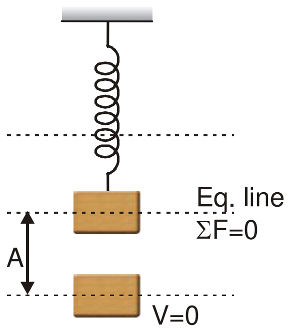
Therefore amplitude A = x –x' = 2.5 cm

If upward direction is taken as positive at t = 0, x = – A

Using x = A sin (ωt + ϕ)

$-A = A \sin\phi$

$\phi = \dfrac{3\pi}{2}$



हल: 1 to 3

स्प्रिंग की प्राकृतिक स्थिति से महत्तम खिंचाव x है।

तो mg + ma = kx

$\Rightarrow x = \frac{2\ \ (10+5)}{400} = 7.5$ cm

साम्यवस्था से स्प्रिंग खिंचने पर इसमें खिंचाव x' है।

mg =kx'

$\Rightarrow \quad x' = \frac{2 \times 10}{400} = 5$ cm

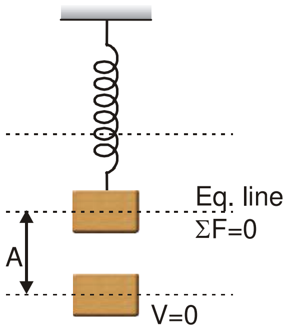
अतः आयाम A = x –x' = 2.5 cm

यदि ऊपर की दिशा को धनात्मक लें, तो t = 0 पर x = – A

x = A sin (ωt + φ) का प्रयोग करने पर

$- A = A \sin \phi$

$\phi = \frac{3\pi}{2}$



Comprehension # 2

A particle of mass 'm' moves on a horizontal smooth line AB of length 'a' such that when particle is at any general point P on the line two forces act on it. A force $\frac{mg(AP)}{a}$ towards A and another force $\frac{2mg(BP)}{a}$ towards B.

एक 'm' द्रव्यमान का कण क्षैतिज चिकनी रेखा AB, जिसकी लम्बाई 'a' है, पर गति कर रहा है। जब कण रेखा के किसी बिन्दु P पर होता है तो उस पर दो बल कार्य करते हैं। A की ओर बल $\frac{mg(AP)}{a}$ तथा B की ओर दूसरा बल $\frac{2mg(BP)}{a}$ कार्यरत है।

4.✍ Find its time period when released from rest from mid-point of line AB.
जब इस कण को रेखा AB के मध्य विरामावस्था से छोड़ा जाता है तो इस कण का आवर्तकाल ज्ञात करो .

(A) $T = 2\pi\sqrt{\frac{3a}{g}}$ (B) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ (C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ (D*) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{3g}}$

5. ✍ Find the minimum distance of the particle from B during the motion.
गति के दौरान, कण की B से न्यूनतम दूरी ज्ञात करो।

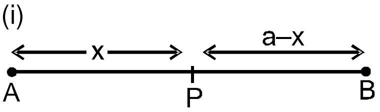
(A*) $\frac{a}{6}$ (B) $\frac{a}{4}$ (C) $\frac{a}{3}$ (D) $\frac{a}{8}$

6. If the force acting towards A stops acting when the particle is nearest to B then find the velocity with which it crosses point B.
जब कण B के सबसे निकट होता है तो कण पर A की ओर लगने वाला बल कार्य करना बन्द कर देता है तो जिस वेग से यह बिन्दु B को पार करेगा वह वेग ज्ञात करो ?

(A) $\frac{\sqrt{2ga}}{3}$ (B*) $\frac{\sqrt{2ga}}{6}$ (C) $\frac{\sqrt{2ga}}{5}$ (D) $\frac{\sqrt{ga}}{3}$

Ans. $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{3g}}$, $A = \frac{a}{6}$, $\frac{a}{6}$, $1/6\sqrt{2ag}$

Sol. (i)



force on particle at point P
बिन्दु P पर स्थित कण पर बल

$$F = \frac{2mg(a-x)}{a} - \frac{mg(x)}{a}$$

$$F = \frac{mg}{a}(2a - 3x)$$

$$F = \frac{-3mg}{a}(x - 2a/3)$$

(ii) So this is equation of S.H.M ($F = m\omega^2 x$) so particle perform S.H.M with mean position $x - 2a/3 = 0$
अतः ये समीकरण स.आ.ग. की समीकरण है। ($F = m\omega^2 x$) अतः कण स.आ.ग. करेगा जिसकी माध्य अवस्था है $x - 2a/3 = 0$ $x = 2a/3$ (from point A) बिन्दु A से

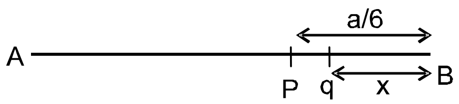
So अतः $\omega^2 = \frac{3g}{a} \Rightarrow \omega = \sqrt{3g/a}$

So Time period अतः आर्वतकाल $T = 2\pi\sqrt{a/3g}$

and amplitude और आयाम $= 2a/3 - a/2 = a/6$

(iii) minimum distance from B से न्यूनतम दूरी $= a - (2a/3 + a/6) = a/6$

(iv)



at point P velocity of particle = 0
बिन्दु P पर कण का वेग = 0

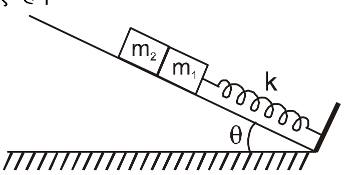
and force और बल $= \frac{2mg\ \ x}{a}$

(at point q) (q बिन्दु पर)

acc. त्वरण $= \frac{2g\ \ x}{a} \Rightarrow \int_0^v v\ \ dv = \int_0^{a/6} \frac{2gx\ \ dx}{a} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2ga}}{6}$

Comprehension # 3

Spring of spring constant k is attached with a block of mass m_1 as shown in figure. Another block of mass m_2 is placed against m_1 and both masses lie on smooth incline plane.
k स्प्रिंग नियतांक का स्प्रिंग m_1 द्रव्यमान के पिण्ड से जुड़ा है तथा दूसरा m_2 द्रव्यमान का पिण्ड पहले पिण्ड को दबाते हुए चित्रानुसार चिकने नत तल पर रखे हुए हैं।



7. Find the compression in the spring when the system is in equilibrium.
जब निकाय साम्यावस्था में है तब स्प्रिंग का सम्पीड़न ज्ञात करो ?

(A) $\frac{(m_1+m_2)\ g\sin\theta}{2k}$ (B*) $\frac{(m_1+m_2)\ g\sin\theta}{k}$

(C) $\frac{(m_1+m_2)g}{k}$ (D) $\frac{2(m_1+m_2)\ g\sin\theta}{k}$

8. From the equilibrium position the blocks are pushed a further distance $\frac{2}{k}(m_1+m_2)g\sin\theta$ against the spring and released. Find the common speed of blocks when they separate.
साम्यावस्था से पिण्डों को (2/k) $(m_1 + m_2)$ g sin θ दूरी तक ओर ज्यादा दबाकर छोड़ा जाता है। जब यह पृथक्कृत होते हैं उस समय दोनों पिण्डों की उभयनिष्ठ चाल ज्ञात कीजिए।

(A) $\left(\sqrt{\frac{1}{3k}(m_1+m_2)}\right)g\sin\theta$ (B) $\left(\sqrt{\frac{2}{k}(m_1+m_2)}\right)g\sin\theta$

(C*) $\left(\sqrt{\frac{3}{k}(m_1+m_2)}\right)g\sin\theta$ (D) $\left(\sqrt{\frac{1}{k}(m_1+m_2)}\right)g\sin\theta$

Sol. At equilibrium position साम्यावस्था की स्थिति पर : →
$Kx_0 = m_1g\sin\theta + m_2g\sin\theta$
$x_0 = \frac{(m_1+m_2)g\ \sin\theta}{k}$
Block will separate when acceleration of block of mass m_1 will be just equal to g sin θ
जब m_1 द्रव्यमान के ब्लॉक का त्वरण g sin θ के बराबर होगा ब्लॉक अलग – अलग हो जायेगे।

$\Rightarrow \quad a = \omega^2x = g\sin\theta$

$\Rightarrow \quad \frac{K}{m_1+m_2} \times x = g\sin\theta$

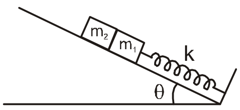
$\Rightarrow \quad x = \frac{m_1+m_2}{K}\ g\sin\theta = x_0$

So, blocks will separate when blocks are at distance $x = \frac{m_1+m_2}{K}\ g\sin\theta$

अतः जब ब्लॉक माध्यवस्था से $x = \frac{m_1+m_2}{K}\ g\sin\theta$ की दूरी पर होगे ब्लॉक अलग अलग हो जायेगे।

From mean position
i.e. spring is at its natural position (amplitude $A = \left(\frac{2}{K}(m_1+m_2)g\sin\theta\right)$)

जब स्प्रिंग इसकी प्राकृतिक स्थिति मे है। (आयाम $A = \left(\frac{2}{K}(m_1+m_2)g\sin\theta\right)$)



Blocks will separate at distance $x = x_0$ from mean position.
माध्यवस्था से $x = x_0$ दूरी पर ब्लॉक अलग हो जायेगे।

$$v = \sqrt{A^2 - x_0^2}$$

$$= \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}\sqrt{\left(\frac{2}{K}(m_1+m_2)g\sin\theta\right)^2 - \left(\left(\frac{m_1+m_2}{K}\right)\ g\sin\theta\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{k}(m_1+m_2)}\ \ g\sin\theta$$

Exercise-3

PART - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

✍ Marked Questions may have for Revision Questions.
✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

*** Marked Questions may have more than one correct option.**
*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है।**

1*.✍ Function $x = A\sin^2\omega t + B\cos^2\omega t + C\sin\omega t\cos\omega t$ represents SHM
$x = A\sin^2\omega t + B\cos^2\omega t + C\sin\omega t\cos\omega t$ फलन सरल आवर्त गति प्रदर्शित करेगा। **[JEE 2006, 5/184,–1]**

(A*) for any value of A, B and C (except C = 0) (B*) If A = – B, C = 2B, amplitude = $\left|B\sqrt{2}\right|$
(C) If A = B ; C = 0 (D*) If A = B ; C = 2B, amplitude = |B|
(A*) A, B तथा C के किसी भी मान के लिए (C = 0 को छोड़कर)
(B*) यदि A = – B, C = 2B, आयाम = $\left|B\sqrt{2}\right|$
(C) यदि A = B ; C = 0
(D*) यदि A = B ; C = 2B , आयाम = |B|

Ans. **(A,B, D)**

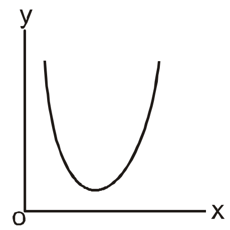
Sol. $x = A\dfrac{(1-\cos 2\omega t)}{2} + B\dfrac{(1+\cos 2\omega t)}{2} + \dfrac{C}{2}\sin 2\omega t$

Choose different combinations of A, B & C to get linear combination of sin & cos functions.
A, B तथा C के भिन्न–भिन्न मानों के लिये sin व cos फलन के रेखीय मिश्रण प्राप्त करो।

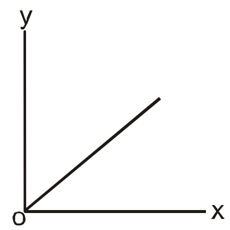
2.#✍ **Column I** gives a list of possible set of parameters measured in some experiments. The variations of the parameters in the form of graphs are shown in **Column II**. Match the set of parameters given in **Column I** with the graphs given in **Column II**. **[IIT-JEE 2008, 6/163]**

Column I **Column II**

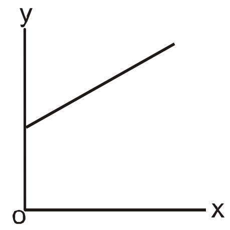
(A) Potential energy of a simple pendulum (y–axis) as a function of displacement (x–axis)

(p) 

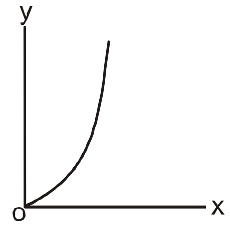
(B) Displacement (y–axis) as a function of time (x–axis) for a one dimensional motion at zero or constant acceleration when the body is moving along the positive x–direction.

(q) 

(C) Range of a projectile (y–axis) as a function of its velocity (x–axis) when projected at a fixed angle. (r)



(D) The square of the time period (y–axis) of a simple pendulum as a function of its length (x–axis). (s)



Ans. (A) $\rightarrow$ (p) ; (B) $\rightarrow$ (q, s) ; (C) $\rightarrow$ (s) ; (D) $\rightarrow$ (q)

Sol. (A) From nature of SHM, the graph of potential energy as function of displacement will be parabolic graph as given in option p. Hence (A) $\rightarrow$ (p)

(B) a = 0 or a = constant. (as per given condition)
V > 0 moving along positive x-axis
y – displacement
$y = ut \pm \frac{1}{2}at^2$ for a = constant
$y = vt$ for a = 0
These two conditions are satisfied by (q) and (s). (B) $\rightarrow$ (q, s)
(p) Is rejected because at t = 0 the displacement is not zero and velocity has negative values.

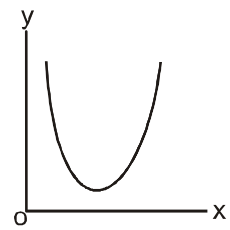
(C) $R = \frac{u^2\sin(2\theta)}{g}$ and $R \propto u^2$ for a fixed angle of projection. at u = 0, R = 0
(C) $\rightarrow$ (s)

(D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ $\Rightarrow$ $T^2 = 4\pi^2\frac{\ell}{g}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{4\pi^2}{g}x$ (D) $\rightarrow$ (q)

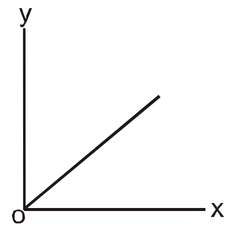
कॉलम I में संभावी पैरामीटरों (parameters) के समुच्चय (set) की सूची दी गई है। इन पैरामीटरों के परिवर्तन को ग्राफ के रूप में दर्शाया गया है **(कॉलम II)**। **कॉलम I** में दिये गये पैरामीटरों का **कॉलम II** में दिये गये ग्राफ समुल (match) करें। अपने उत्तर को ORS में दिया गया 4 × 4 मैट्रिक्स के उचित बुल्लों को काला करके दर्शायें।
[IIT-JEE 2008, 6/163]

कॉलम I **कॉलम II**

(A) एक सरल लोलक (simple pendulum) की स्थितिज ऊर्जा (y–अक्ष) बनाम विस्थापन (x–अक्ष) (p)

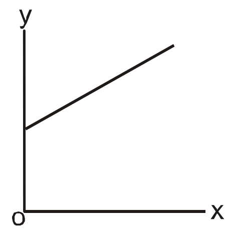


(B) शून्य अथवा स्थिर त्वरण पर एक विमीय गति के लिये (q)



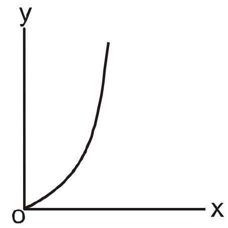
विस्थापन (y–अक्ष) बनाम समय (x–अक्ष) (गति केवल + x दिशा में है)

(C) एक नियत कोण पर प्रक्षेपित प्रक्षेप्य की परास (r)



(y–अक्ष) बनाम उसका वेग (x–अक्ष)

(D) एक सरल लोलक के आवर्त काल का वर्ग (y–अक्ष) (s)



बनाम उसकी लम्बाई (x–अक्ष)

Ans. (A) $\rightarrow$ (p) ; (B) $\rightarrow$ (q, s) ; (C) $\rightarrow$ (s) ; (D) $\rightarrow$ (q)

Sol. (A) SHM की प्रकृति से, विकल्प p से दिये गए ग्राफ से स्थितिज ऊर्जा–विस्थापन का फलन परवलय होगा
अतः (A) $\rightarrow$ (p)

(B) a = 0 या a = नियत (दी गई शर्त से)
V > 0 यह धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश है।
y – विस्थापन

$y = ut \pm \frac{1}{2}at^2$ for a = नियत

$y = vt$ for $a = 0$

यह दोनों स्थितियां (q) व (s) द्वारा संतुष्ट होती है। (B) $\rightarrow$ (q, s)

(p) को नही लिया गया है चूंकि t = 0 पर विस्थापन शून्य नही है तथा वेग का ऋणात्मक मान है।

(C) $R = \frac{u^2\sin(2\theta)}{g}$ and $R \propto u^2$ एक नियत प्रक्षेपण कोण के लिए

तथा $u = 0, R = 0$ $\Rightarrow$ (C) $\rightarrow$ (s)

(D) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ $\Rightarrow$ $T^2 = 4\pi^2\frac{\ell}{g}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{4\pi^2}{g}x$ $\Rightarrow$ (D) $\rightarrow$ (q)

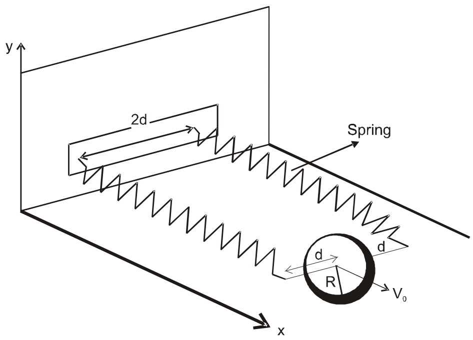
Comprehension # 1 अनुच्छेद # 1

A uniform thin cylindrical disk of mass M and radius R is attached to two identical massless springs of spring constant k which are fixed to the wall as shown in the figure. The springs are attached to the axle of the disk symmetrically on either side at a distance d from its centre. The axle is massless and both the springs and the axle are in a horizontal plane. The unstretched length of each spring is L. The disk is initially at its equilibrium position with its centre of mass (CM) at a distance L from the wall. The disk rolls without slipping with velocity $\vec{V}_0 = V_0\hat{i}$. The coefficient of friction is μ. **[JEE-2008, 3×4/163]**

Figure :

चित्रानुसार एकसमान (uniform) पतली बेलनाकार चकती, जिसका द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है, दो सर्वसम द्रव्यमान रहित स्प्रिंग (spring) के द्वारा, जिनका स्प्रिंग स्थिरांक k है, दीवार से जुड़ी हैं। दोनों स्प्रिंग चकती के केन्द्र से d की सममित (symmetric) दूरी पर, धुरी से संलग्न हैं। धुरी द्रव्यमान रहित है तथा दोनों स्प्रिंग और धुरी एक क्षैतिज समतल पर हैं। प्रत्येक स्प्रिंग की सामान्य लंबाई L है। प्रारंभ में चकती का द्रव्यमान केन्द्र साम्यावस्था में दीवार से L की दूरी पर है। डिस्क बिना फिसले $\vec{V}_0 = V_0\hat{i}$ की गति से लुढ़कती है। घर्षण गुणांक μ है। **[JEE-2008, 3×4/163]**

चित्र :



3. The net external force acting on the disk when its centre of mass is at displacement x with respect to its equilibrium position is

जब चकती का द्रव्यमान केन्द्र (centre of mass) इसकी साम्यावस्था से x की दूरी पर विस्थापित है, चकती के ऊपर लगने वाला कुल बाहरी बल निम्न है

(A) $-kx$ (B) $-2kx$ (C) $-\frac{2kx}{3}$ (D*) $-\frac{4kx}{3}$

Sol. Applying equation of torque about lowest point

सबसे निम्नतम बिन्दु पर बलाघूर्ण का समीकरण लगाने पर

$$(2Kx)\,R = \left(\frac{3}{2}MR^2\right)\alpha \qquad \alpha R = \frac{4Kx}{3M}$$

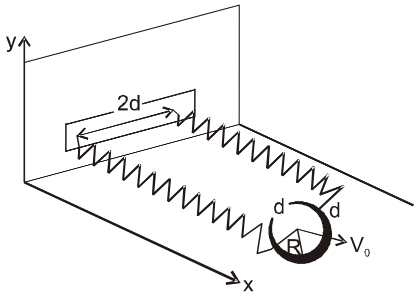
as there is no slipping चूंकि कोई फिसलन नहीं है।

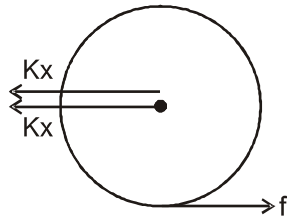
$$a = \alpha R = \frac{4Kx}{3M}$$

Net force कुल बल $= Ma = \frac{4Kx}{3}$

Which is directed opposite to displacement जो कि विस्थापन के विपरीत है।

$F_{net} = \frac{-4Kx}{3}$ **Ans. (D)**





4. The centre of mass of the disk undergoes simple harmonic motion with angular frequency ω equal to
चकती का द्रव्यमान केन्द्र सरल आवर्त गति करता है, जिसकी कोणीय आवृत्ति ω का मान निम्न है

(A) $\sqrt{\frac{k}{M}}$ (B) $\sqrt{\frac{2k}{M}}$ (C) $\sqrt{\frac{2k}{3M}}$ (D*) $\sqrt{\frac{4k}{3M}}$

Sol. $F_{net} = -\frac{4kx}{3} = -M(\omega^2 x)$

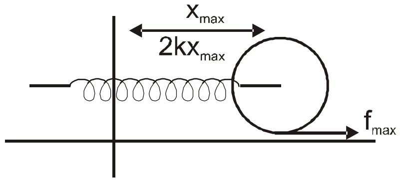
$\omega = \sqrt{\frac{4k}{3M}}$ **Ans. (D).**

5. The maximum value of V_0 for which the disk will roll without slipping is
V_0 का वह महत्तम मान जिसके लिये चकती बिना फिसले लुढ़कती है

(A) $\mu g\sqrt{\frac{M}{k}}$ (B) $\mu g\sqrt{\frac{M}{2k}}$ (C*) $\mu g\sqrt{\frac{3M}{k}}$ (D) $\mu g\sqrt{\frac{5M}{2k}}$

Sol. $\frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\left(\frac{V_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}(2K)x^2_{max}$

$= \frac{3}{2}MV_0^2 = 2kx^2_{max} \Rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{3}{4}\frac{MV_0^2}{K}}$



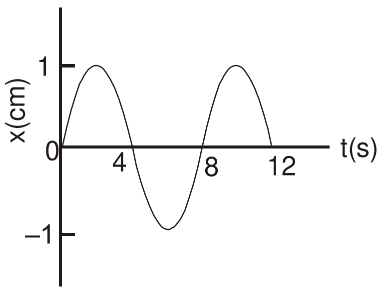
At extreme position, friction will have maximum value.
चरम स्थिति पर, घर्षण अधिकतम होगा।

$2kx_{max} - f_{max} = \frac{4k}{3}x_{max} \Rightarrow f_{max} = \frac{2}{3}kx_{max}$

$\mu Mg = \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{3}{4}\frac{MV_0^2}{K}} \Rightarrow \mu Mg = \left(\sqrt{\frac{K}{3}M}\right)V_0$

$V_0 = \mu g\sqrt{\frac{3M}{K}}$ **Ans. (C).**

6.# The x-t graph of a particle undergoing simple harmonic motion is shown below. The acceleration of the particle at t = 4/3 s is **[IIT-JEE 2009, 3/160, –1]**
सरल आवर्त गति करते हुए किसी कण का x-t आरेख नीचे दर्शाया गया है। समय t = 4/3 सैकेण्ड पर कण का त्वरण है



(A) $\frac{\sqrt{3}}{32}\pi^2$ cm/s² (B) $\frac{-\pi^2}{32}$ cm/s² (C) $\frac{\pi^2}{32}$ cm/s² (D*) $\frac{\sqrt{3}}{32}\pi^2$ – cm/s²

Solution : From graph (ग्राफ से)

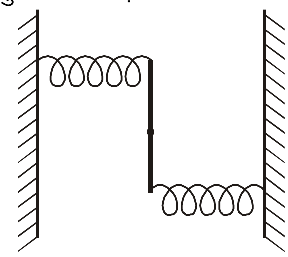
$T = 8$ second., $A = 1$ cm, $x = A\sin\omega t. = 1\sin\frac{2\pi}{8}t.$

$$a = -\omega^2 x = -\left(\frac{2\pi}{8}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right)t \quad \text{cm/s}^2$$

At, $t = \frac{4}{3}$ second पर $a = \left(\frac{2\pi}{8}\right)^2 - \frac{\pi}{3}\sin = -\frac{\sqrt{3}\ \pi^2}{32}$ cm/s^2

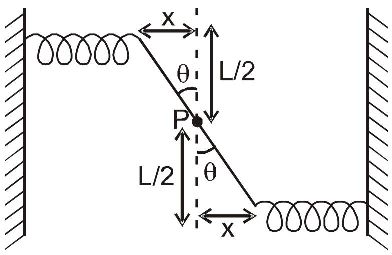
7.# A uniform rod of length L and mass M is pivoted at the centre. Its two ends are attached to two springs of equal spring constants k. The springs are fixed to rigid supports as shown in the figure, and the rod is free to oscillate in the horizontal plane. The rod is gently pushed through a small angle θ in one direction and released. The frequency of oscillation is : **[IIT-JEE 2009, 3/160, –1]**

चित्रानुसार लम्बाई L व द्रव्यमान M की एकसमान छड़ अपने केन्द्र पर कीलकित है। इस छड़ के सिरों पर k स्प्रिंग नियतांक के एक जैसे स्प्रिंग लगे है जिनके सिरे दृढ़ आलम्बों से जुड़े है। छड़ क्षैतिज तल में स्वतन्त्र रूप से दोलन कर सकती है। छड़ को एक छोटे कोण θ से घुमा कर छोड़ दिया जाता है। छड़ के दोलन की आवृत्ति होगी।



(A) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{M}}$ (B) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$ (C*) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6k}{M}}$ (D) $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{24k}{M}}$

Sol.



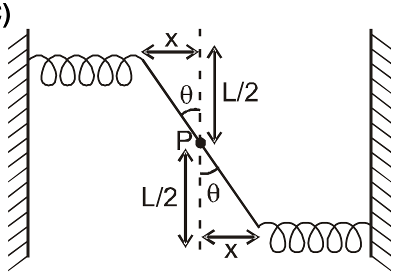
Torque about P = $(kx)\frac{L}{2} + (kx)\frac{L}{2} = kxL\ (\theta = \frac{2x}{L})$

$\tau = I\,\alpha$

$$\Rightarrow \quad -\frac{KL^2}{2}\theta = \frac{ML^2}{12}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{-6K\theta}{M} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{6K}{M}\theta = -\omega^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{6K}{M}} \text{ and } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6K}{M}}$$

Sol. (C)



P के सापेक्ष बल आघूर्ण $= (kx)\,\frac{L}{2} + (kx)\,\frac{L}{2} = kxL \;(\theta = \frac{2x}{L})$

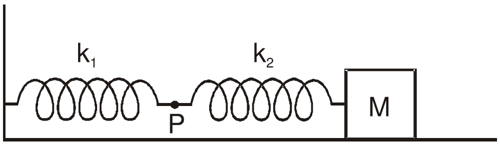
$\tau = I\,\alpha$

$\Rightarrow \quad -\frac{KL^2}{2}\theta = \frac{ML^2}{12}\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{-6K\theta}{M} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{6K}{M}\theta = -\omega^2\theta$

$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{6K}{M}}$ और $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6K}{M}}$

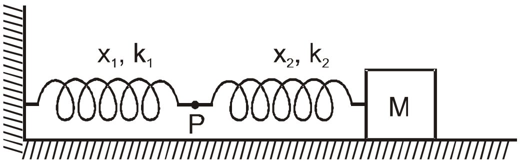
8.# The mass M shown in the figure oscillates in simple harmonic motion with amplitude A. The amplitude of the point P is **[JEE 2009, 3/160, –1]**

चित्र में दिखाया गया द्रव्यमान M सरल आवर्त गति कर रहा है जिसका आयाम A है। बिन्दु P का आयाम होगा



(A) $\frac{k_1 A}{k_2}$ (B) $\frac{k_2 A}{k_1}$ (C) $\frac{k_1 A}{k_1 + k_2}$ (D*) $\frac{k_2 A}{k_1 + k_2}$

Sol.



Extensions in springs are x_1 and x_2 then

स्प्रिंगों में विस्तार x_1 व x_2 है तब

$k_1x_1 = k_2x_2$

and और $x_1 + x_2 = A$

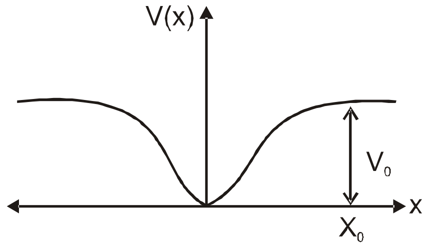
$\Rightarrow \quad x_1 + \frac{k_1 x_1}{k_2} = A \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{k_2 A}{k_1 + k_2}$

Comprehension # 2 अनुच्छेद # 2

When a particle of mass m moves on the x-axis in a potential of the form $V(x) = kx^2$, it performs simple harmonic motion. The corresponding time period is proportional to $\sqrt{\frac{m}{k}}$, as can be seen easily using dimensional analysis. However, the motion of a particle can be periodic even when its potential energy increases on both sides of $x = 0$ in a way different from kx^2 and its total energy is such that the particle does not escape to infinity. Consider a particle of mass m moving on the x-axis. Its potential energy is $V(x) = \alpha x^4$ ($\alpha > 0$) for $|x|$ near the origin and becomes a constant equal to V_0 for $|x| \geq X_0$ (see figure)

[JEE 2010, 9/160, –1]

जब m द्रव्यमान का एक कण x-अक्ष पर $V(x) = kx^2$ स्थितिज ऊर्जा से गतिमान होता है, तब यह सरल आवर्त गति करता है। इसका आवर्तकाल $\sqrt{\frac{m}{k}}$ के समानुपाती होता है, जो कि विमीय विश्लेषण द्वारा आसानी से निकाला जा सकता है। हांलाकि, यदि किसी एक कण की स्थितिज ऊर्जा x = 0 के दोनों तरफ kx^2 से भिन्न तरह से बढ़े, तथा कण की कुल ऊर्जा इतनी हो कि वह अनन्त तक पलायन न कर सके, तब भी कण की गति आवर्ती हो सकती है। m द्रव्यमान का एक कण x-अक्ष पर गति करता हैं जहां |x| के केन्द्र के पास होने पर स्थितिज ऊर्जा $V(x) = \alpha x^4$ ($\alpha > 0$) है तथा $|x| \geq X_0$ के लिए स्थितिज ऊर्जा $V(x) = V_0$ है (चित्र देखें) **[JEE 2010, 9/160, –1]**



9. If the total energy of the particle is E, it will perform periodic motion only if :
यदि एक कण की समग्र ऊर्जा E है तो वह आवर्ती गति तभी सम्पन्न कर सकता है केवल जब
(A) $E < 0$ (B) $E > 0$ (C*) $V_0 > E > 0$ (D) $E > V_0$

Sol. When $0 < E < V_0$ there will be acting a restoring force to perform oscillation because in this case particle will be in the region $|x| \leq x_0$.

Sol. जब $0 < E < V_0$, यहा दोलन करने के लिए एक प्रत्यानयन बल कार्यरत है क्योकि इस स्थिति में कण क्षेत्र $|x| \leq x_0$ में रहता है।

10. For periodic motion of small amplitude A, the time period T of this particle is proportional to :
अल्प आयाम A के दोलन के लिए, कण का आवर्तकाल T निम्न में से किसके समानुपाती है ?
(A) $A\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$ (B*) $\frac{1}{A}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$ (C) $A\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$ (D) $\frac{1}{A}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

Sol. $V = \alpha x^4$

T.E. = $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \alpha A^4$ (not strictly applicable just for dimension matching it is used)

T.E. = $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \alpha A^4$ (पूर्णतः लागू नही है केवल यह विमीय रूप से मिलान के लिए उपयोगी है)

$\omega^2 = \frac{2\alpha A^2}{m} \quad \Rightarrow \quad T \propto \frac{1}{A}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$

11. The acceleration of this particle for $|x| > X_0$ is : $|x| > X_0$ के लिये कण का त्वरण :

(A) proportional to V_0
(B) proportional to $\frac{V_0}{mX_0}$
(C) proportional to $\sqrt{\frac{V_0}{mX_0}}$
(D*) zero

(A) V_0 के समानुपाती है
(B) $\frac{V_0}{mX_0}$ के समानुपाती है
(C) $\sqrt{\frac{V_0}{mX_0}}$ के समानुपाती है
(D*) शून्य है

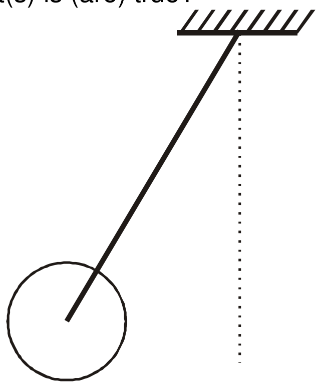
Sol. $F = -\dfrac{dU}{dx}$

as for $|x| > x_0$ $V = V_0$ = constant

जैसा कि $|x| > x_0$ के लिए $V = V_0$ = नियतांक

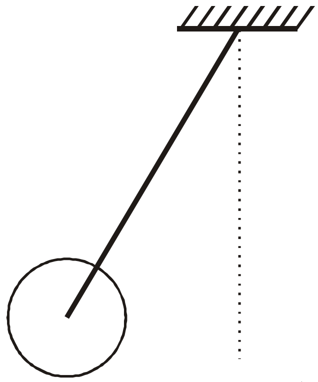
$\Rightarrow$ $\dfrac{dU}{dx} = 0$ $\Rightarrow$ $F = 0$

12*.# A metal rod of length 'L' and mass 'm' is pivoted at one end. A thin disk of mass 'M' and radius 'R' (<L) is attached at its center to the free end of the rod. Consider two ways the disc is attached: (case A). The disc is not free to rotate about its center and (case B) the disc is free to rotate about its center. The rod-disc system performs SHM in vertical plane after being released from the same displaced position. Which of the following statement(s) is (are) true? **[JEE 2011, 4/160]**



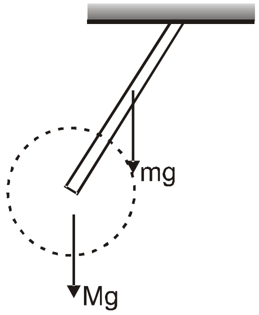
(A*) Restoring torque in case A = Restoring torque in case B
(B) Restoring torque in case A **<** Restoring torque in case B
(C) Angular frequency for case A **>** Angular frequency for case B.
(D*) Angular frequency for case A < Angular frequency for case B.

लम्बाई 'L' व द्रव्यमान 'm' की एक धातु–छड़ अपने एक सिरे पर कीलित है। 'R' (<L) त्रिज्या व 'M' द्रव्यमान की एक डिस्क छड़ के मुक्त सिरे पर अपने केंद्र से दो तरह से कीलित की जाती है। (स्थिति A) डिस्क अपने केंद्र पर नहीं घूम सकती और (स्थिति B) डिस्क अपने केंद्र पर घूमनें को स्वतन्त्र है। एक ही विस्थापन अवस्था से छोड़ने पर यह छड़–डिस्क निकाय उर्ध्वाधर तल में सरल–आवर्त–दोलन (SHM) करता है। तब



(A*) स्थिति A में प्रत्यानयन आघूर्ण (Restoring torque) = स्थिति B में प्रत्यानयन आघूर्ण
(B) स्थिति A में प्रत्यानयन आघूर्ण < स्थिति B में प्रत्यानयन आघूर्ण
(C) स्थिति A में कोणीय आवृत्ति > स्थिति B में कोणीय आवृत्ति
(D*) स्थिति A में कोणीय आवृत्ति < स्थिति B में कोणीय आवृत्ति

Ans. (A), (D)



Sol. torque is same for both the cases.

दोनों प्रकरणो में बलाघूर्ण समान है

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$

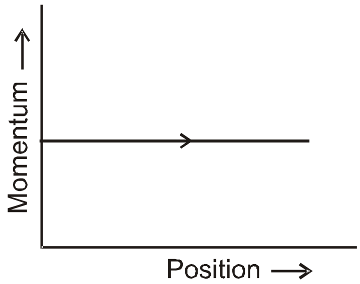
$I_A > I_B$

$\omega_A < \omega_B$

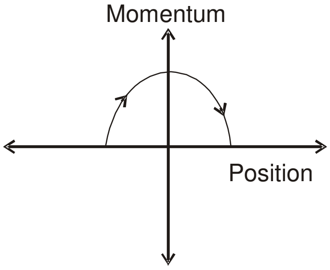
Comprehension # 3 अनुच्छेद # 3

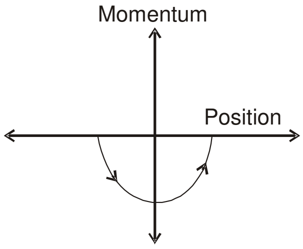
Phase space diagrams are useful tools in analyzing all kinds of dynamical problems. They are especially useful in studying the changes in motion as initial position and momentum are changed. Here we consider some simple dynamical systems in one-dimension. For such systems, phase space is a plane in which position is plotted along horizontal axis and momentum is plotted along vertical axis. The phase space diagram is x(t) vs. p(t) curve in this plane. The arrow on the curve indicates the time flow. For example, the phase space diagram for a particle moving with constant velocity is a straight line as shown in the figure. We use the sign convention in which position or momentum. upwards (or to right) is positive and downwards (or to left) is negative. **[JEE 2011, 3×3/160, –1]**

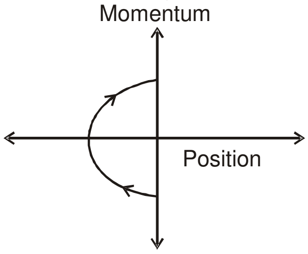
हर प्रकार की गतिकीय समस्याओं के विश्लेषण के लिये फेज–समष्टि चित्राम (Phase space diagrams) का उपयोग किया जाता है। प्रारम्भिक दशा, स्थिति व संवेग, में बदलाव होने पर इनका उपयोग चालन में उत्पन्न बदलावों को समझनें में बहुत उपयोगी है। यहाँ हम एक विमीय सरल गतिकीय निकायों की बात करते है। इनके लिये फेज–समष्टि समतल है जिसमें स्थिति X-अक्ष पर तथा संवेग Y-अक्ष पर रखते है। तब फेज–समष्टि चित्राम इस समतल में एक x(t) vs. p(t) वक्र होगा। वक्र पर तीर समय बढ़ने की दिशा दर्शाता है। उदाहरण के लिये, स्थिर वेग से चल रहे कण के लिये फेज–समष्टि चित्राम सरल–रेखा है जिसे चित्र में दिखाया गया है। चिन्ह परिपाटी में स्थिति या संवेग को ऊपर (या दाहिने) ओर धनात्मक तथा नीचे (या बाँयी) ओर ऋणात्मक माना जाता है।

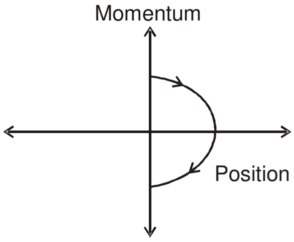


13.# The phase space diagram for a ball thrown vertically up from ground is :
जमीन से ऊपर की ओर फेंकी गई गेंद का फेज–समष्टि चित्राम है

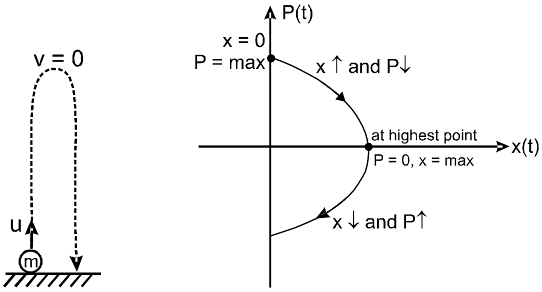
(A) 

(B) 

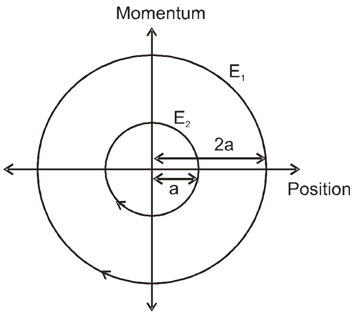
(C) 

(D*) 

Sol.



14.# The phase space diagram for simple harmonic motion is a circle centered at the origin. In the figure, the two circles represent the same oscillator but for different initial conditions, and E_1 and E_2 are the total mechanical energies respectively. Then
सरल–आवर्त–दोलन (SHM) का फेज–समष्टि चित्राम उदगम पर केंद्रित वृत्त है। चित्र में दर्शाये दो वृत्त, एक ही दोलक के लिये है, जब उसकी आरम्भिक अवस्थायें भिन्न हैं, तथा E_1 व E_2 क्रमशः दोलक की कुल यांत्रिक ऊर्जाए हैं। तब



(A) $E_1 = \sqrt{2} \quad E_2$ (B) $E_1 = 2 \quad E_2$ (C*) $E_1 = 4 \quad E_2$ (D) $E_1 = 16 \quad E_2$

Ans. (C)

Sol. In 1st case amplitude of SHM is a.
In 2nd case amplitude of SHM is 2a

Total energy = $\frac{1}{2}k(\text{amplitude})^2$

$E_1 = \frac{1}{2}k(2a)^2$

$E_2 = \frac{1}{2}k(a)^2 \; E_1 = 4 \quad E_2$

Alternative :

Linear momentum $P = mv$

$= m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\Rightarrow P^2 = m^2\omega^2 (A^2 - x^2)$

$\Rightarrow P^2 + (m\omega)^2x^2 = m^2\omega^2A^2$ ...(i)

Equation of circle (bigger)

$P^2 + x^2 = (2a)^2$

$P^2 + x^2 = 4a^2$ ...(ii)

Equation of circle (smaller)

$P^2 + x^2 = a^2$ ...(iii)

Comparing (i) and (ii)

Amplitude $A = 2a$

and $(m\omega)^2 = 1 \Rightarrow m\omega^2 = \frac{1}{m}$

$\frac{1}{2}m\omega^2(A)^2$

So energy $E_1 = \frac{1}{2}m\omega^2(2a)^2$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{m}\times(4a^2)$

$= \frac{2a^2}{m}$

Comparing (i) and (iii)

$A = a$

$(m\omega)^2 = 1 \Rightarrow m\omega^2 = \frac{1}{m}$

So $E_2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{m}a^2 = \frac{1}{2}\frac{a^2}{m^2}\ \frac{1}{2}\frac{a^2}{m}$

So $\frac{E_1}{E_2} = 4 \Rightarrow E_1 = 4E_2$

Sol. प्रथम स्थिति में SHM का आयाम a है।

द्वितीय स्थिति में SHM का आयाम 2a है।

कुल ऊर्जा $= \frac{1}{2}$k(आयाम)^2

$E_1 = \frac{1}{2}k(2a)^2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2}k(a)^2$

$E_1 = 4\ E_2$

वैकल्पिक :

रेखीय संवेग $P = mv$

$= m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\Rightarrow P^2 = m^2\omega^2 (A^2 - x^2)$

$\Rightarrow P^2 + (m\omega)^2x^2 = m^2\omega^2A^2$ ...(i)

वृत्त (बड़ा वाला) का समीकरण

$P^2 + x^2 = (2a)^2$

$P^2 + x^2 = 4a^2$ ...(ii)

वृत्त (छोटा वाला) का समीकरण

$P^2 + x^2 = a^2$ ...(iii)

(i) तथा (ii) की तुलना करने पर

आयाम $A = 2a$

तथा $(m\omega)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m\omega^2 = \frac{1}{m}$

$$\frac{1}{2}m\omega^2(A)^2$$

अतः ऊर्जा $E_1 = \frac{1}{2}m\omega^2(2a)^2$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{m}\times(4a^2)$$

$$= \frac{2a^2}{m}$$

(i) तथा (iii) की तुलना करने पर

$A = a$

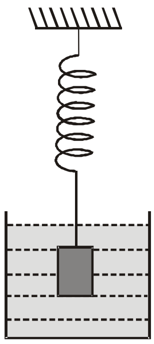
$(m\omega)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m\omega^2 = \frac{1}{m}$

अतः $E_2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{m}a^2 = \frac{1}{2}\frac{a^2}{m^2}\ \frac{1}{2}\frac{a^2}{m}$

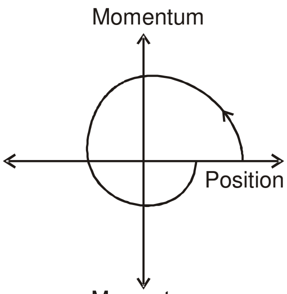
अतः $\frac{E_1}{E_2} = 4 \Rightarrow E_1 = 4E_2$

15.# Consider the spring-mass system, with the mass submerged in water, as shown in the figure. The phase space diagram for one cycle of this system is **:**

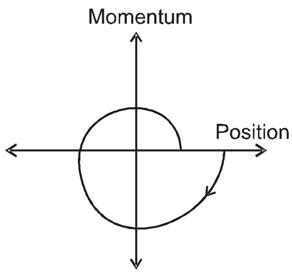
चित्र में दर्शाये अनुसार स्प्रिंग–गुटका निकाय पर ध्यान दे, जहाँ गुटका पानी में डूबा है। इस निकाय के एक दोलन करने का फेज–समष्टि चित्राम है।



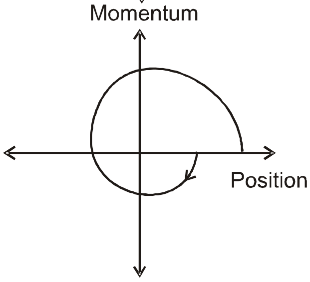
(A)



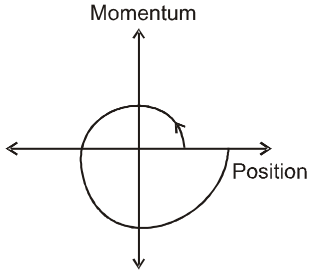
(B*)



(C)



(D)



S.H.M.

Ans. (B)

Sol. Linear momentum

$P = mv$

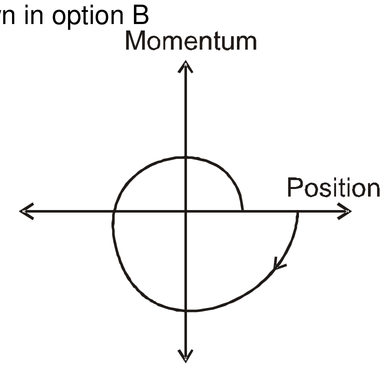
$= m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\Rightarrow \quad P^2 + m^2\omega^2x^2 = m^2\omega^2A^2$

represents a circle on P–x diagram with radius of circle R = A ($\because m^2\omega^2 = 1$)

ω of spring mass system remains constant and equal to $\sqrt{\frac{k}{m}}$

Amplitude of oscillation inside liquid will decrease due to viscous force
So radius of circular arcs will decrease as position change
Correctly shown in option B



रेखीय संवेग

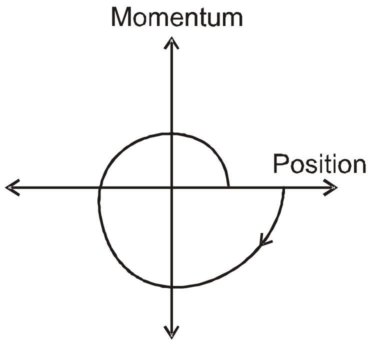
$P = mv = m\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$\Rightarrow \quad P^2 + m^2\omega^2x^2 = m^2\omega^2A^2$

R = A त्रिज्या के साथ P–x चित्र पर वृत्त को प्रदर्शित करता है ($\because m^2\omega^2 = 1$)

स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय का ω नियत रहता है तथा $\sqrt{\frac{k}{m}}$ के बराबर होता है

द्रव के अन्दर दोलन का आयाम श्यान बल के कारण घटेगा
अतः वृत्ताकार चाप की त्रिज्या स्थिति परिवर्तन के अनुसार घटेगी
सही ग्राफ विकल्प B में है।



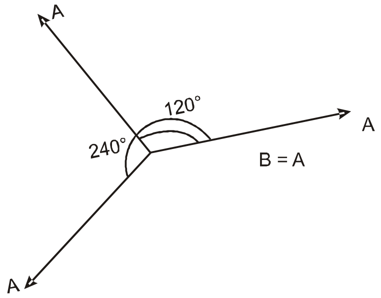
16. A point mass is subjected to two simultaneous sinusoidal displacements in x-direction, $x_1(t) = A \sin \omega t$ and $x_2(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$. Adding a third sinusoidal displacement $x_3(t) = B \sin(\omega t + \phi)$ brings the mass to a complete rest. The values of B and ϕ are **[JEE 2011, 3/160, –1]**

एक बिन्दु द्रव्यमान पर दो ज्यावक्रीय (sinusoidal) विस्थापन $x_1(t) = A \sin \omega t$ एवं $x_2(t) = A \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ एक साथ x-दिशा में लग रहे हैं। इस द्रव्यमान पर तीसरा ज्यावक्रीय विस्थापन $x_3(t) = B \sin(\omega t + \phi)$ लगाने पर वह पूर्ण रूप से रूक जाता है। B तथा ϕ का मान है **[JEE 2011, 3/160, –1]**

(A) $\sqrt{2}A, \ \frac{3\pi}{4}$ (B*) $A, \ \frac{4\pi}{3}$ (C) $\sqrt{3}\ A, \ \frac{5\pi}{6}$ (D) $A, \ \frac{\pi}{3}$

Ans. (B)

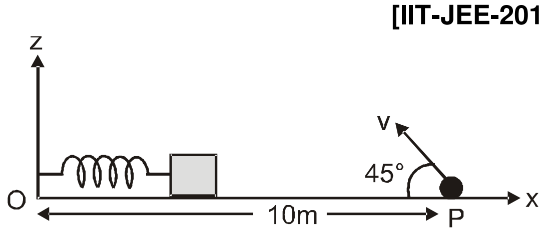
Sol.



So अतः B = A, $\phi = 240° = \frac{4\pi}{3}$

17.# A small block is connected to one end of a massless spring of un-stretched length 4.9 m. The other end of the spring (see the figure) is fixed. The system lies on a horizontal frictionless surface. The block is stretched by 0.2 m and released from rest at t = 0. It then executes simple harmonic motion with angular frequency $\omega = \frac{\pi}{3} \text{rad/s}$. Simultaneously at t = 0, a small pebble is projected with speed v from point P at an angle of 45º as shown in the figure. Point P is at a horizontal distance of 10 cm from O. If the pebble hits the block at t = 1s, the value of v is (take g = 10 m/s^2)

एक द्रव्यमान–रहित स्प्रिंग की तनाव –रहित लम्बाई 4.9cm है। उसका एक सिरा बंधित है और दूसरे पर एक छोटा गुटका लगा है (चित्र देखिये)। यह निकाय एक घर्षण –रहित क्षैतिज (horizontal)सतह पर रखा है। समय t =0 पर गुटके को 0.2m खींच कर स्थिर अवस्था से छोडा जाता तब वह गुटका $\omega = \frac{\pi}{3} \text{rad/s}$ rad/s आवृत्ति का सरल–आवर्त –दोलन करता है। ठीक उसी समय (t=0) पर छोटा कंकड v चाल से क्षैतिज से 45° कोण पर बिंदु P से प्रक्षेपित किया जाता है। बिंदु P की बिंदु O से दूरी (क्षैतिज) 10m है। यदि t = 1s पर कंकड गुटके पर गिरता है, तब v का मान है (g = 10m/s^2 लें) **[IIT-JEE-2012, Paper-1; 3/70, –1]**



(A*) $\sqrt{50}$ m/s (B) $\sqrt{51}$ m/s (C) $\sqrt{52}$ m/s (D) $\sqrt{53}$ m/s

Sol. Time of flight for projectile प्रक्षेप के लिये उड्डयन काल

$$T = \frac{2u\sin\theta}{g} = 1 \text{ sec.}$$

$$\frac{2u\sin 45}{g} = 1 \text{ sec.}$$

$$u = \frac{g}{\sqrt{2}}$$

$$u = \sqrt{50} \text{ m/s}$$

18*. A particle of mass m is attached to one end of a mass–less spring of force constant k, lying on a frictionless horizontal plane. The other end of the spring is fixed. The particle starts moving horizontally from its equilibrium position at time t = 0 with an initial velocity u_0. When the speed of the particle is 0.5 u_0, it collies elastically with a rigid wall. After this collision : **[JEE (Advanced)_2013, 4/60]**

(A*) the speed of the particle when it returns to its equilibrium position is u_0 .

(B) the time at which the particle passes through the equilibrium position for the first time is $t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

(C) the time at which the maximum compression of the spring occurs is $t = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

(D*) the time at which the particle passes througout the equilibrium position for the second time is $t = \frac{5\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

घर्षणहीन क्षैतिज तल पर पड़ी हुई k बल स्थिरांक की द्रव्यमान रहित स्प्रिंग के एक सिरे से m द्रव्यमान का कण जुड़ा हुआ है। इस स्प्रिंग का दूसरा सिरा बद्ध है। यह कण अपनी साम्यावस्था से समय t = 0 पर प्रारम्भिक क्षैतिज वेग u_0 से गतिमान हो रहा है। जब कण की गति 0.5 u_0 होती है, यह एक दृढ़ दीवार से प्रत्यास्थ संघट्ट करता है। इस संघट्ट के बाद –

(A) जब कण अपनी साम्यावस्था से लौटता है इसकी गति u_0 होती है।

(B) जब कण अपनी साम्यावस्था से पहली बार गुजरता है वह समय $t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ है।

(C) जब स्प्रिंग से सम्पीड़न अधिकतम होता है वह समय $t = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$ है।

(D) जब कण अपनी साम्यावस्था से दूसरी बार गुजरता है वह समय $t = \frac{5\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$ है।

Ans. **(A,D)**

Sol $x = A\sin\omega t$

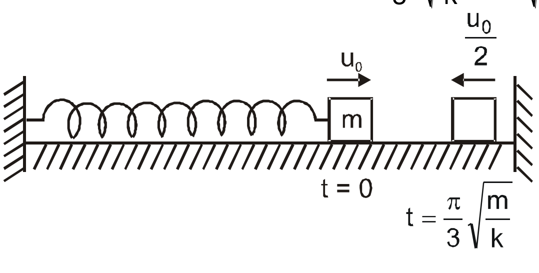
$v = A\omega\cos\omega t = \frac{\omega A}{2}$

$\Rightarrow \cos\omega t = \frac{1}{2}$

$\omega t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$

for (C) time = $\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{m}{k}}$

for (D) time = $\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{5\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$



Hindi $x = A\sin\omega t$

$v = A\omega\cos\omega t = \frac{\omega A}{2}$

$\Rightarrow \cos\omega t = \frac{1}{2}$

$\omega t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$

(C) के लिए समय $= \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$

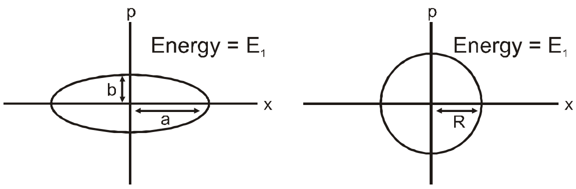
$= \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{m}{k}}$

(D) के लिए समय $= \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$= \frac{5\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}$

19.# Two independent harmonic oscillators of equal mass are oscillating about the origin with angular frequencies ω_1 and ω_2 and have total energies E_1 and E_2, respectively. The variations of their momenta p with positions x are shown in figures. If $\frac{a}{b} = n^2$ and $\frac{a}{R} = n$, then the correct equation(s) is (are) :

दो निरवलंबित बराबर द्रव्यमान के आवर्त दोलक मूल बिन्दु के परितः कोणीय आवृत्तियों ω_1 एवं ω_2 तथा कुल ऊर्जाओं E_1 तथा E_2 से दोलन कर रहे हैं। उनके सवेंगों p के स्थिति x के साथ परिवर्तन संबंध चित्रों में दर्शाये गये हैं। यदि $\frac{a}{b} = n^2$ तथा $\frac{a}{R} = n$ है, तब सही कथन है (हैं) **[JEE(Advanced) 2015 ; P-1, 4/88, –2]**



(A) $E_1\omega_1 = E_2\omega_2$ (B) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = n^2$ (C) $\omega_1\omega_2 = n^2$ (D) $\frac{E_1}{\omega_1} = \frac{E_2}{\omega_2}$

Ans. (B,D)

For first oscillator
प्रथम दोलित्र के लिए

$b = ma\omega_1$

$\frac{a}{b} = \frac{1}{m\omega_1} = n^2$

For Second oscillator
द्वितीय दोलित्र के लिए

$\frac{1}{m\omega_2} = 1$

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = n^2$ Ans. B

$E_1 = \frac{1}{2}m\omega_1^2 a^2$; $E_2 = \frac{1}{2}m\omega_2^2 R^2$

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \times n^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \times \frac{\omega_2}{\omega_1}$; $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{E_1}{\omega_1} = \frac{E_2}{\omega_2}$ Ans. D

20. A particle of unit mass is moving along the x–axis under the influence of a force and its total energy is conserved. Four possible forms of the potential energy of the particle are given in column I (a and U_0 are constants). Match the potential energies in column I to the corresponding statement(s) in column II.
[JEE(Advanced) 2015 ; 8/88, –1]

Column-I		**Column-II**	
(A)	$U_1(x) = \frac{U_0}{2}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2$	(P)	the force acting on the particle is zero at x = a.
(B)	$U_2(x) = \frac{U_0}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2$	(Q)	the force acting on the particle is zero at x = 0.
(C)	$U_3(x) = \frac{U_0}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$	(R)	the force acting on the particle is zero at x=–a.
(D)	$U_4(x) = \frac{U_0}{2}\left[\frac{x}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3\right]$	(S)	The particle experiences an attractive force towards x = 0 in the region $\lvert x \rvert < a$
		(T)	The particle with total energy $\frac{U_0}{4}$ can oscillate about the point x = –a.

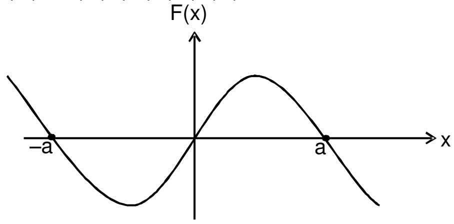
इकाई द्रव्यमान का एक कण एक बल के प्रभाव में x–अक्ष पर गति कर रहा है। कण की कुल ऊर्जा संरक्षित है। कॉलम I में कण की स्थितिज ऊर्जाओं के चार संभावित रूप दिये गये हैं (a तथा U_0 स्थिरांक हैं)। कॉलम I में दी गयी स्थितिज ऊर्जाओं का कॉलम II में दिये कथन/कथनों से उचित मिलान कीजिए।

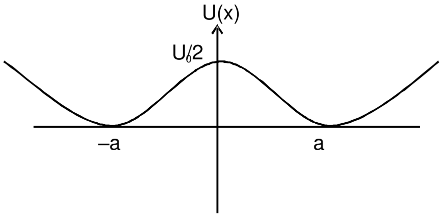
कॉलम-I		**कॉलम-II**	
(A)	$U_1(x) = \frac{U_0}{2}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2$	(P)	कण पर कार्य करने वाला बल x = a पर शून्य है।
(B)	$U_2(x) = \frac{U_0}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2$	(Q)	कण पर कार्य करने वाला बल x = 0 पर शून्य है।
(C)	$U_3(x) = \frac{U_0}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$	(R)	कण पर कार्य करने वाला बल x = –a पर शून्य है।
(D)	$U_4(x) = \frac{U_0}{2}\left[\frac{x}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3\right]$	(S)	क्षेत्र $\lvert x \rvert < a$ में कण x = 0 की ओर आकर्षण बल का अनुभव करता है।
		(T)	$\frac{U_0}{4}$ कुल ऊर्जा वाला कण x = –a बिंदु के परितः दोलन कर सकता है।

Ans. **(A)** $\rightarrow$ P,Q,R,T **(B)** $\rightarrow$ Q,S **(C)** P,Q,R,S **(D)** P,R,T

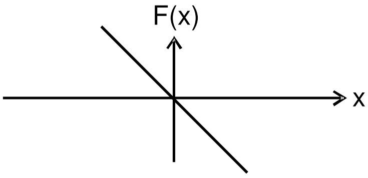
Sol. **(A)** $F_x = \frac{-dU}{dx} = -\frac{2U_0}{a^3}\,[x-a]\ \ [x]\ \ [x+a]$

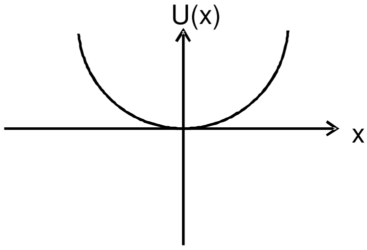
(A)$\rightarrow$ (P) (Q) (R) (T)





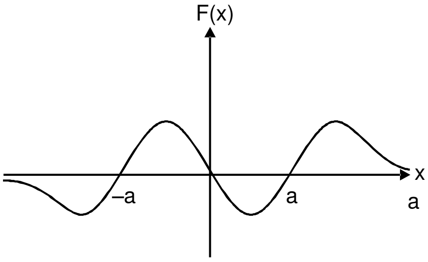
(B) $F_x = \frac{-dU}{dx} = -U_0\left(\frac{x}{a}\right)$

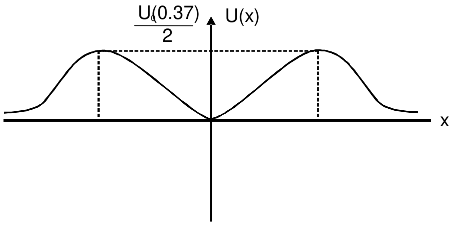




(C) $F_x = -\frac{dU}{dx}$

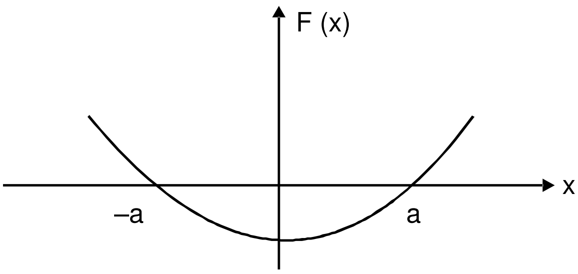
$= U_0 \; \frac{e^{-x^2/a^2}}{a^3} \; [x][x - a]\,[x + a]$



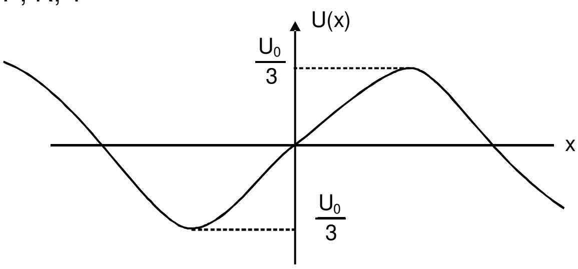


(D) $F_x = -\frac{dU}{dx} =$

$= -\frac{U_0}{2a^3}[(x-a)(x+a)]$



P, R, T



21. A block with mass M is connected by a massless spring with stiffness constant k to a rigid wall and moves without friction on a horizontal surface. The block oscillates with small amplitude A about an equilibrium position x_0. Consider two cases : (i) when the block is at x_0 ; and (ii) when the block is at $x = x_0 + A$. In both the cases, a particle with mass m (< M) is softly placed on the block after which they stick to each other. Which of the following statement(s) is(are) true about the motion after the mass m is placed on the mass M ?

(A*) The amplitude of oscillation in the first case changes by a factor of $\sqrt{\frac{M}{m+M}}$, whereas in the second case it remains unchanged

(B*) The final time period of oscillation in both the cases is same

(C) The total energy decreases in both the cases

(D*) The instantaneous speed at x_0 of the combined masses decreases in both the cases

एक द्रव्यमान–रहित स्प्रिंग, जिसका द्रढ़ता गुणांक (stiffness constant) k है, के एक छोर पर M द्रव्यमान का एक गुटका जुड़ा है, तथा दूसरे छोर को द्रढ़ दीवार से जोड़ा गया है। यह गुटका एक समतल घर्षण–रहित सतह पर एक संतुलित स्थिति x_0 के गिर्द छोटे आयाम A से दोलन करता है। यहाँ दो परिस्थितियां मानिए : (i) जब गुटका x_0 पर है और (ii) जब गुटका $x = x_0 + A$ पर है। दोनों परिस्थितियों में द्रव्यमान m (< M) के एक कण को गुटके पर धीरे से इस प्रकार रखा जाता है की वह तुरंत गुटके से चिपक जाता है। कण को गुटके के ऊपर रखने के बाद गति के बारे में निम्नलिखित में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं ?

(A) पहली परिस्थिति में दोलन का आयाम $\sqrt{\frac{M}{m+M}}$ भाज्य (factor) से परिवर्तित होता है, जबकि दूसरी परिस्थिति में यह अपरिवर्तित रहता है।

(B) दोनों परिस्थितियों में दोलन का अंतिम समयकाल समान है।

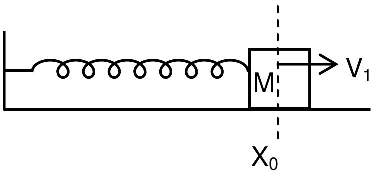
(C) दोनों परिस्थितियों में सम्पूर्ण ऊर्जा कम हो जाती है।

(D) सम्मिलित द्रव्यमानों की x_0 पर तात्क्षणिक गति दोनों परिस्थितियों में कम हो जाती है।

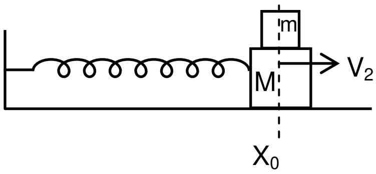
Ans. **(ABD)**

Sol. Case-1

Just before m is placed

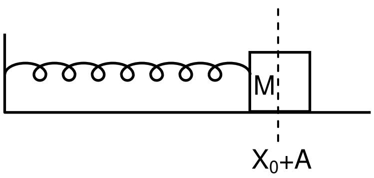


Just after m is placed

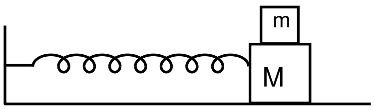


Case-2

Just before m is placed

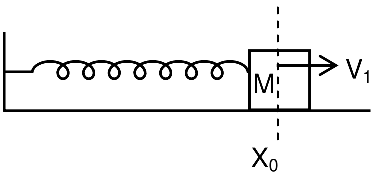


Just after m is placed

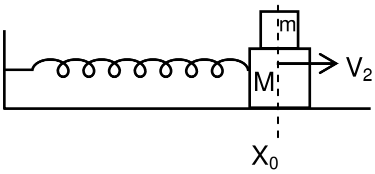


Case-I

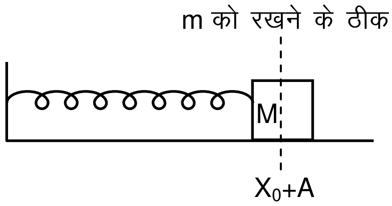
m को रखने के ठीक पहले

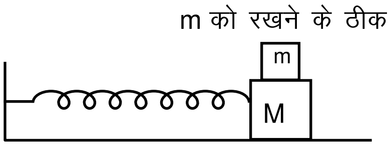


m को रखने के ठीक बाद



Case-II





In case-1 में

$MV_1 = (M + m)V_2$

$V_2 = \left(\frac{M}{M+m}\right)V_1$, $\sqrt{\frac{k}{M+m}}\,A_2 = \left(\frac{M}{M+m}\right)\sqrt{\frac{k}{M}}\,A_1$

$A_2 = \sqrt{\frac{M}{M+m}}\,A_1$

In case-2 में

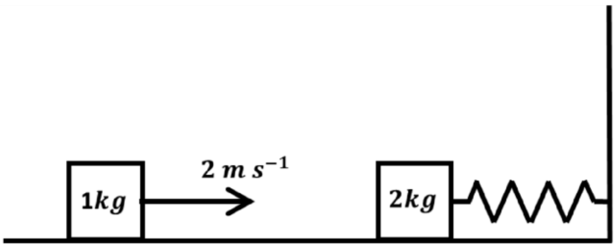
$A_2 = A_1$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{K}}$ in both case. दोनों स्थितियों में

Total energy decreases in first case where as remain same in 2nd case.
Instantaneous speed at x_0 decreases in both case.
प्रथम स्थिति में कुल ऊर्जा घटती है जबकि द्वितीय स्थिति में नियत रहती है।
x_0 पर तात्क्षणिक चाल दोनों स्थितियों में घटती है।

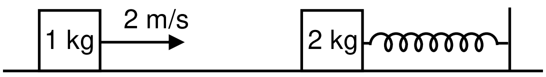
22. A spring-block system is resting on a frictionless floor as shown in the figure. The spring constant is 2.0 Nm^{-1} and the mass of the block is 2.0 kg. Ignore the mass of the spring. Initially the spring is in an unstretched condition. Another block of mass 1.0 kg moving with a speed of 2.0 ms^{-1} collides elastically with the first block. The collision is such that the 2.0 kg block does not hit the wall. The distance, in metres, between the two blocks when the spring returns to its unstretched position for the first time after the collision is _________. **[JEE (Advanced) 2018, P-1, 3/60]**

एक कमानी–गुटका निकाय (spring-block system) एक घर्षण रहित फर्श (frictionless floor) पर विरामावस्था में है, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। कमानी स्थिरांक (spring constant) 2.0 Nm^{-1} है और गुटके का द्रव्यमान (mass) 2.0 kg है। कमानी के द्रव्यमान की उपेक्षा कीजिए। शुरूआत मे कमानी अतनित (unstretched) अवस्था में है। एक दूसरा गुटका , जिसका द्रव्यमान 1.0 kg है और चाल 2.0 ms^{-1} है, पहले गुटके से प्रत्यास्थ संघट्ट (elastic collision) करता है। इस संघट्ट के बाद 2.0 kg का गुटका दीवार से नहीं टकराता है। जब कमानी संघट्ट के बाद पहली बार अपनी अतानित स्थिति में वापस आती है , तब दोंनो गुटकों के बीच की दूरी _____________ मीटर होगी।

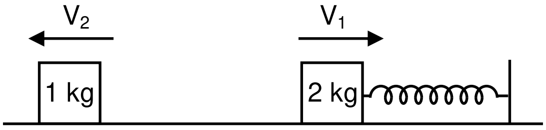


Ans. 2.09

Sol. **Just Before Collision टक्कर के पहले**



Just After Collision टक्कर के बाद



$V_1 + V_2 = 2$ .....(1)

$2V_1 - V_2 = 4$ .....(2)

$3V_1 = 4 \Rightarrow V_1 = \frac{4}{3}$ $\qquad V_2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ m/s

$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{2}} = \pi$ sec.

Distance दूरी $= \pi V_2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{22}{7}\right)m = \frac{44}{21}m = 2.09$

PART - II : JEE (MAIN) / AIEEE PROBLEMS (PREVIOUS YEARS)

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. The maximum velocity of a particle, executing simple harmonic motion with an amplitude 7 mm, is 4.4 m/s. The period of oscillation is : **[AIEEE 2006; 3/165, –1]**

7 मिमी. आयाम से एक सरल आवर्त गति करते हुए एक कण का अधिकतम वेग 4.4 मी/से है। दोलन काल है :

(1) 100 s (2*) 0.01 s (3) 10 s (4) 0.1 s

Sol. $A\omega = v_{max}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi A}{v_{max}} = 0.01$ sec.

2*. A coin is placed on a horizontal platform which undergoes vertical simple harmonic motion of angular frequency ω.The amplitude of oscillation is gradually increased. The coin will leave contact with the platform for the first time : **[AIEEE 2006; 3/165, –1]**

एक क्षैतिज प्लेटफॉर्म पर एक सिक्का रखा है। प्लेटफार्म ω कोणीय आवृत्ति से ऊर्ध्वाधर सरल आवर्त गति कर रहा है। दोलन का आयाम धीरे–धीरे बढ़ाया जाता है। प्रथम बार सिक्का प्लेटफॉर्म से स्पर्श छोड़ेगा :

(1*) at the highest position of the platform (2) at the mean position of the platform

(3*) for an amplitude of $\frac{g}{\omega^2}$ (4) for an amplitude of $\frac{g^2}{\omega^2}$

(1*) प्लेटफार्म की उच्चतम अवस्था पर (2) प्लेटफार्म की मध्य अवस्था पर

(3*) $\frac{g}{\omega^2}$ के आयाम पर (4) $\frac{g^2}{\omega^2}$ के आयाम पर

Sol. $A\omega^2 = g \Rightarrow A = g/\omega^2$

3. The displacement of an object attached to a spring and executing simple harmonic motion is given by $x = 2 \times 10^{-2}\ \cos\pi t$ metres. The time at which the maximum speed first occurs is:
एक स्प्रिंग से जुड़ी तथा सरल आवर्त गति करने वाली एक वस्तु का विस्थापन $x = 2 \times 10^{-2}\ \cos\pi t$ मीटर से दिया जाता है। समय जिस पर पहली बार अधिकतम चाल प्रकट होती है, है **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**

(1*) 0.5 s (2) 0.75 s (3) 0.125 s (4) 0.25 s

Sol. $|v| = (2 \times 10^{-2})\ (\pi)\sin\pi t$
For |v| to be maximum $\sin\pi t = 1$
|v| के अधिकतम होने के लिए $\sin\pi t = 1$

$\pi t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots\ t = \frac{1}{2}$ s.

4. A point mass oscillates along the x-axis according to the law $x = x_0 \cos(\omega t - \pi/4)$. If the acceleration of the particle is written as , $a = A\cos(\omega t + \delta)$, then : **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**
एक बिन्दु द्रव्यमान नियम $x = x_0 \cos(\omega t - \pi/4)$ के अनुसार x-अक्ष के अनुदिश कम्पन करता है। यदि कण का त्वरण निम्न प्रकार लिखा जाता है, $a = A\cos(\omega t + \delta)$, तो

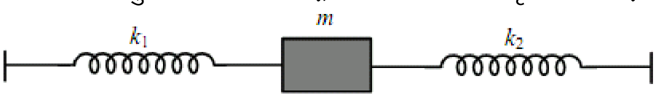
(1) $A = x_0,\ \delta = -\pi/4$ (2) $A = x_0\omega^2,\ \delta = -\pi/4$ (3) $A = x_0\omega^2,\ \delta = -\pi/4$ (4*) $A = x_0\omega^2,\ \delta = 3\pi/4$

Sol. $x = x_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$, $v = -x_0\ \omega\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

$a = -x_0\omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$, $a = x_0\omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} + \pi\right)$

$a = x_0\omega^2.\ \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$

5.# Two springs, of force constants k_1 and k_2, are connected to a mass m as shown. The frequency of oscillation of mass is f. If both k_1 and k_2 are made four times their original values, the frequency of oscillation becomes: **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**
बल नियतांक k_1 तथा k_2 की दो स्प्रिंगें द्रव्यमान m से चित्रानुसार जुड़ी है। द्रव्यमान के दोलन की आवृत्ति f है। यदि k_1 तथा k_2 दोनों को प्रारम्भिक मान का चार गुना कर दिया जाए, तो दोलन की आवृत्ति हो जाएगी।



(1) $f/2$ (2) $f/4$ (3) 4f (4*) $2f$

Sol. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$, $f_{new} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k_1 + 4k_2}{m}} = 2f$.

6. A particle of mass m executes simple harmonic motion with amplitude a and frequency υ. The average kinetic energy during its motion from the position of equilibrium to the end is : **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**
द्रव्यमान m का एक कण, आयाम a तथा आवृत्ति υ से सरल आवर्त गति करता है। इसकी माध्य स्थिति से एक सिरे तक गति के दौरान औसत गतिज ऊर्जा है :

(1*) $\pi^2\ ma^2\upsilon^2$ (2) $\frac{1}{4}ma^2\upsilon^2$ (3) $4\pi^2\ ma^2\upsilon^2$ (4) $2\pi^2\ ma^2\upsilon^2$

Sol. $K_{av} = \dfrac{\int_0^{T/4}\frac{1}{2}m[a\omega\cos(\omega t)]^2 dt}{\int_0^{T/4} dt} = \dfrac{ma^2\omega^2}{2.\frac{T}{4}}\int_0^{T/4}\cos^2(\omega t)dt = \dfrac{2ma^2\omega^2}{T}.\dfrac{T}{8} = \dfrac{1}{4}ma^2\omega^2$

$= \frac{1}{4}ma^2(2\pi\upsilon)^2 = \pi^2\ ma^2\upsilon^2$.

7.* If x, v and a denote the displacement, the velocity and the acceleration of a particle executing simple harmonic motion of time period T, then, which of the following does not change with time?
यदि x, v तथा a क्रमशः आवर्तकाल T से सरल आवर्त गति करते किसी कण के विस्थापन, वेग तथा त्वरण को निरूपित करते हैं, तब समय के साथ निम्नलिखित में से किसमें परिवर्तन नहीं होता है ? **[AIEEE 2007; 3/120, –1]**

(1*) $\frac{aT}{x}$ (2) $aT + 2\pi v$ (3) $\frac{aT}{v}$ (4*) $a^2T^2 + 4\pi^2v^2$

Sol. $x = A \sin \omega t$
$v = A\, \omega \cos \omega t$
$a = -A\omega^2 \sin \omega t$

(1) $\frac{aT}{x} = \left(\frac{-A\omega^2 \sin\omega t}{A\sin \omega t}\right)T = -\omega^2T = -2\pi\omega$

(2) $aT + 2\pi v = -A\omega^2\, T \sin \omega t + 2\pi.\, A\omega \cos \omega t$

(3) $\frac{aT}{V} = \frac{-A\omega^2 \sin\omega t \times T}{A\omega\cos\omega t}$

(4) $a^2T^2 + 4\pi^2\, v^2 = +\ A^2\, \omega^4\, T^2 \sin^2\omega t + 4\pi^2A^2\omega^2 \cos^2\omega t = +\ A^2\, \omega^4 \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 \sin^2\omega t + 4\pi^2A^2\omega^2 \cos^2\omega t =$

$4\pi^2A^2\omega^2$

8. A mass M, attached to a horizontal spring, executes SHM with a amplitude A_1. When the mass M passes through its mean position then a smaller mass m is placed over it and both of them move together with amplitude A_2. The ratio of $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ is : **[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

एक क्षैतिज कमानी से बँधा एक द्रव्यमान M आयाम A_1 से सरल आवर्त गति कर रहा है। जब द्रव्यमान M अपनी माध्य अवस्था से गुजर रहा है, तब एक छोटा द्रव्यमान m इसके ऊपर रख दिया जाता है और अब दोंनो आयाम A_2 से गति करते है। $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ का अनुपात है :

(1) $\frac{M}{M+m}$ (2) $\frac{M+m}{M}$ (3) $\left(\frac{M}{M+m}\right)^{1/2}$ (4*) $\left(\frac{M+m}{M}\right)^{1/2}$

Ans. **(4)**
Sol. C.O.L.M.
रेखीय संवेग संरक्षण से (C.O.L.M.)

$MV_{max} = (m + M)V_{new}$, $V_{max} = A_1\omega_1$

$V_{new} = \frac{MV_{max}}{(m+M)}$

Now अतः, $V_{new} = A_2.\omega_2$

$\frac{M.A_1}{(m+M)}\sqrt{\frac{K}{M}} = A_2\sqrt{\frac{K}{(m+M)}}$

$A_2 = A_1\sqrt{\frac{M}{(m+M)}}$ $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{m+M}{M}\right)^{1/2}$ **Ans.**

9. If a spring of stiffness 'k' is cut into two parts 'A' and 'B' of length $\ell_A : \ell_B = 2 : 3$, then the stiffness of spring 'A' is given by : **[AIEEE 2011, 11 May; 4/120, –1]**
यदि बल नियतांक 'k' वाली एक स्प्रिंग को लम्बाई $\ell_A : \ell_B = 2 : 3$, के अनुपात वाले दो भागों 'A' और 'B' में काटा जाता है, तब स्प्रिंग 'A' का बल नियतांक क्या होगा :

(1) $\frac{3k}{5}$ (2) $\frac{2k}{5}$ (3) k (4*) $\frac{5k}{2}$.

Ans. **(4)**

Sol. $\ell_A = \frac{2\ell}{5}$, $\ell_B = \left(\frac{3\ell}{5}\right)$

$K\ell = K_A\ell_A = K_B\ell_B$

$K\ell = K_A\left(\frac{2\ell}{5}\right)$

$K_A = \frac{5K}{2} \Rightarrow K_B = \frac{5K}{3}$.

10. Two particles are executing simple harmonic motion of the same amplitude A and frequency ω along the x-axis. Their mean position is separated by distance X_0 ($X_0 > A$). If the maximum separation between them is $(X_0 + A)$, the phase difference between their motion is : **[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

x- अक्ष पर एकसमान आयाम A और आवृत्ति ω से दो कण सरल आवर्त गति कर रहे हैं। उनकी माध्य अवस्था के बीच दूरी X_0 ($X_0 > A$) हैं। यदि उनके बीच अधिकतम दूरी $(X_0 + A)$ हैं, तब उनकी गति में कलान्तर है:

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2*) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

Ans. (2)

Sol. $x_1 = A\sin(\omega t + \phi_1)$

$x_2 = A\sin(\omega t + \phi_2)$

$$x_1 - x_2 = A\left[2\sin\left[\omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right]\sin\left[\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right]\right]$$

$$A = 2A\sin\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$$

$\frac{\phi_1-\phi_2}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \phi_1 = \frac{\pi}{3}$ **Ans.**

11. If a simple pendulum has significant amplitude (up to a factor of 1/e of original) only in the period between t = 0s to t = τs, then τ may be called the average life of the pendulum. When the spherical bob of the pendulum suffers a retardation (due to viscous drag) proportional to its velocity, with 'b' as the constant of proportionality, the averatge life time of the pendulum is (assuming damping is small) in seconds :

यदि एक सरल दोलक का समय t = 0s एवं t = τs, के बीच एक सार्थक आयाम (अपने मूल आयाम के 1/e गुणक तक) रहता है तब τ को दोलक का औसत काल कहा जा सकता है। जब दोलक का गोलीय बॉब अपने वेग के समानुपाती मंदन (श्यान कर्षण के कारण) को सहता है, जहाँ 'b' समानुपाती गुणांक है, तब दोलक का औसत आयुकाल सेकण्ड में है (यह मान लें कि अवमंदन अल्प है) : **[AIEEE 2012 ; 4, –1]**

(1) $\frac{0.693}{b}$ (2) b (3) $\frac{1}{b}$ (4*) $\frac{2}{b}$

Ans. (4)

Sol. $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$

$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$ here b is demping coefficient यहाँ b मंदक गुणांक है।

This has solution of type

$x = e^{\lambda t}$ substituting this

समीकरण के हल $x = e^{\lambda t}$ की तरह है। इसका मान रखने पर

$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

on solving for x, we get

x के लिए हल करने पर

$x = e^{-\frac{b}{2m}t}$ a cos (ω_1 t – α)

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ where यहाँ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\lambda = +\frac{b}{2}$

So, average life अतः औसत आयु काल = $\frac{2}{b}$

12. The amplitude of a damped oscillator decreases to 0.9 times its original magnitude is 5s. In another 10s it will decrease to α times its original magnitude, where α equals.

(1) 0.7 (2) 0.81 (3*) 0.729 (4) 0.6

एक मन्दित दोलित्र का आयाम 5s में अपने मूल परिमाण से घटकर मूल परिमाण का 0.9 गुना हो जाता है। एक और 10s में यह घटकर मूल परिमाण का α गुना हो जाएगा, जहाँ α का मान है : **[JEE-Mains 2013, 4/120]**

(1) 0.7 (2) 0.81 (3*) 0.729 (4) 0.6

Sol. $A = A_0 e^{-\frac{bt}{2m}}$

after 5 second

5 सैकण्ड पश्चात्

$0.9A_0 = A_0 e^{-\frac{b(5)}{2m}}$ ...(i)

After 10 more second

और 10 सैकण्ड पश्चात्

$A = A_0 e^{-\frac{b(15)}{2m}}$ ...(ii)

From (i) & (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

$A = 0.729\ A_0$ **Hence Ans. (3)**

13. A particle moves with simple harmonic motion in a straight line. In first τ s, after starting from rest it travels a distance a, and in next τ s it travels 2a, in same direction, then : **[JEE MAIN 2014; 4, –1]**

(1) amplitude of motion is 3a (2) time period of oscillations is 8τ

(3) amplitude of motion is 4a (4*) time period of oscillations is 6τ

एक कण एक सरल रेखा में सरल आवर्त गति से गतिशील है। यह विरामावस्था से प्रारम्भ कर प्रथम τ सेकण्ड़ में दूरी a और अगले τ सेकण्ड़ में दूरी 2a उसी दिशा में तय करता है। तब :

(1) गति का आयाम 3a है। (2) दोलनों का आवर्त काल 8τ है।

(3) गति का आयाम 4a है। (4*) दोलनों का आवर्त काल 6τ है।

Ans. **(4)**

Sol. $x = A\cos\omega t$

displacement in t time = $A - A\cos\omega t$

t समय में विस्थापन = $A - A\cos\omega t$

for $t = \tau$ के लिए $A[1 - \cos\omega\tau] = a$

for $t = 2\tau$ के लिए $A[1 - \cos 2\omega\tau] = 3a$

$$\frac{1-\cos\omega\tau}{1-\cos 2\omega\tau} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1-\cos\omega\tau}{2\sin^2\omega\tau} = \frac{1}{3}$$

Say माना x = cosωt

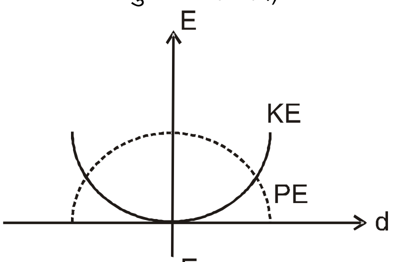
$$\frac{1-x}{2(1-x^2)} = \frac{1}{3}$$

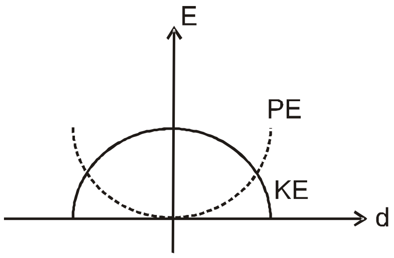
$$\Rightarrow \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{3}$$

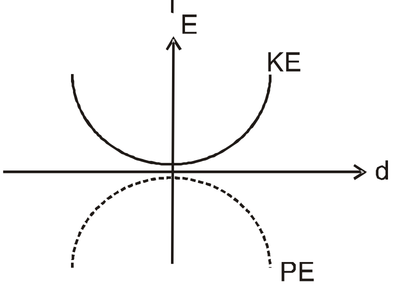
$$\Rightarrow 3 = 2 + 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} = \cos \omega\tau$$

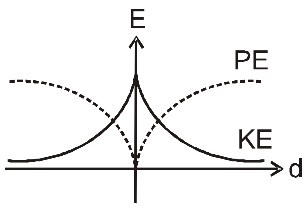
$$A = 2a\ , \quad \omega\tau = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}\tau = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow T = 6\tau$$

14. For a simple pendulum, a graph is plotted between its kinetic energy (KE) and potential energy (PE) against its displacement d. Which one of the following represents these correctly ?
(graphs are schematic and not drawn to scale) **[JEE(Main)-2015; 4/120, –1]**
किसी सरल लोलक के लिये, उसके विस्थापन d तथा उसकी गतिज ऊर्जा के बीच और विस्थापन d तथा उसकी स्थितिज ऊर्जा के बीच ग्राफ खींचे गये है। निम्नांकित में से कौनसा ग्राफ (आलेख) सही है ? (यहाँ ग्राफ केवल व्यवस्था आरेख है और स्केल के अनुसार नहीं है।)

(1)


(2*)


(3)


(4)


Ans. **(2)**

Sol. K.E. is maximum at mean position, whereas P.E. is minimum.
At extreme position, K.E. is minimum and P.E. is maximum.
माध्य स्थिति पर गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी, जबकि स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होगी .
चरम स्थिति पर गतिज ऊर्जा न्यूनतम होगी, जबकि स्थितिज ऊर्जा अधिकतम होगी .

15. A particle performs simple harmonic motion with amplitude A. Its speed is trippled at the instant that it is at distance 2A/3 from equilibrium position. The new amplitude of the motion is.
एक कण A आयाम से सरल आवर्त दोलन कर रहा है। जब यह अपने मूल स्थान से पर 2A/3 पहुँचता है, तब अचानक इसकी गति तिगुनी कर दी जाती है। तब इसका नया आयाम है **[JEE(Main)-2016; 4/120, –1]**

(1) 3A (2) $\sqrt{3}$ A (3) $\frac{7A}{3}$ (4) $\frac{A}{3}\sqrt{41}$

Ans. **(3)**

Sol. $v = \omega\sqrt{A^2 - \left(\frac{2A}{3}\right)^2}$

$v = \sqrt{5}\,\frac{A\omega}{3}$

$v_{new} = 3v = \sqrt{5}\,A\omega$

So the new amplitude is given by

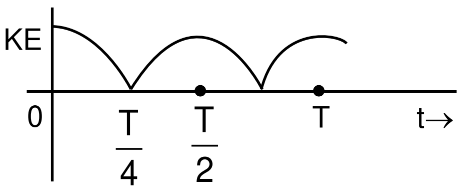
अतः नया आयाम होगा

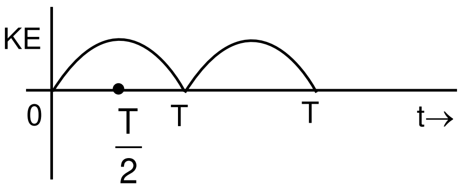
$v_{new} = \omega\sqrt{A_{new}{}^2 - x^2} \Rightarrow \sqrt{5}\,A\omega = \omega\sqrt{A_{new}{}^2 - \left(\frac{2A}{3}\right)^2}$

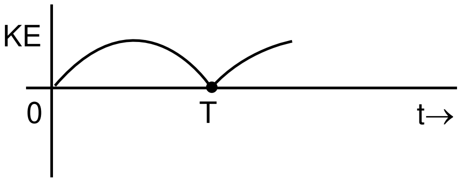
$A_{new} = \frac{7A}{3}$

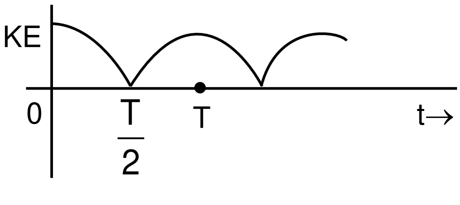
16. A particle is executing simple harmonic motion with a time period T. At time = 0, it is at its position of equilibrium. The kinetic energy-time graph of the particle will look like : **[JEE Main 2017, 4/120, –1]**

एक कण आवर्तकाल T से सरल आवर्त गति कर रहा है। समय t = 0 पर वह साम्यवस्था की स्थिति में है। निम्न में से कौनसा ग्राफ समय के साथ गतिज ऊर्जा का सही दर्शाता है।

(1*) 

(2) 

(3) 

(4) 

Ans. **(1)**

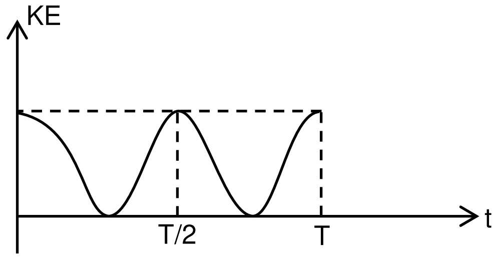
Sol. $x = A\sin(\omega t + \phi)$

$\phi = 0, \pi$

$x = \pm A\sin\omega t$

$KE = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right)$

$= \frac{1}{2}KA^2\cos^2\omega t$



NOTE : But as per options given, best possible answer will be option (1)

17. A sliver atom in a solid oscillates in simple harmonic motion in some direction with a frequency of 10^{12}/sec. What is the force constant of the bonds connecting one atom with the other? (Mole wt. of siver =108 and Avagadro number = 6.02×10^{23} gm mole^{-1}) **[JEE (Main) 2018; 4/120, –1]**

किसी ठोस में चांदी का एक परमाणु 10^{12}/sec की आवृत्ति से किसी दिशा में सरल आवर्त गति करता है। एक परमाणु को दूसरे परामाणु से जोडने वाले बंध का बल नियतांक कितना होगा ? (चांदी का आण्विक भार = 108 और अवागाद्री (Avagadro) संख्या = 6.02×10^{23} gm mole^{-1})

(1) 2.2 N/m (2) 5.5 N/m (3) 6.4 N/m (4*) 7.1 N/m

Ans. **(4)**

Sol. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$\Rightarrow$ $k = 4\pi^2 m \times f^2$

$k = 4\pi^2 \times \frac{108 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}} \times f^2$

$= \frac{4 \times \pi^2 \times 108}{6.02} \times \frac{10^{24} \times 10^{-3}}{10^{23}}$

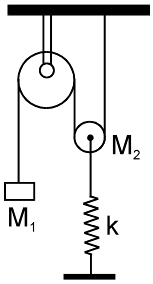
$= 7.1$ N/m

High Level Problems (HLP)

SUBJECTIVE QUESTIONS

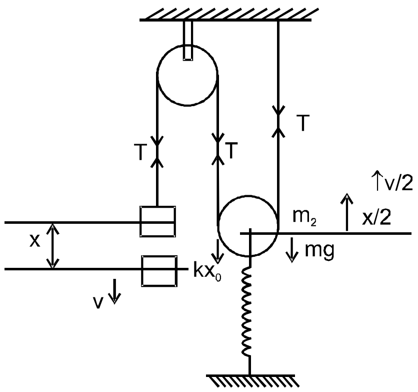
विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1.# What would be the period of the free oscillations of the system shown here if mass M_1 is pulled down a little force constant of the spring is k, mass of fixed pulley is negligible and movable pulley is smooth
प्रदर्शित निकाय के मुक्त दोलनों का आवर्तकाल क्या होगा यदि M_1 द्रव्यमान को थोड़ा सा नीचे विस्थापित किया जाये। स्प्रिंग का बल नियतांक k है, स्थिर घिरनी का द्रव्यमान नगण्य है, और चलित घिरनी चिकनी है।



Ans. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M_2 + 4M_1}{k}}$

Sol.



(i) Equilibrium position determination साम्यवस्था स्थिति निर्धारण

$M_1g = T \rightarrow$ (from FBD of M_1) (M_1 के मु. व. रे. से)

$2T = M_2g + kx_0$ (from FBD of M_2) (M_2 के मु. व. रे. से)

$\therefore\ 2M_1g = M_2g + kx_0$

$\therefore\ kx_0 = 2M_1g - M_2g$

(ii) Displace block M_1 by small disp. x by वस्तु M_1 को छोटे विस्थापन x से विस्थापित करने पर

At new displaced position नयी विस्थापित स्थिति

$$-Mgx + \frac{1}{2}M_1V^2 + \frac{1}{2}M_2\left(\frac{v}{2}\right)^2 + M_2g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}K\left(x_0 + \frac{x}{2}\right)^2 = C$$

Differentiating equation समीकरण का अवकलन करने पर

$$-M_1g\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}M_1\,2v\frac{dv}{dt} + \frac{M_2}{8}2v\frac{dv}{dt} + \frac{M_2g}{2}\frac{dx}{dt} + \frac{K}{2}2\left(x_0 + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -M_1g + M_1a + \frac{M_2a}{4} + \frac{M_2g}{2} + \frac{K}{2}\left(x_0 + \frac{x}{2}\right) = 0 \qquad \left(\text{where जहाँ } a = \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow -M_1g + \frac{M_2g}{2} + M_1a + \frac{M_2a}{4} + \frac{Kx_0}{2} + \frac{Kx}{4} = 0$$ (from equilibrium साम्यावस्था से –

$M_1g + \frac{M_2g}{2} + \frac{Kx_0}{2} = 0)$

Hence अत:, $\frac{4M_1 + M_2}{4}\ a = \frac{-Kx}{4}$

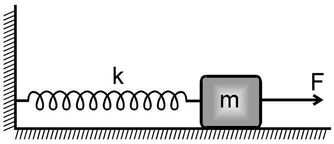
$\therefore \quad a = -\left(\frac{K}{4M_1 + M_2}\right)x \qquad \omega^2 = \frac{K}{(4M_1 + M_2)}$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{(4M_1 + M_2)}}\ ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\therefore \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{4M_1 + M_2}{K}}$

2.# A constant force produces maximum velocity V on the block connected to the spring of force constant K as shown in the fig. When the force constant of spring becomes 4K, then find maximum velocity of the block. Assume that initially the spring is in relaxed state.

दिये गये चित्र में K स्प्रिंग नियतांक की स्प्रिंग से जुड़े ब्लॉक पर नियत बल F लगाने पर यह ब्लॉक को अधिकतम वेग V प्रदान करता है। अगर स्प्रिंग का बल नियतांक 4 K हो जाए तो ब्लॉक का अधिकतम वेग ज्ञात कीजिए। प्रारम्भ में स्प्रिंग अपनी प्राकृतिक अवस्था में है।



Ans. V/2

Sol(1). By work energy theorem;

$w_{ext} + w_{spring} = k_f - k_i$

Let x_1, x_2 be the equilibrium distances of spring from natural length & V V' are their velocities at equilibrium positions.

Initially,

$$Fx_1 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \cdots (1)$$

and finally $$Fx_2 - \frac{1}{2}k'x_2^2 = \frac{1}{2}mv'^2 \qquad \cdots (2)$$

In both cases : force applied is same, and velocity becomes maximum when F = kx. (at equilibrium) (after which the mass will deaccelerate)

$\therefore \quad F = kx_1 = (4k)x_2$

$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{x_1}{4} \qquad (k' = 4k)$

Substituting in (2) :

$$fx_2 - \frac{1}{2}k'\,x_2^2 = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$\frac{Fx_1}{4} - \frac{1}{2}(4k)\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}[Fx_1 - \frac{1}{2}kx_1^2] = \frac{1}{2}mv'^2 \qquad \cdots (3)$$

Dividing (3)/(1) ; we get :

$$\frac{1}{4} = \frac{v'^2}{v^2} \qquad \Rightarrow \qquad v' = \frac{v}{2}$$ **Ans.**

Sol(2). $V_{max.} = V = A\omega = \frac{F}{K}\sqrt{\frac{K}{m}}$

$V' = A'\omega' = \frac{F}{K}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{V}{2}$ **Ans.**

Sol(1). कार्य ऊर्जा प्रमेय से

$w_{ext} + w_{spring} = k_f - k_i$

यहाँ x_1, x_2 क्रमशः प्रारम्भिक व अन्तिम विस्तारण है तथा v, v' क्रमशः प्रारम्भिक व अंतिम वेग है।

प्रारम्भ में $Fx_1 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv^2$ ⋯ (1)

अन्त में $Fx_2 - \frac{1}{2}k'x_2^2 = \frac{1}{2}mv'^2$ ⋯ (2)

दोनों स्थितियों में आरोपित बल समान है। तथा F = kx पर वेग अधिकतम हो जायेगा (साम्यावस्था पर)

इसके बाद द्रव्यमानों का मंदन होगा

$\therefore \quad F = kx_1 = (4k)x_2$

$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{x_1}{4}$

(2) में प्रतिस्थापन से :

$$\frac{Fx_1}{4} - \frac{1}{2}(4k)\left(\frac{x_1}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\left[Fx_1 - \frac{1}{2}kx_1^2\right] = \frac{1}{2}mv'^2 \quad \cdots (3)$$

(3)/(1) भाजित करने पर हम प्राप्त करते है

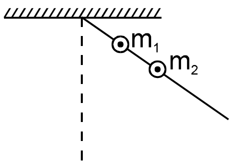
$$\frac{1}{4} = \frac{v'^2}{v^2} \Rightarrow v' = \frac{v}{2}$$ **Ans.**

Sol(2). $V_{max.} = V = A\omega = \frac{F}{K}\sqrt{\frac{K}{m}}$

$V' = A'\omega' = \frac{F}{K}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{V}{2}$ **Ans.**

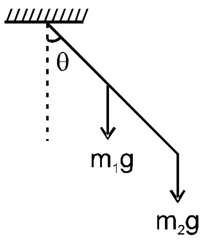
3_# Two point masses m_1 and m_2 are fixed to a light rod hinged at one end. The masses are at distances ℓ_1 and ℓ_2 respectively from the hinge. Find the time period of oscillation (small amplitude) of this system in seconds if $m_1 = m_2$, $\ell_1 = 1m$, $\ell_2 = 3m$.

दो बिन्दु द्रव्यमान m_1 तथा m_2 एक हल्की छड़ पर जुड़े हुए है एवं छड़ एक सिरे पर किलकित है। m_1 तथा m_2 किलकित बिन्दु से क्रमशः ℓ_1 तथा ℓ_2 दूरी पर स्थित है। इस निकाय के दोलन का आवर्तकाल सेकण्ड़ में ज्ञात करो। (आयम अल्प मानिए) यदि $m_1 = m_2$, $\ell_1 = 1m$ और $\ell_2 = 3m$ है।



Ans. π

Sol.



Net restoring torque about O   O के सापेक्ष कुल प्रत्यानयन बल

$= m_1g\,\ell_1 \sin\theta + m_2g\,\ell_2 \sin\theta = (m_1\ell_1 + m_2\ell_2)g \sin\theta$

for small oscillation छोटे दोलनों के लिए $\sin\theta \sim \theta$

$\Rightarrow \quad \tau_{restoring} = (m_1\ell_1 + m_2\ell_2)g\theta$

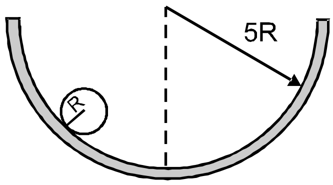
compare with $\tau = C\theta$ से तुलना करने पर

$C = (m_1\ell_1 + m_2\ell_2)g$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{(m_1\ell_1^2 + m_2\ell_2^2)}{(m_1\ell_1 + m_2\ell_2)g}} = \pi$$

4._# A solid sphere (radius = R) rolls without slipping in a cylindrical vessel (radius = 5R). Find the angular frequency of small oscillations of the sphere in s^{-1}. Take $R = \frac{1}{14}$ m and $g = 10\ m/s^2$. (axis of cylinder is fixed and horizontal)

एक ठोस गोला (त्रिज्या = R) एक बेलन (त्रिज्या = 5R) में बिना फिसले लुढकता है। ठोस गोले के अल्प दोलनों का कोणीय आवृत्ति s^{-1} में ज्ञात करे। $R = \frac{1}{14}$ m तथा $g = 10\ m/s^2$ लीजिये। (बेलन का अक्ष स्थिर और क्षैतिज है।)



Ans. 5

Sol. For pure rolling to take place,

$v = R\omega$

ω' = angular velocity of COM of sphere C about O

$= \frac{v}{4R} = \frac{R\omega}{4R} = \frac{\omega}{4}$

$\therefore \quad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{1}{4}\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \alpha' = \frac{\alpha}{4}$

or $\quad \alpha = \frac{a}{R}$ for pure rolling

where, $a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{5g\sin\theta}{7}$

as, $\quad I = \frac{2}{5}mR^2$

For small θ, $\sin\theta$ θ, being restoring in nature.

$\alpha' = -\frac{5g}{28R}\theta$

$\therefore \quad \omega = \sqrt{\left|\frac{\alpha'}{\theta}\right|} = \sqrt{\frac{5g}{28R}} = 5$

हल शुद्ध लोटनी गति के लिए,

$v = R\omega$

ω' = गोले के COM का O के परितः कोणीय वेग

$= \frac{v}{4R} = \frac{R\omega}{4R} = \frac{\omega}{4}$

$\therefore \quad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{1}{4}\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \alpha' = \frac{\alpha}{4}$

या $\quad \alpha = \frac{a}{R}$ शुद्ध लोटनी गति के लिए

जहाँ, $\quad a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{1}{mR^2}} = \frac{5g\sin\theta}{7}$

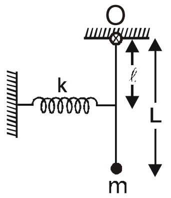
चूंकि $I = \frac{2}{5} mR^2$

अल्प θ के लिए sinθ θ, प्रकृति में (प्रत्यानयन) है।

$\alpha' = -\frac{5g}{28R}\theta \quad \therefore \quad \omega = \sqrt{\left|\frac{\alpha'}{\theta}\right|} = \sqrt{\frac{5g}{28R}} = 5$

5.# A particle of mass m is suspended at the lower end of a thin rod of negligible mass. The upper end of the rod is free to rotate in the plane of the page about a horizontal axis passing through the point O. The spring is undeformed when the rod is vertical as shown in fig. If the period of oscillation of the system is $\pi\sqrt{\frac{L}{n}}$, when it is slightly displaced from its mean position then find n. Take $k = \frac{9mgL}{\ell^2}$ and $g = 10 m/s^2$.

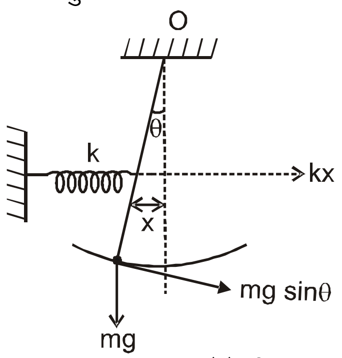
एक m द्रव्यमान का कण नगण्य द्रव्यमान की पतली छड़ के निचले सिरे से लटका है। छड़ का ऊपरी सिरा कागज के तल में O बिन्दु से पारित क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करने के लिए स्वतन्त्र है। चित्रानुसार जब छड़ ऊर्ध्वाधर स्थिति में है तो स्प्रिंग असम्पीड़ित है। यदि इसे साम्यावस्था से थोड़ा–सा विस्थापित करके छोड़ दिया जाये तो कण की गति सरल आवर्त गति है तथा दोलन का आवर्तकाल $\pi\sqrt{\frac{L}{n}}$ है तो n ज्ञात करो। $k = \frac{9mgL}{\ell^2}$ तथा $g = 10 m/s^2$ लीजिये।



Ans. 25

Sol. When the small angular displacement Given to rod

जब छड़ को लघु कोणीय विस्थापन दिया जाता है–



for small displacement छोटे विस्थापन के लिये

$x = \ell \sin\theta$

$kx = k\ell \sin\theta$

Torque about point O = $I_o\alpha$

बिन्दु O के सापेक्ष बलाघूर्ण = $I_o\alpha$

$(kx)\,\ell + mg \sin\theta\, \ell = mL^2 \alpha$

$$\alpha = \frac{(k\ell^2 + mgL)\sin\theta}{mL^2}$$

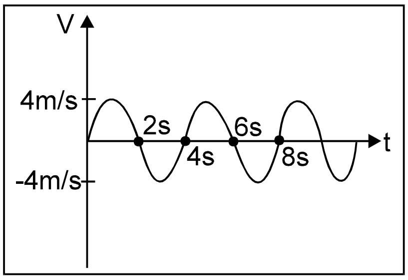
For small θ लघु θ के लिये

$$\alpha = -\left[\frac{k\ell^2 + mgL}{mL^2}\right]\theta$$

Time period आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{k\ell^2 + mgL}} = \pi\sqrt{\frac{L}{25}}$

6.# If velocity of a particle moving along a straight line changes sinusoidally with time as shown in the given graph. Find the average speed over time interval t = 0 to t = 2 (2n – 1) seconds, n being any positive integer.

अगर सीधी रेखा के अनुदिश गति करते कण का वेग समय के साथ ज्या (sin) फलन के रूप में चित्रानुसार परिवर्तित होता है तो t = 0 से t = 2 (2n – 1) सेकण्ड के दौरान कण की औसत चाल क्या होगी, जहां n कोई भी धनात्मक पूर्णांक है।



Ans. $\frac{8}{\pi}$ m/s

Sol. **Method - 1**

Average speed = $\frac{\text{total distance travelled}}{\text{total time taken}} = \frac{S}{2\ (2n-1)}$

Here $\Delta t = 2\ (2n - 1) = 4n - 2 = 4(n - 1) + 2$

From the graph it is clear that the Time period T = 4 sec.

$\therefore \quad \Delta t = (n - 1)\ T + \frac{T}{2}$

Total distance travelled in one time period is = 4A

where 'A' is amplitude

$\therefore$ Total distance travelled in Δt is

$S = (n - 1)\ 4A + 2A = (2n - 1)\ 2A$

$\therefore \quad \langle v \rangle = \frac{(2n-1)2A}{2(2n-1)} = A \quad \text{and} \quad \omega A = v_{max} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{4} A = 4$

$\Rightarrow \quad A = \frac{8}{\pi} \qquad \therefore \quad \langle v \rangle = \frac{8}{\pi}$ m/s **Ans.**

Method - 2

It can be observed from the graph, that average speed in time interval t = 0 to t = 2 sec is same as that in intervals t = 0 to t = 4 sec., t = 0 to t = 8 sec., t = 0 to t = 12 sec............

or t = 0 to t = 2 (2n – 1) seconds

The speed as function of time is

$$v = \left| 4\ \sin \frac{2\pi}{T}\ t \right| = \left| 4\ \sin \frac{2\pi}{4}\ t \right| = \left| 4 \sin \frac{\pi t}{2} \right|$$

The average speed in time interval

t = 0 to t = 2 sec is

$$\bar{v} = \frac{\int_0^2 v dt}{\int_0^2 dt} = \frac{\int_0^2 4 \sin \frac{\pi t}{2} dt}{2} = \frac{8}{\pi} \text{ m/s}$$

Sol. **Method - 1**

औसत चाल = $\dfrac{\text{कुल तय दूरी}}{\text{लिया गया कुल समय}} = \dfrac{S}{2\ (2n-1)}$

यहाँ $\Delta t = 2\ (2n - 1) = 4n - 2 = 4(n - 1) + 2$

ग्राफ से आवर्त काल $T = 4$ sec.

$\therefore \quad \Delta t = (n - 1)\ T + \dfrac{T}{2}$

एक आवर्त काल में कुल तय दूरी = 4A

यहाँ 'A' आयाम है।

$\therefore \quad \Delta t$ समय में कुल तय दूरी

$S = (n - 1)\ 4A + 2A = (2n - 1)\ 2A$

$\therefore \quad \langle v \rangle = \dfrac{(2n-1)2A}{2(2n-1)} = A$ तथा $\omega A = v_{max} = 4 \Rightarrow \dfrac{2\pi}{4} A = 4$

$\Rightarrow \quad A = \dfrac{8}{\pi} \qquad \therefore \quad \langle v \rangle = \dfrac{8}{\pi}$ m/s **Ans.**

Method - 2

ग्राफ से देख सकते हैं कि t = 0 से t = 2 सेकण्ड़ तक औसत चाल अन्तराल t = 0 से t = 4 सेकण्ड़ t = 0 से t = 8, t = 0 से t = 12 सेकण्ड़ तक की औसत चाल के समान है।

या t = 0 से t = 2 (2n – 1) सैकण्ड

समय के फलन में चाल

$$v = \left| 4 \sin \frac{2\pi}{T} t \right| = \left| 4 \sin \frac{2\pi}{4} t \right| = \left| 4 \sin \frac{\pi t}{2} \right|$$

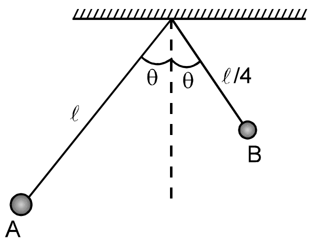
समयान्तराल में औसत चाल

t = 0 से t = 2 sec

$$\bar{v} = \frac{\int_0^2 v\,dt}{\int_0^2 dt} = \frac{\int_0^2 4 \sin \frac{\pi t}{2} dt}{2} = \frac{8}{\pi} \text{ m/s}$$

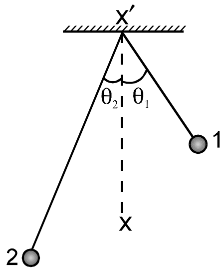
7.# Two simple pendulums A and B having lengths ℓ and $\ell/4$ respectively are released from the position as shown in figure. Calculate the time after which the release of the two strings become parallel for the first time. Angle θ is very small.

दो सरल लोलको A तथा B की लम्बाई ℓ तथा $\ell/4$ है को चित्र में प्रदर्शित स्थिति से छोड़ा जाता है। छोड़ने के बाद वह समय ज्ञात करो जब दोनों रस्सीयां पहली बार समान्तर होती है। कोण θ बहुत ही अल्प है।



Ans. $\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$

Sol.



The angular position of pendulum 1 and 2 are (taking angles to the right of reference line xx′ to be positive)

सरल लोलकों 1 तथा 2 की कोणीय स्थितियाँ (संदर्भ रेखा xx′ से दायी तरफ कोण धनात्मक है)

$\theta_1 = \theta \cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$ [where यहाँ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$]

$\theta_2 = -\theta \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$

For the strings to be parallel for the first time

पहली बार रस्सीयाँ समान्तर होने पर

$\theta_1 = \theta_2$

or या $\cos\left(\frac{4\pi}{T}t\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$

$\therefore$ $\frac{4\pi}{T}t = 2n\,\pi \pm \left(\frac{2\pi}{T}t + \pi\right)$

for n = 0, $t = \frac{T}{2}$ के लिए

for n = 1, $t = \frac{T}{6}, \frac{3T}{2}$ के लिए

$\therefore$ Both the pendulum are parallel to each other for the first time after $t = \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ **Ans.**

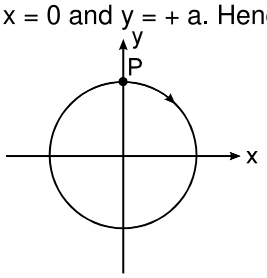
$\therefore$ पहली बार लोलको के एक दूसरे के समान्तर होने का समय $t = \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ **Ans.**

8. A particle of mass ‘m’ is moving in the x-y plane such that its x and y coordinate vary according to the law $x = a \sin \omega t$ and $y = a \cos \omega t$ where ‘a’ and ‘ω’ are positive constants and ‘t’ is time. Find
(a) equation of the path. Name the trajectory (path)
(b) whether the particle moves in clockwise or anticlockwise direction
(c) magnitude of the force on the particle at any time t.

x-y तल में m द्रव्यमान का कण इस प्रकार गतिशील है कि इसके x तथा y निर्देशांक क्रमशः $x = a \sin \omega t$ तथा $y = a \cos \omega t$ के अनुसार परिवर्तित होते हैं। यहाँ ‘a’ तथा ‘ω’ धनात्मक स्थिरांक तथा ‘t’ समय है। ज्ञात करो
(a) पथ का समीकरण तथा नाम।
(b) कण वामावर्त दिशा में गति करेगा या दक्षिणावर्त दिशा में गति करेगा ?
(c) t समय पर कण पर कार्यरत बल ?

Ans. (a) $x^2 + y^2 = a^2$, circle वृत्त
(b) The particle moves in clock wise sense. कण दक्षिणावर्त दिशा में गति करता है।
(c)The magnitude of force बल का परिमाण $= m\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = m\omega^2 a$

Sol. (a) $x^2 + y^2 = a^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = a^2$
Hence the particle moves in a circle of radius 'a' with centre at origin.
(b) At t = 0 sec, x = 0 and y = + a. Hence the particle is at P as shown in figure.

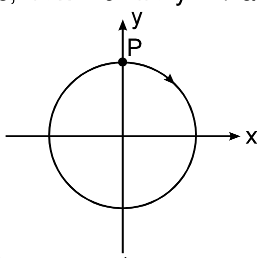


As 't' increases 'x' increases and 'y' decreases
$\therefore$ The particle moves in clock wise sense.
(c) The 'x' and 'y' components of acceleration are

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \; ; \; a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

The magnitude of force = $m\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = m\omega^2 a$

Sol. (a) $x^2 + y^2 = a^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = a^2$
अतः कण 'a' त्रिज्या वाले वृत्त पर गति करेगा
(b) अतः t = 0 sec, पर x = 0 और y = + a है। अतः कण चित्र में P बिन्दु पर है।

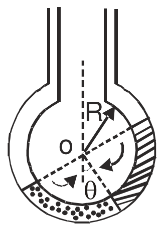


जब 't' बढ़ता है तो 'x' बढ़ता है तथा 'y' घटता है
$\therefore$ अतः कण दक्षिणावर्त गति करेगा

(c) त्वरण के 'x' तथा 'y' घटक $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \; ; \; a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$

बल का परिणाम = $m\sqrt{a_x^2 + a_y^2} = m\omega^2 a$

9.# Two non–viscous, incompressible and immiscible liquids of densities ρ and 1.5 ρ are poured into the two limbs of a circular tube of radius R and small cross–section kept fixed in a vertical plane as shown in fig. Each liquid occupies one–fourth the circumference of the tube.
दो अश्यान, असपीड़िय तथा अघुलनशील द्रव जिनका घनत्व ρ तथा 1.5 ρ है। R त्रिज्या तथा अल्प अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की ऊर्ध्वाधर नली में चित्रानुसार भरे है। प्रत्येक द्रव नली की चौथाई परिधि में भरा है।



(a) Find the angle θ that the radius to the interface makes with the vertical in equilibrium position.
कोण θ ज्ञात करो जोकि दोंनो द्रव को मिलाने वाली त्रिज्या ऊर्ध्वाधर से बनाती है।
(b) If the whole liquid column is given a small displacement from its equilibrium position, show that the resulting oscillations are simple harmonic. Find the time period of these oscillations.
यदि सम्पूर्ण द्रव को साम्यावस्था से अल्प विस्थापित कर दिया जाये तो सिद्ध करो कि परिणामी दोलन सरल आवृत्ति होंगे। इन दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात करो।

Ans. (a) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ (b) $2\pi\sqrt{\frac{R}{6.11}}$

Sol. (a) In equilibrium, pressure of same liquid at same level will be same.
साम्यावस्था में समान स्तर, पर समान तरल का दाब समान होगा

Therefore इसलिए, $P_1 = P_2$

or या $P + (1.5\,\rho\, g\, h_1) = P + (\rho\, g\, h_2)$

(P = pressure of gas in empty part of the tube)

(P = खाली नली में गैस का दाब)

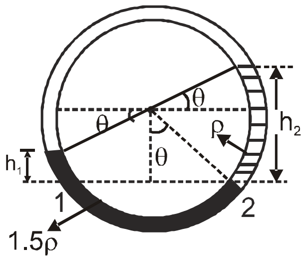
$\therefore$ $1.5\, h_1 = h_2$

$1.5\,[R\cos\theta - R\sin\theta] = \rho\,(R\cos\theta + R\sin\theta)$

or या $3\cos\theta - 3\sin\theta = 2\cos\theta + 2\sin\theta$

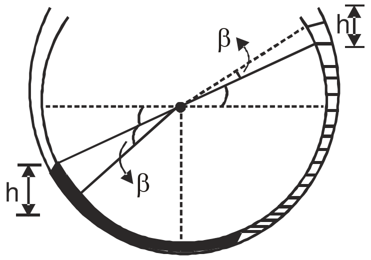
or या $5\tan\theta = 1$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$



(b) When liquids are slightly disturbed by an angle β. Net restoring pressure $\Delta P = 1.5\,\rho gh + \rho gh$ This pressure will be equal at all sections of the liquid. Therefore, net restoring torque on the whole liquid.

(b) जब तरल को हल्के से β कोण से विक्षेपित करते हैं तो कुल प्रत्यानयन दाबांतर $\Delta P = 1.5\,\rho gh + \rho gh$ है यह दाब तरल में सभी भाग में एक समान होगा। अतः तरल पर कुल प्रत्यानयन बलाघूर्ण



$h = R\sin(\theta+\beta) - R\sin\theta$

$\tau = -(\Delta P)\,(A)\,(R)$

or या , $\tau = -\,2.5\rho gh\;AR$

$= -\,2.5\rho g\;AR\,[R\sin(\theta+\beta) - R\sin\theta]$

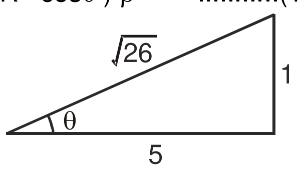
$= -\,2.5\rho g\;AR^2\,[\sin\theta\cos\beta + \sin\beta\cos\theta - \sin\theta]$

Assuming $\cos\beta = 1$ and $\sin\beta = \beta$ (given, β is small)

माना $\cos\beta = 1$ and $\sin\beta = \beta$ (दिया है, β छोटा है)

$\therefore$ $\tau = -\,(2.5\,\rho A\, gR^2\cos\theta)\,\beta$

or या $I\alpha = -\,(2.5\,\rho AgR^2\cos\theta)\,\beta$ ....(1)



Here, यहाँ $I = (m_1 + m_2)\,R^2$

$= \left[\left(\frac{\pi R}{2}.A\right)\rho + \left(\frac{\pi R}{2}\right).A\,(1.5\,\rho)\right]R^2$

$= (1.25\,\pi R^3\rho)\;A$

and और $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}} = 0.98$

Substituting in equation (1), we have
समीकरण (1) में रखने से प्राप्त होगा

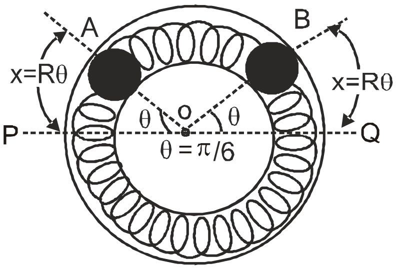
$\alpha = -\frac{(6.11)\beta}{R}$ $\Rightarrow$ angular acceleration कोणीय त्वरण $\propto$–angular displacement कोणीय विस्थापन

As angular acceleration is proportional to $-\beta$, motion is simple harmonic in nature.
अतः कोणीय त्वरण $-\beta$, के समानुपाती है, इसलिए गति सरल आवर्त गति होगी।

$$T = 2\pi\sqrt{\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{6.11}}$$

10.# Two identical balls A and B, each of mass 0.1 kg, are attached to two identical mass less springs. The spring–mass system is constrained to move inside a rigid smooth pipe bent in the form of a circle as shown in the figure. The pipe is fixed in a horizontal plane. The centres of the balls can move in a circle of radius 0.06 m. Each spring has a natural length of 0.06π metre and spring constant 0.1 N/m. Initially, both the balls are displaced by an angle $\theta = \pi / 6$ radian with respect to the diameter PQ of the circle (as shown in fig.) and released from rest.

समान द्रव्यमान 0.1 kg की दो समरूप गेंदे A व B दो समान द्रव्यमानहीन स्प्रिंगों से जुड़ी है। स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय एक वृत्तीय दृढ़ चकनी नली में चित्रानुसार गति कर सकता है। नली क्षैतिज तल में जड़वत् है। गेंदो का केन्द्र 0.06 m त्रिज्या के वृत्त में गति कर सकता है। प्रत्येक स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई 0.06π मीटर तथा स्प्रिंग बल नियतांक 0.1 N/m है। प्रारम्भ में दोंनो गेंदे $\theta = \pi/6$ रेडियन कोण से PQ व्यास के सापेक्ष विस्थापित की जाती है तथा स्थिरावस्था से छोड़ी जाती है। (चित्रानुसार)



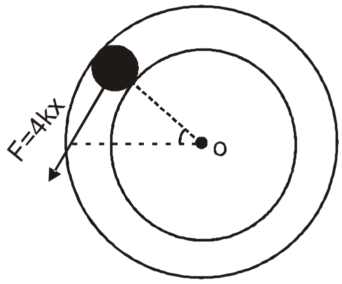
(i) Calculate the frequency of oscillation of ball B.
गेंद B के दोलनों की आवृत्ति ज्ञात करो।

(ii) Find the speed of ball A when A and B are at the two ends of the diameter PQ.
गेंद A की चाल ज्ञात करो, जब दोंनो गेंद व्यास PQ के दोंनो सिरों पर आती है।

(iii) What is the total energy of the system? निकाय की कुल ऊर्जा क्या है?

Ans. (i) $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\times 0.1}{0.1}} = \frac{1}{\pi}$ Hz (ii) V = 0.0628 (iii) 3.9×10^{-4} J

Sol. Given – Mass of each block A and B, m = 0.1kg
Radius of circle, R = 0.06 m
दिया गया है – प्रत्येक ब्लॉक A तथा B का द्रव्यमान, m = 0.1kg
वृत्त की त्रिज्या, R = 0.06 m
Natural length of spring $\ell_0 = \pi R = 0.06\ \pi$ (Half circle)
and spring constant, k = 0.1 N/m
In the stretched position elongation in each spring
$x = R\ \theta$.
Let us draw FBD of A
स्प्रिंग की सामान्य लम्बाई $\ell_0 = \pi R = 0.06\ \pi$ (आधा वृत्त)
और स्प्रिंग नियतांक , k = 0.1 N/m
विस्तारित अवस्था में प्रत्येक स्प्रिंग में विस्तार
$x = R\ \theta$.
A का FBD बनाने से



Spring in lower side is stretched by 2x and on upper side compressed by 2x. Therefore, each spring will exert a force 2kx on each ball.
Hence, a restoring force, F = 4kx will act on A in the direction shown in figure.
Restoring torque of this force about origin
यहाँ नीचे की स्प्रिंग 2x से विस्तारित तथा ऊपर की स्प्रिंग 2x से सम्पीडित हुई है, इसलिए दोनों स्प्रिंग प्रत्येक गेंद पर 2kx बल आरोपित करेगी।
अतः चित्रानुसार प्रत्यानयन बल, F = 4kx A पर दिखाई गई दिशा में कार्य करेगा।
कुल बिन्दु के परितः प्रत्यानयन बल युग्म का आघूर्ण

$$\tau = -F.R = -(4kx)R = -(4kR\theta)R$$

or या $\tau = -4kR^2 . \theta$ ....(1)

Since, $\tau \propto -\theta$, each ball executes angular SHM about origin O.
Eq. (1) can be rewritten as
चूंकि, $\tau \propto -\theta$, प्रत्येक गेंद मूल बिन्दू O के परितः कोणिय सरल आवर्त गति करेगी।
समीकरण (1) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है -

$$I\alpha = -4kR^2\theta$$

or या $(mR^2)\alpha = -4kR^2\theta$

or या $\alpha = -\left(\frac{4k}{m}\right)\theta$

$\therefore$ Frequency of oscillation दोलन आवृत्ति , $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left|\frac{\text{acceleration}}{\text{displacement}}\right|}\sqrt{\left|\frac{\text{त्वरण}}{\text{विस्थापन}}\right|} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left|\frac{\alpha}{\theta}\right|}$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}$$

Substituting the values, we have मान रखने पर

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\times0.1}{0.1}} = \frac{1}{\pi}\text{Hz}$$

Alternate वैकल्पिक : $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k'}{\mu}}$

where जहाँ $k' = 2k,\ \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} = \frac{m}{2}$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\times0.1}{0.1}} = \frac{1}{\pi}\text{Hz}$$

(ii) In stretched position, potential energy of the system is
विस्तारित अवस्था में निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$$PE = 2\ \{\frac{1}{2}k\}\{2x\}^2 = 4kx^2 \qquad \left(x = \frac{R\pi}{6}\right)$$

and in mean position, both the blocks have kinetic energy only. Hence,
माध्य स्थिति में दोनों ब्लॉक के पास केवल गतिज ऊर्जा होगी। अतः

$$KE = 2\{\frac{1}{2}mv^2_{max}\} = mv^2_{max}$$

From energy conservation
ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$PE = KE$$

$$\therefore \quad 4kx^2 = mv^2_{max}$$

$$\therefore \quad v_{max} = 2x\sqrt{\frac{k}{m}} = 2R\theta\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Substituting the values मान रखने पर

$$v_{max} = 2\,(0.06)\,(\pi / 6)\sqrt{\frac{0.1}{0.1}} = 0.02\pi$$

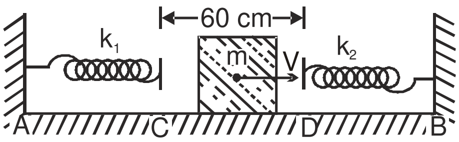
or या $\quad v_{max} = 0.0628$ m /s

(iii) Total energy of the system, E = PE in stretched position
निकाय की कुल ऊर्जा, E = PE विस्तारित अवस्था में

or या = KE at mean position KE माध्य स्थिति पर

$$E = 2\left(\frac{1}{2}mv^2_{max}\right) = (0.1)\,(0.0628)^2 \text{ J} \quad \text{or} \quad E = 3.9 \times 10^{-4} \text{ J}$$

11.# Two light springs of force constant k_1 and k_2 and a block of mass m are in one line AB on a smooth horizontal table such that one end of each spring is fixed to rigid supports and the other end is free as shown in the figure. The distance CD between the free ends of the spring is 60 cm. If the block moves along AB with a velocity 120 cm/s in between the springs, calculate the period of oscillation of the block. (k_1 = 1.8 N/m, k_2 = 3.2 N/m, m = 200 g)
चित्रानुसार k_1 तथा k_2 बल नियतांक की दो हल्की स्प्रिंग तथा m द्रव्यमान का ब्लॉक चिकनी क्षैतिज टेबल पर एक रेखा AB पर चित्रानुसार स्थित है। दोंनो स्प्रिंग के एक सिरे जड़वत् है तथा दूसरा सिरा मुक्त है। दोंनो मुक्त सिरों के बीच की दूरी CD = 60 cm है। यदि ब्लॉक को रेखा AB के अनुदिश 120 cm/s का वेग दिया जाये तो ब्लॉक के दोलन का आवर्तकाल ज्ञात करो। (k_1 = 1.8 N/m, k_2 = 3.2 N/m, m = 200 g)



Ans. 2.82 s

Sol. Between C and D block will move with constant speed of 120 cm/s. Therefore, period of oscillation will be (starting from C).
C तथा D के बीच ब्लॉक अचर चाल 120 cm/s. से गतिमान होगा, अतः दोलन का आवर्त काल (C से शुरू करते हुए)

$$T = t_{CD} + \frac{T_2}{2} + t_{DC} + \frac{T_1}{2}$$

Here यहाँ , $\quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ and और $\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$

and और $\quad t_{CD} = t_{DC} = \frac{CD}{v} = \frac{60}{120} = 0.5$ s

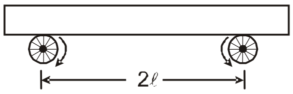
$$\therefore \quad T = 0.5 + \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{0.2}{3.2}} + 0.5 + \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{0.2}{1.8}}$$

(m = 200 g = 0.2 kg)

$$T = 2.82 \text{ s}$$

12.# Two wheels which are rotated by some external source with constant angular velocity in opposite directions as shown in figure. A uniform plank of mass M is placed on it symmetrically. The friction co-efficient between each wheel and the plank is μ. Find the frequency of oscillations, when plank is slightly displaced along its length and released.

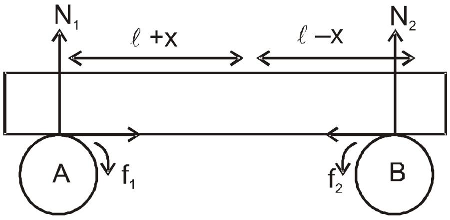
चित्रानुसार M द्रव्यमान की समरूप तख्ता क्षैतिज तथा सममित रूप से दो विपरीत दिशा में नियत कोणीय वेग से किसी बाह्य कारक द्वारा घूमते हुए पहियों पर रखी है। दोनों पहियों तथा तखता के मध्य घर्षण गुणांक μ है। यदि तखता को इसकी लम्बाई के अनुदिश विस्थापित करके छोड़ दिया जाये तो तखता की दोलन गति का आवर्तकाल ज्ञात करो।



Ans. $2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{\mu g}}$

Sol. If plank is displaced by x toward right then

यदि प्लेट को दायी और x विस्थापित कर दे तो



Let N_1, N_2 and f_1, f_2 are Normal and friction force at Point A and B by force balance

माना N_1, N_2 तथा f_1, f_2 अभिलम्ब तथा घर्षण बल बिन्दु A तथा B पर है।

$$N_1 + N_2 = Mg \qquad \text{——(1)}$$

and Torque balance बलाघूर्ण संतुलन से

$$Mg(\ell + x) = N_2 \times 2\ell \qquad \text{——(2)}$$

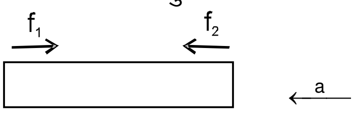
by equation (1) and (2) समीकरण (1) से (2)

$$N_1 = \frac{Mg}{2} - \frac{Mgx}{2\ell} \qquad N_2 = \frac{Mg}{2} + \frac{Mgx}{2\ell}$$

So अतः $f_1 = \mu\left(\dfrac{Mg}{2} - \dfrac{Mgx}{2\ell}\right)$

and और $f_2 = \mu\left(\dfrac{Mg}{2} + \dfrac{Mgx}{2\ell}\right)$

F.B.D of M M का मु. व. रे.



$f_2 - f_1 = Ma$

$$\mu \cdot \frac{2Mgx}{2\ell} = Ma = -\frac{d^2x}{dt^2}.M$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-\mu g x}{\ell}$$

$\Rightarrow$ Time period आवर्तकाल $= 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{\mu g}}$

13. **The Cubic Potential :** Consider a particle of mass m moving in one dimension under the influence of potential energy

$$u(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \delta x - \frac{\alpha x^3}{3}$$

Here ω, δ and a are real and positive.

(a) Sketch typical plots of u(x) and identify extrema if any.

(b) Consider the case where (in appropriate units) we have m = 1, $\omega = \sqrt{2}$, $\alpha = 1$ and $\delta = 1/2$. Sketch the potential energy u(x). If the total energy of the particle moving in this one-dimensional potential is E = 0 (in same units), discuss the motion of the particle in terms of allowed regions, boundedness and periodicity.

घनाभ विभव (Cubic Potential) : m द्रव्यमान का एक कण लेते है, जो स्थितिज ऊर्जा u(x) के प्रभाव में एक विमीय गति करता है।

$$u(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \delta x - \frac{\alpha x^3}{3}$$

यहाँ ω, δ तथा a धनात्मक एवं वास्तविक है।

(a) u(x) का ग्राफ आरेखित करे एवं यदि कोई चरम है तो दर्शाये

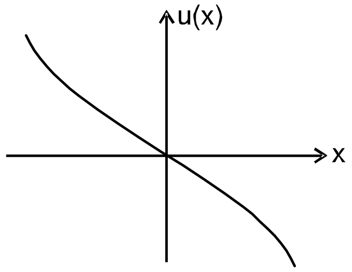
(b) प्रकरण लेवें जहाँ m = 1, $\omega = \sqrt{2}$, $\alpha = 1$ तथा $\delta = 1/2$ है (उपयुक्त विमा में)। स्थितिज ऊर्जा u(x) को आरेखित कीजिए। यदि इस एक विमीय विभव में गतिशील कण की कुल ऊर्जा E = 0 है (समान मात्रक में)। अनुमत परास, परिबद्धता एवं आवृति (regions, boundedness and periodicity) के पदों में कण की गति को समझाइये।

Ans. (b) between x = 0 and $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. U is (–ve). So, K.E. is +ve.

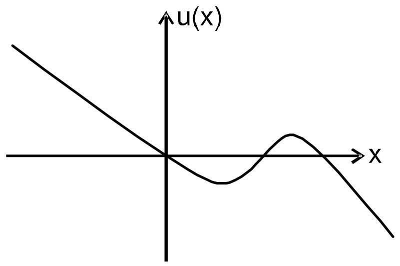
x = 0 एवं $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ में मध्य U ऋणातमक है। अतः गतिज ऊर्जा धनात्मक है।

Sol. **(a)** $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \delta x - \frac{\alpha x^3}{3}$

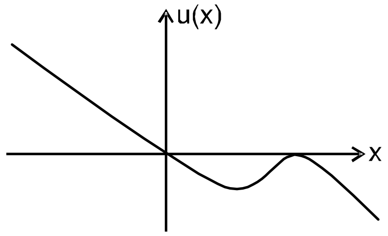
$U'(x) = -\alpha x^2 + m\omega^2 x - \delta$

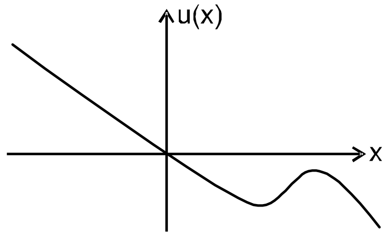


if यदि D < 0. $m^2 \omega^4 - 4\alpha s < 0$.



$D > 0,\ m^2\omega^4 - 4\alpha s > 0.$

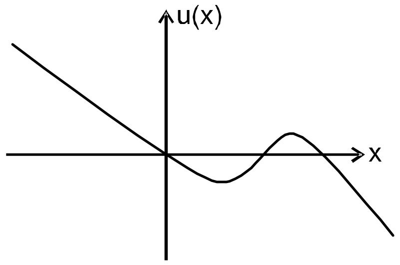




(b) $U(x) = x^2 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}$

$U'(x) = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$

$D = 4 - 4\times\frac{1}{2} = 2$



$U = 0$

$\frac{-x}{6}\left(2x^2 - 6x + 3\right) = 0$

$x = 0,\ \frac{6 \pm \sqrt{12}}{4}$

$x = 0,\ \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

between $x = 0$ and $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$. U is (–ve). So, K.E. is +ve.

$x = 0$ एवं $x = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ में मध्य U ऋणातमक है। अतः गतिज ऊर्जा धनात्मक है।

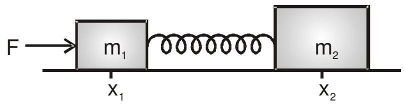
So, this the only allowed region.

अतः केवल यह अनुमत परिक्षेत्र है।

The particle will oscillate between these two points periodically.

कण इन दो बिन्दुओं के मध्य आवर्त रूप से दौलन करेगा।

14. Two blocks of masses $m_1 = 1.0$ kg and $m_2 = 2.0$ kg are connected by a massless elastic spring and are at rest on a smooth horizontal surface with the spring at its natural length. A horizontal force of constant magnitude F = 6.0 N is applied to the block m_1 for a certain time t in which m_1 suffers a displacement $\Delta x_1 = 0.1$ m and $\Delta x_2 = 0.05$ m. Kinetic energy of the system with respect to center of mass is 0.1 J. The force F is then withdrawn.

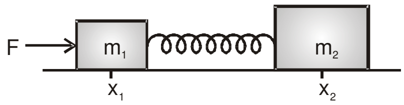


(a) Calculate t.

(b) Calculate the speed and the kinetic energy of the center of mass after the force is withdrawn.

(c) Calculate the energy stored in the system

m_1 = 1.0 kg व m_2 = 2.0 kg द्रव्यमान के दो ब्लॉक द्रव्यमानहीन प्रत्यास्थ स्प्रिंग द्वारा जड़े हुए तथा स्प्रिंग की प्राकृतिक लम्बाई में ये ब्लॉक प्रारम्भ में विरामावस्था में चिकनी क्षैतिज सतह पर रखे हुए है। m_1 द्रव्यमान के एक ब्लॉक पर निश्चित समय t के लिए एक नियत परिमाण का क्षैतिज बल F = 6.0 N आरोपित किया जाता है, जिससे m_1 में विस्थापन Δx_1 = 0.1 m तथा Δx_2 = 0.05 m होते है। द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष निकाय की गतिज ऊर्जा 0.1 J है। इसके पश्चात् बल F हटा दिया जाता है।



(a) t की गणन कीजिए।

(b) बल हटाने के बाद द्रव्यमान केन्द्र की चाल तथा गतिज ऊर्जा की गणना कीजिए।

(c) निकाय में संचित ऊर्जा की गणना कीजिए।

Ans. (a) 0.26s

(b) 0.52 ms^{-1}, 0.40 J

(c) 0.20 J

Sol. (a) $t = \sqrt{\dfrac{2(m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2)}{F}}$ = 0.26 s

(b) Speed चाल = $\dfrac{\sqrt{2F(m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2)}}{m_1 + m_2}$ = 0.52 ms^{-1}

Kinetic energy गतिज ऊर्जा = $\dfrac{F(m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2)}{m_1 + m_2}$ = 0.40 J

(c) Kinetic energy w.r.t. CM + Energy stored = $\dfrac{m_2(\Delta x_1 - \Delta x_2)}{m_1 + m_2}F$ = 0.20 J

द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष गतिज ऊर्जा + संचित ऊर्जा = $\dfrac{m_2(\Delta x_1 - \Delta x_2)}{m_1 + m_2}F$ = 0.20 J

संचित ऊर्जा = 0.10 J