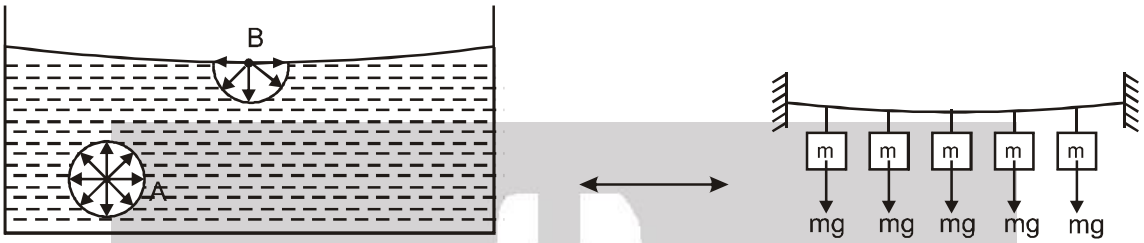
पृष्ठ तनाव (SURFACE TENSION)

" पृष्ठ में उत्पन्न (पृष्ठ द्वारा लाया गया) तनाव बल को ही पृष्ठ तनाव बल कहते है"

fluid mechanics में इसमें केवल द्रव के अन्दर वाले भाग का अध्यन किया है, लेकिर इस अध्याय में हम केवल द्रव की सतह का ही अध्ययन करेगें। द्रव की सतह पर स्थित अणुओ पर लगने वाले बल अन्दर स्थित अणुओ की तुलना में भिन्न होते है।

अंतराणविक बलो के आधार पर पृष्ठ तनाव की व्याख्या

(Explanation of surface tension on the basis of intermolecular forces) :



Net नीचे की ओर लगने वाले बल के कारण पृष्ठ में तनाव उत्पन्न होता है

लटकाए गए भार के कारण रस्सी में तनाव उत्पन्न होता है

वास्तव में पृष्ठ तनाव ससंजक बलो के कारण उत्पन्न होता है। ससंजक बल अर्थात एक ही पदार्थ के अणुओ के बीच लगने वाला आकर्षण बल

चित्र में पानी से भरा हुआ पात्र दर्शाया गया है। द्रव के अन्दर स्थित अणु 'A' को देखते है। इस पर सारी दिशाओ से समान ससंजक बल लग रहे है अतः इस पर परिणामी ससंजक बल शून्य है।

अतः द्रव के अन्दर वाले भाग के लिए ससंजक बल महत्वहीन होता है। इसी लिए fluid mechanics के अध्याय में हमने इसका कोई उपयोग नही किया था।

अब सतह पर स्थित अणु 'B' को देखते है इसके नीचे तो पानी के अणु है लेकिन उसके उपर पानी का कोई अणु नही है। अतः केवल नीचे स्थित पानी के अणु इस पर ससंजक बल लगाते है अतः इस पर परिणामी ससंजक बल नीचे की ओर लगेगा।

इस नीचे की ओर लगने वाले बल के कारण सतह मे तनाव उत्पन्न होता है, जिस प्रकार लटकाए गये भार के कारण रस्सी में तनाव उत्पन्न होता है।

द्रव की सतह में उत्पन्न तनाव को पृष्ठ तनाव बल कहते है। पृष्ठ तनाव के कारण द्रव की सतह एक खिंची हुई झिल्ली की तरह कार्य करती है ओर अपना क्षैत्रफल न्युनतम करने का प्रयास करती है।

पृष्ठ तनाव की ऊर्जा के आधार पर व्याख्या :

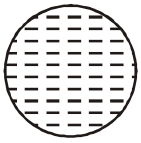
हम देख चुके है कि द्रव के अन्दर स्थित अणु अपने चारो ओर स्थित द्रव के अणुओ के आकर्षण से बंधा होता है। अतः इसकी ऊर्जा ज्यादा negative (जैसे –10) होती है। लेकिन सतह पर स्थित अणु केवल नीचे वाले अणुओ के आकर्षण से बंधा होता है, अतः इसकी ऊर्जा कम ऋणात्मक (जैसे –5) होगी।

कम ऋणात्मक अर्थात ज्यादा ऊर्जा अतः सतह पर स्थित अणु की ऊर्जा अदंर स्थित अणु की तुलना में ज्यादा होती है। स्थायित्व के लिए ऊर्जा न्यूनतम संभव होनी चाहिये। न्युनतम ऊर्जा के लिए सतह पर स्थित अणु न्युनतम होने चाहिए, और इसके लिए पृष्ठीय क्षेत्रफल न्युनतम होना चाहिये। अतः दव्र की सतह अपना क्षेत्रफल न्युनतम करने का प्रयास करती है जिसके कारण सतह मे तनाव उत्पन्न हो जाता है

पृष्ठ तनाव के कुछ सरल प्रमाण :

(i)

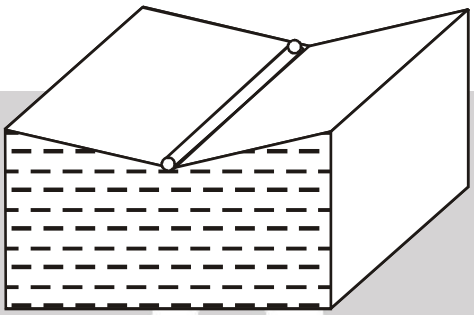
पत्थर का टुकड़ा



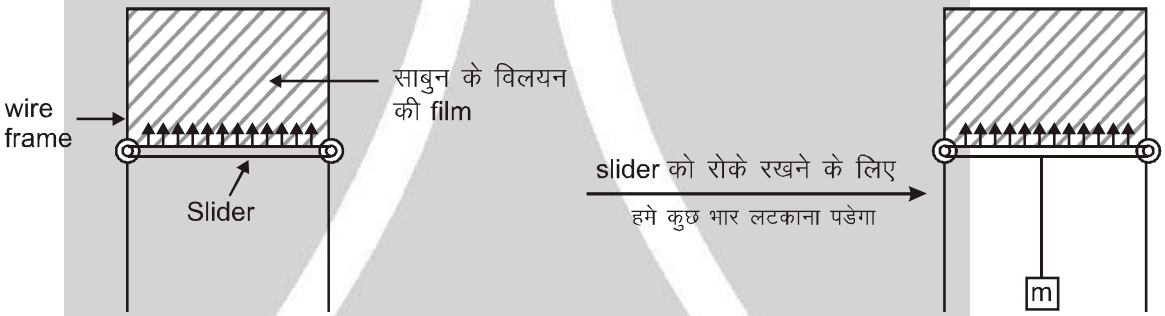
पानी का टुकड़ा
(पानी की बूंद)

पत्थर का टुकडा किसी भी विचित्र आकृति का हो सकता है क्योकि ठोस में पृष्ठ तनाव नही होता है। लेकिन पानी का टुकडा (पानी की बूंद) हमेशा गोलाकार ही होती है। चुंकि पानी की पृष्ठ में तनाव होता है, अतः पानी की सतह एक तनी हुई झिल्ली (tight bag) की तरह कार्य करती है। अपना पृष्ठीय क्षेत्रफल न्युनतम करने के लिए पानी की बूंद गोलाकार आकृति ले लेती है छोटी बूंद के लिए गुरूत्वीय दाब (ρgh) नगण्य होता है, अतः छोटी बूंद लगभग गोलाकार होती है। लेकिन बडी बूंद में गुरूत्वीय दाब (ρgh) प्रभावी होता है, अतः बडी बूंद अंडाकार हो जाती है।

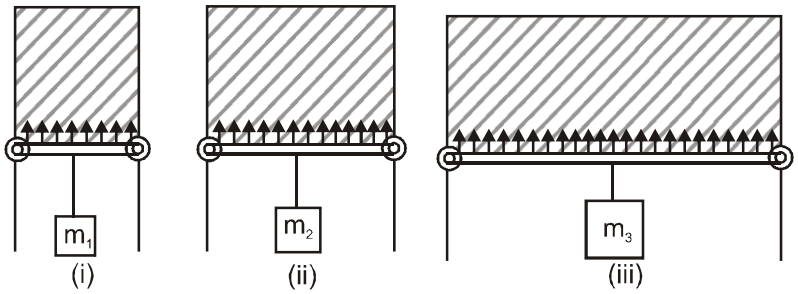
(ii) यदि हम पानी की सतह पर एक सूई को धीरे से रखे तो यह सतह पर ऐसे तैरेगी जैसे इसे किसी तनी हुई झिल्ली पर रख दिया हो। इससे भी सिद्व होता है कि द्रव की पृष्ठ पर तनाव होता है जिससे यह एक तनी हुई झिल्ली की तरह कार्य करती है।



(iii)



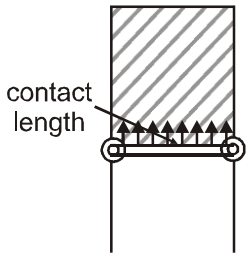
चित्रानुसार U आकार की एक स्थिर wire की frame है जिस पर एक हल्का slider (फिसलने वाला wire) फिसल सकता है। इस frame को साबुन के विलयन में डुबोते है और फिर बाहर निकाल लेते हे। इससे frame और slider के बीच साबुन के विलयन की पतली film बन जाएगी जो कि शुद्व रूप से एक सतह ही है। अब यदि हम slider को छोड दे तो यह उपर की ओर गति करेगा। इससे स्पष्ट होता है कि द्रव की पृष्ठ में तनाव होता है, जिसके कारण सतह आपस में भी एक दूसरे को खीचता है ओर अपने सम्पर्क में आने वाले slider पर भी तनाव बल (खिचाव बल) लगाता है। और इसी के कारण slider ऊपर की ओर गति करने का प्रयास करता है। slider को साम्यावस्था में रखने के लिए हमें कुछ लटकाना पडेगा। यह close example है। इसकी मदद से हम पृष्ठ तनाव बल का मान भी ज्ञात कर सकते है।



उपरोक्त तीन स्थितियों (i), (ii) और (iii) को देखते है। किस स्थिति में पृष्ठ तनाव बल सबसे अधिक होगा।

प्रायोगिक रूप सें यह पाया गया कि स्थिति (i) में पृष्ठ तनाव बल सबसे कम है, स्थिति (ii) में थोडा अधिक और स्थिति (iii) में पृष्ठ तनाव बल अधिकतम है। स्थिति (iii) में slider को साम्यावस्था में रखने के लिए हमे सबसे ज्यादा

भार लटकाना पडेगा। इस उदाहरण से स्पष्ट है कि पृष्ठ तनाव बल सम्पर्क लम्बाई पर निर्भर करता है जो कि स्थिति (iii) में अधिकतम है।



पृष्ठ तनाव बल (F) $\propto$ सम्पर्क लम्बाई (ℓ) $F = (T)\ \ell$

यहॉ T एक नियतांक होता है जिसे पृष्ठ तनाव नियतांक कहते है। T द्रव की प्रकृति (ससंजक बलों) पर और द्रव के दूसरी ओर स्थित माध्यम पर भी निर्भर करता है

- यदि ताप बढाते है, तो पृष्ठ तनाव नियतांक (T) घटता है
- यदि द्रव में अत्यधिक घुलहीन पदार्थ मिलाए जैसे NaCl, $ZnSO_4$ आदि तो पृष्ठ तनाव नियतांक (T) बढता है
- यदि द्रव में अल्प धुलहीन पदार्थ जैसे साबुन फिनाले आदि मिलाए तो पृष्ठ तनाव (T) घटता है।

परिणाम :

द्रव की पृष्ठ आपस में भी एक दूसरे पर तनाव बल (खिचाव बल) लगाती है, ओर अपने सम्पर्क में आने वाली अन्य वस्तु (जैसे slider) पर भी तनाव बल लगाती है।

पृष्ठ तनाव बल

$F = (T)\ (\ell)$ जहां ℓ = सम्पर्क लम्बाई = जिनके बीच पृष्ठ तनाव बल निकालना है उन दोनो के बीच की परिसीमा की लम्बाई

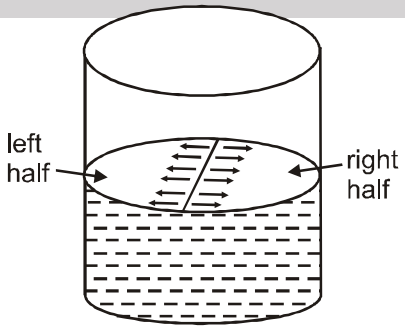
इसलिए $T = \frac{F}{\ell}$ अतः पृष्ठ तनाव की परिभाषा निम्न प्रकार से दी जाती है।

द्रव के पृष्ठ पर बनायी गयी एक काल्पनिक रेखा के दोनों ओर, रेखा के लम्बवत् और सतह के स्पर्श रेखीय लगने वाले बल प्रति लम्बाई को पृष्ठ तनाव कहते हैं।

Solved Example

Example 1. चित्रानुसार पानी से भरा हुआ R त्रिज्या का पात्र है। इसकी सतह पर व्यास के अनुदिश एक काल्पनिक रेखा खीचते है जो सतह को दो बराबर भागो में बाटती है : दांया आधा भाग और बांया आधा भाग। दांये आधे भाग और बांये आधे भाग के बीच लगने वाला पृष्ठ तनाव बल ज्ञात कीजिये।

Solution : दांये आधे भाग और बांये आधे भाग दोनो के बीच आपस में लगने वाला खिंचाव बल

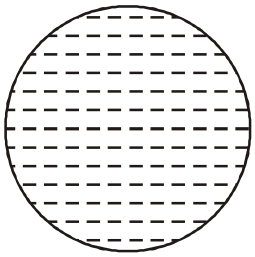


$F = (T)\ (\ell)$

जहां ℓ दोनो सतहो के बीच की boundary lines की लम्बाई है जो कि 2R होगी।

अतः $F = (T)\ (2R)$

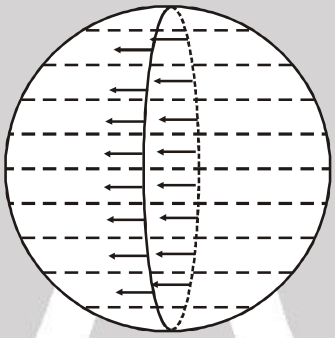
Example 2. चित्रानुसार R त्रिज्या की पानी की एक बूंद है। इसकी बांयी आधी सतह और दांयी आधी सतह के बीच लगने वाला पृष्ठ तनाव बल ज्ञात करो।



Solution : पृष्ठ तनाव बल

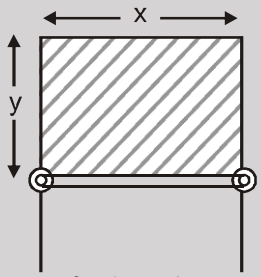
$F = (T)(\ell)$

यहां ℓ = बांयी आधी सतह और दांयी आधी सतह के बीच की boundary line की लम्बाई = $2\pi R$

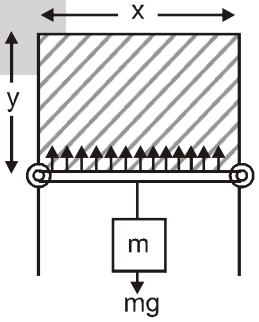


अतः $F = (T)(2\pi R)$

Example 3. एक frame और एक slider के बीच साबुने के घोल की पतली film बनाई जाती है, जिसकी लम्बाई x और चौडाई y है। slider पर लगने वाला पृष्ठ तनाव बल ज्ञात कीजिए। slider को साम्यावस्था में रखने के लिए कितना भार लटकाना होगा ?



Solution. सतह एक तनी हुई झिल्ली की तरह कार्य करेगी और यह slider को निम्न बल से खीचेगी



$F = (T)(\ell)$

चुंकि यह film है अतः इसकी दो सतह होंगी आगे वाली सतह और पीछे वाली सतह और दोनों सतहों के बीच थोड़ी सी मोटाई में द्रव भरा होता है। आगे वाली सतह पर सम्पर्क लम्बाई x और पीछे वाली सतह पर भी सम्पर्क लम्बाई x होगी।

अतः कुल सम्पर्क लम्बाई $\ell = x + x = 2x$

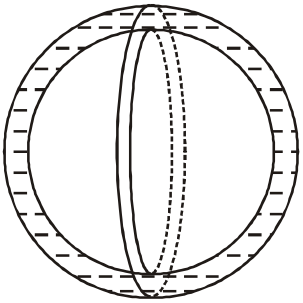
अतः slider पर लगने वाला पृष्ठ तनाव बल $F = (T)(2x)$

साम्यावस्था के लिए यह बल लटकाये गये भार से सन्तुलित होगा।

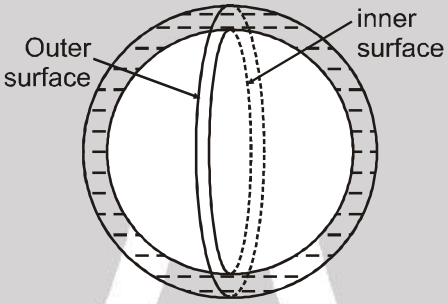
$(T)(2x) = mg$

$$m = \frac{2Tx}{g}$$

Example 4. चित्रानुसार साबुन के घोल का एक बुलबुला है। इसकी बांयी आधी सतह और दांयी आधी सतह के बीच लगने वाला पृष्ठ तनाव बल ज्ञात करो।



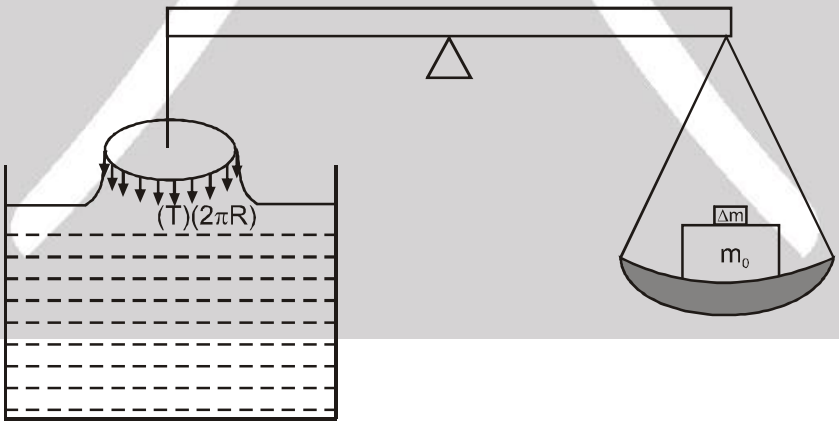
Solution : बुलबुले की भी दो सतह होंगी, अन्दर वाली सतह और बाहर वाली सतह और इन सतहो के बीच की थोडी सी मोटाई में द्रव भरा होता है। अतः अन्दर वाली सतह और बाहर वाली सतह दोनो पृष्ठ तनाव बल लगायेंगी $[T(2\pi R)]$।



अतः बांयी आधी सतह और दांयी आधी सतह के बीच लगने वाला पृष्ठ तनाव बल

$F = (T)(2\pi R) + (T)(2\pi R) = T(4\pi R)$

Example 5. R त्रिज्या की एक पतली चकती जो द्रव की सतह को छू रही है, तराजू की एक भुजा बनाती है। तराजू के दूसरे पलडे पर कुछ भार रख कर इसे सन्तुलित किया जाता है। दूसरे पलडे पर अतिरिक्त कितना भार लगाये ताकि चकती पानी से just बाहर निकल जाये।

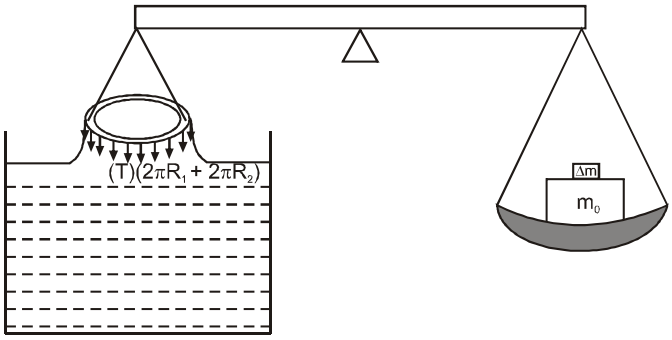


Solution: जब चकती just अलग होने वाली होगी तब उस पर लगने वाला पृष्ठ तनाव बल $(T)(2\pi R)$

सन्तुलन के लिए $(T)(2\pi R) = (\Delta m)g$

$$\Rightarrow \Delta m = \frac{(T)(2\pi R)}{g}$$

Example 6. पिछले प्रश्न में यदि चकती के स्थान पर एक वलय का प्रयोग किया जाये जिसकी आन्तरिक त्रिज्या R_1 तथा बाह्य त्रिज्या R_2 है। अब दूसरे पलडे पर अतिरिक्त कितना भार लगाये ताकि वलय पानी से just बाहर निकल जाये ?

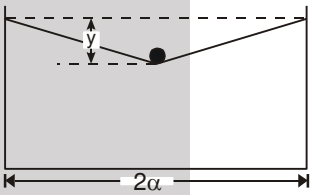


Solution : जब वलय just अलग होने वाली होगी तब उस पर लगने वाला पृष्ठ तनाव बल (T) $2\pi (R_1 + R_2)$

सन्तुलन के लिए (T) $2\pi (R_1 + R_2) = (\Delta m)g \Rightarrow \Delta m = \frac{(T)2\pi(R_1 + R_2)}{g}$

Example 7. **(Only for JEE Advance)**

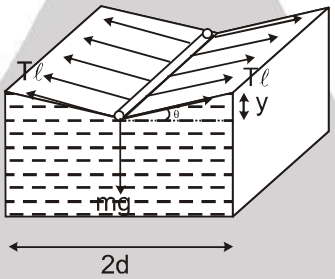
नगण्य त्रिज्या का लम्बा पतला समरूप तार द्रव सतह पर स्थित है। पात्र की चौड़ाई 2d है तथा तार इसके केन्द्र पर रखा है तथा इसकी लम्बाई के समान्तर है (चित्र में प्रदर्शित है) । द्रव की सतह केन्द्र पर ऊर्ध्वाधर दूरी y(y << d) से दब जाती है। जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है। यदि तार की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान λ हो तो द्रव का पृष्ठ तनाव ज्ञात करो। सिरों का प्रभाव नगण्य है। **[JEE 2004, 2/60]**



Solution : ऊपर और नीचे के बल सन्तुलित करने पर

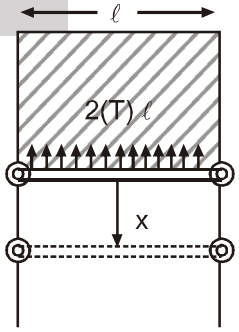
$2(T\ell \sin\theta) = (\lambda\ell)g$

चुंकि कोण बहुत ही अल्प है अतः $\sin \approx \tan\theta = \frac{y}{d}$



$2(T\ell)\frac{y}{d} = (\lambda\ell)g \qquad T = \frac{\lambda g d}{2y}$

पृष्ठीय ऊर्जा :



पृष्ठ तनाव बल के कारण संचित स्थितिज ऊर्जा को पृष्ठीय ऊर्जा कहते हैं।

इसे समझने के लिए, मानलो एक स्थिर frame और slider के बीच साबुन के घोल की पतली फिल्म बनाई गई है। इसकी आगे वाली सतह और पीछे वाली सतह दोनो slider को $F = 2(T\ell)$ बल से खीचेंगे।

अब slider को x जितना आगें विस्थापित करते हैं।

इस दौरान :

पृष्ठ तनाव बल द्वारा किया गया कार्य = $-(2T\ell)(x)$

(क्योकि slider पर लगने वाला पृष्ठ तनाव बल विस्थापन के विपरित दिशा में हैं)

$\Rightarrow$ पृष्ठ तनाव बल के विरूद्व किया गया कार्य = $+(2T\ell)x$

$\Rightarrow$ अतः पृष्ठीय स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि = $+(2T\ell)x$

जहां $2\ell x$ = पृष्ठीय क्षैत्रफल में वृद्धि (आगे के पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि = ℓx, पीछे के पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि = ℓx)

$\Rightarrow$ पृष्ठीय स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि $\Delta U = (T)(\Delta A) = (T)$ (पृष्ठीय क्षेत्रफल में वृद्धि)

अतः व्यापक रूप से हम कह सकते है कि

पृष्ठीय ऊर्जा $U = (T)(A) = (T)$ (पृष्ठीय क्षेत्रफल)

also $T = \frac{U}{A}$ और पहले हम देख चुके है कि $T = \frac{F}{\ell}$

अतः एकांक क्षेत्रफल की पृष्ठीय ऊर्जा को पृष्ठ तनाव कहते है।

या सतह पर स्थित एकांक लम्बाई पर लगने वाले तनाव बल को पृष्ठ तनाव कहते है।

Solved Example

Example 8. 1000 पानी की छोटी बूंदे, प्रत्येक की त्रिज्या r, मिलकर एक बडी बूंद बनाती है। इस प्रक्रिया में पृष्ठीय स्थितिज ऊर्जा में हानि ज्ञात करो।

Solution : मान लो बडी बूंद की त्रिज्या R है। इस प्रक्रिया में द्रव्यमान संरक्षित रहेगा अतः आयतन भी संरक्षित रहेग।

$(\text{आयतन})_{\text{initial}} = (\text{आयतन})_{\text{final}}$

$$\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\times 1000 = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \quad \Rightarrow \quad R = 10r$$

पृष्ठीय स्थितिज ऊर्जा में हानि

$\Delta U_{loss} = T\Delta A_{loss} = T((4\pi r^2) \times 1000 - 4\pi(10r)^2)$

$\Delta U_{loss} = (T)\ (900 \times 4\pi r^2)$

यह ऊर्जा में हानि उष्मा में परिवर्तित हो जायेगी। अतः बूंद के ताप में वृद्धि निम्न द्वारा ज्ञात की जा सकती है

$T(900 \times 4\pi r^2) = ms\Delta T$, इससे ताप में वृद्धि ($\Delta T$) ज्ञात कर सकते है। .

Example 9. यदि r त्रिज्या की बहुत सारी पानी की बूंदे मिलकर R त्रिज्या की बडी बूंद बनाये तो सिद्व कीजिये कि बूंद के ताप में वृद्धि $\frac{3T}{J}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$ जहां T पानी का पृष्ठ तनाव है, और J उष्मा का यांत्रिक तुल्यांक है। यहां r, R व T सभी CGS system में है।

Solution : मानलो n छोटी बूंदे जुडकर एक बडी बूंद बनाती हैं। इस प्रक्रिया में द्रव्यमान संरक्षित रहेगा अतः आयतन भी संरक्षित रहेग।

$(\text{आयतन})_{\text{initial}} = (\text{आयतन})_{\text{final}}$

$$\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\times n = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \quad n = \frac{R^3}{r^3}$$

पृष्ठीय स्थितिज ऊर्जा में हानि $\Delta U_{loss} = T\Delta A_{loss} = T(4\pi r^3 \times n - 4\pi R^2)$

Put $n = \frac{R^3}{r^3}$

get $\Delta U_{loss} = T\left(4\pi r^2 \times \frac{R^3}{r^3} - 4\pi R^2\right)$

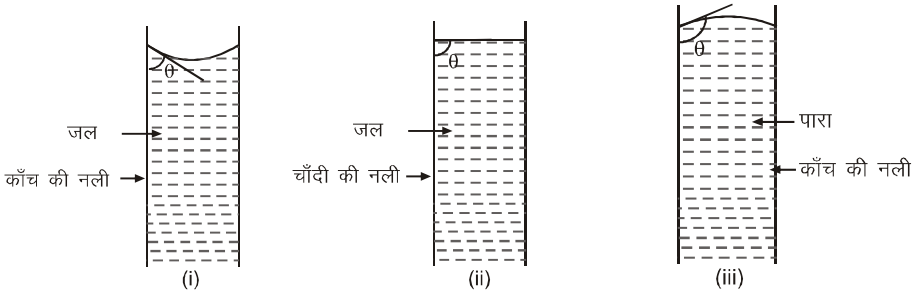
$\Delta U_{loss} = T\ 4\pi R^3\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)$

$T(4\pi R^3)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) = ms\ \Delta\theta$ जहां $m = \rho(vol)$

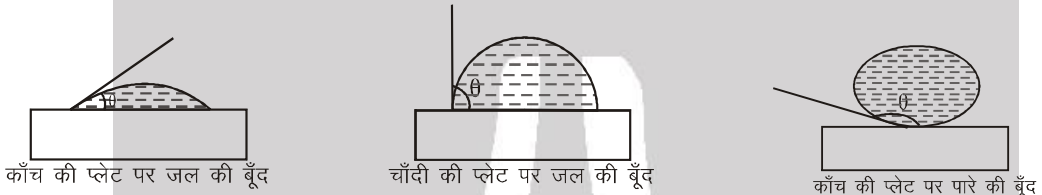
$T(4\pi R^3)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) = (1\ gm/cm^3)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)(1\ cal/gm\ ^oC)\Delta T$

get $\Delta\theta = \frac{3T}{J}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right]$

द्रव की सतह का आकार :



यदि काँच की नली में पानी भरें तो इसकी सतह अवतल आकार की हो जाती है, यदि चाँदी की नली में पानी भरें तो सतह क्षैतिज हो जाती है और यदि काँच की नली में पारा भरें तो सतह उत्तल आकार की हो जाती है।



द्रव सतह की आकृति नवचन्द्रक (meniscus) कहलाती है । द्रव सतह के सम्पर्क बिन्दु पर बनाई गयी स्पर्श रेखा व द्रव में डूबी हुई ठोस सतह के मध्य कोण स्पर्श कोण (θ) कहलाता है।

चित्र (i) में स्पर्श कोण न्यूनकोण है, चित्र (ii) में स्पर्श कोण 90° तथा चित्र (iii) में स्पर्श कोण अधिक कोण है। स्पर्श कोण को नीचे चित्र में दर्शाये अनुसार एक प्लेट पर द्रव की बूंद को रखकर भी प्रेक्षित कर सकते हैं :

द्रव सतह का आकार ससंजक व आसंजक बल पर निर्भर करता है।

ससंजक बल : समान पदार्थ के अणुओं के बीच लगने वाला आकर्षण बल ससंजक बल कहलाता है। ससंजक बल प्रभावी होगा यदि अणुओं के बीच दूरी 10^{-9} m से कम है। यदि अणुओं के मध्य दूरी 10^{-9} m से अधिक हो तो ससंजक बल नगण्य होता है। किसी अणु को केन्द्र मानकर और ससंजक बलों की परास (10^{-9} m) को त्रिज्या लेकर बनाये गये गोले को आणविक सक्रियता का गोला कहते हैं। केन्द्रीय अणु केवल इस गोले के अंदर स्थित अणुओं द्वारा आकर्षित होता है।

Example : पानी के अणुओं के बीच लगने वाला ससंजक बल

नीचे दर्शाये गये चित्र (i) (a) के अनुसार कोने के अणु पर पास वाले सभी जल के अणु समान रूप से ससंजक बल लगाते हैं अतः परिणामी ससंजक बल (F_c) ऊर्ध्वाधर से 45° कोण पर केन्द्रित माना जा सकता है।

ससंजक बल के अन्य उदाहरण **:**

(i) जब द्रव की दो बूदो को अन्योन्य सम्पर्क में लाते है तो वे एक बूंद में बदल जाती है। ऐसा ससंजक बल के कारण होता है।

(ii) पानी से गीली सम्पर्क में काँच की दो प्लेटों को अलग–अलग करना कठिन होता है, क्योंकि पानी के अणुओं के बीच ससंजक बल के विरूद्व बहुत अधिक बल लगाना पड़ता है।

(iii) पारे की बूदों को छोटी बूदों में तोडना कठिन होता है, क्योंकि पारे के अणुओ के बीच में अधिक ससंजक बल होता है।

आसंजक बल :

भिन्न पदार्थो के अणुओ के बीच में आकर्षण बल आसंजक बल कहलाता है।

Example काँच की नली व जल के मध्य लगने वाला आसंजक बल।

नीचे दर्शाये गये चित्र (i) (a) के अनुसार कोने के अणु पर आसंजक बल काँच की दीवार की ओर लगता है।

आसंजक बल के अन्य उदाहरण :

(i) हमारे द्वारा आसंजक बल के कारण ही चॉक से ब्लैक बोर्ड पर लिखना सम्भव होता है ।

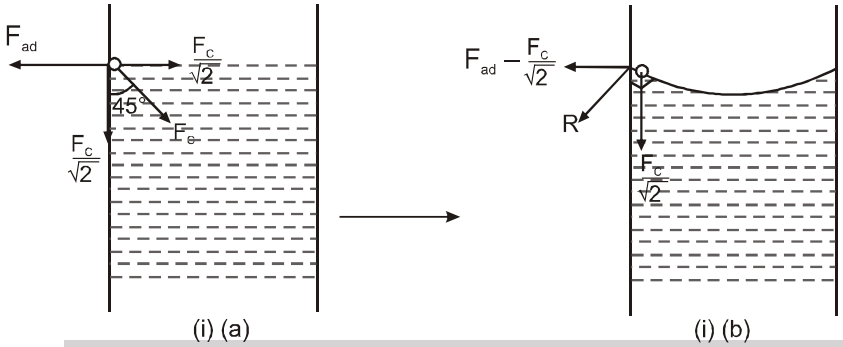
(ii) हम आसंजक बल के कारण ही स्याही के पेन से पेपर पर लिखते है।

(iii) सीमेन्ट एव ईंटो के मध्य अत्यधिक आकर्षण बल के कारण ही निर्माण का कार्य सम्भव होता है।

(iv) आसंजक बल के कारण पानी, ग्लास प्लेट को गीला करता है।

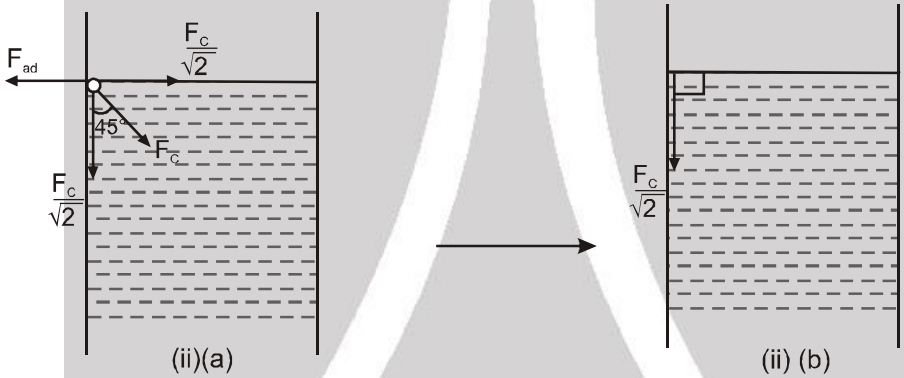
(v) फेविकॉल एवं गोंद दो सतहों को जोड़ने के काम आते है क्योंकि यह आसंजक बल के कारण होता है।

Case-I : यदि काँच की नली में जल भरा है तो, $F_{ad} > \frac{F_c}{\sqrt{2}}$ तब परिणामी बल चित्र (i) (b) के अनुसार होगा। चूंकि जल की सतह स्वयं को हमेशा परिणामी बल के लम्बवत् समायोजित (adjust) कर लेती है। अतः सतह अवतल होगी।



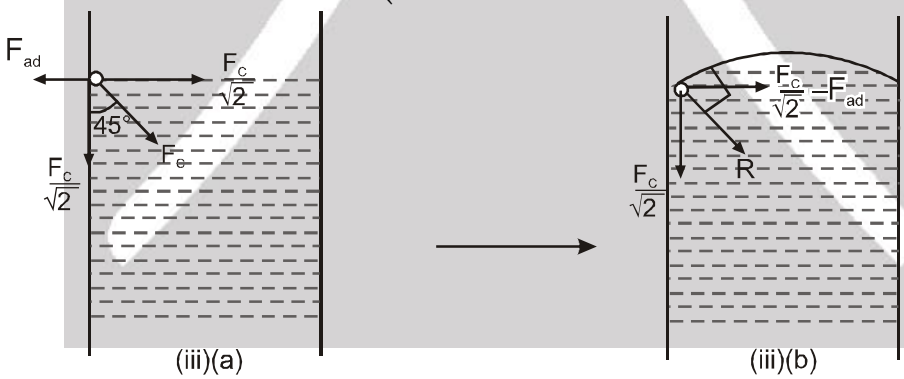
(i) (a) (i) (b)

Case -II : यदि चाँदी की नली में जल भरा है तो, $F_{ad} = \frac{F_c}{\sqrt{2}}$ अतः परिणामी बल ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर होगा इसलिए द्रव की सतह क्षैतिज हो जायेगी (परिणामी बल के लम्बवत्)



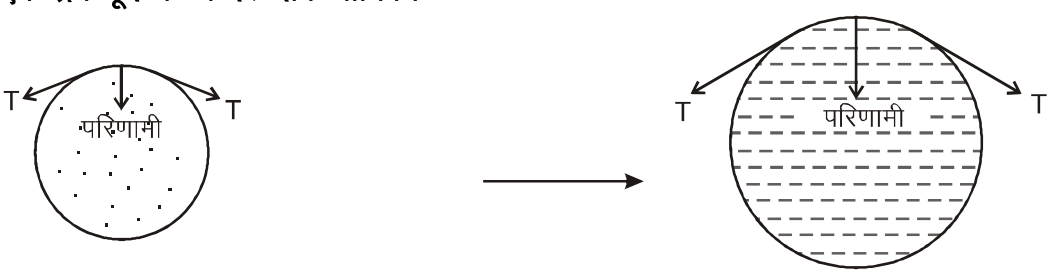
(ii)(a) (ii) (b)

Case -III : यदि काँच की नली में पारा भरा है तो $F_{ad} <$ अतः परिणामी बल चित्र (iii) (b) के अनुसार होगा। चूंकि द्रव की सतह स्वयं को परिणामी बल के लम्बवत् समयोजित कर लेती है अतः सतह उत्तल हो जायेगी। .



(iii)(a) (iii)(b)

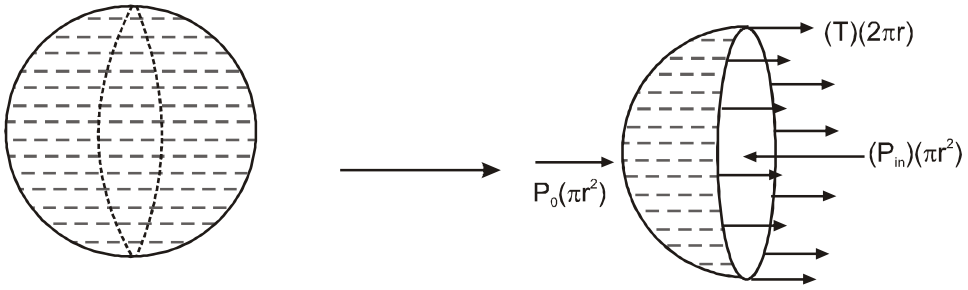
एक द्रव बूंद के अन्दर दाब आधिक्य :



तने हुए रबर के कारण अन्दर की वायु सम्पीडित हो जाती है। अतः अन्दर वायु दाब जायेगा बाह्य वायुदाब से अधिक हो जाता है।

पानी की सतह एक तने हुए रबर की तरह व्यवहार करती है। अतः सतह में तनाव के कारण अन्दर का जल सम्पीडित हो

अतः अन्दर के जल का दाब बाह्य वायुमण्डलीय दाब से अधिक होगा। यह अतिरिक्त दाब, दाब आधिक्य कहलाता है। दाब आधिक्य ज्ञात करने के लिए आधे भाग का FBD बनायें। इस अर्द्ध गोले पर बल निम्न हैं :



(i) द्रव के दाये अर्द्ध भाग के कारण द्रव के बाये अर्द्ध भाग पर धक्का लगाने वाला बल $(P_{in})(\pi r^2)$ होगा

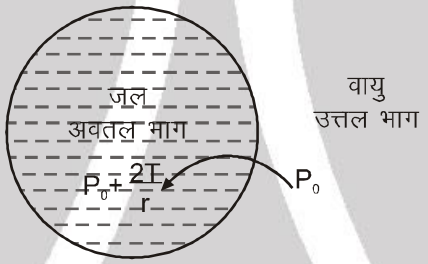
(ii) वायुमण्डलीय दाब के कारण धक्का लगाने वाला बल $(P_0) \times$ (सम्मुख क्षेत्रफल) $= P_0(\pi r^2)$ होगा

(iii) दांये अर्द्ध भाग की सतह के कारण बाये अर्द्ध भाग की सतह पर पृष्ठ तनाव बल $(T)(2\pi r)$ होगा

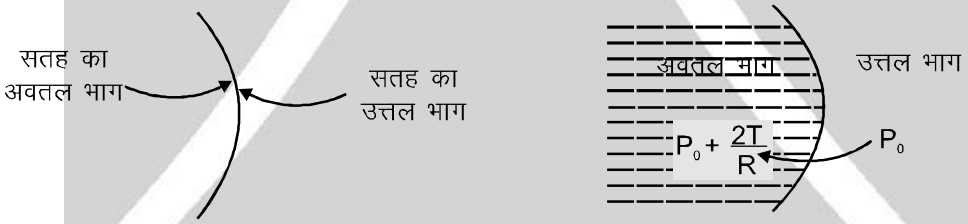
बल सन्तुलित करने पर :

$(P_{in})(\pi r^2) = P_0(\pi r^2) + (T)(2\pi r)$

$\Rightarrow P_{in} = P_0 + \frac{2T}{r}$, जहां $\frac{2T}{r}$ दाब आधिक्य है, अतः बून्द के अन्दर दाब बून्द के बाहर दाब से $\frac{2T}{r}$ अधिक होगा

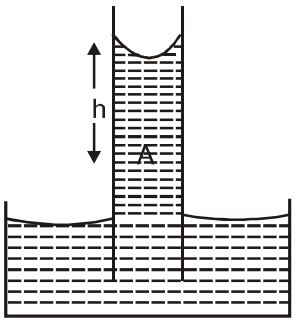


सामान्यतः हम कह सकते है कि अवतल भाग पर दाब उत्तल भाग पर दाब की तुलना में $\frac{2T}{r}$ जितना ज्यादा होता है, जहां r उनके मध्य की सतह की वक्रता त्रिजया है।



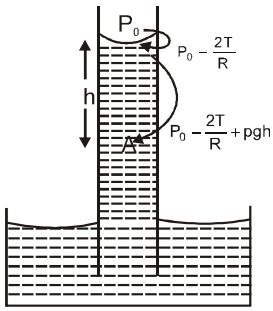
Solved Example

Example 10.



R त्रिज्या की केशनली जल में डूबी हुई है। यदि जल की सतह अर्द्ध गोलाकार $(\theta = 0)$ है, तब बिन्दु 'A' जो जल की सतह से h गहराई नीचे है पर दाब ज्ञात कीजिए।

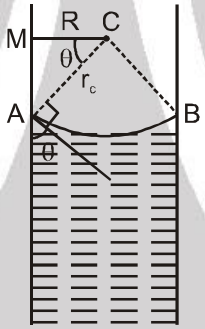
Solution :



जल उत्तल भाग पर है अतः सतह से ठीक नीचे जल का दाब $\frac{2T}{R}$ जितना से कम है। इसलिए A बिन्दु पर दाब $P_0 - \frac{2T}{R} + pgh$ है। यहां जल की सतह अर्द्धगोलाकार है (स्पर्श कोण $\theta = 0$) अतः सतह की वक्रता त्रिज्या = नली की वक्रता त्रिज्या = R.

Example 11. उपरोक्त प्रश्न में माना स्पर्श कोण शून्य नही है, लेकिन यह θ (सतह अर्द्धगोलाकार नही है) है, तब 'A' बिन्दु पर दाब ज्ञात कीजिए।

Solution :



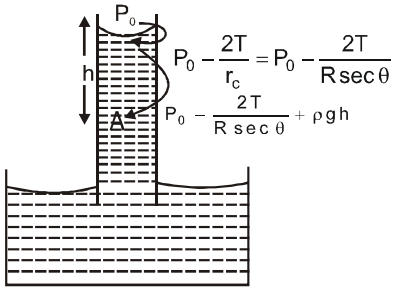
परिधी के A तथा B बिन्दु पर अभिलम्ब (त्रिज्या रेखा) बनाये। बिन्दु (C) जहां त्रिज्या रेखाए मिलती है, वक्रता केन्द्र कहलाता है। यदि स्पर्श कोण θ है, Δ ACM से, $r_C = R \sec\theta$

अतः सतह की वक्रता त्रिज्या $r_C = R \sec\theta$.

याद रखने योग्य बिन्दु :

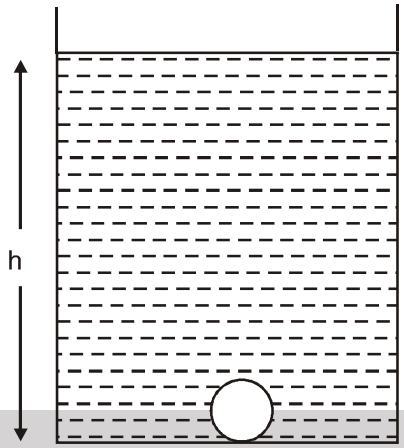
यदि द्रव सतह अर्द्धगोलाकार ($\theta = 0$) है तब $r_c = R$

यदि द्रव सतह अर्द्धगोलाकार नही है ($\theta \neq 0$) तब $r_c = R \sec\theta$

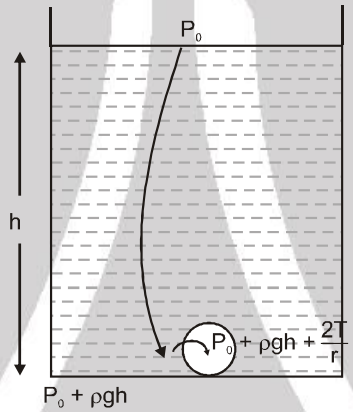


अतः बिन्दु A पर दाब $P_0 - \frac{2T}{R\sec\theta} + \rho gh$ है।

Example 12. 'h' गहराई पर एक r त्रिज्या का छोटा वायु का बुलबुला है (वायु की गुहा)। बुलबुले के अन्दर दाब ज्ञात कीजिए।



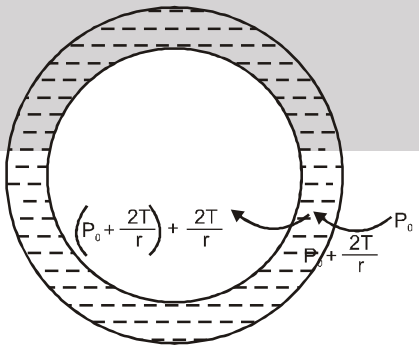
Solution : पानी तथा वायु (बुलबुले के अन्दर) में से, वायु अवतल भाग में है



वायु में रखे द्रव के बुलबुले के अन्दर दाब आधिक्य :-

द्रव बुलबुले के अन्दर दाब = $P_0 + \frac{4T}{r}$

अतः द्रव बुलबुले के अन्दर दाब आधिक्य = $\frac{4T}{r}$



विकल्प हल :

बुलबुले के अर्द्ध भाग का FBD बनाये। इस अर्द्ध गोले पर बल निम्न है।

(i) द्रव के दाये अर्द्ध भाग के कारण द्रव के बाये अर्द्ध भाग पर धक्का लगाने वाला बल $(P_{in})(\pi r^2)$ होगा।

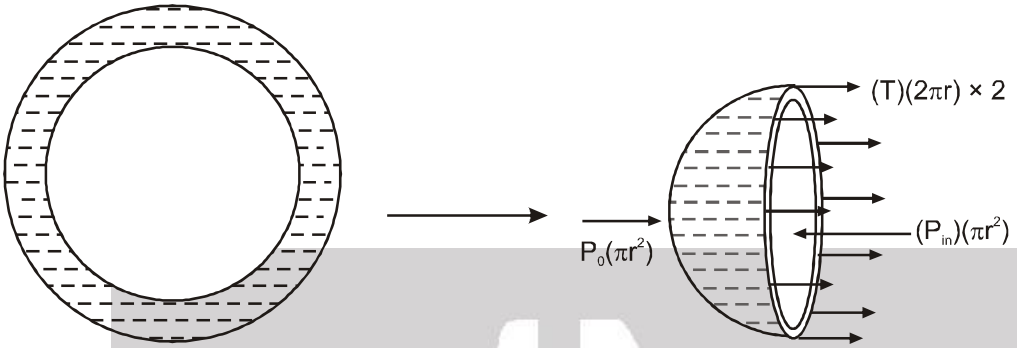
(ii) वायुमण्डलीय दाब के कारण धक्का लगाने वाला बल (P_0) × (सम्मूख क्षेत्रफल) = $P_0(\pi r^2)$ होगा।

(iii) दाये अर्द्ध भाग की सतह के कारण बाये अर्द्ध भाग की सतह पर पृष्ठ तनाव बल $(T)(2\pi r) \times 2$ होगा।

बल सन्तुलित करने पर :

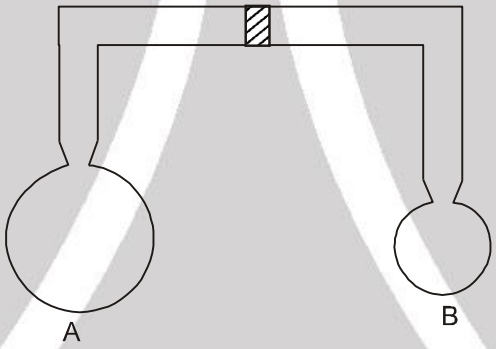
$(P_{in})(\pi r^2) = P_0(\pi r^2) + (T)(2\pi r) \times 2 \quad \Rightarrow \quad P_{in} = P_0 + \frac{4T}{r}$,

अतः द्रव बुलबुले में दाब आधिक्य $= \frac{4T}{r}$

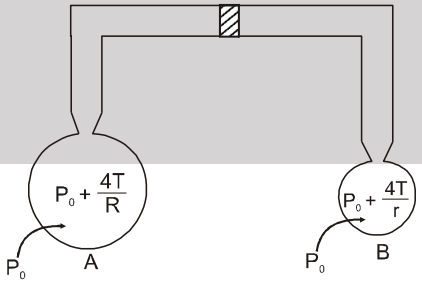


Solved Example

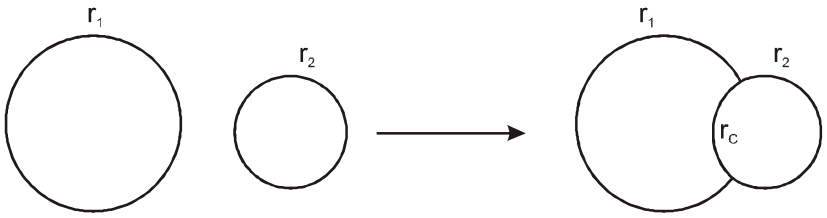
Example 13. दो साबुन के बुलबुले दर्शाये अनुसार नली के सिरो पर बनाते है। यदि वॉल्व खोला जाये तो किस दिशा में वायु प्रवाहित होगी।



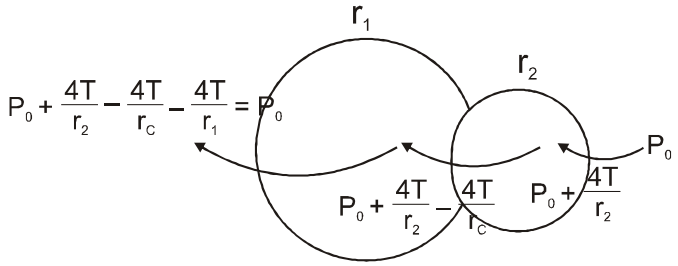
Solution : छोटे बुलबुले 'B' की वक्रता त्रिज्या कम है अतः छोटे बुलबुले के अन्दर दाब $\left(P_0 + \frac{4T}{r}\right)$ ज्यादा होगा। वायु उच्च दाब से कम दाब की ओर प्रवाहित होती है, अतः यह छोटे बुलबुले से बड़े बुलबुले की ओर प्रवाहित होगी। छोटा बुलबुला ओर छोटा होगा व बड़ा बुलबुला ओर बडा होगा।



Example 14. यदि r_1 तथा r_2 त्रिज्या ये दो साबुन के बुलबुले संयोजित होते है तो उनके बिच की उभयनिष्ठ सतह की वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।



Solution : $P_0 + \frac{4T}{r_2} - \frac{4T}{r_c} - \frac{4T}{r_1} = P_0$



$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}$ $r_c = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$

Example 15. **(Only for JEE Advance)**

r त्रिज्या व T पृष्ठीय तनाव के एक साबून के बुलबुले को आवेश दिया जाता है, ताकि इसका पृष्ठीय आवेश घनत्व σ हो जाये। आवेश के कारण साबुन के बुलबुले की त्रिज्या दुगनी हो जाती है तब 'σ' ज्ञात कीजिए (वायुमण्डलीय दाब = P_0)

Solution : बुलबुले के अन्दर प्रारम्भिक दाब $P_i = P_0 + \frac{4T}{r}$

अब बुलबुले को समरूप पृष्ठीय आवेश घनत्व दिया जाता है।

पृष्ठ तनाव एक खीचांव बल है, जो बुलबुले के अन्दर दाब ($\frac{4T}{r}$) को बढ़ाता है

लेकिन पृष्ठ को दिया गया आवेश एक दूसरे को प्रतिकर्षित करेगा। अतः दिये गये आवेश के कारण बुलबुले के अन्दर दाब ($\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$) जितना से घट जायेगा।

इसलिए बुलबुले के अन्दर अन्तिम दाब $P_f = P_0 + \frac{4T}{r_1} - \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

चूकि बुलबुले के अन्दर गेस का ताप नियत है अतः $P_iV_i = P_fV_f$

$$\left(P_0 + \frac{4T}{r}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \left(P_0 + \frac{4T}{r_f} - \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r_f^3\right)$$

यहां $r_f = 2r$ रखने पर अतः $\sigma = \sqrt{\left(7P_0 - \frac{12T}{r}\right)2\varepsilon_0}$ हम प्राप्त करते है

Example 16. **(Only for JEE Advance)**

हवा का अल्प गोलीय बुलबुला गहरे जार में भरे पारे के स्तम्भ में धीरे–धीरे ऊपर उठता है। यदि 100 सेमी गहराई पर बुलबुले की त्रिज्या 0.1mm हो तो 0.126 mm त्रिज्या के लिए गहराई ज्ञात करो ? दिया हैं, पारे का पृष्ठतनाव 567 डाइन/सेमी० माना वायुमण्डलीय दाब 76 सेमी पारे के बराबर है।

Solution : गहराई h_1 पर बुलबुले के अन्दर कुल दाब (P = वायुमण्डलीय दाब) $= (p + h_1 \rho g) + \frac{2T}{r_1} = p_1$

गहराई $h_2 = (p + h_2 \rho g) + \frac{2T}{r_2} = p_2$

बॉयल के नियम से $p_1V_1 = p_2V_2$ जबकि $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$, और $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$

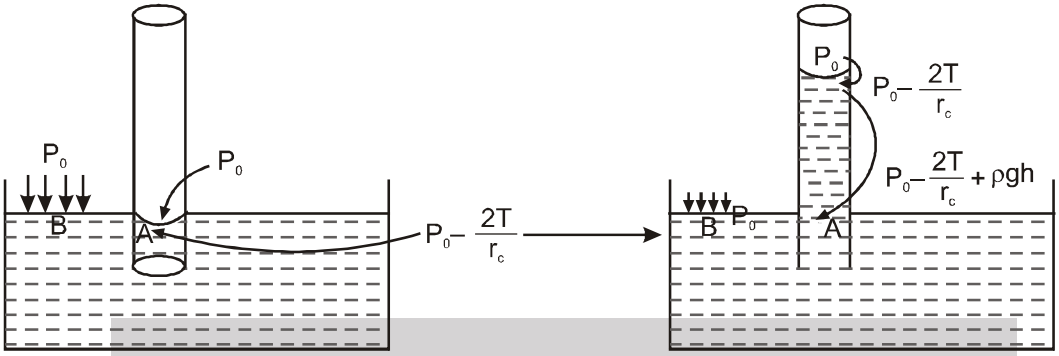
अतः हम प्राप्त करते है $\left[(p + h_1 \rho g) + \frac{2T}{r_1}\right]\frac{4}{3}\pi r_1^3 = \left[(p + h_2 \rho g) + \frac{2T}{r_2}\right]\frac{4}{3}\pi r_2^3$

या $\left[(p + h_1 \rho g) + \frac{2T}{r_1}\right] r_1^3 = \left[(p + h_2 \rho g) + \frac{2T}{r_2}\right] r_2^3$

दिया है। $h_1 = 100$ cm, $r_1 = 0.1$ mm $= 0.01$ cm, $r_2 = 0.126$ mm $= 0.0126$ cm, T = 567 dyne/cm, p = 76 cm इन सभी मानो को रखने पर **$h_2 = 9.48$ cm**.

केशिका उन्नयन :

कांच की बहुत पतली बारीक नली को केशिका नली कहते है।



यदि केश नली को जल में डुबोया जाये अवतल सतह के कारण सतह के ठीक नीचे दाब $P_0 - \frac{2T}{r_c}$ हो जाता है, जबकि समान क्षैतिज स्तर के अन्य बिन्दुओ पर दाब P_0 है। इस कम दाब के कारण नली में जल का स्तर ऊपर उठता है जब तक कि समान क्षैतिज स्तर (A व B बिन्दु पर) पर दाब समान नही हो जाता है।

$$P_0 - \frac{2T}{r_c} + \rho gh = P_0 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{2T}{\rho g r_c}$$

जहां r_c = जल सतह की वक्रता त्रिज्या है। यदि सतह अर्द्धगोलाकार है ($\theta = 0$), तब $r_c = R$ लेकिन यदि जल सतह अर्द्धगोलाकार नही है ($\theta \neq 0$), तब $r_c = R\sec\theta \Rightarrow$ $h = \frac{2T\cos\theta}{\rho g R}$

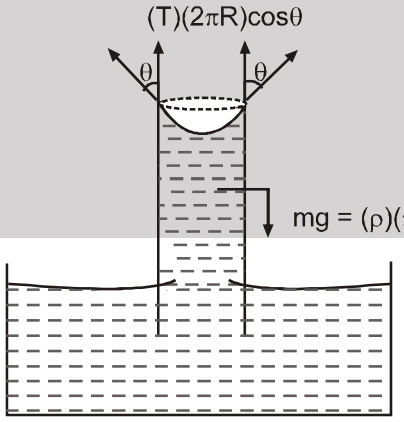
इस सूत्र से हम कह सकते है कि

यदि $\theta < 90°$ तब h = धनात्मक, अतः पानी केशनली में ऊपर उठेगा (Ex. कांच की नली मे जल).

यदि $\theta = 0$ तब $h = 0$, अतः पानी केशनली में बिलकुल ऊपर नही उठेगा (Ex. चांदी की नली मे पानी).

यदि $\theta > 90°$, h = ऋणात्मक अतः द्रव केशनली में नीचे उतरेगा (Ex. कांच की नली में पारा).

बल सन्तुलन से केशिका उन्नयन का व्युत्पन्न :



जैसे हम जल में केशनली को डूबोते है सतह केशनली की दीवार को नीचे की ओर खीचती है, अतः प्रतिक्रिया स्वरूप केशनली की दीवार जल की सतह को चित्रानुसार उपर की ओर खीचती है, इस कारण जल ऊपर उठता है जब तक बल सन्तुलित नही हो जाते है। उठे हुये पानी का F.B.D. बनाये। इस पर लगने वाले बल है।

(i) पृष्ठीय सतह केशनली को नीचे की ओर खीचती है, जिसकी प्रतिक्रिया से केशनली पृष्ठीय सतह को उपर खीचती है। उनका क्षैतिज घटक समाप्त हो जायेगा तथा उनका ऊर्ध्वाधर घटक जुड़ जायेगा। अतः परिणामी पृष्ठ तनाव बल ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर होगा तथा यह $(T)(2\pi R)\cos\theta$ है।

(ii) ऊपर उठे जल का भार, हम नवचन्द्रक का भार नगण्य ले सकते है। अतः उठे जल का भार = $(\rho)(\pi R^2 h)g$ साम्यावस्था में बल संतुलित होना चाहिए।

$(T)(2\pi R)\cos\theta = (\rho)(\pi R^2 h)g \Rightarrow h = \frac{2T}{\rho g R}\cos\theta$

इसी समीकरण से हम कह सकते है $h \propto \frac{1}{R}$ अतः यदि केशनली पतली है, जल अधिक ऊँचाई तक उठेगा।

यदि कांच नली के अन्दर शुद्व जल है तब $\theta \to 0$ अतः $h = \frac{2T}{\rho g R}$

यद्धपि पिछले व्युत्पन्न मे भी नवचन्द्रक का आयतन नगण्य है, लेकिन यदि हम नवचन्द्रक का आयतन लेते है तब उठे हुये जल का आतयन $\pi r^2 (h + r) - \frac{2}{3}\pi r^3$ होगा अतः बल सन्तुलन लगाने पर

$(T)(2\pi R)\cos\theta = (\rho)(\pi r^2 (h + r) - \frac{2}{3}\pi r^3)g$ हल करने पर $\left(h + \frac{r}{3}\right) = \frac{2T}{\rho g R}\cos\theta$

केशिका उन्नयन के भौतिक अनुप्रयोग

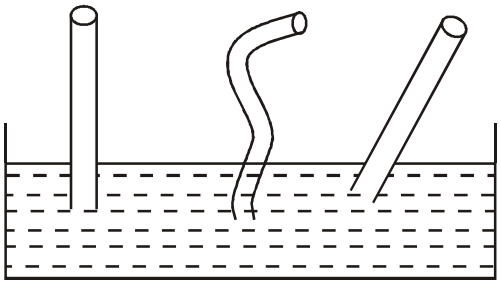
1. लालटेन की बती में तेल केशिकात्व के कारण ऊपर चढता है।
2. पेन के निब का सिरा दो भागो में बटाँ रहता है जिससे निब के अन्दर पतली केशनली बन जाती है। जिसमे स्याही ऊपर की तरफ चढती है ।
3. केशिकात्व के कारण पेड़ो के ऊपरी सिरे तक पानी व खनिज लवण पहुँचते है।
4. यदि तौलिये का एक सिरा पानी में डुबो दिया जाय तो बाल्टी के ऊपर स्थित दूसरा सिरा भी केशिकात्व के कारण गीला हो जाता है।
5. स्याही सोख्ता कागज केशिकात्व के कारण ही स्याही सोखता है।
6. मिट्टी की तुलना में रेत सुखी होती है। क्योकि रेत के कणो में केशनली बारीक नही होती तथा केशनली का पानी ऊपर नही चढ़ पाता।
7. मिट्टी में उपस्थित केशनलियों से पानी ऊपर चढता है तथा यहाँ से वाष्पित हो जाता है । मिट्टी मे नमी बनाये रखने के लिए केशनलीयों को तोडना जरूरी है। इसलिए खेतों की जुताई की जाती है।
8. इंटे छिद्र युक्त होती है जो कि केशनली का कार्य करती है।

Solved Example

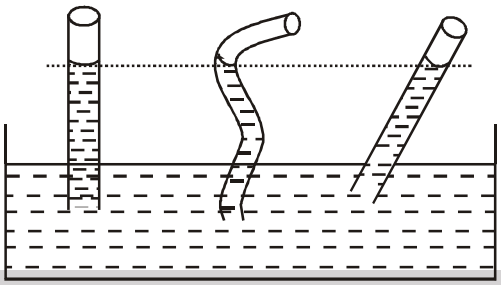
Example 17. 4 mm आन्तरिक त्रिज्या की एक केशनली जल में डुबी हुई है। केशनली में जल किस ऊँचाई तक उठेगा। ($T_{water} = 70 \times 10^{-3}$ N/m, g = 10 m/sec^2, ρ_{water} 10^3 kg/m^3, स्पर्श कोण $\theta \to 0$)

Solution : केशिका उन्नयन $h = \frac{2T}{\rho g R}\cos\theta = \frac{2\times 70\times 10^{-3}}{10^3\times 10\times 4\times 10^{-3}}$ ...(1) $\Rightarrow$ h = 3.5 mm

Example 18. यदि सभी कॉच की केशनली समान आन्तरिक त्रिज्या रखती है, तब किस केशनली में जल अधिक ऊँचाई तक चढेगा।



Solution : केशनली में जल की ऊँचाई $\left(h=\frac{2T}{\rho gr}\cos\theta\right)$ केश नली की आकृति पर निर्भर नही करती है केवल त्रिज्या पर निर्भर करती है। अतः जल सभी केशनली में समान ऊँचाई तक उठेगा। (यद्वपि जल स्तम्भ की लम्बाई प्रत्येक केशनली में अलग अलग हो सकती है)

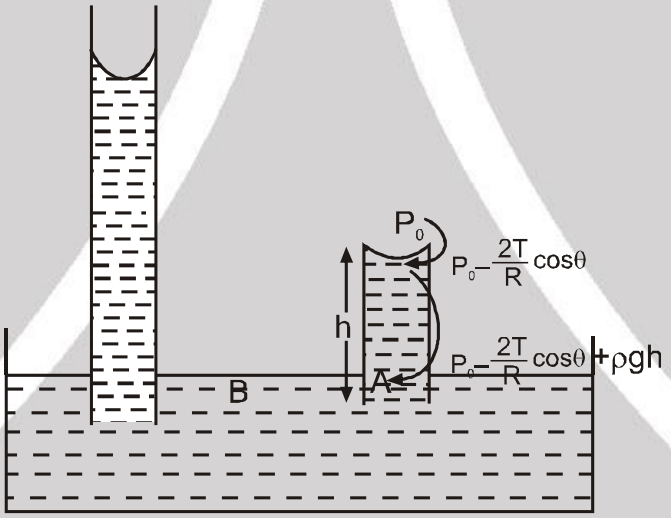


यदि अपर्याप्त लम्बाई की केशनली का उपयोग :

मानिये कि 0.35 mm त्रिज्या की एक केशनली जल में डूबी हुई है। $T_{water} = 70 \times 10^{-3}$ N/m, $\theta \to 0$.

इस स्थिति में जल h ऊँचाई तक चढेगा।

$$h = \frac{2T}{\rho gR}\cos\theta = \frac{2\times70\times10^{-3}}{10^3\times10\times0.35\times10^{-3}} = 4\text{cm}$$



अब हम समान त्रिज्या की एक छोटी केशनली उपयोग में लेते है, लेकिन इसकी लम्बाई केवल 2 cm है, इसको हल्का सा जल में डुबोया जाता है।

दाब को सन्तुलित करने के लिए, जल का स्तर केशनली में चढेगा यह केशनली के ऊपरी सिरे तक चढेगा तथा अब स्पर्श कोण परिवर्तित होगा जब तक कि समान क्षैतिज सतर पर दाब सन्तुलित नही हो जाता है A बिन्दु (केशनली के अन्दर) तथा बिन्दु B (बाहर) पर दाब सन्तुलित करने पर

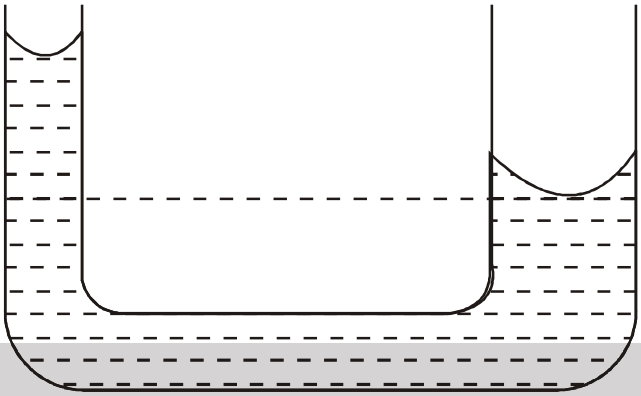
$$P_0 - \frac{2T}{R}\cos\theta + \rho gh = P_0 \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{2T}{\rho gR}\cos\theta$$

$$2\times10^{-2} = \frac{2\times70\times10^{-3}}{10^3\times10\times0.35\times10^{-3}}\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60°$$

अतः जल का स्तर केशनली (= 2cm) के उच्चतम बिन्दु तक पहुँच जाता है तथा अब स्पर्श कोण परिवर्तित होकर 60° हो जायेगा जल ऊपरी सिरे से फुवारे के रूप में बाहर नही आयेगा।

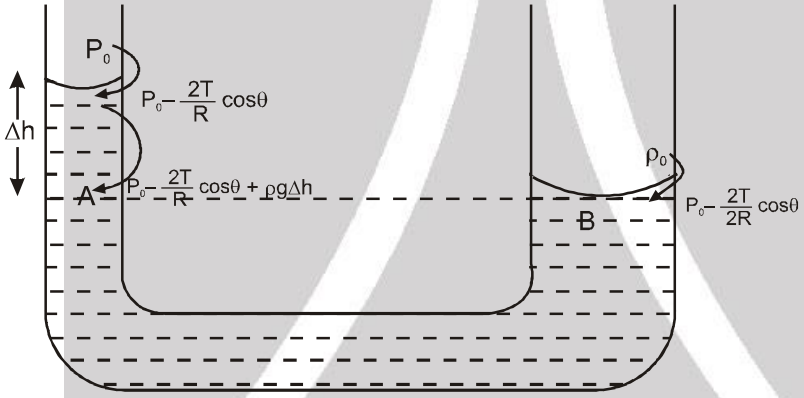
Solved Example

Example 19.



U-नली में, एक भुजा की त्रिज्या R है तथा दुसरी भुजा की त्रिज्या 2R है। जल के स्तर में अन्तर ज्ञात कीजिए यदि स्पर्श कोण $\theta = 60°$ तथा जल का पृष्ठ तनाव T है।

Solution :



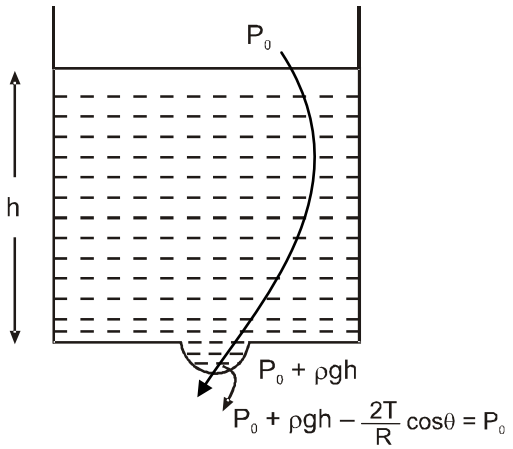
समान क्षैतिज स्तर पर स्थित बिन्दु A तथा B पर दाब सन्तुलन से

$P_0 - \frac{2T}{R}\cos\theta + \rho g\Delta h = P_0 - \frac{2T}{2R}\cos\theta$ जहां $\theta = 60°$, हम प्राप्त करते है $\Delta h = \frac{T}{2\rho gR}$

Example 20. यहां एक बडे पात्र की तली पर 0.1 mm व्यास का एक छोटा छिद्र है। किस न्यूनतम ऊँचाई तक हम जल भर सकते है ताकि जल छिद्र से बाहर नही आये। ($T_{water} = 75 \times 10^{-3}$ N/m)

$\rho_{water} = 10^3$ kg/m^3, g = 10m/sec^2

Solution :



जल की नीचली सतह जहां से जल बाहर निकल सकता है गोलाकार हो जायेगी। गोलाकार सतह के ठीक बाहर दाब निम्न होगा। $P_0 + \rho gh - \frac{2T}{R}\cos\theta = P_0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2T}{\rho gR}\cos\theta$

$(h)_{max} = \frac{2T}{\rho gR}(\cos\theta)_{max}$ तथा $(\cos\theta)_{max} = 1$

अतः $(h)_{max} = \frac{2T}{\rho gR} = \frac{2\times 75\times 10^{-3}}{10^3\times 10\times 0.05\times 10^{-3}}$

$(h)_{max} = 30$ cm

पृष्ठतनाव के अनुप्रयोग

(i) गीला करने के गुण से अपमार्जक व जलरोधी पदार्थ बनाये जाते है। जब अपमार्जक पदार्थो को द्रव में मिलाया जाता है। तो स्पर्श कोण घटता है फलस्वरूप गीला करने का गुण बढता है। दूसरी तरफ जब जलरोधी पदार्थ को कपडे में मिलाया जाता है तो स्पर्श कोण बढता है तथा कपड़ा जल को प्रतिकर्षित करता है।

(ii) anticeptic क्रीम का पृष्ठ तनाव बहुत कम होता है। कम पृष्ठ तनाव बूंद बनने से रोकता है ताकि पूरी क्रीम त्वचा के ऊपर फैल जाए। कम पृष्ठतनाव के कारण anticeptic क्रीम सम्पूर्ण फैल जाती है।

(iii) स्नेहक तेल तथा पेन्ट में पृष्ठ तनाव कम रखते है, ताकि ये पूरी तरह फैल जाए।

(iv) तेल पानी के ऊपर फैल जाता है। क्योकि तेल का पृष्ठ तनाव, ठण्डे पानी के पृष्ठ तनाव से कम होता है

(v) अशांत समुद्र को इसकी सतह पर तैल ड़ालकर शांत किया जाता है।.

Solved Example

Example 21. (Only for JEE Advance)

एक दाबमापी (मेनोमीटर) में 1.44×10^{-3} m तथा 7.2×10^{-4} m त्रिज्या की दो केशनलिया है। यदि पतली नली में द्रव की ऊँचाई, चौड़ी नली की अपेक्षा 0.2 m ज्यादा हो तो वास्तविक दाबान्तर ज्ञात करो ? द्रव का घनत्व = 10^3 kg/m^3, पृष्ठ तनाव = 72×10^{-3} N/m तथा g = 9.8 m/s^2 दिये गये है।

Solution : माना r_1 तथा r_2 त्रिज्या की मोटी व पतली नलियो में दाब क्रमशः p_1 तथा p_2 है।

मोटी व पतली नलियों के नवचन्द्रको के ठीक नीचे दाब क्रमशः –

$\left(p_1 - \frac{2T}{r_1}\right)$ तथा $\left(p_2 - \frac{2T}{r_2}\right)$ होगा [दाब आधिक्य $= \frac{2T}{r}$]

इन दाबो का अन्तर $= \left(p_1 - \frac{2T}{r_1}\right) - \left(p_2 - \frac{2T}{r_2}\right) = h\rho g$

$\therefore$ वास्तविक दाबान्तर $= p_1 - p_2 = h\rho g + 2T\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

$= 0.2 \times 10^3 \times 9.8 + 2 \times 72 \times 10^{-3}\left[\frac{1}{1.44\times 10^{-3}} - \frac{1}{7.2\times 10^{-4}}\right] = 1.86 \times 10^3 =$ **1860 N/m^2**

Example 22. (Only for JEE Advance)

1.5 विशिष्ठ घनत्व का द्रव 0.50 mm व्यास की केशनली में 3.0 cm तक चढता है तथा द्रव नली की दीवारों को गीला करता है। इस द्रव के नीचे स्थित 1.0 cm व्यास के बुलबुले में दाब आधिक्य ज्ञात करों। स्पर्श कोण = 0º.

Solution : द्रव का पृष्ठ तनाव

$T = \frac{rh\rho g}{2} = \frac{(0.025cm)(3.0cm)(1.5gm/cm^3)(980cm/sec^2)}{2} = 55$ dyne/cm.

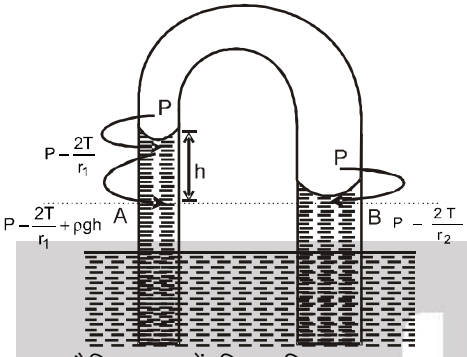
बुलबुले के अन्दर दाब आधिक्य

$p = \frac{4T}{R} = \frac{4\times 55 \ \ dyne/cm}{(0.5 \ \ cm)} =$ **440 dyne/cm^2** .

Example 23. **(Only for JEE Advance)**

कॉंच की U नली इस प्रकार बनी हैकि इसके एक सिरे का व्यास 3.0 mm तथा दूसरे सिरे का व्यास 6.00 mm है। नली उर्ध्वाधर स्थिति में उल्टी, खुले सिरो के साथ पानी के बीकर में चित्रानुसार खडी है। दोनो सिरो पर चढे हुए पानी की ऊँचाई का अन्तर क्या होगा ? पानी का पृष्ठ तनाव = 0.07 Nm^{-1} है। माना कांच व पानी के बीच स्पर्श कोण 0° है।

Solution.



समान क्षैतिज तल में स्थित बिन्दु A व B पर दाब संतुलित करने पर

$$P-\frac{2T}{r_1}+\rho gh = P-\frac{2T}{r_2} \quad \Rightarrow \quad h=\frac{2T}{\rho g}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$T = 0.07\ Nm^{-1}$, $\rho = 1000\ kgm^{-3}$

$$r_1=\frac{3}{2}\ mm=\frac{3}{20}\ cm=\frac{3}{20\times100}\ m = 1.5\times10^{-3}\ m,\ r_2 = 3\times10^{-3}\ m$$

$$\therefore\quad h=\frac{2\times0.07}{1000\times9.8}\left(\frac{1}{1.5\times10^{-3}}-\frac{1}{3\times10^{-3}}\right)\ m = 4.76\times10^{-3}\ m = 4.76\ mm$$

Example 24. **(Only for JEE Advance)**

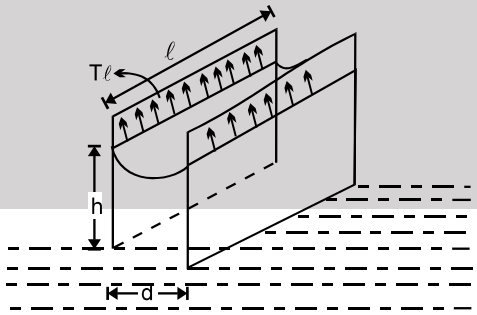
दो समान्तर प्लेटे जो एक दूसरे से बहुत कम दूरी d द्वारा पृथकक्रत हैं, जल में डूबी हुई है। प्लेटो के मध्य जल किस ऊँचाई तक उठेगा (मानिये कि स्पर्श कोण $\theta \to 0$ है)

Solution : जल के उठे भाग का F.B.D. बनाये। इस पर बल

(i) प्लेट पृष्ठीय सतह को ऊपर की ओर $2T\ell$ बल से खीचती है।

(ii) उठे हुये जल का भार = $(\rho)(\ell hd)g$

साम्यावस्था के लिए बल सन्तुलित होने चाहिए



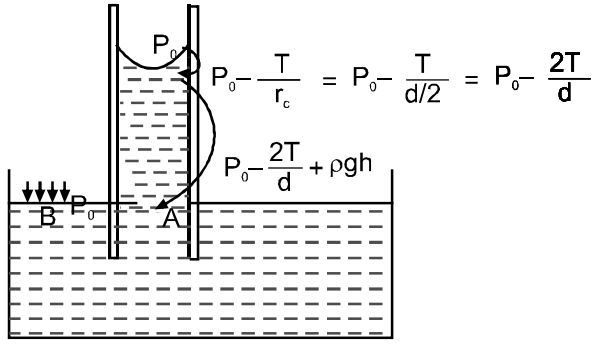
$$2T\ell = (\rho)(\ell hd)g \ \Rightarrow \quad h=\frac{2T}{\rho gd}$$

यह भी $\frac{T}{d/2}=\rho gh$; अतः हम कह सकते है कि बेलनाकार सतह के कारण दाब आधिक्य $=\frac{T}{d/2}=\frac{T}{r_c}$

गोलाकार सतह के कारण दाब आधिक्य = $\frac{2T}{r_c}$

बेलनाकार सतह के कारण दाब आधिक्य = $\frac{T}{r_c}$

विकल्प विधि :



$$\Rightarrow \quad P_0 - \frac{2T}{d} + \rho gh = P_0 \Rightarrow h = \frac{2T}{\rho g d}$$

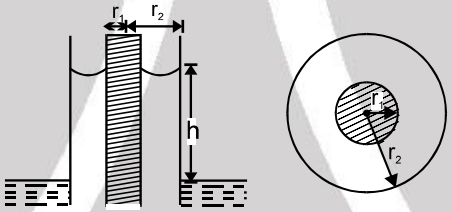
Example 25. **(Only for JEE Advance)**

आन्तरिक त्रिज्या r_1 तथा बाहय त्रिज्या r_2 (आन्तरिक नली ठोस है) की एक पतली केशनली जल में डूबी हुई है। नली में जल किस ऊँचाई तक नली में चढेगा ?(मानिये कि स्पर्श कोण $\theta \to 0$ है)

Solution : बल सन्तुलन से

$T [2\pi r_1 + 2\pi r_2] = [\pi r^2_2 h - \pi r_1^2 h] \rho g$

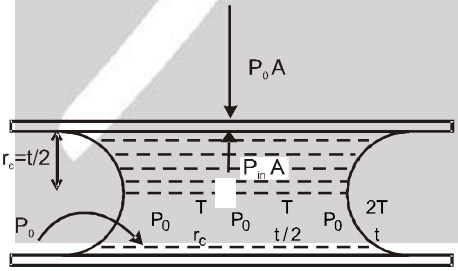
$$h = \frac{2T}{(r_2 - r_1)\rho g}$$



Example 26. **(Only for JEE Advance)**

एक बूंद जिसका आयतन 0.05 cm^3 है, को दो कांच की प्लेटों के बीच दबाया जाता है। जिसके कारण यह फैल जाती है तथा 40 cm^2 का क्षेत्रफल घेरती है। यदि पानी का पृष्ठ तनाव 70 dyne/cm हो तो दोनो काँच की प्लेटो को अलग–अलग करने के लिए आवश्यक अभिलम्ब बल न्यूटन में ज्ञात करों।

Solution :



सतह के अन्दर दाब $P_{in} = P_0 - \frac{T}{r_C} = P_0 - \frac{T}{t/2} = P_0 - \frac{2T}{t}$,

अतः अन्दर की ओर परिणामी बल $= P_0 A - P_{in} A = \left(P_0 - \frac{2T}{t}\right) A - P_0 A = \frac{2TA}{t}$

यहाँ प्लेटों के बीच का आयतन $V = A \times t \Rightarrow \quad t = \frac{V}{A}$, t का मान रखन पर

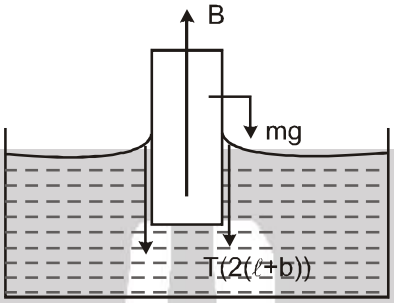
$F = \frac{2A^2T}{V} = \frac{2\times(40\times10^{-4})^2\times(70\times10^{-3})}{0.05\times10^{-6}} = 45$ N ; अतः प्लेट को अलग अलग करने के लिए इतना बल लगाना पड़ेगा।

Example 27. 10 cm लम्बी काँच की पट्टिका की चौड़ाई 1.54 cm तथा मोटाई 0.20 cm और हवा में भार 8.2 gm है। इसको लम्बाई के अनुदिश उर्ध्वाधर लटका रखा है तथा निचला आधा भाग पानी में स्थित है। प्लेट का आभासी भार ज्ञात करो ? पानी का पृष्ठ तनाव = 73 dyne per cm, g = 980 cm/sec^2.

Solution : प्लेट पर कार्यरत बल निम्न है।

(i) ऊपर की ओर लगने वाला उत्पलावन बल

$$B = \rho_l V_{sub} g = 1 \times \frac{1.54 \times 10 \times 0.2}{2} \times 980 = 1509.2 \text{ dyne.}$$



(ii) नीचे की ओर लगने वाला प्लेट का भार = (8.2) × 980 dyne

(iii) नीचे की ओर लगने वाला पृष्ठ तनाव बल = 2 (ℓ + b)T = 2 (10 + 0.2) 73 = 1489.2

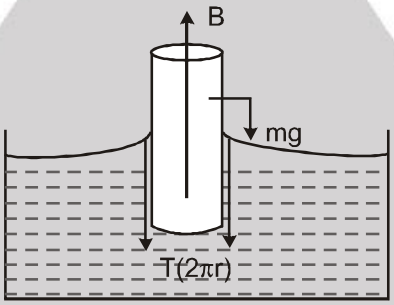
अतः नेट नीचे की ओर बल = mg + (पृष्ठ तनाव बल) – B = (8.2) × 980 + 1489.2 – 1509.2

= 8016.008 dyne = 8.1796 gm force

Example 28. **(Only for JEE Advance)**

वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की कांच की नली का एक सिरा बंद है। यह सिरा भारित है तथा नली पानी में उर्ध्वाधर तैर रही है। जल सतह से नली के सिरे की गहराई कितनी होगी ? दिया है, नली की बाहरी त्रिज्या = 0.14 cm, नली का द्रव्यमान = 0.2 gm पानी का पृष्ठ तनाव 73 डाईन/सेमी तथा g = 980cm/sec^2.

Solution : माना कि पानी के भीतर नली की लम्बाई ℓ है। नली पर कार्यरत बल निम्न है।



(i) ऊपर की ओर लगने वाला उत्पलावन बल

$$B = \pi r^2 \ell \times 1 \times 980 = \frac{22}{7} \times (0.14)^2 \ell \times 980 = 60.368 \ell \text{ dyne.}$$

(ii) नीचे की ओर लगने वाला भार = mg = 0.2 × 980 = 196 dyne.

(iii) नीचे की ओर लगने वाला पृष्ठ तनाव बल = $2\pi rT = 2 \times \frac{22}{7} \times 0.14 \times 73 = 64.24$ dyne.

नली की साम्यावस्था के लिए ऊपर व नीचे वाले बल आपस में संतुलित होने चाहिए।

$60.368 \ell = 196 + 64.24 \quad = 260.24.$

$$\therefore \quad \ell = \frac{260.24}{60.368} = 4.31 \text{ cm}$$

Exercise-1

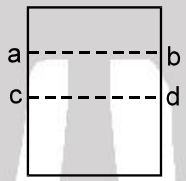
चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

खण्ड़ (A) : पृष्ठ तनाव, पृष्ठ ऊर्जा तथा केशिकात्व उठाव

A-1. 1 mm व्यास की नली 0.8 g/cm^3 घनत्व के द्रव से भरे पात्र में डूबी है। इस द्रव का पृष्ठ तनाव 30 dyne/cm तथा स्पर्श कोण शून्य है। वह लम्बाई ज्ञात करो, जहां तक द्रव केशनली में चढ़ता है, यदि नली (a) ऊर्ध्वाधर (b) ऊर्ध्वाधर से 30º झुकी हुई अवस्था में हो।

A-2. साबुन की फिल्म, आयताकार ऊर्ध्वाधर तार के फ्रेम में चित्रानुसार खींची जाती है। साम्यावस्था में कौनसे बल भाग abcd को संतुलित करेंगे ?



A-3. 1 cm त्रिज्या की पारे की बूंद समान आकार की 10^6 सुक्ष्म बूंदों में टूट जाती है। उत्सर्जित ऊर्जा ज्ञात करो (पारे का पृष्ठ तनाव = 32×10^{-2} N/m)

A-4. दो सीधे समान्तर तारों प्रत्येक की लम्बाई 10 cm तथा इनके बीच की दूरी 0.5 cm है, के बीच पानी की फिल्म बनती है। तारों के बीच की दूरी 1 mm बढ़ाने के लिए आवश्यक कार्य की गणना करो। पृष्ठ तनाव = 72×10^{-3} N/m है।

खण्ड़ (B) : बूँदो तथा बुलबुले में दाब आधिक्य

B-1. R त्रिज्या तथा S पृष्ठ तनाव के साबुन के बुलबुले की त्रिज्या को, बिना तापमान परिवर्तन के दुगुना करने के लिए आवश्यक ऊर्जा का मान क्या होगा।

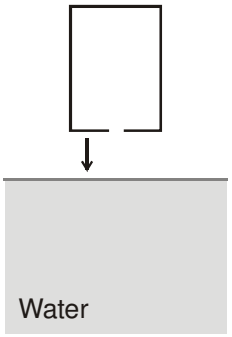
B-2. V आयतन का बुलबुला फुलाने में किया गया कार्य W है तो 2V आयतन का बुलबुला फुलाने में किया गया कार्य कितना होगा?

B-3. निम्न में दाब आधिक्य ज्ञात कीजिए। पारे की बूंद जिसकी 2 mm त्रिज्या है एवं 4 mm त्रिज्या के साबुन के बुलबुले में तथा पानी की टंकी के अन्दर बने हुए 4 mm त्रिज्या वाले वायु के बुलबुले में। पारे का पृष्ठतनाव 0.465 N/m है। साबुन के घोल तथा पानी का पृष्ठ तनाव क्रमशः , 0.03 N/m तथा 0.076 N/m है।

B-4. दो एक समान साबुन के बुलबुले प्रत्येक की त्रिज्या r तथा पृष्ठ तनाव T है, को मिलाकर एक नया साबुन का बुलबुला बनाया जाता है जिसकी त्रिज्या R है। दोंनो बुलबुलो के अन्दर की हवा का ताप समान है। यदि वायुमण्डलीय दाब p_0 हो तो पृष्ठ तनाव T का मान p_0, r तथा R के पदों में ज्ञात कीजिए। मानिए कि प्रक्रम समतापीय है।

B-5. पानी की गोलाकार बूँद की त्रिज्या 1 mm है। यदि पानी का पृष्ठ तनाव 50×10^{-3} न्यूटन / मीटर है, तब गोलाकार बूँद के अन्दर तथा बाहर के दाब में अन्तर ज्ञात करो।

B-6. एक खाली पात्र के तली में r त्रिज्या का वृत्ताकार छिद्र है। पात्र को पानी में धीरे–धीरे चित्रानुसार धकेला जाता है। पात्र की नीचे वाली सतह को (पानी की सतह से) कितनी अधिकतम गहराई तक धकेल सकते है, ताकि पानी पात्र में प्रवेश न करें ?

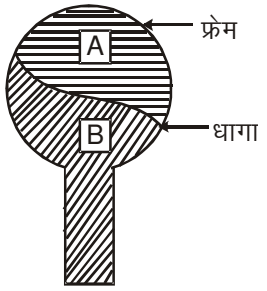


(पानी का पृष्ठ तनाव = T, पानी का घनत्व = ρ)

भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

खण्ड़ (A) : पृष्ठ तनाव,पृष्ठ ऊर्जा तथा केशिकात्व उठाव

A-1. चित्रानुसार फ्रेम में एक धागे को हल्का सा ढीला बांधा जाता है तथा इस फ्रेम को साबुन के घोल में डालकर बाहर निकालते है। फ्रेम सम्पूर्ण रूप से फिल्म द्वारा घिर जाता है। जब A भाग को पिन से तोड़ा जाय तो, धागा –



(A) A की तरफ उत्तल हो जाएगा।

(B) A की तरफ अवतल हो जाएगा।

(C) प्रारम्भिक अवस्था में रहेगा।

(D) या तो (A) या (B), जो कि B की तुलना में A के आकार पर निर्भर होगा।

A-2. केशनली के साथ पृष्ठ तनाव प्रयोग में पानी 0.1 m तक चढ़ता है। यदि इस प्रयोग को कृत्रिम उपग्रह पर दोहराया जाये, जोकि पृथ्वी के चारों तरफ चक्कर लगा रहा है, तो केशनली में पानी किस ऊँचाई तक चढ़ेगा :

(A) 0.1 m (B) 0.2 m (C) 0.98 m (D) नली की सम्पूर्ण ऊचाँई तक

A-3. r त्रिज्या की धातु की पतली चकती पानी की सतह पर तैर रही है तथा परिधि के अनुदिश सतह, ऊर्ध्वाधर से θ कोण पर नीचे की तरफ झुकी हुई है। यदि चकती द्वारा हटाये गये पानी का भार W तथा पानी का पृष्ठतनाव T हो, तो धातु की चकती का भार होगा :

(A) $2\pi rT + W$ (B) $2\pi rT\cos\theta - W$ (C) $2\pi rT\cos\theta + W$ (D) $W - 2\pi rT\cos\theta$

A-4. द्रव का पृष्ठ तनाव 5 न्यूटन प्रति मीटर है। यदि 0.02 मीटर^2 क्षेत्रफल की वलय में फिल्म उपस्थित है तो इसकी पृष्ठीय ऊर्जा होगी –

(A) 5×10^{-2} J (B) 2.5×10^{-2} J (C) 2×10^{-1} J (D) 3×10^{-1} J

A-5. U-नली के दो स्तम्भों की त्रिज्याऐं क्रमशः r_1 तथा r_2 है। जब ρ घनत्व के द्रव (स्पर्श कोण 0°) को इसमें भरा जाता है तो इसके दोनों स्तम्भो में द्रव स्तरों की ऊचाँई में अन्तर h है। द्रव का पृष्ठ तनाव होगा : (g = गुरूत्व के कारण त्वरण) :

(A) $\frac{\rho ghr_1r_2}{2(r_2 - r_1)}$ (B) $\frac{\rho gh(r_2 - r_1)}{2r_1r_2}$ (C) $\frac{2(r_2 - r_1)}{\rho ghr_1r_2}$ (D) $\frac{\rho gh}{2(r_2 - r_1)}$

A-6. केशनली में पानी h ऊँचाई तक चढ़ता है। यह h से ज्यादा ऊचाँई तक चढ़ेगा –

(A) सूर्य सतह पर (B) नीचे की तरफ त्वरित गति करती लिफ्ट में

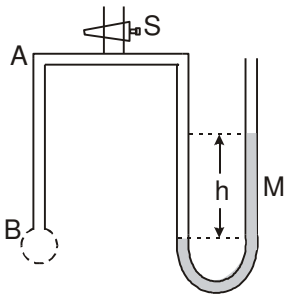
(C) ध्रुवों पर (D) ऊपर की तरफ त्वरित गति करती लिफ्ट में

A-7. पानी की सतह पर कीट चल सकते है क्योंकि

(A) कीट का भार कम होता है। (B) कीट पानी पर तैर सकते है।

(C) आर्किमिडिज के उत्प्लावन बल के कारण (D) पृष्ठ तनाव, सतह को प्रत्यास्थ झिल्ली की तरह बना देता है।

A-8. एक पतली नली AB दाबमापी M से चित्रानुसार जुड़ी है। वाल्व S द्वारा हवा प्रवाह को नियन्त्रित किया जाता है। AB नली को पृष्ठ तनाव σ वाले द्रव में डुबोते है तथा वाल्व S को तब तक खुला रखते है, जब तक B पर बुलबुला नहीं बन जाता तथा दाबमापी का पाठयांक लेते है। दोनों भुजाओं में द्रव स्तरों का अन्तर h चित्र में प्रदर्शित है। यदि ρ दाबमापी द्रव का घनत्व तथा r बुलबुले की वक्रता त्रिज्या हो तो द्रव का पृष्ठ तनाव σ है –



(A) ρhrg (B) $2\rho hgr$ (C) $4\rho hrg$ (D) $\frac{rh\rho g}{4}$

A-9. दो कांच की प्लेटे 'd' घनत्व के द्रव में ऊर्ध्वाधर आंशिक डुबी हुई है। यदि प्लेटों के मध्य दूरी 'x', द्रव का पृष्ठ तनाव T तथा स्पर्श कोण θ हो तो प्लेटों में केशिकात्व के कारण चढ़े द्रव की ऊचाँई होगी :

(A) $\frac{T\cos\theta}{xd}$ (B) $\frac{2T\cos\theta}{xdg}$ (C) $\frac{2T}{xdg\cos\theta}$ (D) $\frac{T\cos\theta}{xdg}$

खण्ड़ (B) : बूँदो तथा बुलबुले में दाब आधिक्य

B-1. यदि साबुन के बुलबुले को आवेश दिया जाये तो यह प्रदर्शित करता है –

(A) आकार में कमी (B) आकार में अपरिवर्तन

(C) आकार में वृद्धि (D) आकार में कभी वृद्धि तथा कभी कमी।

B-2. एक पानी की बूँद, 8 समान बूँदो में विभक्त हो जाती है। बड़ी बूँद की आन्तरिक व बाहरी सतह के मध्य दाबान्तर होगा :

(A) छोटी बूँद के समान (B) छोटी बूँद का 1/2 गुना (C) छोटी बूँद का 1/4 गुना (D) छोटी बूँद का दुगुना।

B-3. r त्रिज्या का हवा का बुलबुला, किसी क्षण पानी सतह से h गहराई पर स्थित है। यदि P–वायुमण्डलीय दाब, d व T क्रमशः पानी का घनत्व व पृष्ठ तनाव हो तो बुलबुले के अन्दर दाब होगा :

(A) $P + h\,dg - \frac{4T}{r}$ (B) $P + h\,dg + \frac{2T}{r}$ (C) $P + h\,dg - \frac{2T}{r}$ (D) $P + h\,dg + \frac{4T}{r}$

B-4. पानी की एक बड़ी गोलीय बूँद से, n छोटी गोलीय समरूप बूंदों को बनाने में किया गया कार्य समानुपाती है –

(A) $\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)-1$ (B) $\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)-1$ (C) $n^{1/3} - 1$ (D) $n^{4/3} - 1$

B-5. दो असमान बुलबुले, मध्य में टोटी (नल) लगी हुई नली के सिरों पर बनाये जाते है। क्या होगा जब टोटी को खोलने पर दोनों बुलबुले सम्पर्क में आते है।

(A) चूंकि टोटी के दोनों तरफ दाब समान है अतः वायु किसी भी दिशा में नहीं बहेगी।

(B) दोनों के आकार बराबर होने तक बड़ा बुलबुला सिकुड़ता है तथा छोटा बुलबुला फैलता है।

(C) छोटा बुलबुला सिकुड़ कर समाप्त हो जाता है तथा बड़ा बुलबुला आकार में बढ़ जाता है।

(D) इनमें से कोई नहीं

B-6. निर्वात में साबुन के बुलबुले की त्रिज्या 3 cm तथा दूसरे साबुन के बुलबुले की निर्वात में त्रिज्या 4 cm है। यदि समतापीय स्थिति में दोनों को मिलाया जाय तो नये बुलबुले की त्रिज्या होगी :

(A) 2.3 cm (B) 4.5 cm (C) 5 cm (D) 7 cm

B-7. एक चलायमान पिस्टन युक्त बेलन में p_1 दाब पर हवा भरी है तथा इसमें एक 'r' त्रिज्या का साबुन का बुलबुला स्थित है। पिस्टन को धीरे–धीरे चलाकर हवा को दाब p_2 से सम्पीड़ित किया जाता है जिससे बुलबुले का आकार आधा हो जाता है : (पृष्ठ तनाव σ, तथा तापमान T नियत है) p_2 का मान क्या होगा –

(A) $\left[8p_1 + \frac{24\sigma}{r}\right]$ (B) $\left[4p_1 + \frac{24\sigma}{r}\right]$ (C) $\left[2p_1 + \frac{24\sigma}{r}\right]$ (D) $\left[2p_1 + \frac{12\sigma}{r}\right]$

B-8. एक पात्र के तल में व्यास d = 0.1 mm का गोल छिद्र है तथा इसमें पानी भरा है। पात्र में पानी स्तर की अधिकतम ऊचाँई h ज्ञात करो। जिससे पानी बाहर नहीं बहे : (पानी पात्र के तल को गीला नहीं करता है) [पानी का पृष्ठ तनाव = 70 dyn/cm]

(A) h = 24.0 cm (B) h = 25.0 cm (C) h = 26.0 cm (D) h = 28.0 cm

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1.

स्तम्भ - I	**स्तम्भ - II**
(A) बडी बूंद के छोटी बूंद में विभक्त होने पर	(P) तापमान परिवर्तित होता है।
(B) छोटी बूंदों से बड़ी बूंद के बनने पर	(Q) तापमान नियत रहता है।
(C) द्रव के फेलने पर	(R) पृष्ठिय ऊर्जा परिवर्तित होती है।
(D) बडे साबुन के बुलबुले के समान मोटाई के छोटे साबुन के बुलबुले मे विभक्त हाने पर	(S) पृष्ठीय ऊर्जा अपरिवर्तित रहती है।

Exercise-2

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग-I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

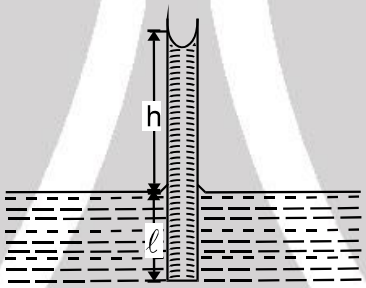
1. साबुन के घोल की फिल्म क्षैतिज में स्थित है। इसके ऊपर एक धागा, लूप के रूप में रखा जाता है। अब यदि लूप के अन्दर की फिल्म को तोड़ा जाता है तथा धागा R त्रिज्या की वृत्ताकार लूप की आकृति ग्रहण कर लेता है। यदि साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव T हो धागे में तनाव है–

(A) $\pi R^2/T$ (B) $\pi R^2 T$ (C) $2\pi R T$ (D) $2RT$

2. R त्रिज्या की केशनली पानी में डूबी हुई है तथा पानी इसमें H ऊचाँई तक चढ़ता है। केशनली में चढ़े पानी का द्रव्यमान M है। यदि केश नली की त्रिज्या दुगुनी कर दी जाए तो केशनली में चढ़े हुए पानी का द्रव्यमान होगा –

(A) 2M (B) M (C) $\frac{M}{2}$ (D) 4M

3. चित्रानुसार ऊर्ध्वाधर रूप से पानी में ℓ गहराई तक डुबी केशनली में चढ़े हुए पानी की ऊचाँई h है। अब नली का निचला सिरा बंद है। अब नली को बाहर निकाला जाता है तथा दुबारा खोला जाता है तो शेष पानी स्तम्भ की नली में लम्बाई होगी –



(A) 2h यदि $\ell > h$ तथा $\ell + h$ यदि $\ell < h$ (B) h यदि $\ell > h$ तथा $\ell + h$ यदि $\ell < h$

(C) 4h यदि $\ell > h$ तथा $\ell - h$ यदि $\ell < h$ (D) h/2 यदि $\ell > h$ तथा $\ell + h$ यदि $\ell < h$

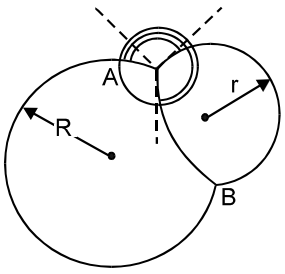
4. r_1 त्रिज्या का साबुन का बुलबुला दूसरे r_2 त्रिज्या के साबुन के बुलबुले पर रखा है ($r_1 < r_2$)। दोनों बुलबुलों को अलग करने वाली साबुन की फिल्म की त्रिज्या R होगी –

(A) $r_1 + r_2$ (B) $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ (C) $(r_1^3 + r_2^3)$ (D) $\frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}$

5. पुरानी इमारतों के ऊँचे गुम्बदों की पहचान सुन्दरता के अतिरिक्त संरचना के कारण है। इसमें साबुन के बुलबुले के समान वक्रता के कारण दो सतहों के बीच दाबान्तर होता है। एक 5 m त्रिज्या का एक समान अल्प मोटाई का गुम्बद है। इसकी चिनाई संरचना के पदार्थ का पृष्ठ तनाव 500 N/m है। इसको अर्द्ध गोला मानते हुए, गुम्बद द्वारा सहन किया जाने वाले भार का निकटतम मान है –

(A) 1500 kg wt. (B) 3000 kg wt. (C) 6000 kg wt. (D) 12000 kg wt.

6. 'r' त्रिज्या का साबुन का बुलबुला दूसरे R त्रिज्या के बुलबुले पर रखा है। (चित्र) सम्पर्कित बिन्दुओं की फिल्म के मध्य कोण होगा–



(A) 120° (B) 30° (C) 45° (D) 90°

7. बहुत सारी द्रव की बूंदे जिनकी त्रिज्या 'a' है, को मिलाकर 'b' त्रिज्या की एक बड़ी बूंद बनाई जाती है। इस प्रक्रम में उत्सर्जित ऊर्जा, बड़ी बूंद की गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। बड़ी बूंद की चाल होगी –

(A) $\sqrt{\frac{6T}{\rho}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]}$ (B) $\sqrt{\frac{4T}{\rho}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]}$ (C) $\sqrt{\frac{8T}{\rho}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]}$ (D) $\sqrt{\frac{5T}{\rho}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]}$

8. क्रान्तिक ताप पर द्रव का पृष्ठ तनाव –

(A) शून्य है। (B) अनन्त है।

(C) किसी भी अन्य तापमान के समान है। (D) ज्ञात नहीं कर सकते।

9. एक साबुन के बुलबुले के अन्दर दाब आधिक्य केरोसिन (घनत्व 0.8 g cm^{-3}) के 2 mm के बराबर है। यदि बुलबुले का व्यास 3.0 cm है, तो साबुन के विलयन का पृष्ठ तनाव है – **[Olympiad (Stage-1) 2017]**

(A) 39.2 dyne cm^{-1} (B) 45.0 dyne cm^{-1} (C) 51.1 dyne cm^{-1} (D) 58.8 dyne cm^{-1}

भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

1. वायुयुक्त बेलन जोकि मूलतः 10^5 N/m^2 दाब पर है, में 2.4×10^{-4} m त्रिज्या का एक साबुन का बुलबुला स्थित है। अब बेलन की वायु को समतापीय रूप से तब तक सम्पीड़ित किया जाता है जब तक बुलबुले की त्रिज्या आधी न रह जाये। अब बेलन में हवा का दाब (atm में) ज्ञात करो। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 0.08 N/m है।

2. r = 1 mm त्रिज्या की लम्बी केशनली दोनो सिरो से खुली है तथा पानी से भरकर उर्ध्वाधर रखी हैं। केशनली में शेष पानी के स्तम्भ की ऊँचाई समीपवर्ती पूर्णाक में (सेमी में) क्या होगी। केशनली की दीवार की चौड़ाई नगण्य हैं। (जल का पृष्ठ तनाव = 72 dyne/cm तथा g = 1000 cm/sec^2)

3. दो साबुन के गोलीय बुलबुले आपस में मिलते है। यदि भरी हुई हवा के आयतन में परिवर्तन V तथा कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में परिवर्तन S तथा साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव T हो तब यदि P_0, V, S तथा T में सम्बन्ध $\lambda P_0 V + 4ST = 0$ है तो λ ज्ञात करो। (यदि P_0 वायुमण्डलीय दाब है) सभी बुलबुलो में हवा का ताप एक समान माने

4. 1 mm व्यास की केशनली को जल के पात्र में ऊर्ध्वाधर डुबाया गया है। यदि नली में जल की सतह से 5.0 cm नीचे दाब तथा वायुमण्डलीय दाब में अन्तर (gauge pressure) 2λ N/m^2 है तो λ ज्ञात कीजिए। जल का पृष्ठ तनाव = 0.075 N/m है। (g = 9.8 m/s^2 & ρ_w = 1000 kg/m^3 के मान ले)

5. पतली दीवारों की एक केशनली, सन्तुलन तुला के साथ सम्पर्कित है जोकि सन्तुलित की गई है। केशनली का निचला सिरा पानी की सतह के सम्पर्क में आता है। तत्पश्चात् सन्तुलन अवस्था बनाए रखने के लिए एक अतिरिक्त भार P = 0.135 gm बल की आवश्यकता पड़ती है। यदि केशनली की त्रिज्या $\frac{\lambda}{10}$ mm है तो λ ज्ञात करो। पानी का पृष्ठ तनाव 70 dyn/cm है। (g = 9.8 m/s^2)

6. ऊपरी सिरे से बन्द केशनली की आन्तरिक त्रिज्या r = 0.05 cm है। नली को ऊर्ध्वाधर रूप से पानी में रखा जाता है, ताकि इसका खुला सिरा पानी में डूबा रहे। इस नली की लम्बाई (मीटर में) के संगत अधिकतम पूर्णाक ज्ञात करो ताकि इस स्थिति में नली में चढ़े पानी की ऊचाँई h = 1 cm हो। वायु का दाब P_0 = 1 atm = 76 cm of Hg, Hg का घनत्व = 13.6 g/cm^3 है। पानी का पृष्ठ तनाव σ = 70 dyn/cm है। (नली में स्थित वायु का ताप नियत लें) (g = 9.8 m/s^2)

7. m = 20 g द्रव्यमान का घन पानी की सतह पर भीगता हुआ तैर रहा है। घन की प्रत्येक भुजा 3 cm लम्बी है। यदि घन की निचली फलक तथा घन के सम्पर्क में जल स्तर के बीच दूरी 4.6/ λ cm है, तो λ ज्ञात करों [पानी का पृष्ठ तनाव α = 70 dyn/cm, स्पर्श कोण $\theta = 0^\circ$ लें।]

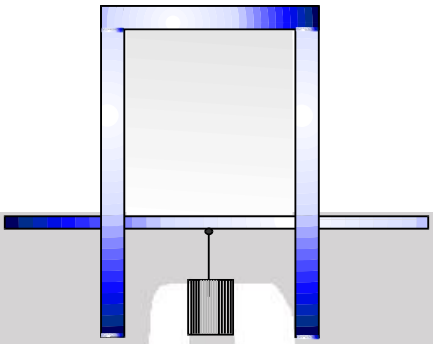
8. r त्रिज्या की केशनली का एक सिरा पानी में डूबा हुआ है। जब पानी नली में चढ़ेगा तब, सम्बंधित ऊष्मा की मात्रा कितनी उत्पन्न होगी यदि पानी का पृष्ठ तनाव 'T' तथा घनत्व = ρ है। दिया गया है $\frac{T^2}{\rho g} = \frac{2}{\pi}$

9. 'r' त्रिज्या व 'T' पृष्ठतनाव के साबुन के बुलबुले को 'V' वोल्ट का विभव दिया जाता है। यदि नये बुलबुले की त्रिज्या R का इसकी प्रारम्भिक त्रिज्या से सम्बंध निम्न समीकरण से दिया जाता है -

$P_0 [R^3 - r^3] + \lambda T [R^2 - r^2] - \varepsilon_0 V^2 R/2 = 0$, यहां P_0 वायुमण्डलीय दाब है। तब λ ज्ञात करो।

10. d_1 = 1.5 mm व्यास की काँच की छड़ d_2 = 2.0 mm व्यास की काँच की केशनली में सममित रूप से रखी हुई है। सम्पूर्ण व्यवस्था ऊर्ध्वाधर स्थिति में है तथा इसको पानी के सम्पर्क में लाते है। केशनली में कितनी ऊँचाई (सेमी में) तक पानी चढ़ेगा ? पानी का पृष्ठ तनाव = 73×10^{-3} N/m, स्पर्श कोण = 0^o है। (प्रयोग करें, g = 9.8 m/s^2)

11. आयताकार तार के फ्रेम की एक भुजा गति के लिए स्वतन्त्र है। इस फ्रेम में साबुन की फिल्म बनाई जाती है (चित्र) यदि फ्रेम की यह भुजा दूरी S = 2mm से गति करती है तो किया गया कार्य (अर्ग में) ज्ञात करों। गतिमान भुजा की लम्बाई ℓ = 6cm है। साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव α = 40 dyn/cm है।



भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार

1. जब एक केशनली को द्रव में डुबोया जाता है, तो नली में चढ़े द्रव की ऊँचाई h है। नली में मुक्त पृष्ठ सतह की आकृति अर्द्धगोलीय है। नली को अब इस प्रकार ओर दबाया जाता है, कि द्रव के बाहर स्थित नली की ऊँचाई h से कम हो जाती है :
(A) द्रव नली से धीरे–धीरे बाहर निकलेगा।
(B) द्रव नली से धीरे–धीरे फँवारे के रूप में बाहर निकलेगा।
(C) नली के अन्दर मुक्त पृष्ठ सतह की आकृति अर्द्धगोलीय नहीं होगी।
(D) द्रव नली में भर जाएगा परन्तु ऊपरी सिरे से बाहर नहीं निकलेगा।

2. जब केशनली को द्रव में डुबोया जाता है तो द्रव न तो केशनली में चढ़ता है और न ही गिरता है ? तो
(A) स्पर्श कोण 90° होना चाहिए
(B) स्पर्श कोण 90° हो सकता है।
(C) द्रव का पृष्ठ तनाव शून्य होना चाहिए।
(D) द्रव का पृष्ठ तनाव शून्य हो सकता है।

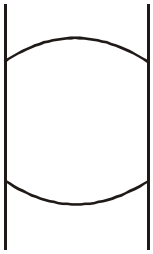
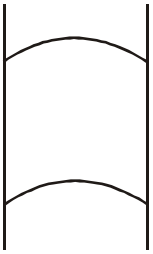
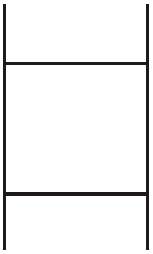
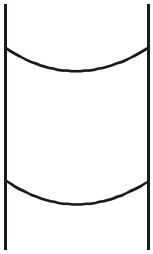
3. द्रव तथा ठोस के मध्य स्पर्श कोण, गुण है –
(A) द्रव के पदार्थ का
(B) ठोस के पदार्थ का
(C) ठोस के द्रव्यमान का
(D) ठोस की आकृति का

4. जब एक बूंद बहुत सारी छोटी बूंदों में टूटती है तो –
(A) कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बढ़ेगा।
(B) आयतन बढ़ेगा।
(C) ऊर्जा अवशोषित होती है।
(D) ऊर्जा उत्पन्न होती है।

5. यदि एक द्रव समान ताप पर समान पदार्थ की दो केशनली में समान ऊँचाई पर चढता है तो
(A) दोनों केश नली में द्रव का भार समान होगा
(B) नवचन्द्रक की त्रिज्या समान होगी
(C) इसके लिए केशनलिकाएँ वक्रिय तथा उर्ध्वाधर होगी
(D) खाली केशनलिका पर स्थिर वैद्युर दाब समान होगा

6. जब एक काँच की केशनलिका को द्रव में डुबोया जाता है तब द्रव नलिका में h ऊँचाई तक चढता है। नलिका के अन्दर द्रव की मुक्त सतह गोलाकार होती है। अब नलिका को नीचे धकेला जाता है जिससे द्रव के बाहर नलिका की ऊँचाई h से कम है तब
(A) द्रव नलिका के बाहर आ जाएगा
(B) द्रव नलिका में भर जाएगा किन्तु इसके उपरी सिरे से बाहर नही आयेगा।
(C) नलिका के अन्दर द्रव की मुक्त सतह अवतल हो सकती है।
(D) नलिका के अन्दर द्रव की मुक्त सतह उत्तल हो सकती है।

7. दोनों सिरो पर खुली हुई एक उर्ध्वाधर केशनलिका में कुछ द्रव भरा हुआ है। निम्न में से कौनसी आकृति सम्भव नही हो सकती

(A)  (B)  (C)  (D) 

8. केश नलिका में द्रव का चढना निर्भर करता है

(A) पदार्थ पर (B) लम्बाई पर (C) बाह्य त्रिज्या पर (D) आन्तरिक त्रिज्या पर

9. माना बाहर की ओर दाब P_0 है तथा साबुन के विलियन का पृष्ठ तनाव T है तथा हम R त्रिज्या के साबुन का बुलबुला फुला रहे है तब

(A) R त्रिज्या के साबुन के बुलबुले के अन्दर दाब $P_0 + \frac{4T}{R}$ होगा

(B) R त्रिज्या के साबुन के बुलबुले के अन्दर दाब $P_0 + \frac{2T}{R}$ होगा

(C) साबुन के बुलबुले को फुलाने में बाह्य कारक द्वारा किया गया कार्य दाब P_0 से $(P_0 + \frac{4T}{R})$ तक बढने के विरूद्ध किये गये कार्य तथा इसकी पृष्ठिय ऊर्जा में वृद्धि के विरूद्ध किये गये कार्य के योग के बराबर होता है।

(D) इनमें से कोई नहीं

10. यदि नली में द्रव भरा हो तथा संसजक बल, आसंजक बल से दुगुना है तो –

(A) नवचन्द्रक ऊपर की तरफ उत्तल होगा। (B) स्पर्श कोण, अधिक कोण होगा।

(C) द्रव केशनली में नीचे गिरेगा। (D) द्रव ठोस को गीला करेगा।

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

अनुच्छेद - 1

U-केशनली की एक भुजा की आन्तरिक त्रिज्या $r_1 = 1$ mm है तथा दूसरी भुजा की आन्तरिक त्रिज्या $r_2 = 2$ mm है। नली में कुछ मात्रा में पारा भरा है तथा एक भुजा निर्वात पम्प से जुड़ी हुई है। पारे का पृष्ठ तनाव तथा घनत्व 480 dyn/cm तथा 13.6 gm/cm^3 है। (स्पर्श कोण $\theta = 180^\circ$ लें) ($g = 9.8$ m/s^2)

1. वायुदाब में अन्तर क्या होगा, जब दोनों भुजाओं में पारा स्तर समान ऊँचाई पर है।

(A) Hg का 3.53 mm (B) Hg का 1.51 mm (C) Hg का 0.51 mm (D) Hg का 5.52 mm

2. कौनसी भुजा पम्प से जुड़ी होनी चाहिए।

(A) 2 mm त्रिज्या वाली भुजा (B) 1mm त्रिज्या वाली भुजा (C) कोई सी भी भुजा (D) इनमें से कोई नही

अनुच्छेद - 2

खुली हुई केशनली में पानी की बूंद स्थित है। केशनली का आन्तरिक व्यास 1mm है। प्रत्येक स्थिति में ऊपरी व निचले नवचन्द्रक की वक्रता त्रिज्या ज्ञात करो। सम्पूर्ण जगह पर मानिए कि द्रव नली को भिगोता है। पानी का पृष्ठ तनाव = 0.073 N/m ($g = 9.8$ m/s^2)

3. जब नली ऊर्ध्वाधर स्थिति में है तथा बूंद 2 cm लम्बाई के स्तम्भ बनाती है, तब

(A) 0.5 mm, 1.52 mm (B) 0.5 mm, 1.46 mm

(C) 0.5 mm, निचली सतह समतल होगी (D) 0.4 mm, 1.46 mm

4. जब नली ऊर्ध्वाधर स्थिति में है तथा बूंद 4 cm लम्बाई के स्तम्भ बनाती है, तब

(A) 0.5 mm, 1.52 mm (B) 0.5 mm, 1.46 mm

(C) 0.5 mm, निचली सतह समतल होगी (D) 0.4 mm, 1.46 mm

5. जब नली ऊर्ध्वाधर स्थिति में है तथा बूंद 2.98 cm लम्बाई के स्तम्भ बनाती है, तब

(A) 0.5 mm, 1.52 mm (B) 0.5 mm, 1.46 mm

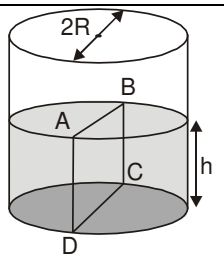
(C) 0.5 mm, निचली सतह समतल होगी (D) 0.4 mm, 1.46 mm

Exercise-3

✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

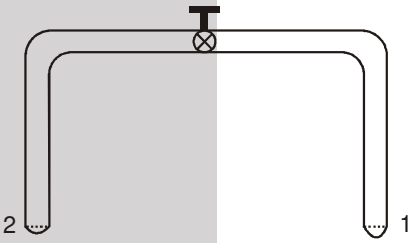
1.✍ जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, R त्रिज्या वाली एक बीकर में h ऊँचाई तक पानी भरा है। पानी का घनत्व ρ, पानी का पृष्ठ तनाव T तथा वायुमण्डलीय दाब P_0 है। बीकर के एक व्यास से होकर–जाते हुए पानी के ऊर्ध्वाधर काट ABCD पर विचार करें। इस काट के एक ओर का पानी पर इसके दूसरी ओर के पानी द्वारा लगाया गया बल का परिमाण है – **[JEE 2007, 3/184]**



(A) $\left|2P_0Rh+\pi R^2\rho gh-2RT\right|$ (B) $\left|2P_0Rh+R\rho gh^2-2RT\right|$

(C) $\left|P_0\pi R^2+R\rho gh^2-2RT\right|$ (D) $\left|P_0\pi R^2+R\rho gh^2+2RT\right|$

2. काँच की एक समान नलिका, जिसकी आन्तरिक त्रिज्या (r) है, के दोंनो सिरों को, जो एक जैसे हैं, एक वाल्व के द्वारा पृथक किया गया है। शुरू में यह वाल्व कसकर बन्द है। सिरा–1 पर त्रिज्या r का एक अर्धगोलीय साबुन का बुलबुला है। सिरा–2 पर एक उप–अर्धगोलीय (sub-hemispherical) साबुन का बुलबुला है (चित्र देखें)। वाल्व को खोलने के तुरन्त बाद चित्र : **[JEE -2008 3/163, –1]**



(A) हवा सिरा–1 से सिरा–2 की ओर बहती है। बुलबुलों के आयतन में कोई परिवर्तन नहीं होता।
(B) हवा सिरा–1 से सिरा–2 की ओर बहती है। सिरा–1 पर बुलबुले का आयतन घटता है।
(C) कोई परिवर्तन नहीं होता है।
(D) हवा सिरा–2 से सिरा–1 की ओर बहती है। सिरा–1 पर बुलबुले का आयतन बढ़ता है।

3.✍ एक बन्द प्रकोष्ठ में, साबुन के पानी के दो बुलबुले A तथा B बन्द है, जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः 2cm तथा 4cm है। इस कोष्ठ के अन्दर वायु को 8 N/m² दाब पर रखा गया है। बुलबुले बनाने के लिए उपयोग किये गये पानी का पृष्ठ तनाव 0.04 N/m है। अनुपात n_B/n_A की गणना करें, जहाँ n_A तथा n_B क्रमशः A तथा B बुलबलों में वायु के मोलों की संख्या है। [गुरूत्वाकर्षण के प्रभावों को नगण्य मानें।] **[IIT 2009_4/160, –1]**

अनुच्छेद 4 से 6

जब आंख में ρ घनत्व की एक तरल दवाई डालनी होती है तो एक ड्रापर की सहायता ली जाती है। ड्रापर के ऊपर लगे बल्ब को दबाने पर ड्रापर के नीचे बने छेद पर एक बूंद बनती है। हम इस बूंद के आकार का आकलन करना चाहते हैं। इसके लिए हम यह मान रहे हैं कि बनने वाली बूंद का आकार गोलीय है, क्योंकि इस आकार में पृष्ठ ऊर्जा में न्यूनतम वृद्धि होती है। बूंद के आकार का निर्धारण करने के लिए हम R त्रिज्या की बूंद पर पृष्ठ तनाव T के कारण कुल ऊर्ध्वाधर बल का आकलन करते हैं। जब यह बल बूंद के भार से कम हो जाता है, बूंद ड्रापर से अलग हो जाती है।

4. यदि ड्रापर के छेद की त्रिज्या r है, तब R त्रिज्या की बूंद पर पृष्ठ तनाव के कारण ऊपर की ओर लगने वाला ऊर्ध्वाधर बल ($r << R$ मानते हुए) नीचे दिये विकल्पों में से कौन सा होगा ? **[IIT 2010; 3/163, –1]**

(A) $2\pi rT$ (B) $2\pi RT$ (C) $\frac{2\pi r^2T}{R}$ (D) $\frac{2\pi R^2T}{r}$

5.✍ यदि $r = 5\times10^{-4}m$, $\rho = 10^3 kgm^{-3}$, $g = 10\ ms^{-2}$, $T = 0.11\ Nm^{-1}$, तो जब बूंद ड्रापर से अलग होती है, उसकी त्रिज्या (लगभग) कितनी होगी, नीचे दिए विकल्पों में से चुनें। **[IIT 2010; 3/163, –1]**

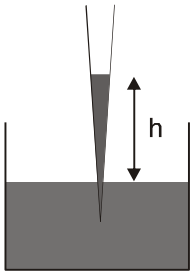
(A) 1.4×10^{-3} m (B) 3.3×10^{-3} m (C) 2.0×10^{-3} m (D) 4.1×10^{-3} m

6. ड्रापर से अलग होने के बाद, बूंद की पृष्ठ ऊर्जा निम्न में से कौन सी है ? **[IIT 2010; 3/163, –1]**

(A) 1.4×10^{-6} J (B) 2.7×10^{-6} J (C) 5.4×10^{-6} J (D) 8.1×10^{-6} J

7. चार बिन्दु आवेश, प्रत्येक +q, एक वर्गाकार समतलीय सोप–फिल्म के चार कोनों पर जड़ित हैं। वर्ग की भुजा 'a' है तथा सोप–फिल्म का पृष्ठ तनाव γ है। आवेश–फिल्म निकाय साम्यावस्था में है, तथा $a = k\left[\frac{q^2}{\gamma}\right]^{1/N}$, जहाँ 'k' स्थिरांक है। तब N का मान है **[JEE-2011, 4/160]**

8. छिन्न शंकु (truncated cone) की आकृति वाली काँच की एक केशनली, जिसकी शीर्ष कोण α है, के दो अंत सिरों के अनुप्रस्थ काट की त्रिज्याएँ भिन्न है। केशनली को पानी में उर्ध्वतः डुबाने पर केशनली में पानी h ऊँचाई तक चढ़ जाता है, जहाँ इसकी अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या b हैं यदि पानी का पृष्ठ तनाव (surface tension) S, घनत्व ρ तथा काँच के साथ इसका स्पर्श कोण θ हो तब h का मान है (g गुरूत्वीय त्वरण है)



[JEE (Advanced) 2014, 3/60, –1]

(A) $\frac{2S}{b\rho g}\cos(\theta-\alpha)$ (B) $\frac{2S}{b\rho g}\cos(\theta+\alpha)$

(C) $\frac{2S}{b\rho g}\cos(\theta-\alpha/2)$ (D) $\frac{2S}{b\rho g}\cos(\theta+\alpha/2)$

9. पृष्ठ–तनाव (surface tension) $S=\frac{0.1}{4\pi}Nm^{-1}$ के द्रव के एक बूंद की त्रिज्या $R = 10^{-2}$ m है, जिसे K समरूप बूंदों में विभाजित किया गया है। पृष्ठ–उर्जा का बदलाव $\Delta U = 10^{-3}$ Joules है। यदि $K = 10^{\alpha}$ है तब α का मान होगा।

[JEE (Advanced) 2017, 3/61]

10. एक आन्तंरिक त्रिज्या r वाल एकसमान केशननली (uniform capillary tube) को ऊर्ध्वाधर तरीके से (vertically) पानी से भरे एक बीकर (beaker) में डुबाया जाता है। केशनली में पानी, बीकर के पानी के पृष्ठ (water surface) में, h ऊँचाई तक उठता है। पानी की पृष्ठ तनाव (surface tenstion) σ है। पानी और केशनली की दीवार के बीच का सम्पर्क कोण (angle of contact) θ है। मेनिस्कस (meniscus) में उपस्थित पानी के द्रव्यमान (mass) की उपेक्षा कीजिए। निम्नलिखित कथनों में से कौनसा (सें) सही है (हैं) ? **[JEE (Advanced) 2018, P-1, 4/60, –2]**

(A) एक दिए गये पदार्थ से बनी केशनली का r बढ़ाने से h कम होता है।

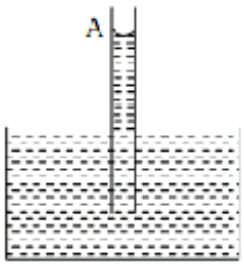
(B) एक दिए गये पदार्थ से बनी केशनली में, h पृष्ठ तनाव σ पर निर्भर करता है।

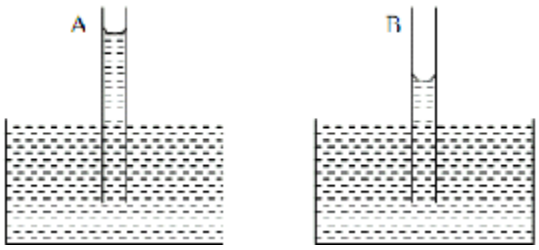
(C) यदि यह प्रयोग एक नियत त्वरण (constant acceleration) से ऊपर जाने वाली लिफ्ट (lift) में किया जाता है, तो h कम होता है।

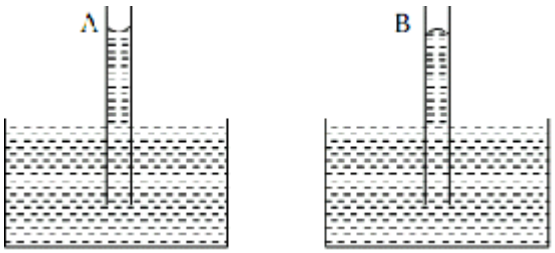
(D) h सम्पर्क कोण θ के समानुपातिक (proportional) है।

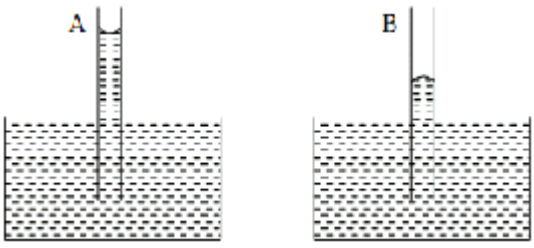
भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. कोई केशनली (1) जल में डुबायी गई है। कोई अन्य सर्वसम केशनली (2) साबुन–जल विलयन में डुबायी जाती है। निम्नलिखित में से कौनसे चित्र में दो नलियों में द्रव–स्तम्भों की आपेक्षिक प्रकृति को दर्शाया गया है ? **[AIEEE 2008, 4/120, –1]**

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

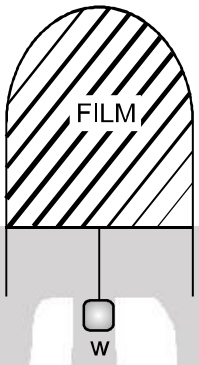
2. एक साबुन के बुलबुले की त्रिज्या को 3 cm से बढ़ाकार 5 cm करने में किया गया कार्य लगभग है :(साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव = 0.03 Nm^{-1}) **[AIEEE - 2011, 4/120, –1]**

(1) 4π mJ (2) 0.2π mJ (3) 2π mJ (4) 0.4π mJ

3. दो पारे की बूँदे (प्रत्येक की त्रिज्या 'r') मिलकर एक बड़ी बूँद बनाती है। यदि पृष्ठ तनाव T है, तब बड़ी बूँद की पृष्ठ ऊर्जा है : **[AIEEE 2011, 4/120, –1]**

(1) $4\pi r^2 T$ (2) $2\pi r^2 T$ (3) $2^{8/3}\pi r^2 T$ (4) $2^{5/3}\pi r^2 T$

4. एक U-आकार के तार एवं एक हल्के सर्पण के बीच बनी एक पतली द्रव की फिल्म 1.5×10^{-2} N के भार को आधारित करती है (चित्र देखें)। सर्पण की लम्बाई 30 cm है और इसका भार नगण्य है। द्रव की फिल्म का पृष्ठ तनाव है : **[AIEEE 2012, 4/120, –1]**

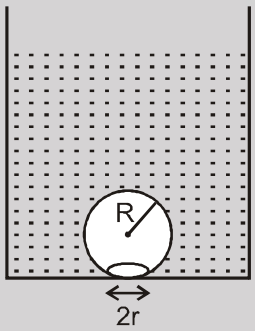


(1) 0.0125 Nm^{-1} (2) 0.1 Nm^{-1} (3) 0.05 Nm^{-1} (4) 0.025 Nm^{-1}

5. यह मान लें कि एक द्रव की बूँद अपनी पृष्ठ ऊर्जा में कमी कर वाष्पित होती है जिससे कि इसका तापमान अपरिवर्तित रहता है। यह सम्भव होने के लिए बूँद की न्यूनतम् त्रिज्या क्या होनी चाहिए ? पृष्ठ तनाव T है, द्रव का घनत्व ρ है। और वाष्पन की गुप्त ऊष्मा L है। **[JEE-Main 2013, 4/120,–1]**

(1) $\rho L/T$ (2) $\sqrt{T/\rho L}$ (3) $T/\rho L$ (4) $2T/\rho L$

6. पानी को गर्म करने पर, बर्तन की तली में बुलबुले बनते हैं और विलग्न होकर ऊपर की ओर उठते हैं। बुलबुलों को त्रिज्या R का गोला मान लें और बर्तन की तली से वृत्तीय स्पर्श की त्रिज्या r लें। यदि $r << R$ और पानी का पृष्ठ तनाव T हैं, तब बुलबलों के बस विलग्न होने से जरा पहले r का मान हैं : (पानी का घनत्व ρ_w है) **[JEE-Main 2014,4/120,–1]**



(1) $R^2\sqrt{\frac{\rho_w g}{3T}}$ (2) $R^2\sqrt{\frac{\rho_w g}{6T}}$ (3) $R^2\sqrt{\frac{\rho_w g}{T}}$ (4) $R^2\sqrt{\frac{3\rho_w g}{T}}$

Answers

EXERCISE-1

भाग - I

खण्ड़ (A) :

A-1. (a) 1.53 cm, (b) 1.77 cm

A-2. पृष्ठ तनाव बल F_{ab}, F_{cd} तथा भार। साम्यावस्था तभी होगी जब $F_{ab} > F_{cd}$ हो तथा यह फिल्म में साबुन के घोल में सान्द्रता अन्तर के कारण होगा।

A-3. 3.98×10^{-2} J **A-4.** 1.44×10^{-5} J

खण्ड़ (B) :

B-1. $24\pi R^2S$ **B-2.** $2^{2/3}$ W

B-3. (a) 465 N/m^2 (b) 30 N/m^2 (c) 38 N/m^2

B-4 $T = \frac{p_0(2r^3 - R^3)}{4(R^2 - 2r^2)}$ **B-5.** 100N/m^2

B-6. $\frac{2T}{\rho gr}$

भाग - II

खण्ड़ (A) :

A-1.	(B)	**A-2.**	(D)	**A-3.**	(C)
A-4.	(C)	**A-5.**	(A)	**A-6.**	(B)
A-7.	(D)	**A-8.**	(D)	**A-9.**	(B)

खण्ड़ (B) :

B-1.	(C)	**B-2.**	(B)	**B-3.**	(B)
B-4.	(C)	**B-5.**	(C)	**B-6.**	(C)
B-7.	(A)	**B-8.**	(D)		

भाग – III

1. (A) – P,R ; (B) – P,R ; (C) – P,R ;(D) –Q,S

EXERCISE-2

भाग - I

1.	(D)	**2.**	(A)	**3.**	(A)
4.	(D)	**5.**	(B)	**6.**	(A)
7.	(A)	**8.**	(A)	**9.**	(D)

भाग - II

1.	8	**2.**	3	**3.**	3
4.	98	**5.**	15	**6.**	5
7.	2	**8.**	4	**9.**	4
10.	6	**11.**	96		

भाग – III

1.	(CD)	**2.**	(BD)	**3.**	(AB)
4.	(AC)	**5.**	(AB)	**6.**	(BCD)
7.	(ABC)	**8.**	(ABD)	**9.**	(AC)
10.	(ABC)				

भाग - IV

1.	(A)	**2.**	(B)	**3.**	(A)
4.	(B)	**5.**	(C)		

EXERCISE-3

भाग - I

1.	(B)	**2.**	(B)	**3.**	6
4.	(C)	**5.**	(A)	**6.**	(B)
7.	3	**8.**	(D)	**9.**	6
10.	(AC)				

भाग – II

1.	(2)	**2.**	(4)	**3.**	(3)
4.	(4)	**5.**	(4)	**6.**	(Bonus)

High Level Problems (HLP)

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. r त्रिज्या की केशनली, पृष्ठ तनाव α तथा घनत्व d के भिगोने वाले द्रव में डुबोई जाती है ऊँचाई h_0 ज्ञात करो, जहां तक द्रव केशनली में चढ़ता है। पृष्ठतनाव के कारण किया गया कार्य ज्ञात करो तथा केशनली में द्रव द्वारा प्राप्त स्थितिज ऊर्जा भी ज्ञात करो तथा दोनों की तुलना करो ? प्राप्त परिणाम में अन्तर को समझाइये।

2. U-नली क्रमशः 1 mm तथा 2 mm व्यास की नलियों से बनाई जाती है। इस नली को ऊर्ध्वाधर रखते है तथा पृष्ठ तनाव 49 dyne/cm तथा शून्य स्पर्श कोण के द्रव से इसको आंशिक भरा जाता है। यदि नवचन्द्रको के स्तरों में अन्तर 1.25 cm हो तो द्रव का घनत्व ज्ञात करो।

3. साबुन की फिल्म पर 6.28 cm लम्बे धागे का लूप सावधानी पूर्वक रख दिया जाता है तथा लूप के अन्दर की फिल्म सुई से तोड़ दी जाती है। धागे का लूप वृत्ताकार आकृति प्राप्त कर लेता है। धागे में तनाव ज्ञात कीजिए। साबुन के घोलका पृष्ठ तनाव = 0.030 N/m।

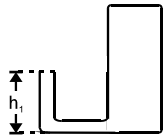
4. 5.0 mm त्रिज्या के साबुन के बुलबुले के अन्दर दाब आधिक्य क्या होगा? दिया है साबुन के घोल का पृष्ठ तनाव 2.5×10^{-2} N/m है। यदि साबुन के घोल (आपेक्षिक घनत्व 1.2) में 40.0 cm गहराई पर समान त्रिज्या का हवा बुलबुला बनाया जाय तो बुलबुले के अन्दर दाब क्या होगा। [1 atm = 1.01×10^5 N/m^2]

5. पारे की बूंद 'R' त्रिज्या तथा 'h' मोटाई की चपटी गोली (चकती) के रूप में दो क्षैतिज कांच की प्लेटों के बीच स्थित है। माना h << R है। उस भार के लिए व्यंजक ज्ञात करो जिसको ऊपरी प्लेट पर रखने पर प्लेटों के बीच की दूरी 'n' गुना कम हो जाती है। स्पर्श कोण = θ है। भार ज्ञात करो, यदि R = 2.0 cm, h = 0.38 mm, n = 2 तथा $\theta = 135^\circ$, Hg का पृष्ठ तनाव = 0.49 N/m है।

6. r = 0.2 mm त्रिज्या तथा ℓ = 8 cm लम्बाई की केशनली का निचला सिरा पानी में डुबा हुआ है। पानी का ताप नियत तथा $T_{low} = 0^\circ C$ के बराबर है। केशनली के ऊपरी सिरे का ताप $T_{up} = 100^\circ C$ है। ऊचाँई h ज्ञात करो जहां तक पानी केशनली में चढ़ता है। माना केशनली की ऊष्मीय चालकता, पानी की ऊष्मीय चालकता से बहुत ज्यादा है। वातावरण से ऊष्मा आदान–प्रदान नगण्य है। ताप पर निर्भर पानी के निम्न पृष्ठ तनाव मानो का प्रयोग करो –

T, ºC	0	20	50	90
σ, mN/m	76	73	67	60

7. r त्रिज्या तथा h_1 ऊँचाई की केशनली एक चौड़ी केशनली से चित्रानुसार जुड़ी है। चौड़ी नली को समान समयान्तराल में पानी की बूंदे डालकर भरा जाता है। दोंनो नलियों के जलस्तर में समय के साथ परिवर्तन का ग्राफ प्रदर्शित करो तथा दोनों स्तरों के अन्तर में परिवर्तन को भी प्रदर्शित करो। चौड़ी नली में अधिकतम जलस्तर तथा जलस्तरों में अधिकतम अन्तर ज्ञात करो। पानी का पृष्ठ तनाव α है।



8. साबुन के गोलीय बुलबुले की त्रिज्या 'r' व पृष्ठतनाव 'T' है। सिद्ध करो कि त्रिज्या दुगुनी करने के लिए आवश्यक आवेश, $8\pi R [\varepsilon_0 R [7PR + 12T]]^{1/2}$ होगा, यहां P वायुमण्डलीय दाब है तथा प्रक्रम समतापीय है।

9. लम्बाई 0.1 m की एक काँच की एक शंक्वाकार केशनली A के सिरों का व्यास 10^{-3} m व 5×10^{-4} m है। जब इसको 0ºC पर द्रव में, बड़े व्यास की ओर से डुबोया जाता है, तो नली में द्रव 8×10^{-2} m ऊँचाई तक चढ़ जाता है। काँच की एक अन्य बेलनाकार नली B को समान द्रव में 0ºC पर डुबोने पर द्रव 6×10^{-2} m ऊँचाई तक चढ़ता है। जब द्रव 50ºC पर है तो नली B में द्रव केवल 5.5×10^{-2} m ऊँचाई तक चढ़ता है। पृष्ठ तनाव में ताप के साथ परिवर्तन की दर को इसमें रैखिक परिवर्तन मानते हुए ज्ञात करो। द्रव का घनत्व $(1/14) \times 10^4$ kg/m^3 है तथा स्पर्श कोण शून्य है। (द्रव के घनत्व तथा काँच पर ताप का प्रभाव नगण्य है)। ($g = 9.8$ N/kg.) **[REE - 1994]**

10. एक दाबमापी में 1.44×10^{-3} m तथा 7.2×10^{-4} m त्रिज्याओं की दो केशनलियाँ है। यदि पतली नली में द्रव की ऊँचाई, चौड़ी नली की अपेक्षा 0.2 m अधिक है, तो दाब में वास्तविक अन्तर की गणना करो। द्रव का घनत्व = 10^3 kg/m^3, पृष्ठ तनाव = 72×10^{-3} N/m है। ($g = 9.8$ m/s^2 लें) **[REE - 1985]**

11. ऊपरी सिरे से बन्द काँच की केशनली की लम्बाई 0.11 m तथा आन्तरिक व्यास 2×10^{-5} m है। नली ऊर्ध्वाधर रूप से पृष्ठ तनाव 5.06×10^2 N/m के द्रव में डूबी हुई है। केशनली को कितनी गहराई तक डूबोना चाहिए कि केशनली में बाहर तथा अन्दर द्रव स्तर समान हो। यदि ऊपरी बन्द सिरे को तोड़ दिया जाए तो केशनली के अन्दर जल स्तर क्या होगा? नलिका में समतापी प्रक्रम की परिस्थिति मानें। (प्रयोग करें, $g = 10$ m/s^2) **[REE - 1993]**

12. जब दो समान्तर काँच की प्लेटों के मध्य m = 70 mg की द्रव की बुंद प्रवेश करायी जाती है तब इन प्लेटों को h = 0.10 mm दूरी से पृथक करने के लिए इनके मध्य कार्यरत् आकर्षण बल ज्ञात करो। यह मानिये कि प्लेटे पानी से पूरी तरह भीगी हुई है।

13. दो ऊर्ध्वाधर प्लेटों जो द्रव में आंशिक रूप से डुबी है, एक वेज का निर्माण करती है जिसका नत कोण बहुत कम $\delta\varphi$ है। द्रव का घनत्व ρ है तथा इसका पृष्ठ तनाव α है व स्पर्श कोण θ है। किनारे से दूरी x के फलन के रूप में वह ऊँचाई h ज्ञात करों जहाँ तक द्रव चढ़ेगा।

14. एक पानी की बुंद एक समान वेग से हवा में गिर रही है। बुंद के ऊपरी तथा निचले बिन्दु जो एक दूसरे से h = 2.3 mm दूरी पर स्थित है, पर बुंद की सतह की वक्रता त्रिज्याओं के मध्य अन्तर ज्ञात कीजिए।

15. b त्रिज्या की वृत्ताकार वलय को साबुन के घोल में डुबोकर तथा बाहर निकालकर हवा प्रवाह द्वारा वलय पर बुलबुले बनाये जाते है। माना हवा प्रवाह b त्रिज्या के बेलन के रूप में है। हवा का वेग v है तथा बुलबुला बनने के बाद यह बहना रूक जाती है। बुलबुला गोलीय रूप से बढ़ता है। माना बुलबुले की त्रिज्या R (>> b), हवा बुलबुले की सतह पर लम्बवत् टकराती है। घोल का पृष्ठ तनाव T तथा हवा का घनत्व ρ है। जब यह बुलबुला वलय से अलग होता है दिये गये प्रांचलों के पदों, में बुलबुले की त्रिज्या ज्ञात करो (बुलबुले का द्रव्यमान नगण्य है)। **[JEE 2003, 4/60]**

HLP Answers

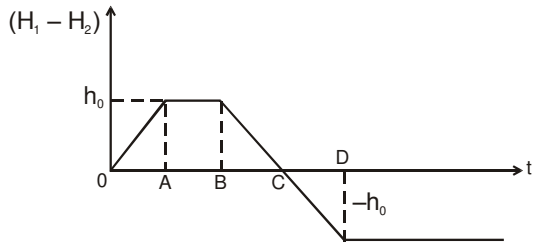
1. $\left[\frac{2\alpha}{dgr}, \frac{4\pi\alpha^2}{dg}, \frac{2\pi\alpha^2}{dg}\right]$ **2.** 0.7991 g/cm^3

3. 6×10^{-4} N

4. 20 N/m^2 , 1.05714×10^5 N/m^2

5. 0.7 kg **6.** 6.4 cm

7.



अधिकतम ऊचाँई = $h_1 + h_0$

स्तरों में अधिकतम अन्तर = h_0 यहाँ $h_0 = \frac{2\alpha}{dgr}$.

9. -1.4×10^{-4} N/(m – ºC)

10. 1860 N/m^2

11. ≈ 0.01m, द्रव ऊपरी सिरे तक चढ़ेगा तथा नवचन्द्रक की त्रिज्या 1.012×10^{-4} m होगी।

12. $F \approx 2\alpha m/\rho h^2 = 1.0$ N

13. $h = 2a\cos\theta / \rho g x \delta\varphi$

14. $R_2 - R_1 \approx 1/8\rho g h^3/\alpha = 0.20$ mm

15. $\frac{4T}{\rho v^2}$