धारिता (CAPACITANCE)

1. प्रस्तावना

संधारित्र विद्युत क्षेत्र में स्थितिज ऊर्जा के रूप में ऊर्जा संग्रहित कर सकता है। इस अध्याय में हम चालक के आवेश तथा ऊर्जा ग्रहण करने की क्षमता के बारे में अध्ययन करेंगे।

2. विलगित चालक की धारिता :

जब किसी चालक को आवेशित किया जाता है तो इसके विभव में वृद्धि होती है। किसी विलगित चालक (चालक परिमित विमाओं का होना चाहिए ताकि अनन्त पर विभव शून्य माना जा सके) के लिए चालक का विभव इसको दिये गये आवेश के समानुपाती होता है।

q = चालक पर आवेश

V = चालक का विभव

$q \propto V \quad \Rightarrow \quad q = CV$

C समानुपाती नियतांक है इसे चालक की धारिता कहा जाता है।

2.1. धारिता की परिभाषा :

किसी चालक के विभव में इकाई वोल्ट की वृद्धि करने के लिए आवश्यक आवेश की मात्रा चालक की धारिता कहलाती है।

2.2. किसी विलगित चालक की धारिता से सम्बन्धित महत्त्वपूर्ण बिन्दु :

(i) यह एक अदिश राशि है।

(ii) धारिता का SI मात्रक फैरड है तथा इसकी विमा $M^{-1} L^{-2} I^2 T^4$ है।

(iii) 1 फैरड : 1 फैरड उस चालक की धारिता है जिसे 1 कूलॉम धन आवेश देने पर उसके विभव मे एक वोल्ट की वृद्धि होती है।

$$1 \text{ फैरड} = \frac{1 \text{ कूलॉम}}{1 \text{ वोल्ट}}$$

$1\ \mu F = 10^{-6}$ F, 1nF = 10^{-9} F तथा 1 pF = 10^{-12} F

(iv) विलगित चालक की धारिता निम्न कारकों पर निर्भर करती है :

(a) चालक का आकार तथा आकृति : आकार बढ़ने पर धारिता बढ़ती है:

(b) माध्यम पर : परावैद्युतांक K, बढ़ने पर धारिता में वृद्धि होती है।

(c) अन्य चालकों की उपस्थिति : जब एक निरावेशित चालक को आवेशित चालक के निकट रखा जाता है तो चालक की धारिता में वृद्धि हो जाती है।

(v) चालक की धारिता निम्न पर निर्भर नहीं करती है।

(a) चालक पर उपस्थित आवेश पर

(b) चालक के विभव पर

(c) चालक की स्थितिज ऊर्जा पर

3. विलगित चालक की स्थितिज ऊर्जा अथवा स्व–ऊर्जा

किसी चालक को आवेशित करने के लिए इसके स्वंय के विद्युत क्षेत्र के विरूद्ध किया गया कार्य अथवा चालक के विद्युत क्षेत्र में संचित कुल ऊर्जा को स्वः ऊर्जा कहते है।

3.1. विद्युत स्थितिज ऊर्जा (स्व–ऊर्जा) :

संधारित्र को आवेशित करने में किया गया कार्य।

$$W = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C}$$

$$W = U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{qV}{2}.$$

q = चालक पर आवेश

V = चालक पर विभव

C = चालक की धारिता

3.2. चालक के विद्युत क्षेत्र में संचित ऊर्जा होती है, जिसका ऊर्जा घनत्व ;एकांक आयतन की ऊर्जाद्ध

$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ [माध्यम में ऊर्जा घनत्व $\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$]

जहाँ E उस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र है।

3.3. किसी आवेशित चालक में ऊर्जा चालक के बाहर संग्रहित होती है जबकि किसी आवेशित कुचालक ;अचालकद्ध पदार्थ में ऊर्जा अचालक के अन्दर तथा बाहर दोनों ओर संग्रहित होती है।

4. विलगित गोलीय चालक की धारिता

R त्रिज्या के विलगित गोलीय चालक की धारिता

माना गोले पर Q आवेश है।

$\because$ विभव $V = \frac{KQ}{R}$

सूत्र द्वारा : Q = CV

$$Q = \frac{CKQ}{R}$$

$C = 4\pi\epsilon_0 R$

विलगित गोलीय चालक की धारिता $C = 4\pi\epsilon_0 R$

(i) यदि चालक वायु या निर्वात् माध्यम में हो।

$C_{\text{निर्वात}} = 4\pi\epsilon_0 R$

R = गोलीय चालक की त्रिज्या (यह गोला खोखला या ठोस हो सकता है)

(ii) यदि चालक की सतह से अनन्त तक K परावैद्युतांक वाला माध्यम हो तो –

$C_{\text{माध्यम}} = 4\pi\epsilon_0 KR$

(iii) $\frac{C_{\text{माध्यम}}}{C_{\text{वायु /निर्वात}}}$ = K = परावैद्युत नियतांक

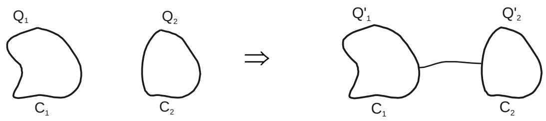
Solved Example

Example 1. पृथ्वी की धारिता की गणना करो। (पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 km)

Solution : $C = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{6400 \times 10^3}{9 \times 10^9} = 711\ \mu F$

5. दो आवेशित चालकों को चालक तार द्वारा जोड़ने पर आवेशों का पुनर्वितरण

प्रारम्भिक अंतिम



(i) उन दोनों चालकों के बीच विभवान्तर होने पर आवेशों का प्रवाह होता है।

(ii) जब आवेश को मुक्त किया जाता है तो इसकी प्रवृत्ति होती है कि यह **उच्च स्थितिज ऊर्जा** से **निम्न स्थितिज ऊर्जा** की ओर गति करता है।

(iii) धन आवेश को मुक्त करने पर हमेशा **उच्च विभव** से **निम्न विभव** की ओर गति करता है [यदि आवेश पर केवल विद्युत बल कार्यरत हो।]

(iv) ऋण आवेश को मुक्त करने पर हमेशा **निम्न विभव** से **उच्च विभव** की ओर गति करता है। [यदि आवेश पर केवल विद्युत बल कार्यरत हो]

(v) जब तक चालकों के मध्य विभवान्तर होता है आवेशों का प्रवाह होता रहता है। (अन्तिम विभवान्तर = 0)

(vi) पुर्नवितरण से सम्बन्धित सूत्र।

चालकों को जोड़ने से पूर्व		
प्राचल	**प्रथम चालक**	**द्वितीय चालक**
धारिता	C_1	C_2
आवेश	Q_1	Q_2
विभव	V_1	V_2

चालकों को जोड़ने के पश्चात्		
प्राचल	**प्रथम चालक**	**द्वितीय चालक**
धारिता	C_1	C_2
आवेश	Q_1'	Q_2'
विभव	V	V

$$V = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} \Rightarrow \frac{Q_1'}{Q_2'} = \frac{C_1}{C_2}$$

परन्तु, $Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2$

$$\therefore \quad V = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1V_1 + C_2V_2}{C_1 + C_2}$$

$$\therefore \quad Q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(Q_1 + Q_2) \quad \text{तथा} \quad Q_2' = \frac{C_2}{C_1 + C_2}(Q_1 + Q_2)$$

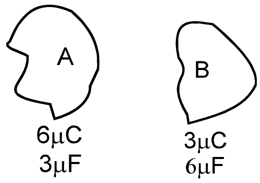
पुनर्वितरण के दौरान ऊष्मा हानि $\Delta H = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(V_1 - V_2)^2$

ऊर्जा हानि तार में, जूल ऊष्मा के रूप में होती है।

नोट : Q_1, Q_2, V_1 तथा V_2 के मान चिन्हों सहित रखें।

Solved Example

Example 1. A तथा B दो विलगित चालक है (अर्थात् दोनों बहुत अधिक दूरी पर रखे है) जब दोनों को चालक तार द्वारा जोड़ा जाता है तो :



(i) A तथा B पर अन्तिम आवेश ज्ञात करो।

(ii) आवेशों के प्रवाह के दौरान उत्पन्न ऊष्मा ज्ञात करो।

(iii) दोनों चालकों को चालक तार द्वारा जोड़ने के पश्चात् उभयनिष्ठ विभव ज्ञात करो ?

Solution :

(i) $Q_A' = \frac{3}{3+6}(6+3) = 3\mu C$; $Q_B' = \frac{6}{3+6}(6+3) = 6\mu C$

(ii) $\Delta H = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\mu F . 6\mu F}{(3\mu F + 6\mu F)} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} . (2\mu F) . \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\mu J$

(iii) $V_C = \frac{3\mu C + 6\mu C}{3\mu F + 6\mu F} = 1\text{volt}.$

6. संधारित्र :

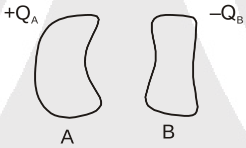
किसी संधारित्र में दो चालक प्लेटें होती है जो कि अचालक या परावैद्युत पदार्थ द्वारा पृथ्थकृत होती है।

(i) जब अनावेशित चालक को – आवेशित चालक के पास लाया जाता है तो चालकों पर आवेश समान (वही) रहता है लेकिन विभव में कमी हो जाती है। परिणामस्वरूप धारिता में वृद्धि हो जाती है।

(ii) किसी संधारित्र में चालकों पर आवेश समान परन्तु विपरीत प्रकृति का होता है।

(iii) चालकों को संधारित्र की प्लेटें कहते हैं। संधारित्र की आकृति के आधार पर संधारित्र का नाम दिया जाता है।

(iv) संधारित्र से सम्बन्धित सूत्र



(a) Q = CV

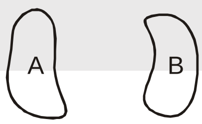
$\Rightarrow \ C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_A}{V_A - V_B} = \frac{Q_B}{V_B - V_A}$

Q = संधारित्र की धनात्मक प्लेट का आवेश

V = संधारित्र की धनात्मक तथा ऋणात्मक प्लेट के मध्य विभवान्तर

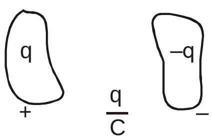
C = संधारित्र की धारिता

(b) संधारित्र में संचयित ऊर्जा

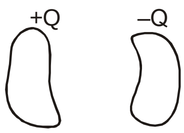


प्रारम्भिक आवेश = 0

मध्यवर्तीय आवेश



अंतिम आवेश



$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

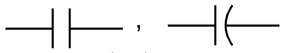
$\therefore$ संधारित्र में संचयित ऊर्जा = U = $\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$.

संधारित्र के विद्युत क्षेत्र में ऊर्जा संचित होती है, जिसका ऊर्जा घनत्व

$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \in E^2$ या $\frac{1}{2} \in_0 \in_r E^2$.

संधारित्र के विद्युत क्षेत्र में ऊर्जा संचित होती है, जिसका ऊर्जा घनत्व

(v) संधारित्र निम्न प्रकार प्रदर्शित किये जाते है :



(vi) आकृति तथा व्यवस्था के आधार पर संधारित्रों के प्रकार –

(a) समान्तर प्लेट संधारित्र

(b) गोलीय संधारित्र

(c) बेलनाकार संधारित्र

(vii) संधारित्र की धारिता निम्न पर निर्भर करती है –

(a) प्लेटों के क्षेत्रफल पर

(b) प्लेटों के मध्य की दूरी पर

(c) प्लेटों के मध्य माध्यम के परावैद्युतांक पर

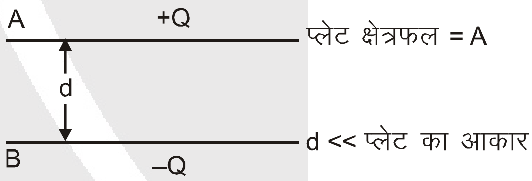
(viii) संधारित्र की प्लेटों के मध्य विद्युत (वायु माध्यम में) क्षेत्र $E = \sigma/\in_0 = V/d$

(ix) संधारित्र की किसी प्लेट पर लगने वाला बल $F = q^2/2A\in_0$

Solved Example

Example 3 समान्तर पट्ट संधारित्र की धारिता की गणना करो, जिसकी प्लेटों का क्षेत्रफल A तथा प्लेटों के बीच की दूरी d है।

Solution :



$E = \frac{Q}{A\in_0}$

$V_A - V_B = E.d. = \frac{Qd}{A\in_0} = \frac{Q}{C}$

$C = \frac{\in_0 A}{d}$

जहाँ A = प्लेटों का क्षेत्रफल

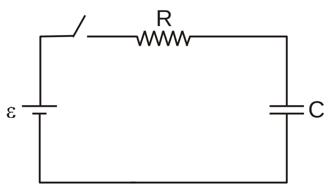
d = प्लेटों के मध्य दूरी

7. R–C परिपथ का t = 0 (प्रारम्भिक अवस्थाद्ध तथा t = ∞ (अन्तिम अवस्था) के लिए परिपथ हल

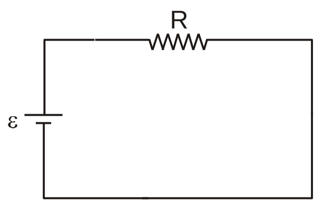
नोट :

(i) यदि संधारित्र के पथ (श्रेणी) में कोई प्रतिरोध है तो संधारित्र पर उपस्थित आवेश अचानक या तुरन्त परिवर्तित नहीं होता।

(ii) जब किसी अनावेशित संधारित्र को बैटरी से जोड़ा जाता है तो इसका प्रारम्भिक आवेश शून्य होता है। अतः इसके सिरों पर प्रारम्भिक विभवान्तर भी शून्य है। इस समय संधारित्र एक चालक तार की तरह व्यवहार करता है।

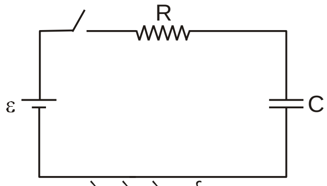


जोड़ने से पूर्व

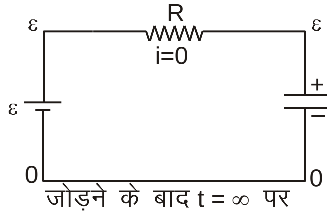


जोड़ने के तुरन्त बाद t = 0 पर

(iii) संधारित्र की शाखा में प्रवाहित धारा अन्ततः शून्य हो जायेगी है। (अर्थात् स्थायी अवस्था)



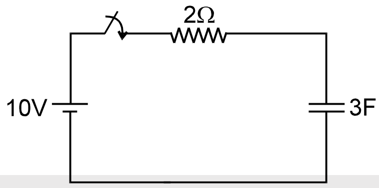
जोड़ने से पूर्व



जोड़ने के बाद t = ∞ पर

Solved Example

Example 1. निम्न स्थितियों में परिपथ में धारा तथा संधारित्र पर आवेश ज्ञात करो। संधारित्र पर प्रारम्भिक आवेश शून्य है।

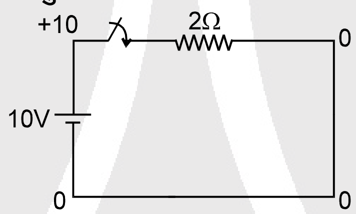


(a) स्विच बन्द करने के तुरन्त बाद

(b) स्विच बन्द करने के लम्बे समय बाद

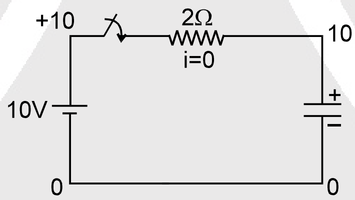
Solution :

(a) स्विच (Closed) चालू करने के तुरन्त बाद :



संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर = 0 $\therefore$ $Q_C = 0$ $\therefore$ i = = 5A

(b) लम्बे समय बाद

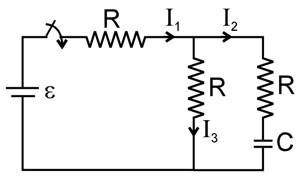


स्थायी अवस्था में धारा i = 0

संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर = 10 V

$\therefore$ $Q_C = 3 \times 10 = 30$ C

Example 2. निम्न स्थितियों के लिए परिपथ में धारा I_1, I_2, I_3, संधारित्र पर आवेश तथा परिपथ में संधारित्र का ज्ञात करो। जबकि संधारित्र का प्रारम्भिक आवेश शून्य है।



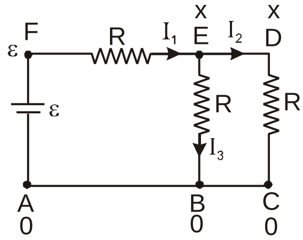
(a) स्विच चालू करने के तुरन्त बाद

(b) स्विच चालू करने के बहुत लम्बे समय बाद

Solution :

(a) संधारित्र का प्रारम्भिक आवेश शून्य है अतः यह एक चालक की तरह व्यवहार करेगा।

माना A का विभव शून्य है अतः B तथा C का विभव भी शून्य है तथा F पर विभव ε है। माना E पर विभव x है तो D पर भी विभव x होगा। बिन्दु E पर किरचॉफ का प्रथम नियम लगाने पर :



$$\frac{x-\varepsilon}{R}+\frac{x-0}{R}+\frac{x-0}{R}=0 \Rightarrow \frac{3x}{R}=\frac{\varepsilon}{R}$$

$x = \frac{\varepsilon}{3}$; $Q_c = 0$

$\therefore\ I_1 = \frac{-\varepsilon/3+\varepsilon}{R} = \frac{2\varepsilon}{3R} \Rightarrow I_2 = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{3R}$ तथा $I_3 = \frac{\varepsilon}{3R}$

वैकल्पिक विधि

$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{R+\frac{R}{2}} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow i_2 = i_3 = \frac{i_1}{2} = \frac{\varepsilon}{3R}$ तथा $\frac{dQ}{dt} = i_2 = \frac{\varepsilon}{3R}$

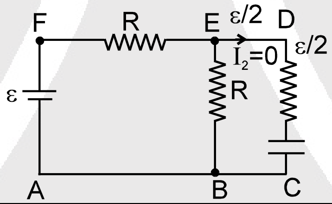
(b) t = ∞ (अन्तिम) पर

संधारित्र पूर्णतया आवेशित है अतः इससे कोई धारा प्रवाहित नहीं होगी।

$I_2 = 0,\quad I_1 = I_3 = \frac{\varepsilon}{2R}$

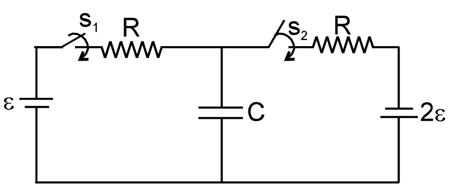
$V_E - V_B = V_D - V_C = (\varepsilon/2R)R = \varepsilon/2$

$\Rightarrow Q_C = \frac{\varepsilon C}{2}, \qquad \frac{dQ}{dt} = I_2 = 0$



समय	I_1	I_2	I_3	Q	dQ /dt
t = 0	$\frac{2\varepsilon}{3R}$	$\frac{\varepsilon}{3R}$	$\frac{\varepsilon}{3R}$	0	$\frac{\varepsilon}{3R}$
अन्तिम t = ∞	$\frac{\varepsilon}{2R}$	0	$\frac{\varepsilon}{2R}$	$\frac{\varepsilon C}{2}$	0

Example 3. t = 0 पर स्विच S_1 चालू कर देते है तथा लम्बे समय तक इसे इसी स्थिति में रहने देते है जबकि S_2 खुला है। अब S_1 को खुला रख कर S_2 को चालू कर देते है। यह मानते हुए की संधारित्र का प्रारम्भिक आवेश शून्य है, ज्ञात करो।



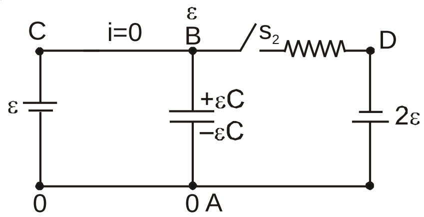
(i) उस क्षण के तुरन्त बाद संधारित्र में धारा।

(ii) उस क्षण से बहुत लम्बे समय बाद संधारित्र पर आवेश।

(iii) S_2 को चालू करने के बाद 2ε वि०वा०बल वाले सेल से प्रवाहित कुल आवेश।

Solution :

(i) माना A का विभव शून्य है तो B तथा C का विभव ε होगा (क्योंकि परिपथ में प्रवाहित धारा शून्य है)

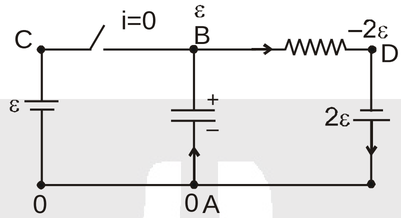


$V_B - V_A = C(\varepsilon - 0)$

∴ संधारित्र पर आवेश $= C(\varepsilon - 0) = C\varepsilon$

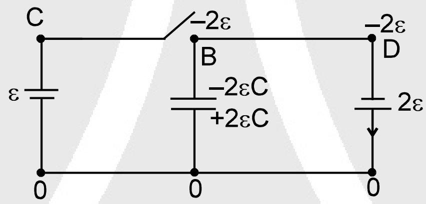
अब S_2 चालू है तथा S_1 खुला है। (संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर तथा आवेश अचानक परिवर्तित नहीं होता)

A का विभव शून्य है अतः D पर विभव -2ε.



∴ संधारित्र में धारा $= \dfrac{\varepsilon-(-2\varepsilon)}{R} = \dfrac{3\varepsilon}{R}$ (B से D)

(ii) लम्बे समय बाद i = 0



$V_B - V_A = V_D - V_A = -2\varepsilon$

∴ $Q = C(-2\varepsilon - 0) = -2\varepsilon C$

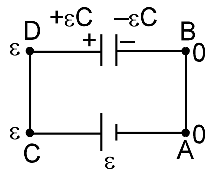
(iii) नीचे की प्लेट पर आवेश (यह बैटरी से जुड़ी हुई है।) $-\varepsilon C$ से $2\varepsilon C$ परिवर्तित हो जाता है।

∴ यह आवेश बैटरी से आता है।

∴ इसलिए सेल से नीचे की ओर प्रवाहित आवेश $3\varepsilon C$ है।

Example 4. एक अनावेशित संधारित्र बैटरी से जोड़ा जाता है। इसकी धारिता C है। संधारित्र के आवेशन के दौरान परिपथ में उत्पन्न ऊष्मा ज्ञात करो।

Solution : अन्तिम अवस्था



माना A का विभव शून्य है अतः B का विभव भी शून्य है तथा C तथा D पर विभव ε है। अतः संधारित्र पर अन्तिम आवेश

$Q_C = \varepsilon C$; $U_i = 0$

$U_f = \dfrac{1}{2} CV^2 = \dfrac{1}{2} C\varepsilon^2$

बैटरी द्वारा किया गया कार्य $= \int P dt$

$W = \int \varepsilon i dt = \varepsilon \int i dt = \varepsilon \,.\, Q = \varepsilon.\, \varepsilon C = \varepsilon^2 C$

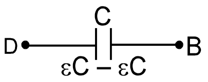
हमेशा याद रखें कि यदि सेल के उच्च विभव वाले सिरे से Q आवेश सेल से बाहर निकल रहा हो तो बैटरी द्वारा किया गया कार्य $= \varepsilon Q$

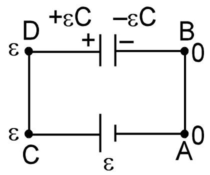
यदि सेल के उच्च विभव वाले सिरे से Q आवेश सेल में प्रवेश कर रहा हो तो बैटरी पर किया गया कार्य $= \varepsilon Q$

उत्पन्न ऊष्मा $= W - (U_{\text{अन्तिम}} - U_{\text{प्रारम्भिक}}) = \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 C - \varepsilon^2 C = \dfrac{C\varepsilon^2}{2}$.

Example 5. एक संधारित्र की धारिता 'C' है यह ε विभवान्तर तक आवेशित है इसको ε वि.वा. बल वाली बैटरी से इस प्रकार जोड़ा जाता है कि बैटरी का धन सिरा संधारित्र की धनात्मक प्लेट से जुड़ा हो तो इस आवेशन प्रक्रिया के दौरान ऊष्मा हानि ज्ञात करो।

Solution :





जोड़ने से पूर्व तथा पश्चात् संधारित्र पर प्रारम्भिक तथा अंतिम आवेश समान है। अतः परिपथ में कोई आवेश प्रवाहित नहीं होता इसलिए ऊष्मा हानि = 0

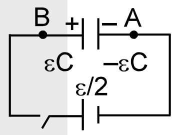
Example 6. एक C धारिता वाला संधारित्र ε विभवान्तर तक आवेशित है। इसे $\varepsilon/2$ वि.वा.बल वाली बैटरी से इस प्रकार जोड़ा जाता है कि बैटरी का धन सिरा संधारित्र की धनात्मक प्लेट से जुड़ा हो बैटरी जोड़ने के बहुत लम्बे समय बाद–

(i) बैटरी से प्रवाहित कुल आवेश ज्ञात करो।

(ii) बैटरी द्वारा किया गया कुल कार्य ज्ञात करो।

(iii) आवेशन प्रक्रिया के दौरान परिपथ में ऊष्मा हानि ज्ञात करो।

Solution :

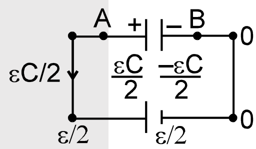


(i) माना A का विभव 0 है तो B का विभव $\frac{\varepsilon}{2}$ है अतः संधारित्र

पर अन्तिम आवेश = $C\varepsilon/2$

संधारित्र से प्रवाहित आवेश $= (C\varepsilon/2 - C\varepsilon) = -C\varepsilon/2$

अतः बैटरी में आवेश प्रवेश कर रहा है।



(ii) अन्ततः, संधारित्र की ऊर्जा में परिवर्तन = $U_{\text{अन्तिम}} - U_{\text{प्रारम्भिक}}$

$$= \frac{1}{2}C\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2 C}{2} = \frac{1}{8}\varepsilon^2 C - \frac{1}{2}\varepsilon^2 C = -\frac{3\varepsilon^2 C}{8}$$

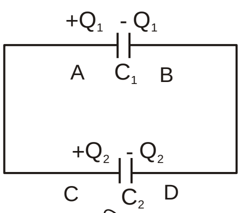
बैटरी द्वारा किया गया कार्य $= \frac{\varepsilon}{2} \times \left(-\frac{\varepsilon C}{2}\right) = -\frac{\varepsilon^2 C}{4}$

(iii) बैटरी द्वारा किया गया कार्य = संधारित्र की ऊर्जा में परिवर्तन + उत्पन्न ऊष्मा

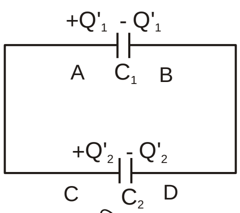
उत्पन्न ऊष्मा $= \frac{3\varepsilon^2 C}{8} - \frac{\varepsilon^2 C}{4} = \frac{\varepsilon^2 C}{8}$

8. आवेशित संधारित्रों को जोड़ने पर आवेशों का वितरण :

चित्र में C_1 तथा C_2 धारिता वाले दो संधारित्र प्रदर्शित है



प्रारम्भिक



अन्तिम

संधारित्रों को जोड़ने से पूर्व		
प्राचल	प्रथम संधारित्र	द्वितीय संधारित्र
धारिता	C_1	C_2
आवेश	Q_1	Q_2
विभव	V_1	V_2

संधारित्रों को जोड़ने के पश्चात्		
प्राचल	प्रथम संधारित्र	द्वितीय संधारित्र
धारिता	C_1	C_2
आवेश	Q'_1	Q'_2
विभव	V	V

(a) उभयनिष्ठ विभव : A तथा C की प्लेटों को जोड़ने से पूर्व तथा पश्चात् आवेश संरक्षण के नियम से
$Q_1 + Q_2 = C_1V + C_2V$

$$\Rightarrow \; V = \frac{Q_1+Q_2}{C_1+C_2} = \frac{C_1V_1+C_2V_2}{C_1+C_2} = \frac{\text{कुल आवेश}}{\text{कुल धारिता}}$$

(b) $Q_1' = C_1V = \dfrac{C_1}{C_1+C_2}(Q_1+Q_2)$

$Q_2' = C_2\,V = \dfrac{C_2}{C_1+C_2}(Q_1+Q_2)$

(c) पुर्नवितरण के दौरान ऊष्मा हानि : $\Delta H = U_i - U_f = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}(V_1-V_2)^2$

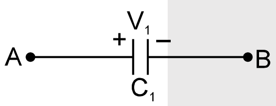
तार में जूल ऊष्मा के रूप में ऊर्जा हानि होती है।

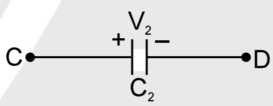
Note :

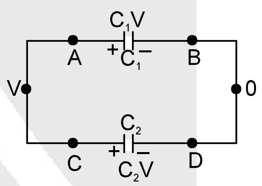
(i) जब समान आवेश की प्लेटों (+ को + से तथा – को – से) को एक दूसरे से जोड़ा जाता है तो सभी प्राचल (Q_1, Q_2, V_1, V_2) धनात्मक चिन्ह सहित रखे जाते है।

(ii) जब असमान ध्रुवता वाली प्लेटों (+ को – से) को एक दूसरे से जोड़ा जाता है तो किसी एक प्लेट के आवेश तथा विभव का मान ऋणात्मक लेते है।

8.2. उपरोक्त सूत्र का निगमन :







माना B व D का विभव शून्य है तथा संधारित्रों का उभयनिष्ठ विभव V है तो A तथा C पर विभव V होगा।

$C_1V + C_2V = C_1V_1 + C_2V_2$

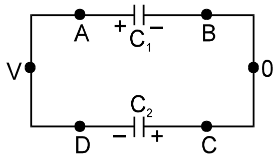
$$V = \frac{C_1V_1+C_2V_2}{C_1+C_2}$$

$$H = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 - \frac{1}{2}(C_1+C_2)V^2 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2 - \frac{1}{2}\frac{(C_1V_1+C_2V_2)^2}{(C_1+C_2)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{C_1^2V_1^2 + C_1C_2V_1^2 + C_2C_1V_2^2 + C_2^2V_2^2 - C_1^2V_1^2 - C_2V_2^2 - 2C_1C_2V_1V_2}{C_1+C_2}\right] = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}(V_1-V_2)^2$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}(V_1-V_2)^2$$

यदि विपरीत ध्रुवता वाले सिरों को जोड़े तो



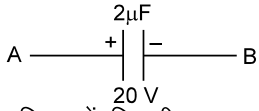
$\therefore \; C_1V + C_2V = C_1V_1 - C_2V_2$

$$V = \frac{C_1V_1-C_2V_2}{C_1+C_2} \quad \text{तथा} \quad H = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}(V_1+V_2)^2$$

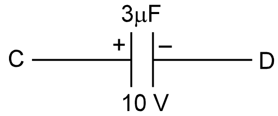
8.2.1 Solved Example

Example 1. यदि A को C से तथा B को D से जोड़ा जाये तो ज्ञात करो

(i) परिपथ में कितना आवेश प्रवाहित होगा।

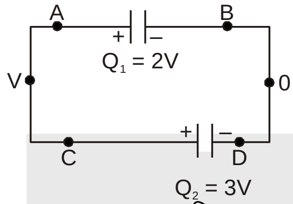


(ii) परिपथ में कितनी ऊष्मा उत्पन्न होगी।



Solution :

(i)



माना B तथा D का विभव शून्य है तथा संधारित्रों का उभयनिष्ठ विभव V है तो A तथा C का विभव V होगा।

आवेश संरक्षण से

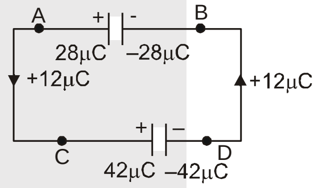
$3V + 2V = 40 + 30$

$5V = 70$

$V = 14$ वोल्ट

आवेश प्रवाह $= 40 - 28 = 12\ \mu C$

प्रत्येक प्लेट पर अन्तिम आवेश चित्र में प्रदर्शित है



(ii) उत्पन्न ऊष्मा $= \frac{1}{2} \times 2 \times (20)^2 + \frac{1}{2} \times 3 \times (10)^2 - \frac{1}{2} \times 5 \times (14)^2$

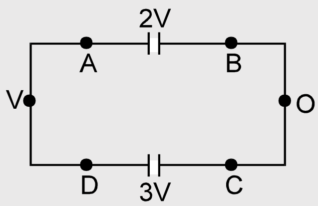
$= 400 + 150 - 490 = 550 - 490 = 60\ \mu J$

Note

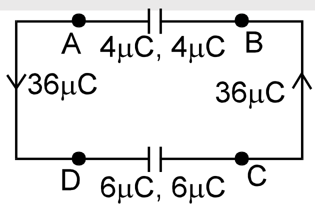
1. जब संधारित्र की प्लेटो को जोड़ा जाता है तो आवेश संरक्षित रहता है।

2. आवेशों के पुर्नवितरण के सूत्र का सीधा उपयोग किया जा सकता है।

Example 2. उपरोक्त प्रश्न में यदि A को D से तथा B से C जोड़ दिया जाये तो उपरोक्त प्रश्न के उत्तर पुनः ज्ञात कीजिये।



Solution : माना B व C के विभव शून्य है तथा संधारित्रों पर उभयनिष्ठ विभव V है तो A तथा D पर V विभव होगा।



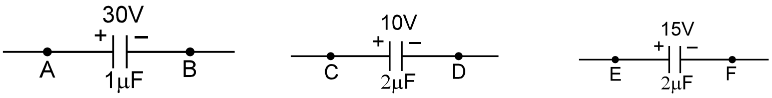
$2V + 3V = 10 \Rightarrow V = 2$ वोल्ट

प्रत्येक प्लेट पर आवेश चित्र में दर्शाया गया है

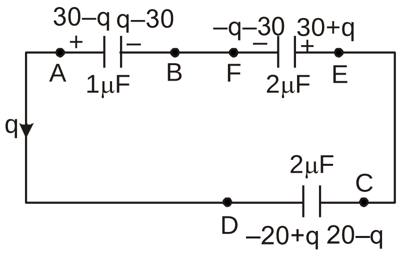
उत्पन्न ऊष्मा $= 400 + 150 - \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 550 - 10 = 540\ \mu J$

Note : यहां उत्पन्न ऊष्मा अधिक है। सोचिए क्यों ?

Example 3. चित्र में 1μF, 2μF तथा 2μF के तीन संधारित्र प्रदर्शित है तीनों को क्रमशः 30 V, 10 V तथा 15 V तक आवेशित किया जाता है। यदि A सिरा D से जोड़ा जाता है, C, E से जोड़ा जाता है तथा F सिरा B से जोड़ा जाता है तो परिपथ में प्रवाहित आवेश तथा संधारित्रों पर अन्तिम आवेश ज्ञात करो।



Solution : माना प्रवाहित आवेश q है।



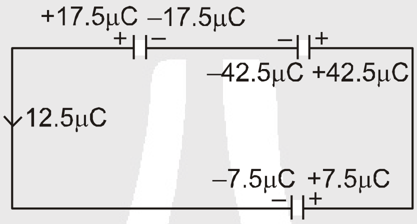
किरचॉफ वोल्टता नियम से

$$-\frac{(q-20)}{2}-\frac{(30+q)}{2}+\frac{30-q}{1}=0$$

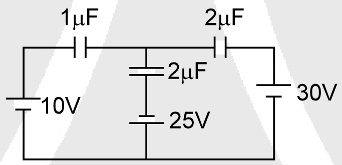
$-2q = -25$

$q = 12.5\ \mu C$

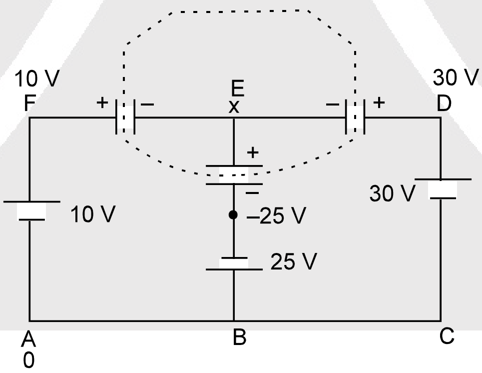
संधारित्रों पर अन्तिम आवेश चित्र में प्रदर्शित है



Example 4. दिये गये परिपथ में प्रत्येक संधारित्र पर आवेश ज्ञात करो। (संधारित्र प्रारम्भ में अनावेशित थे)



Solution :

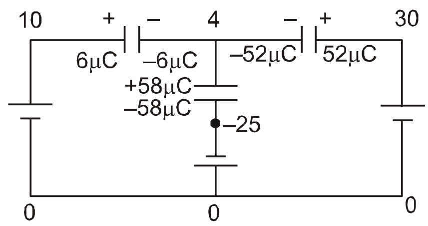


माना A का विभव शून्य है तो D का विभव 30 V, F पर 10 V तथा G का विभव –25V तथा माना E पर विभव x है। E बिन्दु पर किरचॉफ के प्रथम नियम से ('E' से जुड़ी हुई सभी प्लेटों का कुल आवेश पहले के कुल आवेश के बराबर होता है जो कि शून्य है)

$\therefore\ (x - 10) + (x - 30)2 + (x + 25)2 = 0$

$5x = 20$

$x = 4V$



अन्तिम आवेश :

$Q_{2\mu F} = (30 - 4)2 = 52\ \mu C$

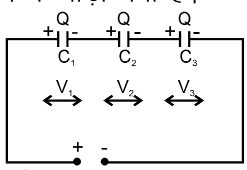
$Q_{1\mu F} = (10 - 4) = 6\mu C$

$Q_{2\mu F} = (4 - (-25))2 = 58\ \mu C$

9. संधारित्रों का संयोजन :

9.1. श्रेणी संयोजन :

(i) चित्रानुसार अनावेशित संधारित्रों को श्रेणी क्रम में जोड़ा गया है।



(ii) सभी संधारित्रों पर समान आवेश है परन्तु उनके विभवानतर अलग–अलग हैं।

(iii) हम कह सकते हैं कि $V_1 = \frac{Q}{C_1}$

V_1 = संधारित्र C_1 के सिरों पर विभव
Q = संधारित्र C_1 की धनात्मक प्लेट पर आवेश
C_1 = संधारित्र की धारिता

इसीप्रकार $V_2 = \frac{Q}{C_2}$, $V_3 = \frac{Q}{C_3}$;........

(iv) $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \frac{1}{C_3}$

हम कह सकते है कि संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर श्रेणी संयोजन में इसकी धारिता के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

$V \propto \frac{1}{C}$

नोट : श्रेणी क्रम संयोजन में न्यूनतम धारिता वाले संधारित्र का विभव अधिकतम होता है।

(v) $V_1 = \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+......}V$; $V_2 = \frac{\frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+......}V$; $V_3 = \frac{\frac{1}{C_3}}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+......}V$

जहाँ $V = V_1 + V_2 + V_3$

(vi) तुल्य धारिता : किसी संयोजन की तुल्य धारिता वह धारिता होती है जिसको संयोजन के स्थान पर जोड़ने पर यह उतना ही आवेश तथा ऊर्जा संचयित करें जितना कि संयोजन करता है।

श्रेणी संयोजन में : $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...$

नोट : श्रेणी संयोजन की तुल्य धारिता संयोजन में उपस्थित न्यूनतम धारिता वाले संधारित्र की धारिता से भी कम होती है।

(vii) संयोजन में संग्रहित ऊर्जा $U_{\text{संयोजन}} = \frac{Q^2}{2C_1} + \frac{Q^2}{2C_2} + \frac{Q^2}{2C_3}$

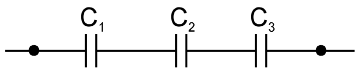
$U_{\text{संयोजन}} = \frac{Q^2}{2C_{eq}}$

संयोजन को आवेशन के दौरान बैटरी द्वारा दी गई ऊर्जा $U_{\text{बैटरी}} = Q \times V = Q . \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q^2}{C_{eq}}$

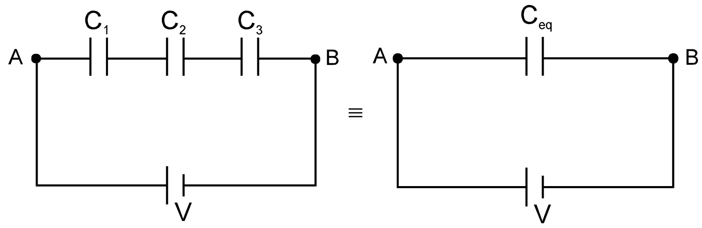
$\frac{U_{\text{संयोजन}}}{U_{\text{बैटरी}}} = \frac{1}{2}$

नोट : बैटरी द्वारा दी गई ऊर्जा का आधा भाग विद्युत स्थितिज ऊर्जा के रूप में संग्रहित हो जाता है तथा आधा भाग प्रतिरोध द्वारा ऊष्मा में परिवर्तित हो जाता है (यदि संधारित्र प्रारम्भ में अनआवेशित है)।

9.1.1 सूत्र का निगमन

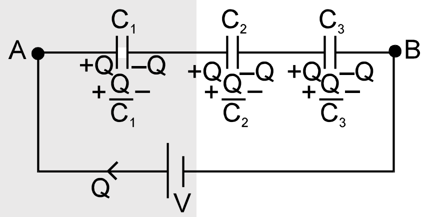


तुल्य धारिता का अर्थ



$C_{eq} = \frac{Q}{V}$

अब, संधारित्रों का प्रारम्भिक आवेश शून्य है



किरचॉफ के वोल्टता नियम से $\frac{-Q}{C_1} + \frac{-Q}{C_2} + \frac{-Q}{C_3} + V = 0.$

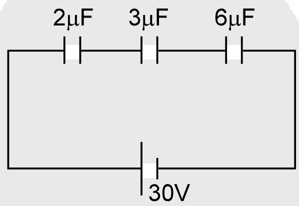
$$V = Q\left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right]$$

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow \frac{1}{C_{तुल्य}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

व्यापक रूप से $\frac{1}{C_{तुल्य}} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{C_n}$

Solved Example

Example 1. चित्रानुसार तीन अनावेशित संधारित्र श्रेणीक्रम में, 30V वि०वा०बल वाली बैटरी से जुड़े है तो निम्न ज्ञात करो –



(i) बैटरी द्वारा प्रवाहित आवेश

(ii) 3 μF के संधारित्र की स्थितिज ऊर्जा

(iii) संधारित्र में $U_{कुल}$

(iv) परिपथ में उत्पन्न ऊष्मा

Solution : $\frac{1}{C_{तुल्य}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = 1$

$C_{तुल्य} = 1\mu F.$

(i) $Q = C_{तुल्य} V = 30\mu C.$

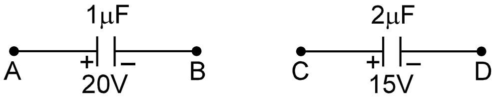
(ii) 3μF के संधारित्र पर आवेश = 30μC

ऊर्जा = $\frac{Q^2}{2C} = \frac{30 \times 30}{2 \times 3} = 150\mu J$

(iii) $U_{कुल} = \frac{30 \times 30}{2}\ \mu J = 450\ \mu J$

(iv) उत्पन्न ऊष्मा = (30 μC) (30) – 450 μJ = 450 μJ.

Example 2. चित्रानुसार 1 μF तथा 2μF के संधारित्र क्रमशः 20V तथा 15V तक आवेशित किये गये है। यदि B तथा C सिरों को एक दूसरे से, A सिरा बैटरी के धन सिरे से तथा D सिरा बैटरी के ऋण सिरे से जुड़ा हो तो दोनों संधारित्र पर अन्तिम आवेश ज्ञात करो।



Solution : किरचॉफ के वोल्टता नियम से

$\frac{-(20+q)}{1} - \frac{30+q}{2} + 30 = 0$

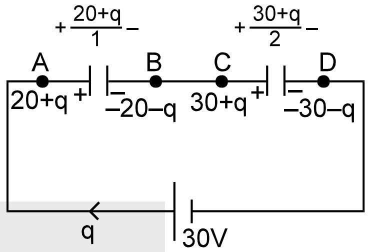
$-40 - 2q - 30 - q = -60$

$3q = -10$

प्रवाहित आवेश $= -10/3\ \mu C$.

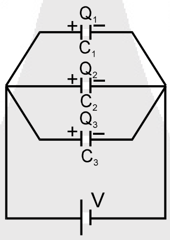
1μF धारिता के संधारित्र पर आवेश $= 20 + q = \frac{50}{3}\ \mu C$

2μF धारिता के संधारित्र पर आवेश $= 30 + q = \frac{80}{3}\ \mu C$



9.2. समान्तर संयोजन :

(i) जब प्रत्येक संधारित्र (एक से अधिक) की एक प्लेट साथ–साथ तथा दूसरी प्लेटे साथ जुड़ी हो तो इस प्रकार का संयोजन समान्तर संयोजन कहलाता है।



(ii) सभी संधारित्रों का विभवान्तर समान लेकिन आवेश भिन्न–भिन्न होता है।

(iii) हम कह सकते है कि : $Q_1 = C_1V$

$Q_1 = C_1$ संधारित्र का आवेश

C_1 = संधारित्र की धारिता

$V = C_1$ संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर

(iv) $Q_1 : Q_2 : Q_3 = C_1 : C_2 : C_3$

संधारित्रों पर आवेश धारिता के समानुपाती होता है।

$Q \propto C$

(v) $Q_1 = \frac{C_1}{C_1+C_2+C_3} Q \quad \Rightarrow \quad Q_2 = \frac{C_2}{C_1+C_2+C_3} Q$

$Q_3 = \frac{C_3}{C_1+C_2+C_3} Q$ जहाँ $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 ......$

नोट : सबसे अधिक धारिता वाले संधारित्र से अधिकतम आवेश प्रवाहित होगा।

(vi) समान्तर संयोजन की तुल्य धारिता $C_{\text{तुल्य}} = C_1 + C_2 + C_3$

नोट : तुल्य धारिता संयोजन में उपस्थित अधिकतम धारिता वाले संधारित्र की धारिता, से भी अधिक होती है।

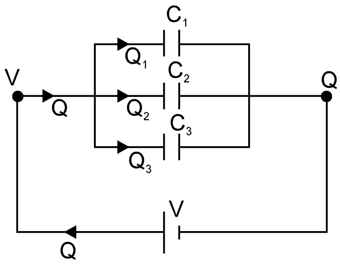
(vii) संयोजन में संचयित ऊर्जा :

$V_{\text{संयोजन}} = \frac{1}{2} C_1V^2 + \frac{1}{2} C_2V^2 + ... = \frac{1}{2} (C_1 + C_2 + C_3 .....) V^2 = \frac{1}{2} C_{eq}V^2$

$U_{\text{बैटरी}} = QV = CV^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_{\text{संयोजन}}}{U_{\text{बैटरी}}} = \frac{1}{2}$

नोट : बैटरी द्वारा दी गई ऊर्जा का आधा भाग विद्युत स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचयित हो जाता है तथा शेष आधा भाग प्रतिरोध द्वारा ऊष्मा में परिवर्तित हो जाता है (यदि सभी संधारित्र प्रारम्भ में अनआवेशित है)।

समान्तर संयोजन के लिए सूत्र का निगमन :



$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1V + C_2V + C_3V = V(C_1 + C_2 + C_3)$

$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2 + C_3$; $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$

व्यापक रूप से : $C_{eq} = \sum_{n=1}^{n} C_n$

Solved Example

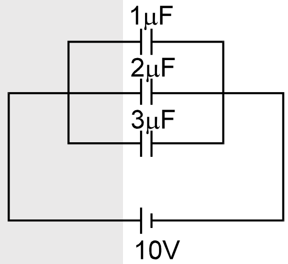
Example 1. तीन अनावेशित संधारित्र समान्तर क्रम में 10 V की बैटरी से जुड़े है तो ज्ञात करो।

(i) बैटरी से प्रवाहित आवेश

(ii) संधारित्र में संचित कुल ऊर्जा

(iii) परिपथ में उत्पन्न ऊष्मा

(iv) 3μF के संधारित्र में स्थितिज ऊर्जा



Solution :

(i) $Q = (30 + 20 + 10)\mu C = 60\ \mu C$

(ii) $U_{\text{कुल}} = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times 10 = 300\ \mu J$

(iii) उत्पन्न ऊष्मा $= 60 \times 10 - 300 = 300\ \mu J$

(iv) $U_{3\mu F} = \frac{1}{2} \times 3 \times 10 \times 10 = 150$ J

9.3. मिश्रित संयोजन :

श्रेणी और समान्तर संयोजनों का मिश्रित संयोजन या अन्य जटिल संयोजन मिश्रित संयोजन कहलाते है।

मिश्रित संयोजन दो प्रकार के होते है –

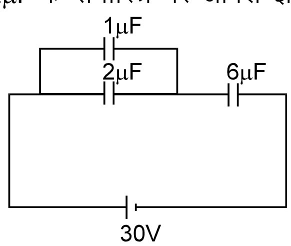
(i) सरल

(ii) जटिल

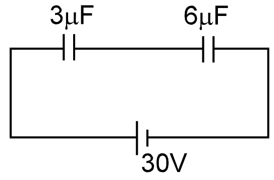
(iii)

Solved Example

Example 1. दिये गये परिपथ में 6μF तथा 1μF के संधारित्र पर आवेश ज्ञात करो।



Solution : यह निम्न प्रकार हल किया जा सकता है।



$C_{तुल्य} = \frac{18}{9} = 2\mu F$

सेल से प्रवाहित आवेश = 30 × 2 μC

Q = 60 μC

3μF के संधारित्र पर आवेश = 6μF के संधारित्र पर आवेश = 60 μC

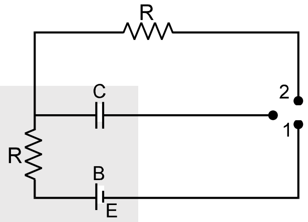
3μF संधारित्र के सिरों पर विभवान्तर = 60/ 3= 20 V

∴ अतः 1μF पर आवेश = 20 μC

10. संधारित्र का आवेशन तथा निरावेशन

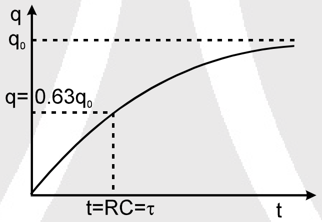
10.1. संधारित्र का आवेशन :

(i) दिये गये परिपथ में यदि कुंजी 1 को चालू कर दिया जाये तो संधारित्र आवेशित हो जाता है। संधारित्र को आवेशित होने में कुछ समय लगता है। किसी क्षण t पर आवेश की मात्रा $q = q_0[1 - e^{-(t/RC)}]$



जहाँ q_0, t = ∞ पर आवेश का अधिकतम (अन्तिम) मान है। इस समीकरण के अनुसार संधारित्र में आवेश की मात्रा में समय के साथ चरघातांकीय वृद्धि होती है।

(ii) यदि $t = RC = \tau_1$ हो तब



$q = q_0 [1 - e^{-(RC/RC)}] = q_0 \left[1 - \frac{1}{e}\right]$ या $q = q_0 (1 - 0.37) = 0.63\ q_0 = q_0$ का 63%

(iii) t = RC, समय नियतांक कहते है।

अर्थात् समय नियतांक वह समय है जिसमें संधारित्र की प्लेटों पर आवेश अधिकतम मान का 63% तक पहुंच जाता है।

(iv) किसी क्षण संधारित्रों की प्लेट पर विभवान्तर $V = V_0[1 - e^{-(t/RC)}]$ वोल्ट होता है।

(v) विभव वक्र आवेश वक्र के समान होता है। आवेशन प्रक्रिया के दौरान परिपथ में अल्प समयान्तराल के लिए विद्युत धारा प्रवाहित होती है। इसे क्षणिक धारा कहते है। इस धारा का किसी क्षण मान निम्न होता है।

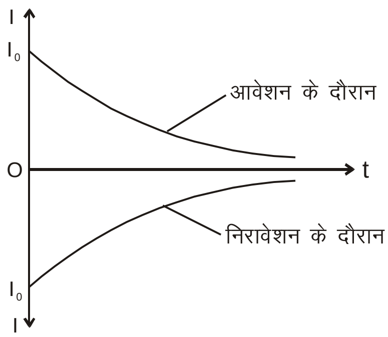
$I = I_0[e^{-(t/RC)}]$ ऐम्पियर

इस सम्बन्ध के अनुसार परिपथ में प्रवाहित धारा चरघातांकीय रूप से कम होती है।

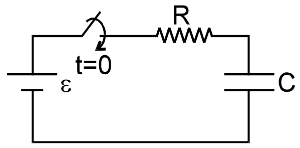
(vi) यदि $t = RC = \tau$ = समय नियतांक

$I = I_0 e^{(-RC/RC)} = \frac{I_0}{e} = 0.37\ I_0 = I_0$ का 37%

समय नियतांक वह समय है, जिसमें परिपथ में धारा अधिकतम मान की 37% रह जाती है।



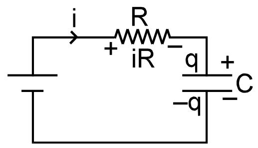
संधारित्र के आवेशन के लिए सूत्र का निगमन



संधारित्र का प्रारम्भिक आवेश शून्य है।

माना किसी क्षण संधारित्र पर आवेश q है।

किरचॉफ के वोल्टता नियम से



$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow iR = \frac{\varepsilon C - q}{C}$$

$$i = \frac{\varepsilon C - q}{CR} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon C - q}{CR} \Rightarrow \frac{CR}{\varepsilon C - q} \,.\, dq = dt.$$

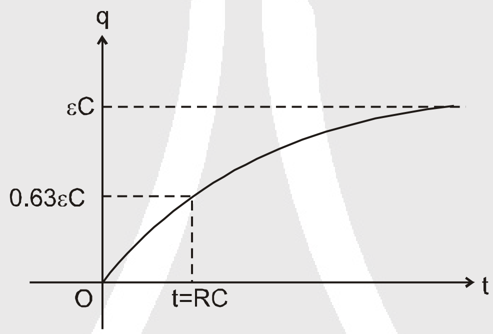
$$\int_O^q \frac{dq}{\varepsilon C - q} = \int_O^t \frac{dt}{RC} \Rightarrow -\ell n\,(\varepsilon C - q) + \ell n\,\varepsilon C = \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \ell n\,\frac{\varepsilon C}{\varepsilon C - q} = \frac{t}{RC}$$

$$\varepsilon C - q = \varepsilon C \,.\, e^{-t/RC}$$

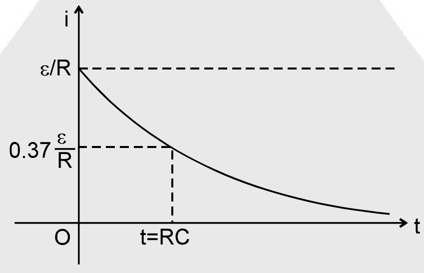
$$q = \varepsilon C(1 - e^{-t/RC})$$

RC = श्रेणी परिपथ का समय नियतांक



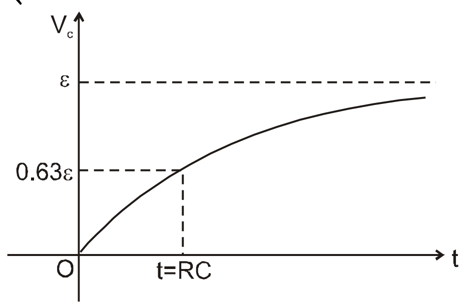
एक समय नियतांक के पश्चात् $q = \varepsilon C\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \varepsilon C\,(1 - 0.37) = 0.63\,\varepsilon C.$

किसी समय 't' पर धारा



$$i = \frac{dq}{dt} = \varepsilon C\left(-e^{-t/RC}\left(-\frac{1}{RC}\right)\right) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}$$

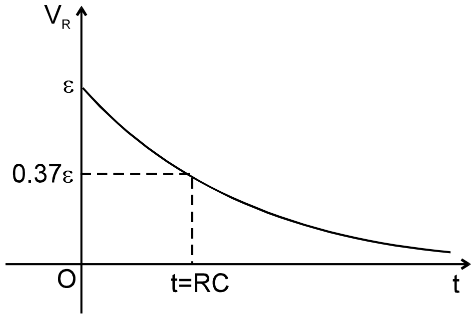
एक समय नियतांक के पश्चात् संधारित्रों के सिरों पर वोल्टता V = 0.63 ε



$Q = CV$; $V_C = \varepsilon(1 - e^{-t/RC})$

प्रतिरोध के सिरों पर वोल्टता

$V_R = iR = \varepsilon e^{-t/RC}$



ऊर्जा संरक्षण से

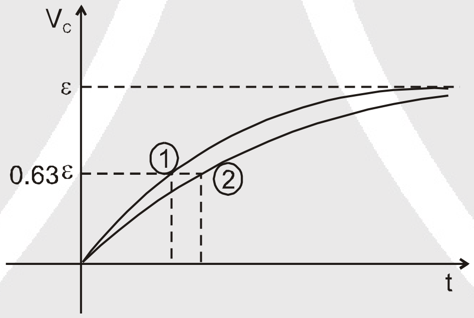
ऊष्मा व्ययित = बैटरी द्वारा किया गया कार्य – ΔU संधारित्र

$= C\varepsilon(\varepsilon) - (\frac{1}{2}C\varepsilon^2 - 0) = \frac{1}{2}C\varepsilon^2$

वैकल्पिक विधि :

ऊष्मा $= H = \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{RC}} R\, dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC} dt$

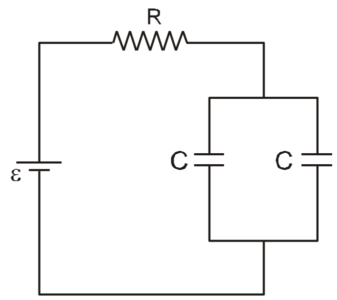
$= \frac{\varepsilon^2}{R}\left[\frac{e^{-\frac{2t}{RC}}}{-2/RC}\right]_0^\infty = \frac{\varepsilon^2 RC}{2R}\left[e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty = \frac{\varepsilon^2 C}{2}$



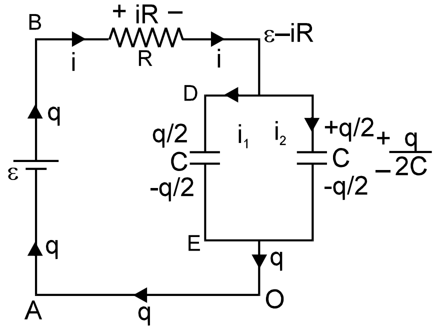
नोटः दिये गये चित्र में (2) का समय नियतांक (1) के समय नियतांक से अधिक होता है।

Solved Example

Example 1. तुल्य परिपथ का उपयोग नहीं करते हुए, सभी शाखाओं में धारा तथा सभी संधारित्रों पर आवेश (समय के फलन में) ज्ञात करो।



Solution : ABDEA में KVL के नियम से –



$\varepsilon - iR = \frac{q}{2C} \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{2CR}$

$\Rightarrow i = \frac{2C\varepsilon - q}{2CR} \Rightarrow \frac{dq}{2\varepsilon C - q} = \frac{dt}{2CR}$

$\int_0^q \frac{dq}{(2\varepsilon C - q)} = \frac{t}{2CR} \Rightarrow \frac{2\varepsilon C - q}{2\varepsilon C} = e^{-t/2RC}$

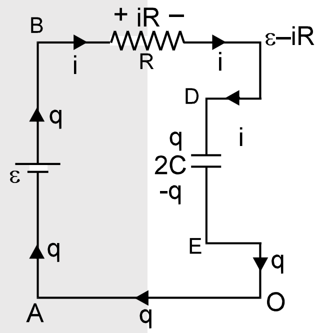
$q = 2\varepsilon C\,(1 - e^{-t/2RC})$

$q_1 = \frac{q}{2} = \varepsilon C\,(1 - e^{-t/2RC}) \Rightarrow i_1 = \frac{\varepsilon}{2R}\,e^{-t/2RC}$

$q_2 = \frac{q}{2} = \varepsilon C\,(1 - e^{-t/2RC}) \Rightarrow i_2 = \frac{\varepsilon}{2R}\,e^{-t/2RC}$

वैकल्पिक विधि

तुल्यता से



परिपथ का समय नियतांक = 2C × R = 2RC

संधारित्र पर अधिकतम आवेश = 2C × ε = 2Cε

अतः आवेश तथा धारा की समीकरणें निम्न होगी।

$q = 2\varepsilon C\,(1 - e^{-t/2RC})$

$q_1 = \frac{q}{2} = \varepsilon C\,(1 - e^{-t/2RC}) \Rightarrow i_1 = \frac{\varepsilon}{2R}\,e^{-t/2RC}$

$q_2 = \frac{q}{2} = \varepsilon C\,(1 - e^{-t/2RC}) \Rightarrow i_2 = \frac{\varepsilon}{2R}\,e^{-t/2RC}$

Example 2. एक संधारित्र 20 Ω प्रतिरोध के साथ 36 V की बैटरी से जुड़ा है। संधारित्र के सिरों पर 2μs में विभवान्तर बढ़ कर 12.0 V हो जाता है तो संधारित्र की धारिता ज्ञात करो।

Solution : आवेशन के दौरान संधारित्र पर आवेश $Q = Q_0(1 - e^{-t/RC})$

अतः संधारित्र का विभवान्तर $V = Q/C = Q_0/C\,(1 - e^{-t/RC})$.

यहां, चूंकि t = 2 μs, पर विभवान्तर 12V है। अतः स्थैतिक विभवान्तर Q_0/C = 36V है।

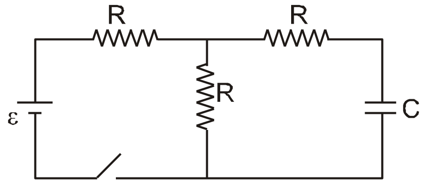
$12V = 36V(1 - e^{-t/RC})$

या $1 - e^{-t/RC} = \frac{1}{3}$ या $e^{-t/RC} = \frac{2}{3}$

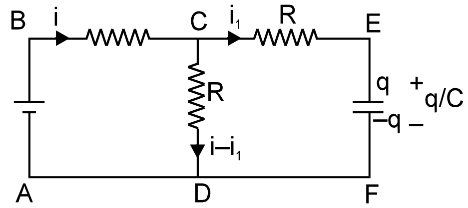
या $\frac{t}{RC} = \ell n\left(\frac{3}{2}\right) = 0.405$ या $RC = \frac{t}{0.405} = \frac{2\ \mu s}{0.45} = 4.936\ \mu s$

या $C = \frac{4.936\mu s}{20\Omega} = 0.25\ \mu F$.

Example 3. यदि t = 0 पर स्विच चालू (closed) हो तो संधारित्र पर आवेश (समय के फलन में) ज्ञात करो। जबकि संधारित्र प्रारम्भ में अनावेशित था।



Solution : ABCDA पर KVL के नियम से



$\varepsilon - iR - (i - i_1) R = 0$

$\varepsilon - 2iR + i_1R = 0$ ....(i)

ABCEFDA पर KVL के नियम से

$\varepsilon - iR - i_1R - \dfrac{q}{C} = 0$

समीकरण (i) से $\dfrac{2\varepsilon - \varepsilon - i_1R - 2i_1R}{2} = \dfrac{q}{C}$

$\varepsilon C - 3i_1RC = 2q \Rightarrow \varepsilon C - 2q = 3\dfrac{dq}{dt} . RC$

$\displaystyle\int_0^q \frac{dq}{\varepsilon C - 2q} = \int_0^t \frac{dt}{3RC} \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon C - 2q}{\varepsilon C} = \frac{t}{3RC}$

$q = \dfrac{\varepsilon C}{2}\left(1 - e^{-2t/3RC}\right)$

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के लिए विधि :

यदि किसी परिपथ में केवल एक संधारित्र हो तो

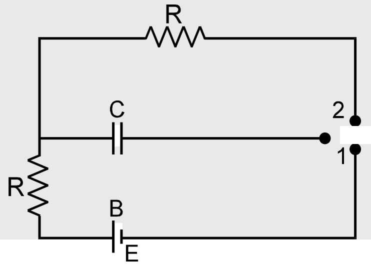
$q = Q_{\text{स्थैतिक}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$; $Q_{\text{स्थैतिक}}$ = स्थाई अवस्था में संधारित्र पर आवेश (यह इस शीट के अनुच्छेद 6 में दिया है)

$\tau = R_{\text{प्रभावी}} C$

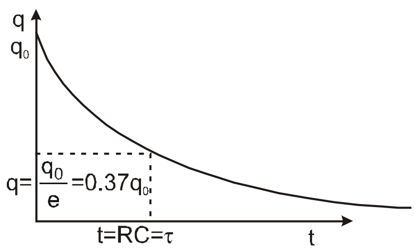
$R_{\text{प्रभावी}}$ संधारित्र के सिरों पर प्रतिरोध है जबकि बैटरी को आन्तरिक प्रतिरोध से बदलते है।

10.2. संधारित्र का निरावेशन :

(i) दिये गये परिपथ (अनुच्छेद 10.1) के अनुसार यदि कुंजी 1 बन्द कर दें और कुंजी 2 चालू कर दें तो संधारित्र अनावेशित हो जाता है।



(ii) किसी क्षण t पर संधारित्र का आवेश $q = q_0\, e^{-(t/RC)}$ होता है। आवेश चरघातांकीय रूप से घटता है। यहाँ q_0 = संधारित्र पर प्रारम्भिक आवेश है।



(iii) यदि $t = RC = \tau$ = समय नियतांक, तब $q = \frac{q_0}{e} = 0.37q_0 = q_0$ का 37%

अर्थात् समय नियतांक वह समय है, जिसमें निरावेशन की प्रक्रिया में संधारित्र की प्लेटों पर आवेश अधिकतम आवेश का 37% रह जाता है।

(iv) RC की विमा समय की विमा के समान होती है अर्थात् $M^oL^oT^1$ तथा $\frac{1}{RC}$ की विमा आवृत्ति की विमा के समान होती है अर्थात् $M^0L^0T^{-1}$

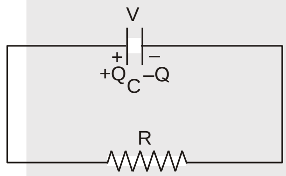
(v) किसी क्षण t पर संधारित्र की प्लेटों पर विभवान्तर $V = V_0e^{-(t/RC)}$ वोल्ट।

(vi) किसी क्षण क्षणिक धारा $I = -I_0e^{-(t/RC)}$ ऐम्पियर होती है।

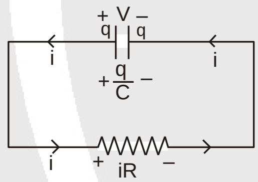
अर्थात् परिपथ में धारा चरघातांकीय रूप से कम होती है, लेकिन इसकी दिशा आवेशन धारा के विपरीत होती है।

–Ve का अर्थ केवल इतना है कि धारा की दिशा आवेशन धारा के विपरित है।

निरावेशन परिपथ के समीकरण का निगमन :



प्रारम्भिक



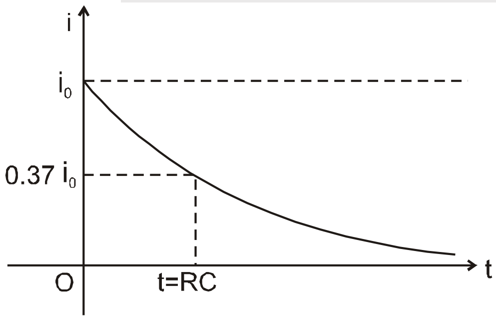
किसी क्षण t पर

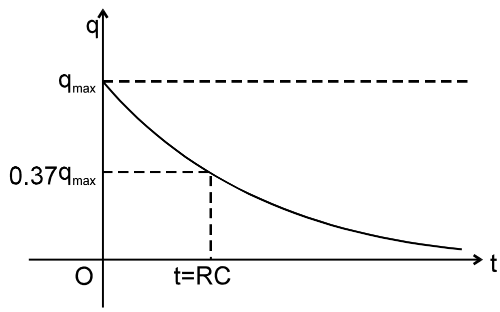
K.V.L. के नियम से

$$+\frac{q}{C} - iR = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{q}{CR}$$

$$\int_Q^q \frac{-dq}{q} = \int_0^t \frac{dt}{CR} \quad \Rightarrow \quad -\ell n\frac{q}{Q} = +\frac{t}{RC}$$

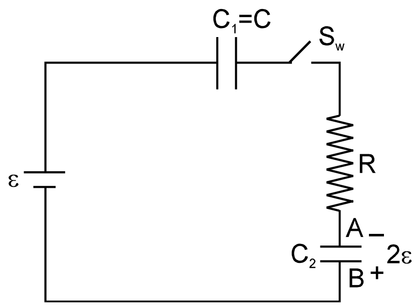
$$q = Q\,.\,e^{-t/RC} \quad \Rightarrow \quad i = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC}e^{-t/RC} = i_0\,e^{-t/RC}$$





Solved Example

Example 1. t = 0 पर स्विच S_w चालू है। यदि प्रारम्भ में C_1 अनावेशित तथा C_2 विभवान्तर 2ε तक आवेशित है तो (दिया है $C_1 = C_2 = C$)

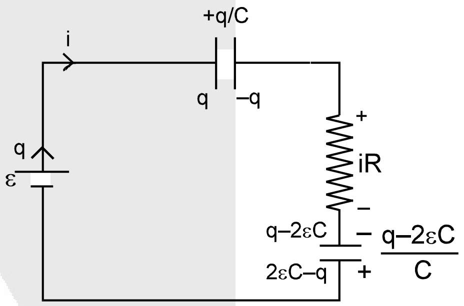


(a) C_1 तथा C_2 पर आवेश को समय के फलन रूप में ज्ञात करो।

(b) परिपथ में धारा को समय के फलन रूप में ज्ञात करो।

(c) भाग (a) में प्राप्त सम्बन्धों के लिए ग्राफ बनाओ।

Solution : माना बैटरी से 't' समय में q आवेश प्रवाहित होता है। चित्र में संधारित्र की विभिन्न प्लेटों पर आवेश प्रदर्शित है।



KVL के नियम से

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - iR - \frac{q-2\varepsilon C}{C} = 0$$

$$\varepsilon - \frac{q}{C} - \frac{q}{C} + 2\varepsilon - iR = 0$$

$$3\varepsilon = \frac{2q}{C} + iR \quad \Rightarrow \quad 3\varepsilon - iR = \frac{2q}{C}$$

$$3\epsilon - iRC = 2q \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} RC = 3\varepsilon C - 2q$$

$$\int_0^q \frac{dq}{3\varepsilon C - 2q} = \int_0^t \frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ell n\left(\frac{(3\varepsilon C - 2q)}{3C\varepsilon}\right) = \frac{t}{RC}$$

$$\ell n\left(\frac{3\varepsilon C - 2q}{3\varepsilon C}\right) = -\frac{2t}{RC} \quad \Rightarrow \quad 3\varepsilon C - 2q = 3\varepsilon C\ e^{-2t/RC} \quad \Rightarrow \quad 3\varepsilon C(1 - e^{-2t/RC}) = 2q$$

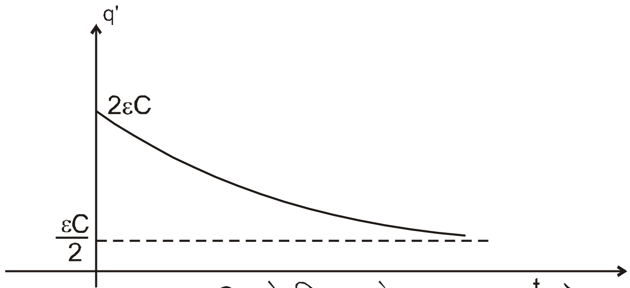
$$q = \frac{3}{2}\varepsilon C\ (1 - e^{-2t/RC})$$ **Ans.**

(C_1 का आवेश समय का फलन है)

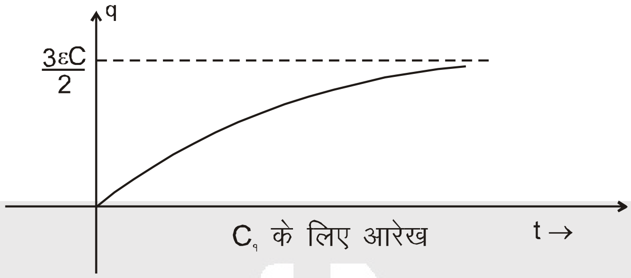
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{3\varepsilon}{R}\ e^{-2t/RC}$$ **Ans.**

(C_2 का आवेश समय का फलन रूप में है)

प्लेट B पर



C_2 के लिए आरेख

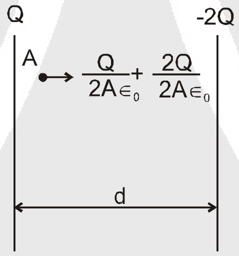


C_1 के लिए आरेख

$$q' = 2\varepsilon C - q = 2\varepsilon C - \frac{3}{2}\varepsilon C + \frac{3}{2}\varepsilon C\, e^{-2t/RC} = \frac{\varepsilon C}{2} + \frac{3}{2}\,\varepsilon C e^{-2t/RC} = \frac{\varepsilon C}{2}\left[1+3e^{-2t/RC}\right] \quad \textbf{Ans.}$$

Example 2. एक संधारित्र की धारिता C है तथा इसकी दो समान्तर चालक प्लेटों के मध्य की दूरी d है। इन पर Q तथा –2Q आवेश है तो दोनों प्लेटों के मध्य विभवान्तर ज्ञात करो।

Solution :



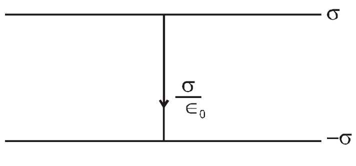
धारिता = C

विद्युत क्षेत्र $= \dfrac{3Q}{2A\epsilon_0}$

$V = \dfrac{3Qd}{2A\epsilon_0} \Rightarrow V = \dfrac{3Q}{2C}$

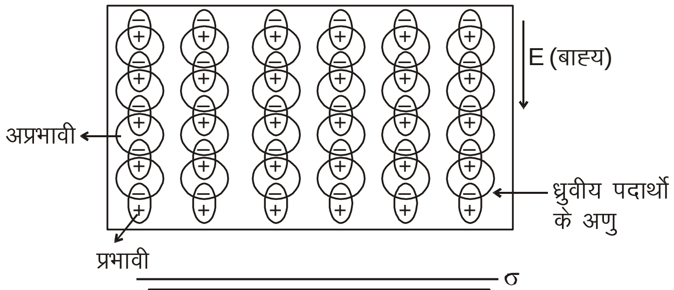
11. संधारित्र में परावैद्युत पदार्थ

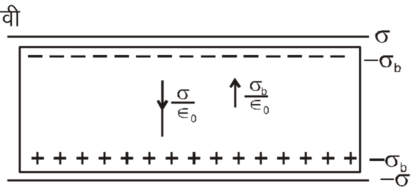
(i) परावैद्युत पदार्थ की अनुपस्थिति में



$E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$

(ii) जब प्लेटों के मध्य परावैद्युत पदार्थ भरा जाता है तो इसके अणुओं का द्विध्रुव आघूर्ण स्वंय को विद्युत क्षेत्र की दिशा में संरेखीय कर लेता है।





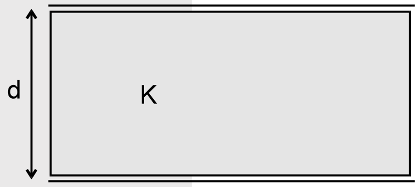
σ_b = प्रेरित आवेश घनत्व (इन्हें बंधित आवेश कहते है क्योंकि यह मुक्त इलेक्ट्रॉनों के कारण नहीं होते)

* ध्रुवीय अणुओं का द्विध्रुव आघूर्ण $\neq 0$

* अध्रुवीय अणुओं का द्विध्रुव आघूर्ण $= 0$

(iii) परावैद्युतांक की उपस्थिति में धारिता

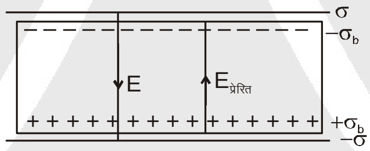
$$C = \frac{\sigma A}{V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{K\epsilon_0}.d} = \frac{AK\epsilon_0}{d} = \frac{AK\epsilon_0}{d}$$



धारिता K गुणांक से बढ़ जाती है

$$C = \frac{AK\epsilon_0}{d}$$

(iv) पदार्थो का ध्रुवीकरण : जब अध्रुवीय पदार्थ को विद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तो इसके अणुओं में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण उत्पन्न हो जाता है। इस प्रकार से द्विध्रुव आघूर्ण के प्रेरण को पदार्थ का ध्रुवण कहते हैं। ये प्रेरित आवेश भी विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करते है।



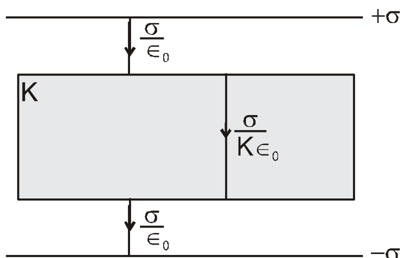
σ_b = प्रेरित (बंधित) आवेश घनत्व $E_{in} = E - E_{ind} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_b}{\epsilon_0}$

संधारित्र की प्लेटों के मध्य परावैद्युत पदार्थ की अनुपस्थिति में विद्युत क्षेत्र तथा परावैद्युत पदार्थ की उपस्थिति में विद्युत क्षेत्र का अनुपात किसी परावैद्युत पदार्थ के लिए नियत होता है। यह अनुपात उस पदार्थ का परावैद्युत नियतांक (परावैद्युतांक) कहलाता है। यह ϵ_r या K से प्रदर्शित किया जाता है।

$$E_{in} = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} \Rightarrow \sigma_b = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

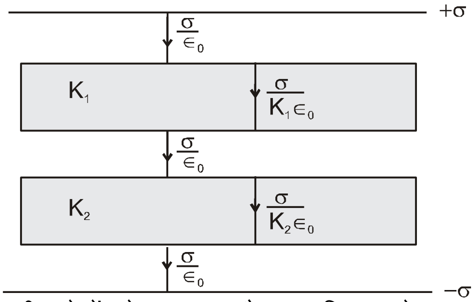
(v) यदि प्लेटों के मध्य माध्यम पूर्णतया भरा हुआ नहीं हो तो विद्युत क्षेत्र निम्न चित्रानुसार होगा।

Step-1.

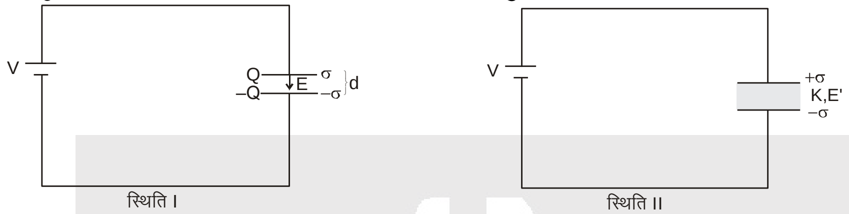


बंधित प्रेरित आवेश द्वारा परावैद्युत पट्टिका के बाहर उत्पन्न कुल विद्युत क्षेत्र शून्य होता है क्योंकि यह एक दूसरे को निरस्त कर देते है।

Step-2.



(vi) समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य परावैद्युत पट्टिका प्रवेश कराने से पूर्व तथा पश्चात् E (विद्युत क्षेत्र), σ (पृष्ठ आवेश घनत्व), Q (आवेश), C (धारिता) में तुलना।



$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$	$C' = \frac{A \epsilon_0 K}{d}$
$Q = CV$	$Q' = C'V$
$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{CV}{A\epsilon_0}$	$E' = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} = \frac{CV}{A\epsilon_0}$
$E = \frac{V}{d}$	$E' = \frac{V}{d}$
प्लेटों के मध्य विभवान्तर	प्लेटों के मध्य विभवान्तर
$Ed = V$	$E'd = V$
$E = \frac{V}{d}$	$E' = \frac{V}{d}$
$\frac{V}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$\frac{V}{d} = \frac{\sigma'}{K\epsilon_0}$

दोनों को बराबर करने पर

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma'}{K\epsilon_0}$$

$\sigma' = K\sigma$

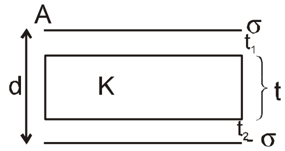
परावैद्युत पदार्थ की उपस्थिति में अर्थात् स्थिति–II में संधारित्र की धारिता में वृद्धि हो जाती है।

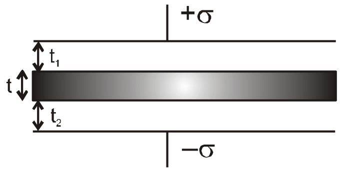
(vii) परावैद्युत पदार्थ में ऊर्जा घनत्व = $\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r E^2$

Solved Example

Example 1. एक परावैद्युत पट्टिका जिसकी मोटाई t तथा क्षेत्रफल A है इसे एक संधारित्र की प्लेटों के मध्य रखा जाता है, संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल A तथा इनके बीच की दूरी d है, यदि (d > t) हो तो निकाय की धारिता क्या होगी? क्या निकाय की धारिता परावैद्युत पट्टिका की स्थिति पर निर्भर करेगी ?

Solution :





$$C = \frac{Q}{v} = \frac{\sigma A}{v}$$

$$V = \frac{\sigma t_1}{\epsilon_0} + \frac{\sigma t}{K\epsilon_0} + \frac{\sigma t_2}{\epsilon_0} \qquad (\because t_1 + t_2 = d - t)$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left[t_1 + t_2 + \frac{t}{k}\right] \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left[d - t + \frac{t}{k}\right] = \frac{Q}{C} = \frac{\sigma A}{C}$$

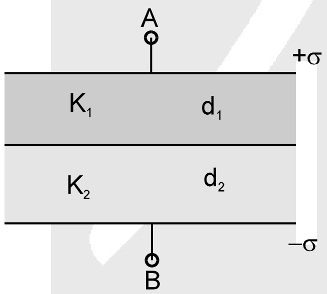
$$\Rightarrow \; C = \frac{\epsilon_0 A}{d - t + t/K}$$

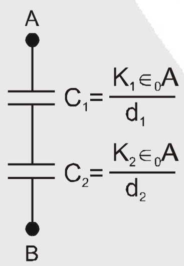
Note :

(i) धारिता परावैद्युत पट्टिका की स्थिति पर निर्भर नहीं करती (इसको ऊपर नीचे कहीं भी स्थानान्तरित करने पर धारिता परिवर्तित नहीं होती)

(ii) यदि पट्टिका धातु की हो तो $C = \frac{A\,\epsilon_0}{d - t}$ (धातु के लिए $k \rightarrow \infty$)

Example 2. चित्रानुसार एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल A है। संधारित्र में दो परावैद्युत पट्टिकाएं रखी है। जिनके परावैद्युतांक K_1 तथा K_2 तथा मोटाई क्रमशः d_1 तथा d_2 तथा प्रत्येक का क्षेत्रफल A है। तो A तथा B के मध्य धारिता ज्ञात करो।





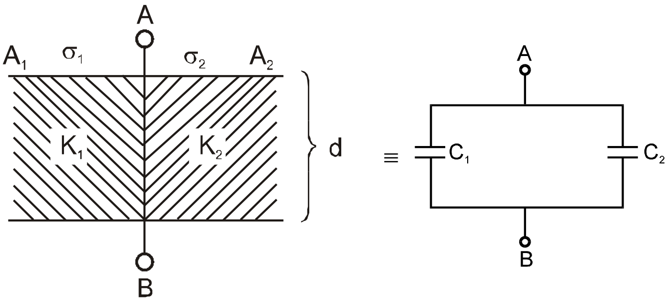
Solution : $C = \frac{\sigma A}{V}$; $V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{\sigma d_1}{K_1 \epsilon_0} + \frac{\sigma d_2}{K_2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}\right)$

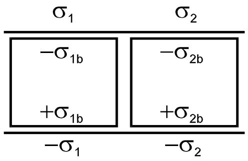
$$\therefore \; C = \frac{A\,\epsilon_0}{\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{C} = \frac{d_1}{AK_1\,\epsilon_0} + \frac{d_2}{AK_2\,\epsilon_0}$$

इस सूत्र के अनुसार A तथा B के मध्य का निकाय दो संधारित्रों का श्रेणी संयोजन माना जा सकता है।

Example 3. चित्रानुसार एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों का क्षेत्रफल A है। संधारित्र में दो समान मोटाई 'd' की परावैद्युत पट्टिकाऐं प्रवेश करायी जाती हैं प्रत्येक पट्टिका का परावैद्युतांक K_1 व K_2 तथा क्षैत्रफल क्रमशः A_1 व A_2 है। तो A तथा B के मध्य धारिता ज्ञात करो। $(A_1 + A_2 = A)$

Solution :



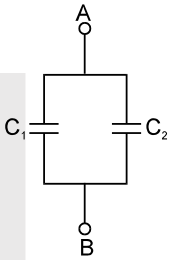


$C_1 = \frac{A_1K_1 \in_0}{d}$, $C_2 = \frac{A_2K_2 \in_0}{d}$

$E_1 = \frac{V}{d} = \frac{\sigma_1}{K_1 \in_0}$, $E_2 = \frac{V}{d} = \frac{\sigma_2}{K_2 \in_0}$

$\sigma_1 = \frac{K_1 \in_0 V}{d}$ $\quad \sigma_2 = \frac{K_2 \in_0 V}{d}$

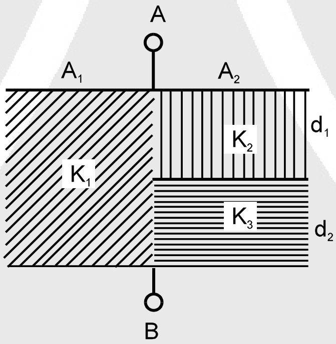
$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2}{V} = \frac{K_1 \in_0 A_1}{d} + \frac{K_2 \in_0 A_2}{d}$



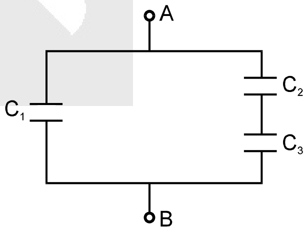
उपरोक्त संयोजन का तुल्य परिपथ :

$\therefore \quad C = C_1 + C_2$

Example 4. चित्रानुसार एक समान्तर प्लेट संधारित्र का क्षेत्रफल A है तथा इसकी प्लेटों के मध्य तीन परावैद्युत पट्टिकाएं जिनके परावैद्युतांक K_1 का क्षेत्रफल A_1 व मोटाई d, K_2 का क्षेत्रफल A_2 व मोटाई d_1 है। और K_3 का क्षेत्रफल A_2 व मोटाई d_2 है तो A तथा B के मध्य धारिता ज्ञात करो। (दिया है दोनों प्लेटों के मध्य की दूरी $d = d_1 + d_2$ है।)



Solution : यह निम्न परिपथ के तुल्य है



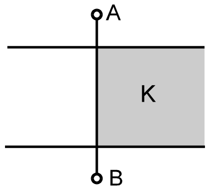
$C = C_1 + \frac{C_2C_3}{C_2 + C_3}$

$C = \frac{A_1K_2 \in_0}{d_1 + d_2} + \frac{\frac{A_2K_2 \in_0}{d_1} \cdot \frac{A_2K_3 \in_0}{d_1}}{\frac{A_2K_2 \in_0}{d_1} + \frac{A_2K_3 \in_0}{d_2}}$

$= \frac{A_1K_1 \in_0}{d_1 + d_2} + \frac{A_2^2K_2K_3 \in_0}{A_2K_2 \in_0 d_2 + A_2K_3 \in_0 d_1}$

$= \frac{A_1K_2 \in_0}{d_1 + d_2} + \frac{A_2^2K_2K_3 \in_0}{K_2d_2 + K_3d_1}$

Example 5. चित्रानुसार एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य K परावैद्युतांक की पट्टिका संधारित्र के आधे भाग में रखी है। यदि वायु संधारित्र की धारिता C है तो A तथा B के मध्य नयी धारिता होगी –



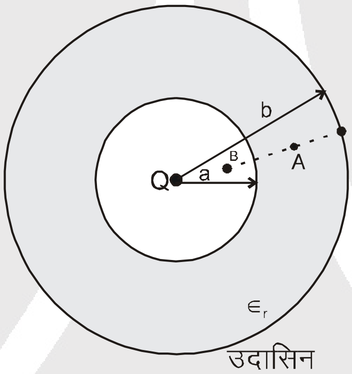
(A) $\frac{C}{2}$ (B) $\frac{C}{2K}$ (C) $\frac{C}{2}$ [1 + K] (D) $\frac{2[1+K]}{C}$

Solution : यह निकाय दो संधारित्रों के समान्तर संयोजन के तुल्य है, इसकी प्रत्येक संधारित्र की प्लेट का क्षेत्रफल $\frac{A}{2}$ है।

$$C' = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 A/2}{d} + \frac{\epsilon_0 (A/2)K}{d} = \frac{\epsilon_0 A}{2d}[1 + K] = \frac{C}{2}[1 + K]$$

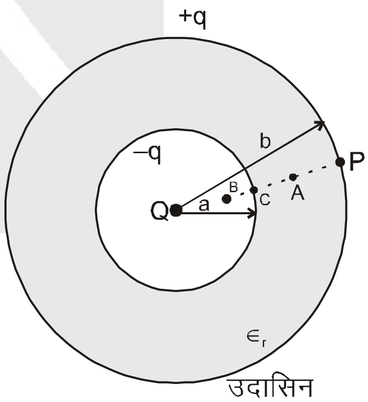
अतः उत्तर (C) सही।

Example 6. निम्न बिन्दुओं पर V तथा E ज्ञात करो। (Q बिन्दु आवेश है जो उदासीन अचालक मोटे (thick) गोले के केन्द्र पर रखा है इसकी आन्तरिक तथा बाह्य त्रिज्यायें क्रमशः 'a' तथा 'b' है।) (परावैधुतांक = ϵ_r)



(i) $0 < r < a$ (ii) $a \le r < b$ (iii) $r \ge b$

–q तथा +q आवेश क्रमशः आन्तरिक तथा बाह्य सतह पर प्रेरित होंगे।



$$E(0 < r < a) = \frac{KQ}{r^2}$$

$$E(r \ge b) = \frac{KQ}{r^2}$$

$$E(a \le r < b) = \frac{KQ}{r^2} - \frac{Kq}{r^2} = \frac{KQ}{\epsilon_r r^2}$$

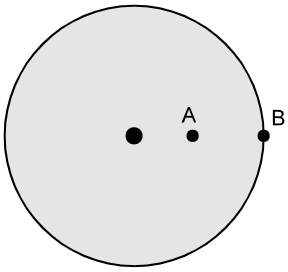
$$q = Q \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \Rightarrow \quad V(r \ge b) = \frac{KQ}{r}$$

$$(a \le r \le b)\ V_A = V_P + \int_b^r \frac{KQ}{\epsilon_r r^2}(-dr) = \frac{kQ}{b} + \frac{kQ}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

$$V(r \le a)\ V_B = V_C + \int_a^r \frac{KQ}{r^2}(-dr)$$

$$= \frac{kQ}{b} + \frac{kQ}{\epsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + kQ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Example 7. एक परावैद्युत पदार्थ के समरूप गोले में r (<R) दूरी पर विभव क्या होगा। गोले का आवेश घनत्व ρ, त्रिज्या R तथा परावैद्युतांक $\in_r$ है।



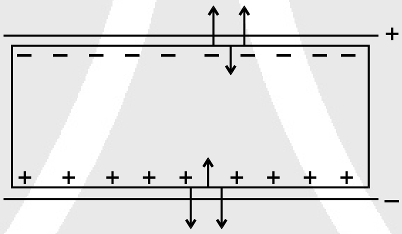
Solution : $V_A = V_B + \dfrac{W_{B\to A}}{q}$

$$V = \frac{Q}{4\pi \in_0 R} + \int_R^r \frac{\rho r}{3 \in_0 \in_r}(-dr) = \frac{Q}{4\pi \in_0 R} + \frac{\rho(R^2 - r^2)}{3 \in_0 \in_r}$$

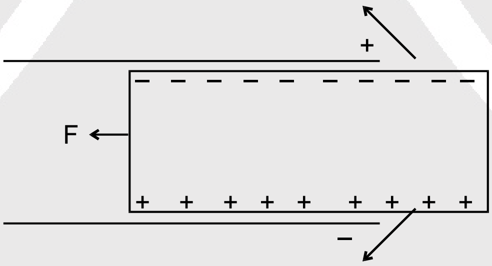
$$V_{\text{बाहर}} = \frac{KQ}{r}$$

(viii) आवेशित संधारित्र के कारण परावैद्युत पदार्थ पर बल

(a) यदि परावैद्युत पदार्थ पूर्णतः संधारित्र के अन्दर हो तो बल शून्य होता है।



(b) यदि परावैद्युत पूर्णतः संधारित्र के अन्दर नही है।



Step-1. यदि बैटरी जुड़ी रहे।

V = नियत

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

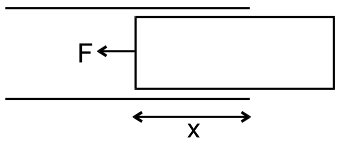
$$F = \left(\frac{dU}{dx}\right) = \frac{V^2}{2}\frac{dC}{dx}$$

जहां $C = \dfrac{xb \in_0 K}{d} + \dfrac{\in_0 (\ell - x)b}{d} \Rightarrow C = \dfrac{\in_0 b}{d}[Kx + \ell - x]$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\in_0 b}{d}(K-1)$$

$\therefore \quad F = \dfrac{\in_0 b(K-1)V^2}{2d}$ = नियत (x पर निर्भर नहीं करता)

Step-2. जब संधारित्र पर आवेश नियत हो



$$C = \frac{xb \in_0 K}{d} + \frac{\in_0 (\ell - x)b}{d}, \qquad U = \frac{Q^2}{2C}$$

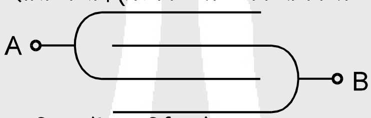
$$F = \left(\frac{dU}{dx}\right) = \frac{Q^2}{2C^2} \cdot \frac{dC}{dx} \qquad \left[\text{जहाँ, } \frac{dC}{dx} = \frac{\in_0 b}{d}(K-1)\right]$$

$$= \frac{Q^2}{2C^2} \cdot \frac{dC}{dx}$$ (यहाँ बल F, x पर निर्भर करता है।)

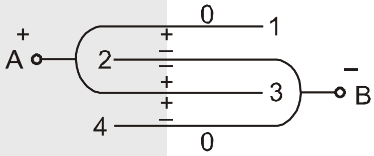
12. समान्तर प्लेटों का संयोजन

Solved Example

Example 1. A तथा B के मध्य तुल्य धारिता ज्ञात करो। (प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल = A और दो संयुग्मी प्लेटों के मध्य दूरी d है।)



Solution : प्लेटों पर अंक लिखिए। आवेश चित्र में प्रदर्शित है।

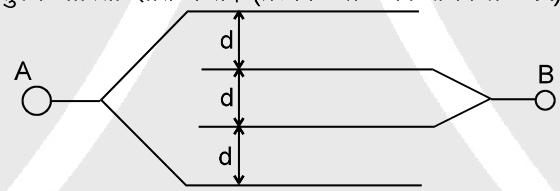


$V_{12} = V_{32} = V_{34}$

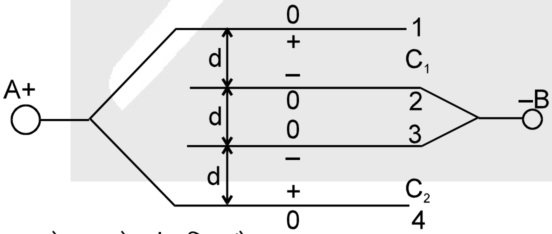
अतः सभी संधारित्र समान्तर क्रम में है।

$$C_{\text{तुल्य}} = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{3A \in_0}{A}$$

Example 2. A तथा B के मध्य तुल्य धारिता ज्ञात करो। (प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल = A)



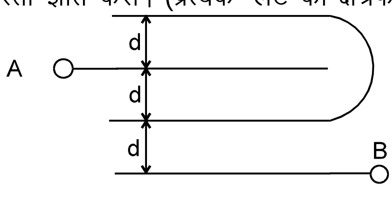
Solution :



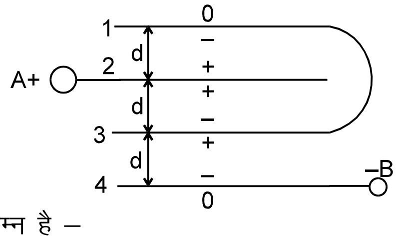
यह केवल दो संधारित्र है।

$$C_{\text{तुल्य}} = C_1 + C_2 = \frac{2A \in_0}{d}$$

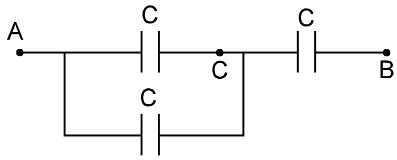
Example 3. A तथा B के मध्य तुल्य धारिता ज्ञात करो। (प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल = A)



Solution :

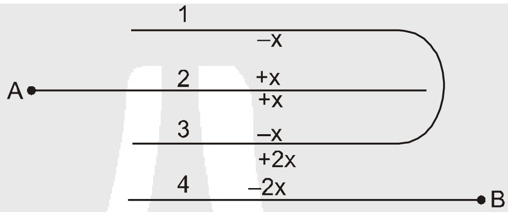


इसका संशोधित परिपथ निम्न है –



$C_{eq} = \frac{2C}{3} = \frac{2A\epsilon_0}{3d}$

अन्य विधि : माना आवेश धनत्व दर्शाये अनुसार है।

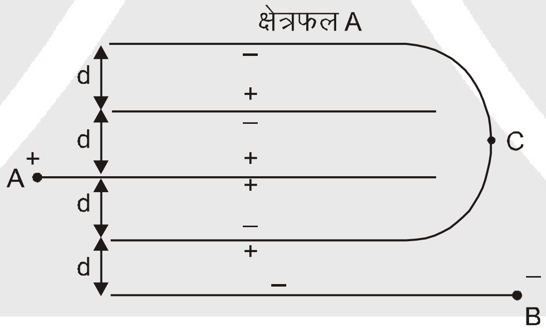


$C_{eq} = \frac{Q}{V} = \frac{2xA}{V}$

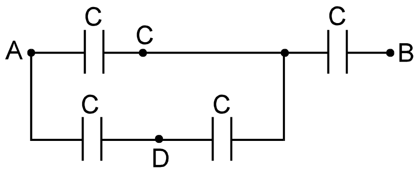
$V = V_2 - V_4 = (V_2 - V_3) + (V_3 - V_4) = \frac{xd}{\epsilon_0} + \frac{2xd}{\epsilon_0} = \frac{3xd}{\epsilon_0}$

$\therefore \quad C_{\text{तुल्य}} = \frac{2Ax\epsilon_0}{3xd} = \frac{2A\epsilon_0}{3d} = \frac{2C}{3}.$

Example 4. A तथा B के मध्य तुल्य धारिता ज्ञात करो।



Solution :



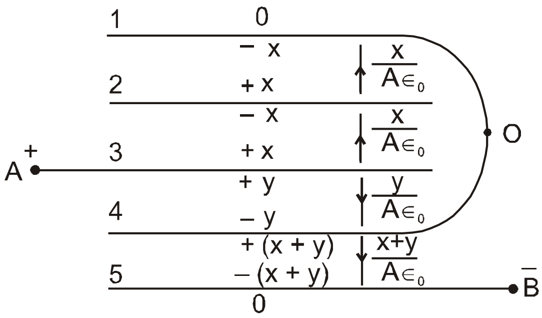
माना $C = \frac{A\epsilon_0}{d}$ तुल्य परिपथ

$\frac{1}{C_{\text{तुल्य}}} = \frac{1}{C} + \frac{2}{3C} = \frac{5}{3C}$

$C_{\text{तुल्य}} = \frac{3C}{5} = \frac{3A\epsilon_0}{5d}$

वैकल्पिक विधि : (माना प्लेट पर आवेश वितरण दर्शाये अनुसार है।**)**

$C = \frac{Q}{V} = \frac{x+y}{V_{AB}}$



1 तथा 4 पर विभव समान है।

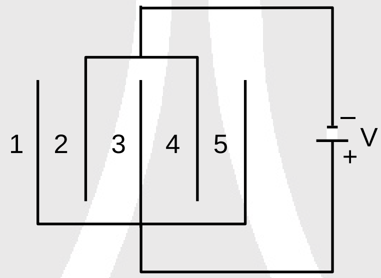
$\frac{y}{A \in_0} = \frac{2x}{A \in_0}$

$y = 2x$

$V = \left(\frac{2y+x}{A\varepsilon_0}\right)d$

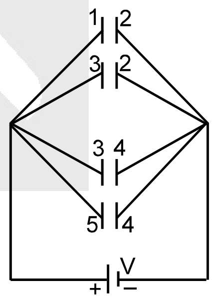
$C = \frac{(x+2x)A \in_0}{(5x)d} = \frac{3A \in_0}{5d}$.

Example 5. पांच समान संधारित्र प्लेटें, प्रत्येक का क्षेत्रफल A तथा सभी समान दूरी d पर रखी है। चित्रानुसार ये V वि०वा०बल वाले स्रोत से जुड़ी है तो प्लेट 1 तथा 4 पर आवेश होगा –



(A) $\frac{\in_0 A}{d}, \frac{-2 \in_0 A}{d}$
(B) $\frac{\in_0 AV}{d}, \frac{-2 \in_0 AV}{d}$
(C) $\frac{- \in_0 AV}{d}, \frac{-3 \in_0 AV}{d}$
(D) $\frac{\in_0 AV}{d}, \frac{-4 \in_0 AV}{d}$

Solution : तुल्य परिपथ



प्रथम प्लेट पर आवेश

$Q = CV \Rightarrow Q = \frac{\in_0 AV}{d}$

चतुर्थ प्लेट पर आवेश

$Q' = C(-V) \Rightarrow Q' = \frac{- \in_0 AV}{d}$

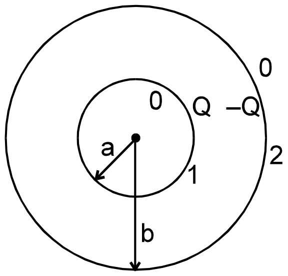
चूंकि प्लेट 4 की दो बार पुनरावृत्ति हो रही है। अतः प्लेट 4 पर $Q'' = 2Q'$ आवेश होगा।

$Q'' = -\frac{2 \in_0 AV}{d}$

अतः सही उत्तर (B) होगा।

13. अन्य प्रकार के संधारित्र

गोलीय संधारित्र : इस व्यवस्था को गोलीय संधारित्र कहते है।



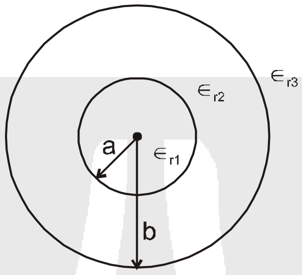
$$V_1 - V_2 = \left[\frac{KQ}{a} - \frac{KQ}{b}\right] - \left[\frac{KQ}{b} - \frac{KQ}{b}\right] = \frac{KQ}{a} - \frac{KQ}{b}$$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\frac{KQ}{a} - \frac{KQ}{b}} = \frac{ab}{K(b-a)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

यदि b >> a तब

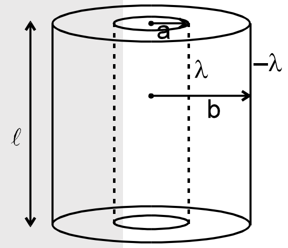
$C = 4\pi\epsilon_0 a$ (विलगित गोले की तरह का संधारित्र) यदि परावैघुतांक दर्शाये अनुसार भरा हुआ है तब



$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r_2} ab}{b-a}$$

बेलनाकार संधारित्र

इसमें दो बेलनाकार समाक्षीय सतहें होती है।



$\ell >> a$

$\ell >> b$

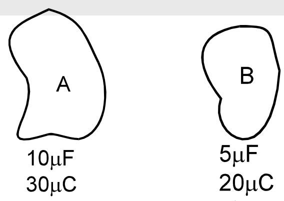
जहां a तथा b बेलन की त्रिज्यायें है।

$$C = \frac{\lambda}{V} = \frac{\lambda}{2K\lambda \ell n\frac{b}{a}} = \frac{4\pi\epsilon_0}{2\ell n\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ell n\frac{b}{a}}$$

एकांक लम्बाई की धारिता = $\frac{2\pi\epsilon_0}{\ell n\frac{b}{a}}$ F/m

SOLVED MISCELLANEOUS PROBLEMS

Problem 1. जब दो विलगित चालकों A तथा B को जोड़ा जाता है तो धन आवेश



(A) A से B होगा (B) B से A होगा

(C) प्रवाहित नहीं किया जा सकता। (D) कुछ नहीं कहा जा सकता

Solution : आवेश सदैव उच्च विभव से निम्न विभव की ओर प्रवाहित होता है।

अतः, $V_A = \frac{30}{10} = 3V \Rightarrow V_B = \frac{20}{5} = 4$ V

$V_B > V_A$ ∴ (B) सही है।

Problem 2. एक 10μF धारिता के चालक को अन्य 40 μF धारिता के चालक से जोड़ा जाता है। दोनों चालकों का प्रारम्भिक आवेश 100 μC है। दोनों चालकों का अन्तिम आवेश तथा इस प्रक्रिया के दौरान ऊष्मा हानि ज्ञात करो?

Answer : (i) V = 4V (ii) H = 225 μJ.

Solution :

$C_1 = 10\mu F$ $\quad$ $C_2 = 40\mu F$

$Q_1 = 100\ \mu C$ $\quad$ $Q_2 = 100\mu C$

$V_1 = Q_1/C_1 = 10\ V$ $\quad$ $V_2 = Q_2/C_2 = 2.5$

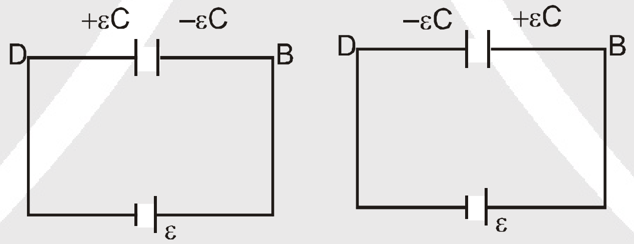
अंतिम विभव (V) = $\frac{C_1V_1 + C_2V_2}{(C_1 + C_2)} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{200\ \ \mu C}{50\ \ \mu F} = 4V$

प्रक्रिया में ऊष्मा हानि = $\frac{1}{2}\left[C_1V_1^2 + C_2V_2^2\right] - \frac{1}{2}V^2(C_1 + C_2)$

$= \frac{1}{2}\left[Q_1V_1 + Q_2V_2\right] - \frac{1}{2}\ V^2(C_1 + C_2)$

$= \frac{1}{2}\times 100\ \ \mu\ \ [12.5] - \frac{1}{2}\times 16\ (50)\ \mu = 225\ \mu J$

Problem 3. संधारित्र C को विद्युत वाहक बल ε की बैटरी से आवेशित करते है और हटा देते है। अब यदि बैटरी का धनात्मक सिरा संधारित्र की ऋणात्मक प्लेट से जोड़ दिया जाये तो आवेशन के दौरान ऊष्मा में हुई हानि की गणना करो।



बैटरी से प्रवाह परिणामी आवेश = $2\varepsilon C$

बैटरी द्वारा किया गया कार्य = $\varepsilon \times 2\varepsilon C = 2\varepsilon^2 C$

उत्पन्न ऊष्मा की मात्रा = $2\varepsilon^2$ C. **Ans.**

Solution: चित्र से बैटरी द्वारा प्रवाहित कुल आवेश = $Q_{\text{अन्तिम}} - Q_{\text{प्रारम्भिक}} = \varepsilon C - (-\varepsilon C) = 2\varepsilon C$

$\therefore$ बैटरी द्वारा किया गया कार्य (W) = $Q \times V = 2\varepsilon C \times \varepsilon = 2\varepsilon^2 C$

या ऊष्मा हानि = $2\varepsilon^2 C$