गुरूत्वाकर्षण (GRAVITATION)

1. प्रस्तावना

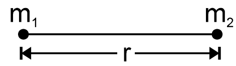
नक्षत्रीय पिण्डो जैसे सूर्य, चन्द्रमा, पृथ्वी तथा ग्रहों की गति की जानकारी का विषय समय की शुरूआत से अत्यन्त आकर्षक रहा है। भारतीय खगोलीय शास्त्रीयों ने पूर्व समयों में अत्यन्त ही प्रभावशाली कार्य किया है। जिनमें प्रमुख आर्यभट्ट है जिन्होंने सबसे पहले यह बताया कि पृथ्वी स्वयं की अक्ष के परितः घूर्णन करती है।

एक शताब्दी पश्चात् डेनिश खगोलशास्त्री टैकीब्रेह (Tycho Brahe) (1546-1601) ने ग्रहों की गति के बारे में विस्तृत अध्ययन किया, जिसका उनके शिष्य जॉनेशी केप्लर (Johannes Kepler) (1571-1630) ने विवरण दिया। कैप्लर ने अपनी खोज को ग्रहों की गति के तीन नियमों में समीकरणबद्ध किया।

2. गुरूत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियम

इस नियम के अनुसार प्रत्येक कण दूसरे सभी कणों को आकर्षित करता है। इनके मध्य आकर्षण बल इन कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती तथा इनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है।

$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$ या $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

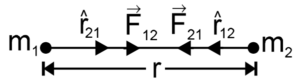


जहाँ $G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$ है इसको गुरूत्वाकर्षण सार्वत्रिक नियतांक कहते है। इसका मान वस्तुओं की प्रकृति (आकार, आकृति, द्रव्यमान इत्यादि) पर निर्भर नहीं करता और सभी जगह किसी भी समय पर समान रहता है। इसी कारण इसको गुरूत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियतांक कहते है।

G का विमीय सूत्र : $G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2} = \frac{[MLT^{-2}][L^2]}{[M^2]} = [M^{-1}\ L^3\ T^{-2}]$

सदिश रूप में न्यूटन का गुरूत्वाकर्षण नियम :

$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$ & $\vec{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{21}$



यहाँ $\vec{F}_{12}$, m_2 द्रव्यमान द्वारा m_1 पर लगाया गया बल है

$\hat{r}_{12}$: m_1 का m_2 के सापेक्ष स्थिति सदिश

तथा इसके विपरीत $\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$

अतः $\vec{F}_{21} = \frac{-Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$ की उपरोक्त सूत्र से तुलना करने पर $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

गुरूत्वाकर्षण बल के मुख्य गुणधर्म :

(i) दो वस्तुओं के बीच गुरूत्वाकर्षण बल क्रिया प्रतिक्रिया युग्म के रूप में पाया जाता है अर्थात् बल,परिमाण में बराबर परन्तु दिशा में विपरीत होता है।

(ii) गुरूत्वाकर्षण बल केन्द्रीय बल होते है अर्थात् इनकी क्रिया रेखा दोनों वस्तुओं को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु (केन्द्रक) की तरफ होती है।

(iii) दो वस्तुओं के मध्य कार्यरत गुरूत्वाकर्षण बल उनके बीच उपस्थित माध्यम की प्रकृत्ति पर निर्भर नहीं करता है।

(iv) दो वस्तुओं के बीच कार्यरत गुरूत्वाकर्षण बल तीसरी वस्तु की उपस्थिति पर निर्भर नहीं करता।

(v) हल्की वस्तुओं की स्थिति में गुरूत्वाकर्षण बल नगण्य होता है। परन्तु भारी वस्तुओं जैसे : तारों और ग्रहों के बीच में यह बल प्रभावी होता है।

(vi) गुरूत्वाकर्षण बल लम्बी दूरी के बल हैं अर्थात् दो वस्तुओं के बीच गुरूत्वाकर्षण बल तब कार्य करता है। जब उनके बीच की दूरी बहुत अधिक हो। उदाहरणतया सूर्य तथा पृथ्वी के बीच गुरूत्वाकर्षण बल 10^{27} N के परिमाण का होता है, जबकि इनके बीच दूरी 1.5×10^8 km है।

{Solved Example}

Example 1. दो समरूप गोलों के केन्द्र एक दूसरे से 1.0 मीटर दूरी पर है। यदि दोनों के बीच गुरूत्वाकर्षण बल एक न्यूटन हो तो प्रत्येक गोले का द्रव्यमान ज्ञात करो। ($G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ sec^{-2}$)

Solution : गुरूत्वाकर्षण बल $F = \dfrac{Gm.m}{r^2}$

$F = 1.0\ N$, $r = 1.0\ m$ और $G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ sec^{-1}$

मान रखने पर $m = 1.224 \times 10^5\ kg$

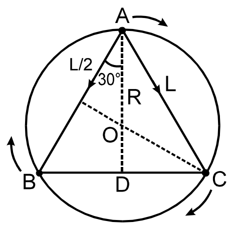
Example 2. तीन समान वस्तुऐं जिनका द्रव्यमान M है, L भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के कोनों पर स्थित है। ये सभी किस चाल से गति करेंगी यदि ये सभी एक–दूसरे के अन्योन्य प्रभाव में वृत्ताकार पथ में समबाहु त्रिभुज के कोनों को बनाये रखते हुए गति करते है ?

Solution : माना A, B और C तीनों द्रव्यमान गति करते हुए O केन्द्र का वृत्त बनाते है। इस वृत्त की त्रिज्या

$$R = \frac{L}{2}\sec 30^\circ = \frac{L}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{L}{\sqrt{3}}.$$

माना वृत्त के अनुदिश प्रत्येक द्रव्यमान M की चाल v है। A बिन्दु पर द्रव्यमान की गति को देखने पर इस पर B व C पर स्थित द्रव्यमानों के कारण गुरूत्वाकर्षण बल लगता है। अतः परिणामी बल

$\dfrac{GM^2}{L^2}$, AB की ओर और $\dfrac{GM^2}{L^2}$, AC की ओर



इस प्रकार परिणामी बल

$$2\frac{GM^2}{L^2}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}GM^2}{L^2}$$, AD की ओर

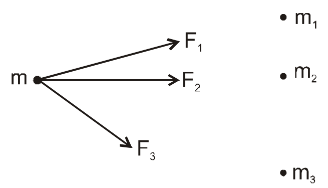
इस त्रिभुज को बनाये रखने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल

$$\frac{\sqrt{3}GM^2}{L^2} = \frac{Mv^2}{R} = \frac{\sqrt{3}Mv^2}{L}$$

$[\because R = L/\sqrt{3}]$ या $v = \sqrt{\dfrac{GM}{L}}$

अध्यारोपण का सिंद्धात

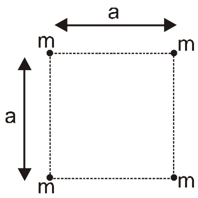
किसी कण पर अन्य किसी कण द्वारा लगाये गये बल पर उस स्थान पर स्थित अन्य सभी कणों द्वारा लगाये गये बलों का कोई प्रभाव नही पड़ता है। अतः उस कण पर परिणामी बल अन्य सभी कणों द्वारा अलग–अलग लगायें गये बलों के सदिश योग के तुल्य होता हैं। इसे अध्यारोपण का सिंद्धात कहते है।



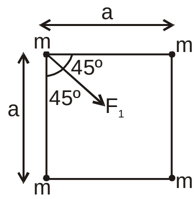
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...$$

{Solved Example}

Example 1. चित्रानुसार समान द्रव्यमान m के चार कण 'a' भुजा के वर्ग के कोनों पर रखे हुए है। प्रत्येक कण पर आरोपित बल के परिमाण की गणना करो।

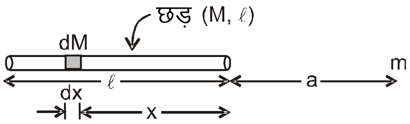


Solution :



F_r = प्रत्येक कण पर परिणामी बल = 2F cos 45º + F_1 $= \dfrac{2G.m^2}{a^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{Gm^2}{(\sqrt{2}a)^2} = \dfrac{G.m^2}{2a^2}\,(2\sqrt{2}+1)$

Example 2.



बिन्दु द्रव्यमान 'm' के कारण समरूप छड़ (द्रव्यमान 'M' तथा 'ℓ') पर गुरूत्वाकर्षण बल की गणना करो।

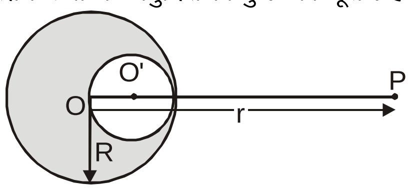
Solution : dF = अल्पांश पर क्षैतिज दिशा में बल $= \dfrac{G\cdot dM\cdot m}{(x+a)^2}$

जहाँ $dM = \dfrac{M}{\ell}dx.$

$\therefore\quad F = \int dF = \int_0^{\ell}\dfrac{G.Mmdx}{\ell(x+a)^2} = \dfrac{G.Mm}{\ell}\int_0^{\ell}\dfrac{dx}{(x+a)^2} = \dfrac{G.Mm}{\ell}\left[-\dfrac{1}{(\ell+a)}+\dfrac{1}{a}\right] = \dfrac{GMm}{(\ell+a)a}$

Example 3. धातु के ठोस गोले का द्रव्यमान M व त्रिज्या R है। इसमें चित्रानुसार एक खोखला गोलीय कोश बनाते हैं। इस गोलीय कोश की सतह ठोस गोले के केन्द्र से गुजरती हुई है तथा ठोस गोले की बाहरी सतह को स्पर्श करती है। तो बिन्दु P पर रखे m द्रव्यमान पर गुरूत्वाकर्षण बल ज्ञात करो। बिन्दु O से केन्द्रीय रेखा के अनुदिश बिन्दु P की दूरी r है।

Solution : माना ठोस गोले का केन्द्र O व खोखले गोले का केन्द्र O' है। बाह्य बिन्दु के लिए गोला बिन्दुवत द्रयमान को बताएगा क्योंकि सम्पूर्ण द्रव्यमान केन्द्र पर केन्द्रित मानते हैं। अतः बिन्दु P पर स्थित द्रव्यमान `m` पर वास्तविक गोले (द्रव्यमान M) के कारण गुरूत्वाकर्षण बल



$F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, PO की ओर

छोटे गोले का व्यास (जिसको हटाया गया है।) R है। अतः इसकी त्रिज्या OO' क्रमशः R/2 होगी। P बिन्दु पर रखे कण m पर गोले के द्रव्यमान M' (माना) द्वारा आरोपित बल

$F' = G\dfrac{M'\ m}{(r-\frac{R}{2})^2}$, O′P की ओर $\quad [\because$ दूरी $PO' = r - \dfrac{R}{2}]$

इस गोले की त्रिज्या वास्तविक गोले से आधी है। अतः

$M' = \dfrac{M}{8}.\qquad\qquad \therefore\qquad F' = G\dfrac{Mm}{8(r-\frac{R}{2})^2}$ O′P की ओर

F और F′ दोनों की दिशाएं विपरीत है। अतः खोखले गोले के कारण बल

$$F - F' = \dfrac{GMm}{r^2} - \dfrac{GMm}{8r^2(1-\frac{R}{2r})^2} = \dfrac{GMm}{r^2}\left\{1-\dfrac{1}{8(1-\frac{R}{2\,r})^2}\right\}.$$

3. गुरूत्वीय क्षेत्र

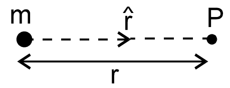
किसी वस्तु के चारों ओर वह स्थान जिसमें अन्य पिण्डों द्वारा गुरूत्वाकर्षण बल का अनुभव किया जा सके, उस वस्तु का गुरूत्वीय क्षेत्र कहलाता है। गुरूत्वीय क्षेत्र स्थिर विद्युतकीय में विद्युत क्षेत्र के समान है। जहाँ पर आवेश q को द्रव्यमान m से और विद्युत स्थिरांक K को गुरूत्वाकर्षण स्थिरांक G से प्रतिस्थापित किया गया है। किसी भी बिन्दु पर गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता उस बिन्दु पर उपस्थित एकांक द्रव्यमान पर आरोपित बल के द्वारा परिभाषित की जाती है।

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}$$

गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता का मात्रक न्यूटन/किग्रा. है

बिन्दुवत् द्रव्यमान के कारण गुरूत्वीय क्षेत्र

बिन्दु P पर स्थित परिक्षण द्रव्यमान m_0 पर m के कारण आरोपित बल



$$F = \frac{GMm_0}{r^2}$$

अतः $E = \frac{F}{m_0} \Rightarrow E = \frac{GM}{r^2}$

सदिश रूप में $\vec{E} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$

गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता का विमीय सूत्र = $\frac{F}{m} = \frac{[MLT^{-2}]}{[M]} = [M^0LT^{-2}]$

{Solved Example}

Example 1. पृथ्वी के केन्द्र से किसी बिन्दु की स्थिति ज्ञात करो, जहॉ पृथ्वी और चन्द्रमा के कारण परिणामी गुरूत्वीय क्षेत्र शून्य है। पृथ्वी का द्रव्यमान 6.0×10^{24} kg और चन्द्रमा का द्रव्यमान 7.4×10^{22} kg. है। पृथ्वी और चन्द्रमा के बीच की दूरी 4.0×10^5 km. है।

Solution : बिन्दु पृथ्वी और चन्द्रमा को जोडने वाली रेखा और उनके मध्य स्थित होना चाहिये। यदि पृथ्वी से इस बिन्दू की दूरी x km, चन्द्रमा से दूरी $(4.0 \times 10^5 - x)$ km है।

$$E_1 = \frac{GMe}{x^2} = \frac{G \times 6 \times 10^{24}\,kg}{x^2}$$

पृथ्वी के कारण गुरूत्वीय क्षेत्र का परिणाम $E_2 = \frac{GM_m}{(4.0 \times 10^5 - x)^2} = \frac{G \times 7.4 \times 10^{22}\,kg}{(4.0 \times 10^5 - x)^2}$

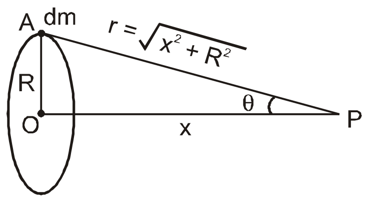
ये क्षेत्र विपरीत दिशा में है, परिणामी क्षेत्र शून्य होने के लिये $|E_1| = |E_2|$

या, $\frac{6 \times 10^{24}\,kg}{x^2} = \frac{7.4 \times 10^{22}\,kg}{(4.0 \times 10^5 - x)^2}$ या, $\frac{x}{4.0 \times 10^5 - x} = \sqrt{\frac{6 \times 10^{24}}{7.4 \times 10^{22}}} = 9$

या, $x = 3.6 \times 10^5$ km.

Example 2. M द्रव्यमान और R त्रिज्या की समान वलय के केन्द्र से अक्ष पर x दूरी पर गुरूत्वीय क्षेत्र की गणना करो?

Solution : dm.द्रव्यमान का कोई कण मानते है अतः dm के कारण बिन्दु P पर गुरूत्वीय क्षेत्र



$dE = \frac{Gdm}{r^2}$ PA के अनुदिश

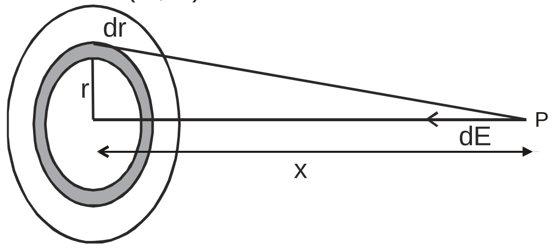
PO के अनुदिश घटक $dE \cos\theta = \frac{Gdm}{r^2} \cos\theta$

बिन्दु P पर कुल गुरूत्वीय क्षेत्र $E = \int \frac{Gdm}{r^2} \cos\theta = \frac{G\cos\theta}{r^2} \int dm$

$= \frac{GMx}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$ वलय के केन्द्र की और

Example 3. M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की समरूप के कारण केन्द्र से अक्ष पर x दूरी पर स्थित बिन्दु पर गुरूत्वीय क्षेत्र की गणना करो।

Solution :



$dE = \dfrac{GdMx}{(x^2+r^2)^{3/2}}$ (वलय के कारण गुरूत्वीय क्षेत्र)

$dM = \dfrac{M}{\pi R^2} \, . \, 2\pi r dr = \dfrac{2M}{R^2} rdr$

$\therefore \; dE = \dfrac{G.2Mxrdr}{R^2(x^2+r^2)^{3/2}}$ $\therefore \; E = \int_0^R \left(\dfrac{2GMx}{R^2}\right) \dfrac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$

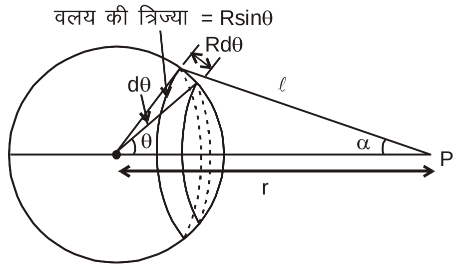
$\therefore \; E = \dfrac{2GMx}{R^2} \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]$

Example 4. M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के एक समान गोलीय कोश के लिए केन्द्र से r दूरी पर निम्नलिखित दो स्थितियो के लिए गुरूत्वीय क्षेत्र की गणना करो।

(a) $r \geq R$

(b) $r < R$

Solution : मानीं गई वलय के कारण P पर गुरूत्वीय क्षेत्र



$dE = \dfrac{GdM}{\ell^2} \, . \, \cos\alpha$ $r \geq R$

$dM = \dfrac{M}{4\pi R^2}$ x $2\pi R \sin\theta R d\theta$

$dM = \dfrac{M}{2} \sin\theta \, d\theta$

$\therefore \; dE = \dfrac{GM \sin\theta \cos\alpha \, d\theta}{2\ell^2}$

अब $\ell^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta$ ....(1)

$R^2 = \ell^2 + r^2 - 2\ell r \cos\alpha$ ....(2)

$\therefore \; \cos\alpha = \dfrac{\ell^2 + r^2 - R^2}{2\ell r}$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = \dfrac{R^2 + r^2 - \ell^2}{2rR}$

समीकरण (1) का अवकलन करने पर

$\therefore \; 2\ell \, d\ell = 2rR \sin\theta \, d\theta$

$\therefore \; dE = \dfrac{GM}{2\ell^2} \cdot \dfrac{\ell d\ell}{Rr} \cdot \dfrac{\ell^2 + r^2 - R^2}{(2\ell r)}$ $\Rightarrow$ $dE = \dfrac{GM}{4Rr^2}\left[1 + \dfrac{r^2 - R^2}{\ell^2}\right] d\ell$

$\therefore \; E = \int dE = \dfrac{GM}{4Rr^2}\left[\int_{r-R}^{r+R} + (r^2 - R^2)\int_{r-R}^{r+R} \dfrac{d\ell}{\ell^2}\right] \Rightarrow$ $E = \dfrac{GM}{r^2}, \; r \geq R$

यदि बिन्दु कोश के अन्दर हो तो सीमा बदलकर [(R–r) से R + r] हो जायेगी।

$E = 0$ जब $r < R$

Example 5. दो ग्रह A और B जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_A और m_B तथा त्रिज्याएं क्रमशः R_A और R_B है तो उनकी सतहों पर उपस्थित गुरूत्वीय क्षेत्र के मध्य सम्बन्ध ज्ञात करो। (i) दोनों के द्रव्यमान समान है। (ii) दोनों का घनत्व समान है।

Solution : माना E_A और E_B क्रमशः ग्रहों A और B की सतह पर गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता है तो

$$E_A = \frac{Gm_A}{R_A^2} = \frac{G\frac{4}{3}\pi R_A^3 \rho_A}{R_A^2} = \frac{4G\pi}{3}\rho_A R_A$$

इसी प्रकार $E_B = \frac{Gm_B}{R_{B^2}} = \frac{4G}{3}\pi\ \rho_B R_B$

(i) $m_A = m_B$ के लिए $\frac{E_A}{E_B} = \frac{R_B^2}{R_A^2}$

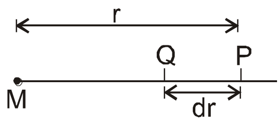
(ii) $\rho_A = \rho_B$ के लिए $\frac{E_A}{E_B} = \frac{R_A}{R_B}$

4. गुरूत्वीय विभव

किसी भी वस्तु के गुरूत्वीय क्षेत्र में उपस्थित किसी बिन्दु पर गुरूत्वीय विभव, गुरूत्वीय बल के विरूद्ध किसी एकांक द्रव्यमान की वस्तु को धीरे–धीरे (गतिज ऊर्जा में बिना परिवर्तन) अनन्त से उस बिन्दु तक विस्थापित करने मे किए गए कार्य के बराबर होता है।

किसी बिन्दु आवेश के कारण गुरूत्वीय विभव :

गुरूत्वीय विभव स्थिर विद्युतकी में विद्युत विभव के समान है। माना एकांक द्रव्यमान को द्रव्यमान M की तरफ dr दूरी तक विस्थापित किया जाता है तो किया गया कार्य



$$dW = F\,dr = \frac{GM}{r^2}dr$$

कण को अनन्त से बिन्दु P तक ले जाने में किया गया कुल कार्य $W = \int dW = \int_\infty^r \frac{GM}{r^2}dr = \frac{-GM}{r}$.

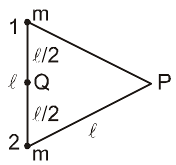
इस प्रकार गुरूत्वीय विभव $\boxed{V = -\frac{GM}{r}}$

गुरूत्वीय विभव का मात्रक जूल/किग्रा० होता है तथा गुरूत्वीय विभव का विमीय सूत्र = कार्य/द्रव्यमान

$$= \frac{\text{कार्य}}{\text{द्रव्यमान}} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[M]} = [M^\circ L^2 T^{-2}].$$

{Solved Example}

Example 1.



बिन्दु P पर द्वि–द्रव्यमान निकाय के लिए विभव की गणना करों, बिन्दु Q पर विभव क्या होगा। बाह्य कारक द्वारा इकाई द्रव्यमान को P से Q तक ले जाने में किये गये कार्य की गणना करो। गुरूत्वीय विभव के द्वारा किया गया कार्य क्या होगा?

Solution :

(i) V_{P1} = '1' पर स्थित 'm' द्रव्यमान के कारण बिन्दु P पर विभव = $-\frac{Gm}{\ell}$

$V_{P2} = -\frac{Gm}{\ell}$ $\quad\therefore\quad$ $V_P = V_{P1} + V_{P2} = -\frac{2Gm}{\ell}$

(ii) $V_{Q1} = -\frac{GM}{\ell/2}$

$V_{Q2} = -\frac{Gm}{\ell/2}$ $\quad\therefore\quad$ $V_Q = V_{Q1} + V_{Q2} = -\frac{Gm}{\ell/2} - \frac{Gm}{\ell/2} = -\frac{4Gm}{\ell}$

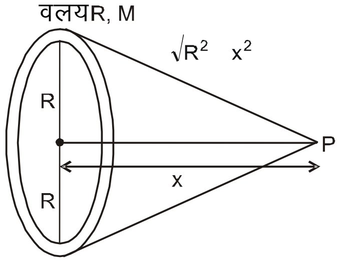
बिन्दु Q पर बल = 0

(iii) बाह्यकारक द्वारा कार्य = $(V_Q - V_P) \times 1 = -\frac{2GM}{\ell}$

(iv) गुरूत्वीय विभव द्वारा किया गया कार्य $= V_P - V_Q = \frac{2GM}{\ell}$

Example 2. M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की एक वलय की अक्ष पर केन्द्र से 'x' दूरी पर स्थित बिन्दु 'P' पर विभव की गणना करो।

Solution : P पर विभव



$$V_P = -\frac{Gm_1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{Gm_2}{\sqrt{R^2+x^2}} - ....$$

$$= -\frac{G}{\sqrt{R^2+x^2}}(m_1+m_2.....) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

वलय के केन्द्र पर विभव = $-\frac{G.M}{R}$

5. गुरूत्वीय क्षेत्र तथा गुरूत्वीय विभव में सम्बन्ध

बाह्य बल द्वारा एकांक द्रव्यमान को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक क्षेत्र E की दिशा में धीरे–धीरे dr दूरी तक विस्थापित करने में किया गया कार्य = बाह्य बल × तय की गई दूरी = – Edr.

अर्थात् $\quad dV = -Edr$

$E = -\frac{\partial V}{\partial r}$ ($\because$ V, θ का भी फलन है)

इस प्रकार किसी भी बिन्दु पर गुरूत्वीय क्षेत्र उस बिन्दु पर ऋणात्मक विभव प्रवणता के बराबर होता है।

{Solved Example}

Example 1. किसी स्थान पर गुरूत्वीय क्षेत्र $\vec{E} = 20(\hat{i}+\hat{j})$ N/kg है, तो बिन्दु A(5m, 4m) तथा मूल बिन्दु (0, 0) के मध्य गुरूत्वीय विभवान्तर (J/kg में) ज्ञात करो।

(A) शून्य $\qquad$ (B) $20\sqrt{2}$

(C) $-20\sqrt{2}$ $\qquad$ (D) परिभाषित नहीं कर सकते।

Answer : **(A)**

Solution : $V_A - V_0 = -\int_{(0,0)}^{(5,4)} 20(\hat{i}+\hat{j}).(dx\hat{i}+dy\hat{j}) = -20\,[(5-0) + (4-0)] = -180$ J/kg

Example 2. उपरोक्त उदाहरण में मूल बिन्दु (0, 0) से बिन्दु (5, 4) तक 1kg के कण को विस्थापित करने में किया गया कार्य (J में) ज्ञात करो।

(A) – 180 (B) 180 (C) – 90 (D) शून्य

Answer : (B)

Solution : $W = m\,(V_f - V_i) = m(V_A - V_0) = 1\ (-180) = -180$ J

Example 3. $v = 2x^2 + 3y^2 + zx$,

बिन्दु (x, y, z) पर गुरूत्वीय क्षेत्र की गणना करो।

Solution : $E_x = \dfrac{-\partial v}{\partial x} = -4x - z$

$E_y = -6y$

$E_z = -x$

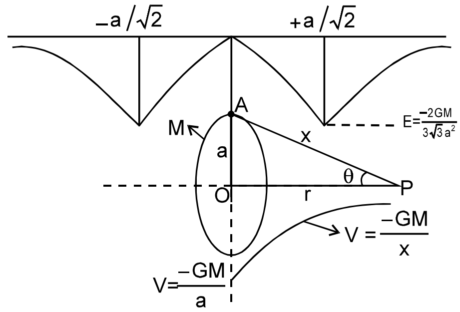
$\therefore$ गुरूत्वीय क्षेत्र $= \vec{E} = -[(4x + z)\,\hat{i} + 6y\,\hat{j} + x\,\hat{k}]$.

6. भिन्न–भिन्न वस्तुओं के लिए गुरूत्वीय क्षेत्र व गुरूत्वीय विभव

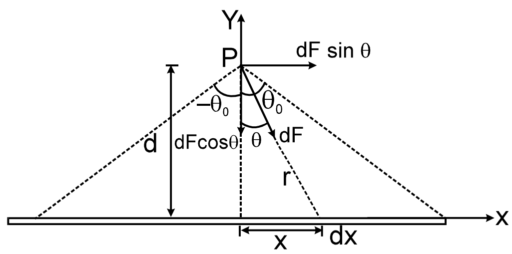
I. वलय $V = \dfrac{-GM}{x}$ अथवा $\dfrac{-GM}{(a^2 + r^2)^{1/2}}$ एवं $E = \dfrac{-GMr}{(a^2 + r^2)^{3/2}}\hat{r}$

या $E = -\dfrac{GM\cos\theta}{x^2}$

गुरूत्वीय क्षेत्र का अधिकतम मान दूरी $r = \pm a/\sqrt{2}$ पर $-2GM/3\sqrt{3}a^2$ के बराबर होता है।



II. सीमित लम्बाई के रेखीय द्रव्यमान की अक्ष पर :



(a) विभव :

$\Rightarrow\ V = -\dfrac{GM}{L}\ \ell n\,(\sec\theta_0 + \tan\theta_0)$

$= -\dfrac{GM}{L}\ \ell n\left\{\dfrac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d}\right\}$

(b) गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता :

$\Rightarrow\ E = -\dfrac{GM}{Ld}\ \sin\theta_0 = -\dfrac{GM}{d\sqrt{L^2 + d^2}}$

III. अनन्त लम्बाई के रेखीय द्रव्यमान घनत्व λ के कारण, यहाँ $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

और सीमित लम्बाई की छड़ की स्थिति में $\lambda = \frac{M}{2L}$ है और गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $E = \frac{2G\lambda}{d}$

अनन्त लम्बाई तक द्रव्यमान वितरण के कारण विभव परिभाषित नहीं होता। इस प्रकार के द्रव्यमान वितरण के लिए विभवान्तर परिभाषित नहीं होता। यहाँ पर अनन्त लम्बाई की छड़ पर क्रमशः d_1 और d_2 दूरी पर स्थित बिन्दुओं P_1 और P_2 के मध्य विभवान्तर $v_{12} = 2G\lambda \, \ell n \frac{d_2}{d_1}$

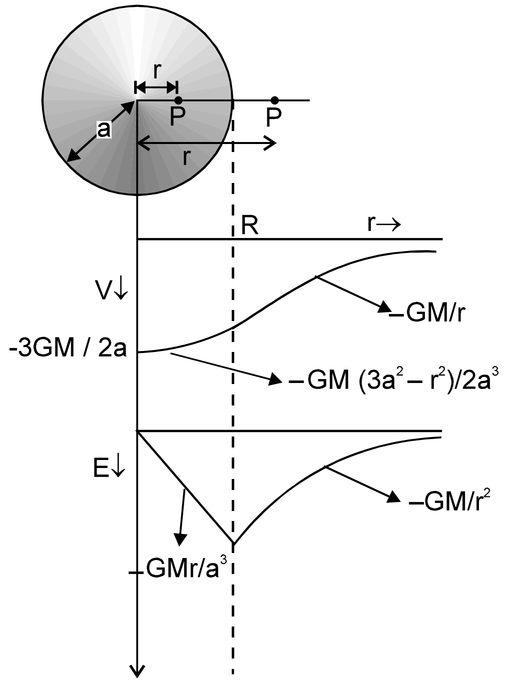
IV. समरूप ठोस गोला :

(a) गोले के अन्दर स्थित किसी बिन्दु P पर $r \le a$, तो $V = -\frac{GM}{2a^3}(3a^2 - r^2)$

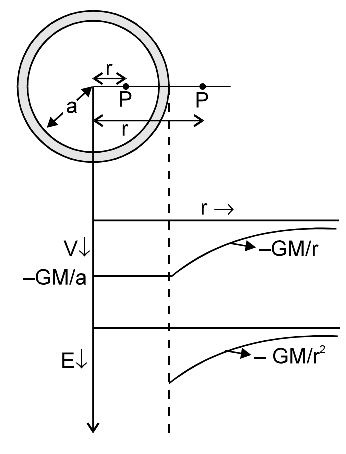
एवं $E = -\frac{GMr}{a^3}$ और केन्द्र पर $V = -\frac{3GM}{2a}$ और $E = 0$

(b) गोले से बाहर स्थित बिन्दु P पर $r \ge a$,

तो $V = -\frac{GM}{r}$ और $E = -\frac{GM}{r^2}$



V. समरूप पतला गोलीय कोश :



(a) कोश के अन्दर स्थित किसी बिन्दु P पर

$r \le a$, तो $V = \frac{-GM}{a}$ और $E = 0$

(b) कोश के बाहर स्थित किसी बिन्दु P पर

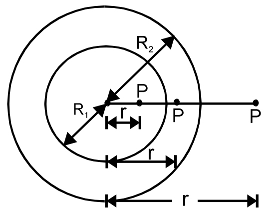
$r \ge a$, तो $V = \frac{-GM}{r}$ और $E = -\frac{GM}{r^2}$

VI. समरूप मोटा गोलीय कोश :

(a) कोश के बाहर स्थित बिन्दु पर $V = -G\frac{M}{r}$; $E = -G\frac{M}{r^2}$

(b) कोश के अन्दर स्थित बिन्दु पर $V = -\frac{3}{2}GM\left(\frac{R_2 + R_1}{R_2^2 + R_1R_2 + R_1^2}\right)$ तथा $E = 0$

(c) दोनों सतहों के मध्य स्थित बिन्दु पर



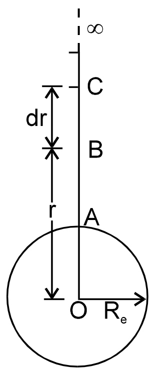
$$V = -\frac{GM}{2r}\left(\frac{3rR_2^2 - r^3 - 2R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right) ; E = -\frac{GM}{r^2}\frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}$$

7. गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा

दो द्रव्यमानों के निकाय के लिए गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा उन दोनों वस्तुओं को संयोजित करने के लिए बाह्य बल द्वारा किये गये कार्य के बराबर होती है जबकि प्रारम्भ में उनके बीच की दूरी अनन्त थी। m द्रव्यमान की एक वस्तु एक अन्य दूसरी M द्रव्यमान की वस्तु से r दूरी पर रखी है तो उन दोनों वस्तुओं के बीच गुरूत्वाकर्षण बल $F = \frac{GMm}{r^2}$

वस्तुओं के बीच गुरूत्वाकर्षण बल $F = \frac{GMm}{r^2}$

अब माना m द्रव्यमान की वस्तु को बिन्दु C से बिन्दु B तक 'dr' दूरी द्वारा M द्रव्यमान की वस्तु की तरफ विस्थापित करने मे आन्तरिक संरक्षी बलों (गुरूत्वाकर्षण) के द्वारा किया गया कार्य

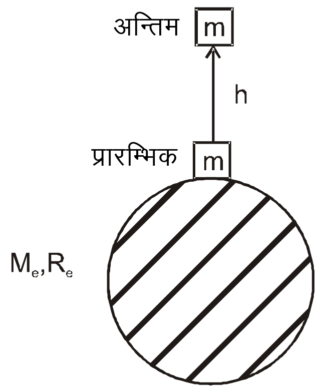


$dW = F\,dr = \frac{GMm}{r^2}dr \Rightarrow \int dW = \int_{\infty}^{r}\frac{GMm}{r^2}dr$

$\therefore$ गुरूत्वाकर्षण स्थितिज ऊर्जा $\boxed{U = -\frac{GMm}{r}}$

गुरूत्वाकर्षण स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

जब एक m द्रव्यमान की वस्तु को पृथ्वी सतह से h ($r_2 = R_e + h$) ऊचाँई तक धीरे धीरे ले जाया जाता है तो द्रव्यमान–पृथ्वी निकाय की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन (i.e., $r_1 = R_e$) = इस प्रक्रम के लिए आवश्यक कार्य = $U_f - U_i = m(v_f - v_i)$



$$W_{ext} = \Delta U = (m)\left[-\left(\frac{GM_e}{R_e+h}\right)-\left(-\frac{GM_e}{R_e}\right)\right]$$

$$W_{ext} = \Delta U = GM_e m\left(\frac{1}{R_e}-\frac{1}{R_e+h}\right)$$

$$= \frac{GM_e m}{R_e}\left(1-\left(1+\frac{h}{R_e}\right)^{-1}\right)$$

क्योकि $h << R_e$,अतः द्विपद प्रमेय के विस्तार से

$$W_{बाह्य} = \Delta U = \frac{GM_e m}{R_e}\left(1-\left(1-\frac{h}{R_e}\right)\right) = (m)\left(\frac{GM_e}{R_e^2}\right)h$$

$$W_{बाह्य} = \Delta U = mgh$$

यह सूत्र केवल $h << R_e$ के लिये मान्य है

{Solved Example}

Example 1. m द्रव्यमान की कई वस्तु पृथ्वी की सतह पर रखी है। इस वस्तु को निम्न उँचाई तक पहुँचाने में आवश्यक कार्य ज्ञात करो जब h है –

(i) $h = \frac{R_e}{1000}$

(ii) $h = R_e$

Solution :

(i) $h = \frac{R_e}{1000}$, चूंकि $h << Re$, इसलिए

उपयोग कर सकते है।

$W_{ext} = U\uparrow = mgh$

$$W_{ext} = (m)\left(\frac{GM_e}{R_e^2}\right)\left(\frac{R_e}{1000}\right) = \frac{GM_e m}{1000R_e}$$

(ii) इस स्थिति में h, R_e से छोटा नही है। अतः हम $\Delta U = mgh$ का उपयोग नहीं कर सकते है।

$W_{ext} = U\uparrow = U_f - U_i = m(V_f - V_i)$

$$W_{ext} = m\left[\left(-\frac{GM_e}{R_e+R_e}\right)-\left(-\frac{GM_e}{R_e}\right)\right]$$

$$W_{ext} = -\frac{GM_e m}{2R_e}$$

Example 2. किसी वस्तु के लिए वह वेग ज्ञात करो जिसके द्वारा उसको पृथ्वी सतह से ऊपर की ओर फेंकने पर यह 10R ऊँचाई तक पहुँच जाए। यहां R पृथ्वी की त्रिज्या 6.4×10^6 m है। (पृथ्वी का द्रव्यमान = 6×10^{24} kg, गुरूत्वाकर्षण नियतांक G = 6.7×10^{-11} N-m^2/kg^2)

Solution : पृथ्वी सतह पर m द्रव्यमान की वस्तु की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा $U(R) = -\frac{GMm}{R}$

यहाँ M पृथ्वी का द्रव्यमान (जो कि इसके केन्द्र पर केन्द्रित है।) और R पृथ्वी की त्रिज्या है। इस वस्तु की पृथ्वी सतह से 10R ऊचाँई अर्थात् पृथ्वी के केन्द्र से 11R दूरी पर वस्तु की स्थितिज ऊर्जा

$$U(11R) = -\frac{GMm}{11R}$$

$\therefore$ स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन $U(11R) - U(R) = -\frac{GMm}{11R} - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{10}{11}\frac{GMm}{R}$

यह परिवर्तन वस्तु की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा के कारण उत्पन्न होता है। माना वस्तु को ऊपर की तरफ v चाल से फेंका जाता है। तो इसकी प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ होगी। तो $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{10}{11}\frac{GMm}{R}$

अथवा $v = \sqrt{\frac{20}{11}\frac{GM}{R}}$

दिये गये मान रखने पर : $v = \sqrt{\left(\frac{20 \times (6.7 \times 10^{-11} nt - m^2/kg^2) \times (6 \times 10^{24} kg)}{11 \ (6.4 \times 10^6 m)}\right)} = 1.07 \times 10^4$ m/s.

Example 3. दो कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 है, प्रारम्भ में दोंनो परस्पर अनन्त दूरी पर स्थित है। गुरूत्वाकर्षण अन्योन्य क्रिया के कारण एक दूसरे की तरफ गति करते हैं तो सिद्ध करो कि किसी क्षण पर उनके पास आने का सापेक्ष वेग $\sqrt{2G(m_1+m_2)/R}$ है। यहाँ R किसी क्षण पर दोनों के बीच की दूरी है।

Solution :

Method 1.

r दूरी पर m_1, m_2 द्रव्यमान के बीच गुरूत्वाकर्षण बल $F_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$

इसी कारण m_1 द्रव्यमान का त्वरण $a_1 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{Gm_2}{r^2}$

इसी प्रकार m_2 द्रव्यमान का त्वरण $a_2 = -\frac{Gm_1}{r^2}$

a_2 के आगे ऋणात्मक चिन्ह बताता है कि a_2 की दिशा a_1 से विपरीत है। दोनों के बीच सापेक्ष त्वरण

$$a = a_1 - a_2 = \frac{G(m_1+m_2)}{r^2} \quad ....(1)$$

यदि v सापेक्ष वेग हो तो $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}$.

$-\frac{dr}{dt} = v$ (ऋणात्मक चिन्ह बताता है कि t के बढ़ने पर r दूरी घटती है।)

$$\therefore a = -\frac{dv}{dr}v. \quad ....(2)$$

समीकरण (1) व (2) से $v\,dv = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2}dr$

समाकलन करने पर $\frac{v^2}{2} = \frac{G(m_1+m_2)}{r} + C$

r = ∞ पर , v = 0 (दिया है),

अतः C = 0. $\therefore\ v^2 = \frac{2G(m_1+m_2)}{r}$

माना v = v_R जबकि r = R तब $v_R = \sqrt{\left(\frac{2G(m_1+m_2)}{R}\right)}$

Method 2.

(संवेग तथा ऊर्जा संरक्षण सिद्धान्त से**) :**

चूंकि कण उनके अन्योन्य आकर्षण बल के कारण गति करते हैं अतः $F_{external} = 0$ है, छोड़ते समय तथा उनके मध्य दूरी R होने की स्थितियों के मध्य संवेग संरक्षण द्वारा

$m_1v_1 - m_2v_2 = 0 \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2}$ ...(i)

कुल ऊर्जा संरक्षण द्वारा: $0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{R}$

समीकरण (i) द्वारा : $\frac{1}{2}m_1v_1^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{Gm_1m_2}{R}$

$v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)R}}$

इसी प्रकार, $v_2 = m_1\sqrt{\frac{2G}{(m_1+m_2)R}}$

अतः सापेक्ष वेग $v_R = v_1 + v_2 = \sqrt{\left(\frac{2G(m_1+m_2)}{R}\right)}$

8. गुरूत्वीय स्व–ऊर्जा

किसी भी वस्तु की गुरूत्वीय स्व–ऊर्जा, अनन्त पर स्थित कणों को किसी बाह्य बल द्वारा वस्तु (कणों का निकाय) को बनाने में किये गये कार्य के बराबर होती है।

n कणों के निकाय के लिए गुरूत्वीय स्व–ऊर्जा

'r' औसत दूरी पर स्थित n कणों की स्थितिज ऊर्जा कणों के अन्योन्य गुरूत्वीय आकर्षण के कारण सभी कण युग्मों की स्थितिज ऊर्जाओं के योग के बराबर होगी। अर्थात् $U_s = -G \sum_{\substack{\text{सभी युग्मों के लिए} \\ j \neq i}} \frac{m_im_j}{r_{ij}}$, यहाँ r_{ij} क्रमशः i^{th} तथा j^{th} कणों के मध्य दूरी है।

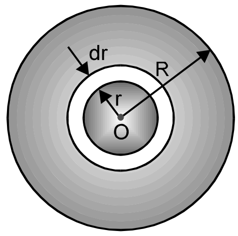
व्यंजक को इस प्रकार भी लिख सकते है $U_s = -\frac{1}{2}G\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n}\frac{m_im_j}{r_{ij}}$ ($\frac{1}{2}$ भाग उत्पन्न होने का कारण है कि सभी पदों को दुगुना माना गया है।)

यदि 'n' कणों के निकाय की कल्पना करें जिसमें प्रत्येक कण का द्रव्यमान 'm' और एक–दूसरे के बीच औसत दूरी 'r' हो तो स्व–ऊर्जा

अथवा $U_s = -\frac{1}{2}G\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\left(\frac{m^2}{r}\right)_{ij}$ अतः दाँये तरफ 'i', 'n' गुना और 'j', (n – 1) गुना हो जाएगा।

$U_s = -\frac{1}{2}Gn\,(n-1)\,\frac{m^2}{r}$

समरूप गोले (तारे) की गुरूत्वीय स्व–ऊर्जा



$$U_{\text{गोला}} = -G\,\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)\left(4\pi r^2 dr\rho\right)}{r}$$

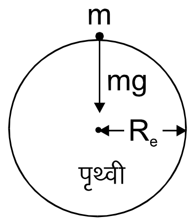
यहाँ $\rho = \dfrac{M}{\left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3}$ $= -\dfrac{1}{3}G\,(4\,\pi\rho)^2\,r^4\,dr,$

$$U_{\text{तारा}} = -\frac{1}{3}G\,(4\,\pi\rho)^2\int_0^R r^4 dr = -\frac{1}{3}G\,(4\pi\rho)^2\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = -\frac{3}{5}G\left(\frac{4\pi}{3}R^3\rho\right)^2\frac{1}{R}\,.$$

$$\therefore\; U_{\text{तारा}} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

9. गुरूत्वीय त्वरण :

यह एक त्वरण है जोकि पृथ्वी सतह के निकट मुक्त रूप से गिरती वस्तु द्वारा पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण के कारण प्राप्त किया जाता है। वह गुण जिसके द्वारा वास्तव में एक वस्तु दूसरी पर गुरूत्वीय खिंचाव आरोपित करती है या महसूस कराती है तथा जिसके कारण वस्तु अपनी अवस्था परिवर्तन या समरूप गति में परिवर्तन का विरोध करती है, इसका जड़त्वीय द्रव्यमान m कहलाता है। इस प्रकार यदि गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता पृथ्वी के किसी बिन्दु P पर E हो तथा इस बिन्दु पर गुरूत्वीय त्वरण g हो तो $m_I\vec{g} = m_G\vec{E}$



चूंकि गुरूत्वीय व जड़त्वीय द्रव्यमान सभी वस्तुओं के मापन में अत्यधिक यर्थाकता के कारण लगभग समान होते है।

अर्थात् $\vec{g} = \vec{E}$

पृथ्वी सतह पर गुरूत्वीय क्षेत्र की तीव्रता का गणितीय मान गुरूत्वीय त्वरण के बराबर होता है। अतः

$$g = \frac{GM_e}{R_e^{\,2}}$$

यहाँ, M_e = पृथ्वी का द्रव्यमान

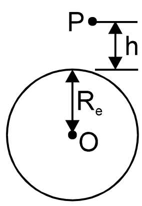
R_e = पृथ्वी की त्रिज्या

नोट : यहाँ पृथ्वी का द्रव्यमान वितरण गोलीय सममित रूप से गोले के अन्दर माना गया है। इसलिए सम्पूर्ण द्रव्यमान को g की गणना के लिए इसके केन्द्र पर केन्द्रित मानते है। इसी प्रकार पृथ्वी के सम्पूर्ण आयतन के अन्दर औसत सममित घनत्व माना जा सकता है।

10. गुरूत्व के कारण त्वरण में परिवर्तन

10.1. ऊँचाई का प्रभाव :

पृथ्वी सतह पर गुरूत्व के कारण त्वरण $g = \dfrac{GM_e}{R_e^2}$



यदि वस्तु को पृथ्वी सतह से 'h' पर स्थित माने तो 'h' ऊँचाई पर गुरूत्व के कारण त्वरण निम्न सूत्र से दिया जाता है।

$$g_h = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} = g\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^{-2} \simeq g\left(1 - \frac{2h}{R_e}\right)$$

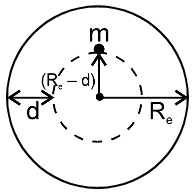
जब h << R.

'h' ऊचाँई पर 'g' के मान मे कमी = $g - g_h = \dfrac{2gh}{R_e}$ तो 'g' के मान में प्रतिशत कमी

$$'g' = \frac{g - g_h}{g}\times 100 = \frac{2h}{R_e}\times 100\%$$

10.2. गहराई का प्रभाव :

पृथ्वी सतह पर गुरूत्वाकर्षण खिंचाव बल वस्तु के भार के बराबर होता है। अर्थात् $mg = \frac{GM_e m}{R_e^2}$



$\therefore \quad mg = \frac{G \times \frac{4}{3}\pi R_e^3 \rho m}{R_e^2}$ अथवा $g = \frac{4}{3}\pi G R_e \rho$ .....(1)

जब वस्तु d गहराई पर स्थित हो तो केवल $(R_e - d)$ त्रिज्या के गोले का द्रव्यमान ही गुरूत्वाकर्षण खिंचाव के लिए प्रभावी होगा और बाह्य कोश, द्रव्यमान पर कोई परिणामी प्रभाव नहीं डालेगा। यदि ठोस गोले की सतह पर गुरूत्वीय त्वरण g_d हो तो

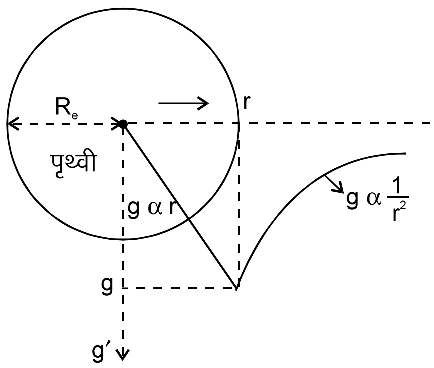
$g_d = \frac{4}{3}\pi G(R_e - d)\rho$ .....(2)

समीकरण (2) के समीकरण (1) से भाग देने पर

$\Rightarrow \quad g_d = g\left(1 - \frac{d}{R_e}\right)$

मुख्य बिन्दु :

(i) पृथ्वी के केन्द्र पर, $d = R_e$ अतः $g_{केन्द्र} = g\left(1 - \frac{R_e}{R_e}\right) = 0$ अर्थात् वस्तु का भार (mg) पृथ्वी के केन्द्र पर शून्य होता है।

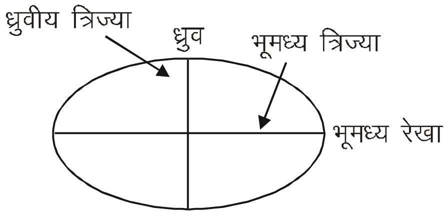


(ii) गहराई पर 'g' के मान में प्रतिशत कमी = $\left(\frac{g - g_d}{g}\right) \times 100\,\% = \frac{d}{R_e} \times 100\,\%$

10.3. पृथ्वी के आकार का प्रभाव :

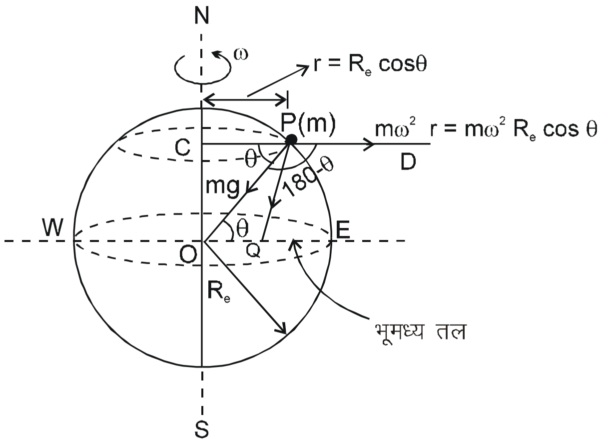
पृथ्वी की भूमध्यीय त्रिज्या, ध्रुवीय त्रिज्या से 21 km ज्यादा है। अर्थात् वस्तु को भूमध्य रेखा से ध्रुवों की तरफ ले जाने पर वस्तु का भार बढ़ता है।

हम जानते है कि $g = \frac{GM_e}{R_e^2}$ अतः $g_{ध्रुव} > g_{भूमध्य}$ अर्थात् वस्तु को भूमध्य रेखा से ध्रुवों की तरफ लें जाने पर वस्तु का का भार बढ़ता है।



10.4. पृथ्वी के घूर्णन का प्रभाव :

पृथ्वी अपनी अक्ष पर ω कोणीय वेग से घूमती है। माना m द्रव्यमान का कण θ देशान्तर पर स्थित है। कण का कोणीय वेग भी ω होगा।



सदिश योग के समान्तर चतुर्भज नियम से m द्रव्यमान पर परिणामी बल की दिशा PQ के अनुदिश होती है।

$$F = [(mg)^2 + (m\omega^2 R_e \cos\theta)^2 + \{2mg \times m\omega^2 R_e \cos\theta\} \cos (180 - \theta)]^{1/2}$$

$$= [(mg)^2 + (m\omega^2 R_e \cos\theta)^2 - (2m^2 g\omega^2 R_e \cos\theta) \cos\theta]^{1/2}$$

$$= mg \left[1 + \left(\frac{R_e\omega^2}{g}\right)^2 \cos^2\theta - 2\frac{R_e\omega^2}{g}\cos^2\theta\right]^{1/2}$$

$\omega = 7.3 \times 10^{-5}$ rad/s है, अतः ω^4 के पद को नगण्य माना जा सकता है। द्विपद प्रसार के पश्चात् उच्च पदों को छोड़ने के बाद

$$F \simeq mg\left[1 - \frac{2R_e\omega^2\cos^2\theta}{g}\right]^{\frac{1}{2}} = mg\left[1 - \frac{R_e\omega^2\cos^2\theta}{g}\right]$$

$$g' = \frac{F}{m} = g - \omega^2 R_e \cos^2\theta$$

ध्रुवों पर $\theta = 90° \Rightarrow g_{ध्रुवो} = g$, भूमध्य रेखा पर $\theta = 0° \Rightarrow g_{भूमध्य} = g\left[1 - \frac{R_e\omega^2}{g}\right]$ अतः $g_{ध्रुवों} > g_{भूमध्य}$

यदि वस्तु को ध्रुवो से भूमध्य रेखा पर लेकर जाये तो $g' = g\left(1 - \frac{R_e\omega^2}{g}\right)$

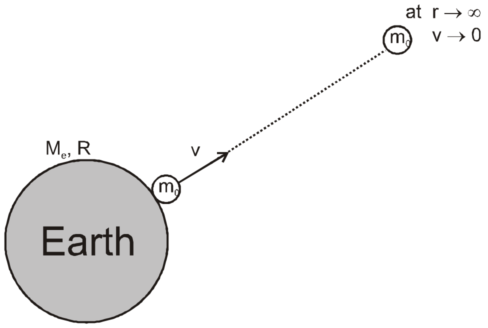
अतः भार में प्रतिशत परिवर्तन $= \dfrac{mg - mg\left(1-\dfrac{R_e\omega^2}{g}\right)}{mg} \times 100 = \dfrac{mR_e\omega^2}{mg} \times 100 = \dfrac{R_e\omega^2}{g} \times 100$

11. पलायन वेग

किसी भी वस्तु को ग्रह के गुरूत्वीय क्षेत्र से बाहर भेजने के लिये आवश्यक न्यूनतम वेग पलायन वेग कहलाता है। ($r \to \infty$ तक भेजने के लिये।)

11.1. पृथ्वी की सतह पर पलायन वेग

पृथ्वी की सतह पर m_0 द्रव्यमान का कण मानते है। पृथ्वी की सतह से इसे
V_e वेग से फेका जाता है जिससे यह $r \to \infty$ तक पहुँच जाये ($r \to \infty$, पर इसका वेग शून्य हो जाता है।
प्रारम्भिक और अन्तिम स्थितीयो के मध्य ऊर्जा संरक्षण नियम लगाने पर ($r \to \infty$ स्थिति तक पहुँचने पर)



$K_i + U_i = K_f + U_f$

$$\frac{1}{2}m_0v_e^2 + m_0\left(-\frac{GM_e}{R}\right) = 0 + m_0\left(-\frac{GM_e}{(r\to\infty)}\right) \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R}}$$

पृथ्वी की सतह से पलायन वेग $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM_e}{R}}$

G, Me, और R का मान रखने पर $V_e = 11.2$ km/s.

11.2. पलायन वेग निम्न बातो पर निर्भर करता है

(i) ग्रह के द्रव्यमान और आकार (R) पर
(ii) जहॉ से कण को प्रक्षेपित किया जाता है उस स्थिति पर

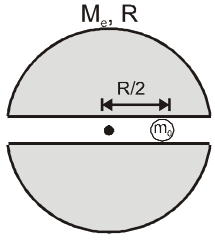
11.3. पलायन वेग निम्न बातो पर निर्भर नही करता

(i) जिस वस्तु को प्रक्षेपित किया जा रहा है उसके द्रव्यमान (m_0) पर
(ii) प्रक्षेपण कोण पर

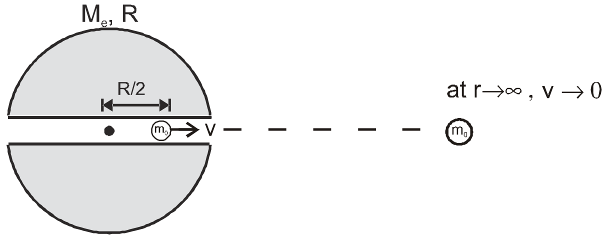
यदि वस्तु को पृथ्वी की सतह से पलायन वेग से छोडा जाता है, तो यह पृथ्वी के गुरूत्वकार्षण क्षेत्र से बाहर चली जाती है और कभी भी पृथ्वी की सतह पर वापस नही आती है लेकिन यह सूर्य के चारो ओर घूर्णन करती रहती है।

{Solved Example}

Example 1. पृथ्वी के अन्दर व्यास के अनुदिश एक पतली गुहा बनायी गयी है, और m_0 द्रव्यमान का कोई कण केन्द्र से R/2 दूरी पर रखा है। उस स्थान से कण का पलायन वेग ज्ञात करो।



Solution : माना हम कण को v वेग से प्रेक्षेपित करते है, जिससे यह ($r \to \infty$).पर पहुँच जाये।
ऊर्जा संरक्षण नियम का उपयोग करने पर



$K_i + U_i = K_f + U_f$

$$\frac{1}{2}m_0v^2 + m_0\left\{-\frac{GM_e}{2R^3}\left(3R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)\right\} = 0 + 0$$

$v = \sqrt{\frac{11GM_e}{4R}} = V_e$ उस स्थिति पर

Example 2. ऐसे ग्रह की त्रिज्या ज्ञात करो जिस पर कूदने पर व्यक्ति पलायन कर जाए। पृथ्वी पर इस व्यक्ति की कूदने की क्षमता 1.5 m है। ग्रह का घनत्व पृथ्वी के समान है।

Solution : ग्रह के लिए : $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_pm}{R_p} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_pm}{R_p}$

पृथ्वी पर $\rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = m\left(\frac{GM_E}{R_E^2}\right)h$

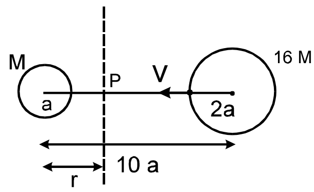
$\therefore \frac{GM_pm}{R_p} = \frac{GM_E.m}{R_E^2}.h \qquad \Rightarrow \qquad \frac{M_p}{R_p} = \frac{M_Eh}{R_E^2}$

$\therefore$ घनत्व (ρ) समान है। अतः $\frac{(4/3)\pi R_p^3\rho}{R_p} = \frac{(4/3)\pi R_E^3 h\rho}{R_E^2}$

$\Rightarrow R_P = \sqrt{R_Eh}$

Example 3. दो तारों के बीच की दूरी 10 a है। इनके द्रव्यमान क्रमशः M और 16 M है और त्रिज्यायें क्रमश a और 2a है। बड़े तारे से एक वस्तु को सीधे छोटे तारे की ओर फेंका जाता है तो जब यह वस्तु छोटे तारे पर पहुँचेगी तो इसकी न्यूनतम चाल क्या होगी ?

Solution : माना दोनों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के बिन्दु P पर कुल क्षेत्र शून्य है तो



तो $\frac{GM}{r^2} - \frac{G(16M)}{(10a-r)^2} = 0$

$\Rightarrow (10a - r)^2 = 16\, r^2 \quad \Rightarrow \quad 10a - r = 4r \quad \Rightarrow \quad r = 2a$

माना बड़े तारे से इस कण को प्रक्षेपित करने पर इतनी आवश्यक ऊर्जा दे दी जाये है कि यह इस बिन्दु को पार कर जाये है तो यह छोटे तारे पर पहुँच जाएगा। इसके लिए वस्तु को दी गई गतिज ऊर्जा उसकी यांत्रिक ऊर्जा में कुल वृद्धि के बराबर होगी, जो कि P बिन्दु पर स्थितिज ऊर्जा के बराबर है। अतः बिन्दु P पर गुरूत्वीय विभव

$$V_p = -\frac{GM}{r} - \frac{G(16M)}{(10a-r)} = \frac{-GM}{2a} - \frac{2GM}{a} = \frac{-5GM}{2a}.$$

अब यदि बड़े ग्रह से फैंके गये कण के पास इस बिन्दु P को पार करने के लिए पर्याप्त ऊर्जा है तो यह छोटे ग्रह पर पहुँच जाएगा। इसके लिए, वस्तु को दी गई गतिज ऊर्जा इसकी कुल यांत्रिक ऊर्जा का मान P बिन्दु पर स्थितिज ऊर्जा के मान तक बढ़ाने के लिए पर्याप्त होना चाहिए।

अर्थात् $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{G(16M)m}{2a} - \frac{GMm}{8a} = mV_p$

या $\frac{v^2}{2} - \frac{8GM}{a} - \frac{GM}{8a} = -\frac{5GM}{2a}$

या $v^2 = \frac{45GM}{4a}$ या $v_{\text{निम्नतम}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5GM}{a}}$

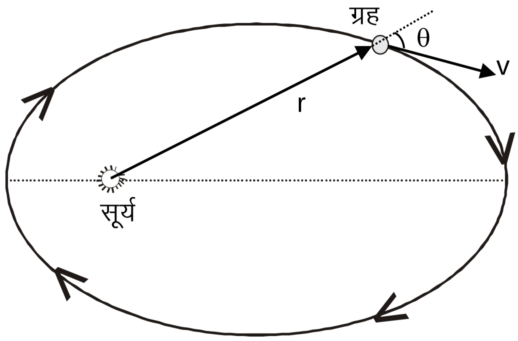
12. ग्रहो की गति के लिये केपलर नियम

माना एक ग्रह, सूर्य के चारो तरफ चक्कर चगाता है या कोई उपग्रह पृथ्वी के चारो ओर चक्कर लगाता है, तब ग्रहो की गति को केपलर नियमो से समझा जा सकता है।

हम सूर्य तथा ग्रहों को बिन्दुवत् द्रव्यमान मान सकते हैं क्योंकि इनके मध्य दूरी बहुत अधिक है। सौर मण्डल में सूर्य का द्रव्यमान अन्य वस्तुओं की तुलना में अत्यधिक है। इसकी गति अन्य ग्रहों के गुरूत्व के कारण अप्रभावित रहती है।

12.1. कक्षा का नियम

प्रत्येक ग्रह सूर्य के चारो तरफ सूर्य दीर्घवृत्ताकार कक्षा में चक्कर लगाता है और सूर्य दीर्घवृत की कक्षा के एक फोकस पर स्थित होता है। (यद्यपि वृत्तिय पथ (कक्षा) दीर्घवृत्ताकार कक्षा का उपसमुच्चय होता है।)



12.2. कक्षीय वेग का नियम

इस नियम को समझने के लिये पहले ग्रहो के लिये कोणीय संवेग संरक्षण नियम समझेगे ।

यदि कोई ग्रह दीर्घवृत्तीय कक्षा में गति कर रहा है तो, इस पर लगने वाला गुरूत्वीय बल हमेशा सूर्य के केन्द्र से पारित होगा। अतः इस गुरूत्वीय बल पर, सूर्य के केन्द्र के सापेक्ष, बलाघूर्ण शून्य होगा। अतः हम कह सकते है कि ग्रह का सूर्य के केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग संरक्षित (नियत) रहेगा।

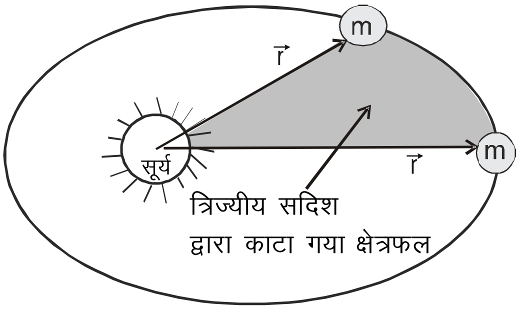
सूर्य के सापेक्ष $\tau = 0$

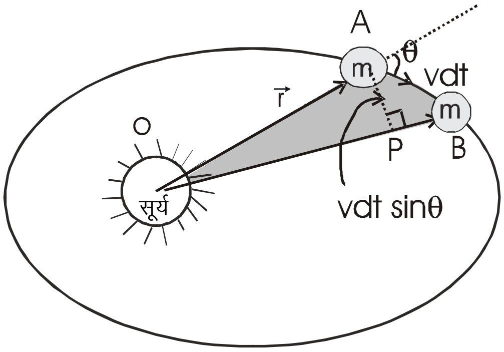
$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{\text{ग्रह, सूर्य}} = \text{नियतांक}$

$\Rightarrow$ mvr sinθ = नियतांक

अब हम, केपलर के कक्षीय वेग का नियम सरलता से समझ सकते है।

यदि कोई ग्रह सूर्य के चारों तरफ घूम रहा है तो त्रिज्यीय सदिश भी घूमेगा और यह चित्रानुसार क्षेत्रफल को घेरता जायेगा या तय करेगा। अब हम त्रिज्यीय सदिश $\vec{r}$ द्वारा तय क्षेत्रफल की दर निकालते है।





माना कोई ग्रह सूर्य के चारो तरफ घूर्णन कर रहा है, और किसी समय इसका वेग v है। त्रिज्या सदिश ($\vec{r}$) और वेग ($\vec{v}$) के मध्य कोण θ है। dt समय मे यह vdt दूरी तय करता है। इस dt समय में त्रिज्यीय सदिश द्वारा तय क्षेत्रफल OAB है जिसे त्रिभुज मान सकते है।

dA = 1/2 (आधार) (लम्बबत् ऊँचाई)

dA = 1/2 (r) (vdtsinθ)

अतः तय क्षेत्रफल की दर $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} vr \sin\theta$

हम कह सकते है, $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{mvr\sin\theta}{m}$

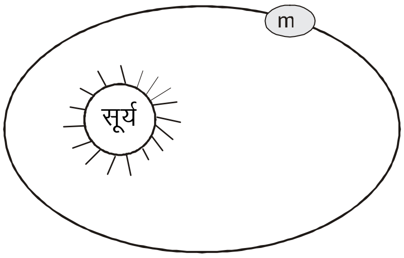
जहां mvr sinθ = सूर्य का चारो तरफ कोणीय संवेग है, जो कि संरक्षित (नियत) रहता है।

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L_{\text{ग्रह/सूर्य}}}{2m}$ = नियत

अतः त्रिज्यीय सदिश द्वारा तय क्षेत्रफल की दर नियत रहती है।

{Solved Example}

Example 1. माना कोई ग्रह सूर्य के चारो तरफ दिये गये दीर्घवृत्तीय पथ में घूर्णन कर रहा है, तथा $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ घूर्णन का आवर्तकाल ज्ञात करो यदि सूर्य के चारो तरफ ग्रह का कोणीय संवेग L है।



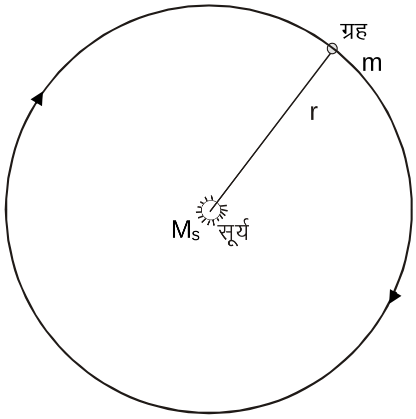
Solution : तय क्षेत्रफल की दर $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$ = नियतांक

$\Rightarrow dA = \frac{L}{2m}dt$

$\int_{A=0}^{A=\pi ab} dA = \int_{t=0}^{t=T} \frac{L}{2m}dt \quad \Rightarrow \quad \pi ab = \frac{L}{2m}T$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi mab}{L}$

12.3. आवर्तकाल का नियम :



माना कि एक ग्रह सूर्य के चारो तरफ वृत्तीय कक्ष में घूर्णन कर रहा है, तो

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_s m}{r^2} \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_s}{r}}$$

घूर्णन का आवर्तकाल $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM_s}}$

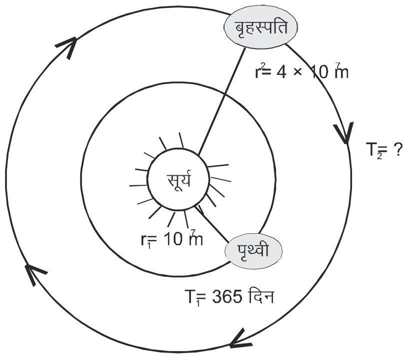
$\Rightarrow \; T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right) r^3 \;\Rightarrow\; T^2 \alpha\, r^3$

सूर्य के सारे ग्रहों के लिए, $T^2 \propto r^3$

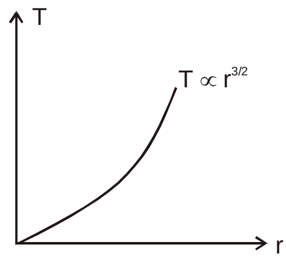
* यदि ग्रह दीर्घवर्त्तीय कक्षा में चक्कर काट रहा है तब $T^2 \propto a^3$ जहॉ a = दीर्घवृत की अर्धदीर्घ अक्ष है

{Solved Example}

Example 1. पृथ्वी और बृहस्पति, सूर्य के दो ग्रह है। पृथ्वी की औसत कक्षीय त्रिज्या 1.5×10^8 km और बृहस्पति की 6×10^8 km है। पृथ्वी का घूर्णन आर्वत–काल T = 365 दिन है, बृहस्पति का घूर्णन आर्वत काल ज्ञात करो ।



Solution : दोनो ग्रहो के लिये : $T^2 \propto r^3$



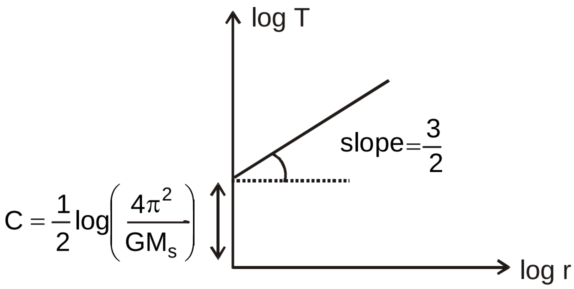
$$\left(\frac{T_{\text{बृहस्पति}}}{T_{\text{पृथ्वी}}}\right)^2 = \left(\frac{T_{\text{बृहस्पति}}}{T_{\text{पृथ्वी}}}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{T_{\text{बृहस्पति}}}{365 \text{ दिन}}\right)^2 = \left(\frac{6\times10^8}{1.5\times10^8}\right)^3$$

$T_{\text{बृहस्पति}} = 8 \times 365$ दिन

आवर्तकाल T और त्रिज्या r के मध्य ग्राफ

log T और log r के मध्य ग्राफ

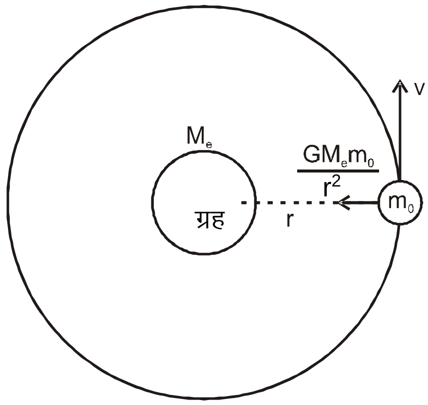
$$\Rightarrow \; T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right) r^3 \Rightarrow 2\log T = \log\left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right) + 3\log r \Rightarrow \log T = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4\pi^2}{GM_s}\right) + \frac{3}{2}\log r$$



13. ग्रह के चारो तरफ उपग्रह की वृतीय गति

माना m_0 द्रव्यमान का कोई उपग्रह (उदाहरण जैसे चन्द्रमा एक प्राकृतिक उपग्रह है), ग्रह (पृथ्वी) से r दूरी पर है। यदि उपग्रह घूर्णन नही करे तो यह गुरूत्वाकर्षण के कारण यह ग्रह की सतह पर गिर जायेगा।

टक्कर से बचने के लिये उपग्रह, ग्रह के चारों तरफ घूर्णन करेगा। उपग्रह की वृत्तीय गति के लिये



$$\Rightarrow \quad \frac{GM_em_0}{r^2} = \frac{m_0v^2}{r} \quad \text{.......... (1)}$$

$\Rightarrow$ $v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ इस वेग को कक्षीय वेग (v_0) कहते है

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

13.1. वृतीय कक्ष में घूम रहे उपग्रह की कुल ऊर्जा :

(i) $KE = \frac{1}{2}m_0v^2$ और समीकरण (1) से

$$\frac{m_0v^2}{r} = \frac{GM_em_0}{r^2}$$

$$\Rightarrow m_0v^2 = \frac{GM_em_0}{r} \qquad \Rightarrow \qquad KE = \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{GM_em_0}{2r}$$

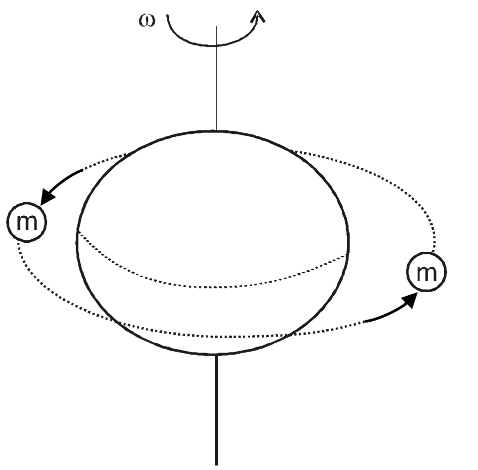
(ii) स्थितीज ऊर्जा $U = -\frac{GM_em_0}{r}$

कुल ऊर्जा $= KE + PE = \left(\frac{GM_em_0}{2r}\right) + \left(\frac{-GM_em_0}{r}\right)$; $\quad TE = -\frac{GM_em_0}{2r}$

कुल ऊर्जा ऋणात्मक है इससे प्रदर्शित होता है कि उपग्रह अभी भी ग्रह के बन्धन में है।

14. भू स्थिर उपग्रह

माना किसी उपग्रह को, किसी कक्षा जो कि भूमध्य रेखा के तल में है, में स्थित किया जाता है जिसका कोणीय वेग ω, $\omega_{\text{पृथ्वी}}$ के बराबर है और आर्वत काल $T_{\text{पृथ्वी}} = 24$ घण्टे, के बराबर है तथा इसकी दिशा भी पृथ्वी की दिशा के समान है।



तब पृथ्वी से देखने पर, ये स्थिर दिखाई देता है। इस तरह के उपग्रह भू–स्थिर उपग्रह कहलाते है। किसी भू–स्थिर उपग्रह के लिये –

$\omega_{उपग्रह} = \omega_{पृथ्वी} \quad \Rightarrow \quad T_{उपग्रह} = T_{पृथ्वी} = 24$ घण्टे

अतः भू–स्थिर उपग्रह का आवर्तकाल 24 घण्टे होना चाहिए।

इसे T = 24 घण्टे प्राप्त करने के लिए भू–स्थिर उपग्रह की कक्षीय त्रिज्या होगी

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_e}\right)r^3$$

मान रखने पर हम भू–स्थिर उपग्रह की त्रिज्या $r = 6.6\ R_e$ प्राप्त करेगें। (जहाँ Re = पृथ्वी की त्रिज्या)

और सतह से ऊँचाई $h = 5.6\ R_e \approx 36000$ km है।

{Solved Example}

Example 1. एक उपग्रह को पृथ्वी सतह से 1600 किमी० ऊचाँई की वृत्ताकार कक्षा में स्थापित किया जाता है। यदि पृथ्वी की त्रिज्या R = 6400 किमी० और पृथ्वी की सतह पर गुरूत्वीय त्वरण 9.8 m/sec^2 हो तो आवर्तकाल ज्ञात करो। पृथ्वी सतह से इसको कितनी दूरी पर स्थापित किया जाए कि यह भूमध्य रेखा पर स्थित बिन्दु के सापेक्ष स्थिर प्रतीत हो ?

Solution : पृथ्वी सतह से h ऊचाँई पर गतिशील उपग्रह का आवर्तकाल $T = \dfrac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{gR^2}}$ जहाँ r = R + h

तब $T = \dfrac{2\pi(R+h)}{R}\sqrt{\left(\dfrac{R+h}{g}\right)}$ यहाँ R = 6400 km, h = 1600 km = R/4.

तब $T = \dfrac{2\pi\left(R+\frac{R}{4}\right)}{R}\sqrt{\left(\dfrac{R+\frac{R}{4}}{g}\right)} = 2\pi(5/4)^{3/2}\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

दिए गए मान रखने पर : $T = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\left(\dfrac{6.4\times10^6 m}{9.8\ \ m/s^2}\right)}\ (1.25)^{3/2}$

$= 7096$ sec = 1.97 घण्टे

अब यदि उपग्रह को अपने सापेक्ष स्थिर मानें तो उपग्रह का आवर्तकाल भी पृथ्वी के अपने अक्ष पर घूर्णनकाल के बराबर होना चाहिए अर्थात् आवर्तकाल 24 घण्टे होना चाहिए। माना पृथ्वी सतह से h ऊचाँई इस प्रकार है कि यह पृथ्वी की त्रिज्या के रूप में nR के बराबर है तो

$$T = \frac{2\pi(R+nR)}{R}\sqrt{\left(\frac{R+nR}{g}\right)} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{R}{g}\right)}\ (1+n)^{3./2}$$

$$= 2 \times 3.14\sqrt{\left(\frac{6.4\times10^6 meter/sec}{9.8 meter/sec^2}\right)}\ (1+n)^{3/2}$$

$= (5075$ सैकण्ड$)\ (1+n)^{3/2} = (1.41$घण्टा$)\ (1+n)^{3/2}$

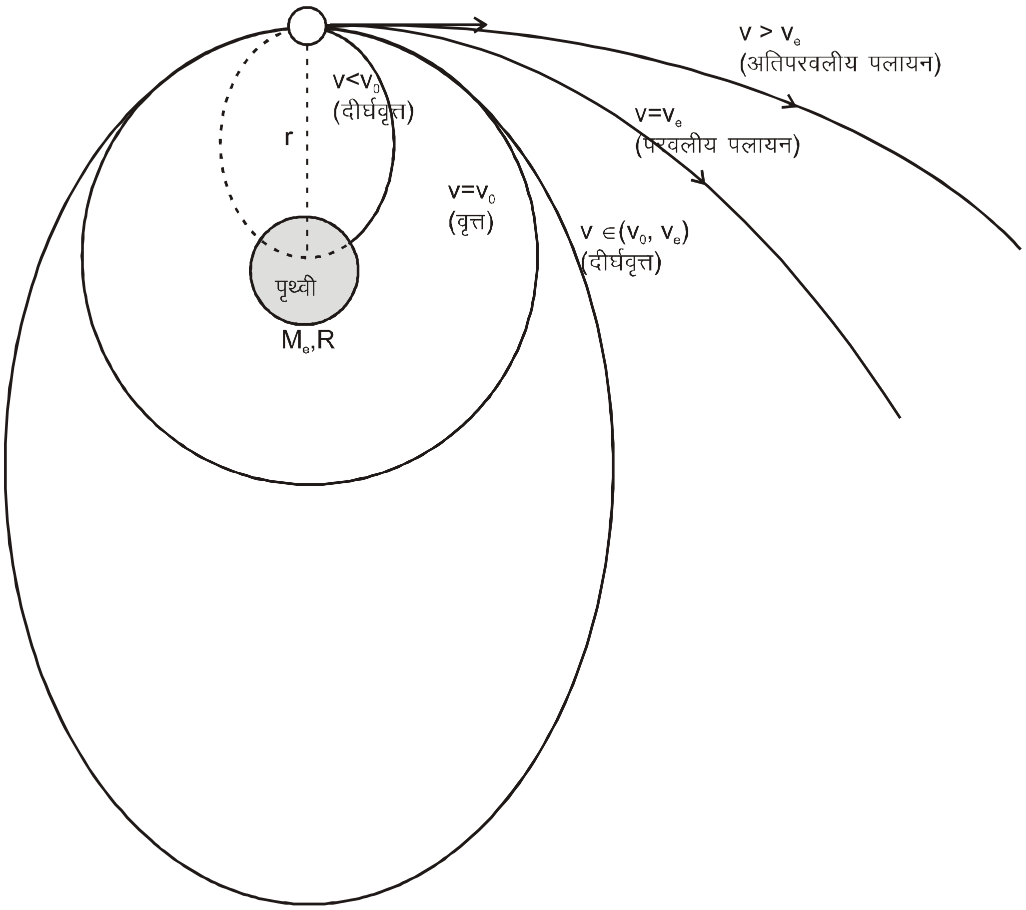
T = 24 घण्टे के लिए

(24 घण्टा) = (1.41 घण्टा) $(1+n)^{3/2}$ या $(1+n)^{3/2} = \dfrac{24}{1.41} = 17$

या $1 + n = (17)^{2/3} = 6.62$ या $n = 5.62$

अर्थात् पृथ्वी सतह से ऊपर भूस्थिर उपग्रह की ऊँचाई $nR = 5.62 \times 6400$ km $= 3.595 \times 10^4$ km.

15. उपग्रह का विभिन्न प्रक्षेपण चालों (वेगों) के संगत पथ



माना कोई उपग्रह पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर है यदि हम उपग्रह को विभिन्न वेग देते है इसका पथ भी अलग होगा।

(i) यदि $v < v_0 \left(\text{or} \quad v < \sqrt{\frac{GM_e}{r}}\right)$ तब उपग्रह दीर्घवृतीय पथ पर गति करेगा और पृथ्वी की सतह से टकरायेगा। लेकिन यदि पृथ्वी का आकार छोटा है तो उपग्रह दीर्घवृत्तीय कक्ष को पूरा करेगा और पृथ्वी का केन्द्र इसका दूरस्थ फोकस होगा। उपग्रह की कुल ऊर्जा < 0

(ii) यदि $v = v_0 \left(\text{or} \quad v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}\right)$, तब उपग्रह वृत्तीय कक्ष में घूर्णन करेगा। उपग्रह की कुल ऊर्जा < 0

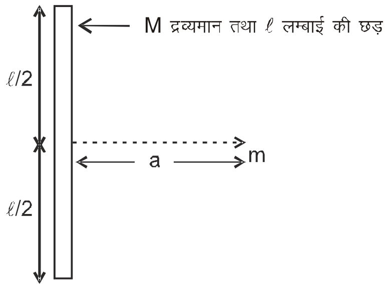
(iii) यदि $v_e > v > v_0 \left(\text{or} \quad \sqrt{\frac{2GM_e}{r}} > v > \sqrt{\frac{GM_e}{r}}\right)$,तब उपग्रह दीर्घवृत्तीय कक्ष में घूर्णन करेगा और पृथ्वी का केन्द्र इसका समीपस्थ फोकस होगा। उपग्रह की कुल ऊर्जा < 0

(iv) यदि $v = v_e \left(\text{or} \quad v = \sqrt{\frac{2GM_e}{r}}\right)$, तब उपग्रह परवलीय पथ पर गति करता हुआ अनन्त तक पलायन करेगा। उपग्रह की कुल ऊर्जा = 0

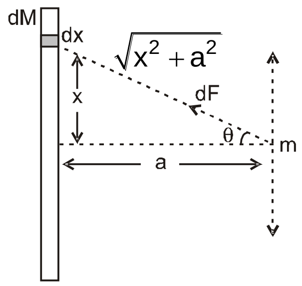
(v) यदि $v > v_e \left(\text{or} \quad v > \sqrt{\frac{2GM_e}{r}}\right)$, हो तो उपग्रह अतिपरवलीय पथ पर गति करता हुआ अनन्त तक पलायन करेगा। उपग्रह की कुल ऊर्जा > 0

SOLVED MISCELLANEOUS PROBLEMS

Problem 1. बिन्दु द्रव्यमान m के कारण छड़ जिसका द्रव्यमान M (एक समान वितरित) एवं लम्बाई ℓ पर चित्र में दिखाई गई स्थिति में बल ज्ञात करो ?



Solution : $\because$ बल की दिशा प्रत्येक अल्पांश के लिए बदलती रहती हैं,
इसलिए हम सभी बलों का समाकलन करते है।
परिणामी उर्ध्वाधर बल = 0.



dF = अल्पांश पर बल = $\dfrac{G.dM.m}{(x^2+a^2)}$

dF_h = dF cos θ = अल्पांश पर क्षैतिज दिशा पर बल

$\dfrac{G.dM.m}{(x^2+a^2)} = \cos\theta$

$$\therefore \quad F_h = \int \frac{G.M.m\cos\theta dx}{\ell(x^2+a^2)} = \frac{G.M.m}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{\cos\theta\cdot dx}{(x^2+a^2)} = \frac{GMm}{\ell a^2}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{\cos\theta\cdot dx}{\sec^2\theta}$$

जहाँ x = a tan θ तब dx = a sec² θ . dθ = $\dfrac{GMm}{\ell a}\left[\sin\theta\right]_{-\ell/2}^{\ell/2}$ $\tan\theta = \dfrac{x}{a}$,

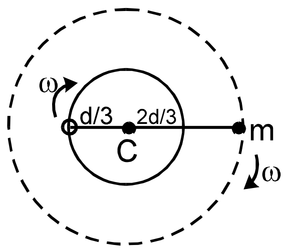
तब $\sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \dfrac{GMm}{\ell a}\left[\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \dfrac{GMm\ell}{\ell a\sqrt{\dfrac{\ell^2}{4}+a^2}} = \dfrac{GMm}{a\sqrt{\dfrac{\ell^2}{4}+a^2}}$

Problem 2. एक द्वितारा निकाय में दो तारे (एक का द्रव्यमान m व दूसरे का द्रव्यमान 2m है) एक दूसरे से d दूरी पर हैं तथा संयुक्त द्रव्यमान केन्द्र के परितः घूर्णन कर रहे हैं, तो घूर्णन काल के लिए व्यंजक ज्ञात करो तथा सिद्ध करो कि उनके द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेगों का अनुपात उनकी गतिज ऊर्जाओं के अनुपात के समान होगा।

Solution : द्रव्यमान केन्द्र C की दूरी द्रव्यमानों 2m व m से क्रमशः d/3 व 2d/3 है। दोनों C के चारों तरफ उनकी कक्षाओं में समान कोणीय चाल ω से घूर्णन करते हैं। प्रत्येक पर दूसरे तारे के कारण आरोपित गुरूत्वाकर्षण बल आवश्यक अभिकेन्द्रिय त्वरण प्रदान करता है।

प्रत्येक तारे पर कार्यरत गुरूत्वाकर्षण बल $\dfrac{G(2m)m}{d^2}$ है। यदि हम छोटे तारे के घूर्णन को देखें तो इस पर अभिकेन्द्रिय बल (m r ω²) का मान $\left[m\left(\dfrac{2d}{3}\right)\omega^2\right]$ होगा और बड़े तारे के लिए यह $\left[\dfrac{2md\omega^2}{3}\right]$ होगा जोकि बराबर है।

$\therefore \quad \dfrac{G(2m)m}{d^2} = m\left(\dfrac{2d}{3}\right)\omega^2$ अर्थात् $\omega = \sqrt{\left(\dfrac{3Gm}{d^3}\right)}$



अर्थात् घूर्णन काल T = $\dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\left(\dfrac{d^3}{3Gm}\right)}$

कोणीय संवेगों का अनुपात होगा :

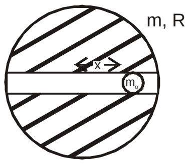
$$\frac{(I\omega)_{बड़ा}}{(I\omega)_{छोटा}} = \frac{I_{बड़ा}}{I_{छोटा}} = \frac{(2m)\left(\frac{d}{3}\right)^2}{m\left(\frac{2d}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

चूंकि ω दोनों के लिए समान है। अतः गतिज ऊर्जाओं का अनुपात होगा :

$$\frac{(\frac{1}{2}I\omega^2)_{बड़ा}}{(\frac{1}{2}I\omega^2)_{छोटा}} = \frac{I_{बड़ा}}{I_{छोटा}} = \frac{1}{2},$$

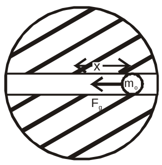
जोकि कोणीय संवेगों के अनुपात के बराबर है।

Problem 3.



पृथ्वी को द्रव्यमान M_e और त्रिज्या R के सममित गोले के समान मान सकते हैं। पृथ्वी के अन्दर एक छोटी सुरंग चित्रानुसार खोदी जाती है। m_o द्रव्यमान का एक कण त्रिज्जीय दूरी x से छोड़ा जाता है। पृथ्वी के कारण कण पर लगने वाला बल ज्ञात करना है। कण की गति को ज्ञात करते हैं और इसका कलान्तर निकालते हैं।

Solution :



कण पर लगने वाले बल का परिमाण = (m_0) (g_{earth})

$= (m_0)\left(\frac{GM_e}{R^3}x\right)$

अतः $F = \left(\frac{GM_e m_0}{R^3}\right)x$

बल F की दिशा, दूरी x के विपरित है अतः $F = -\left(\frac{GM_e m_0}{R^3}\right)x$

अतः $F \alpha - x$, कण की गति, सरल आवर्त गति होगी।

$F = -\left(\frac{GM_e m_0}{R^3}\right)x$

$F = -Kx$

सरल आवर्तगति के समीकरण से इसकी तुलना करने पर बल नियतांक $k = \frac{GM_e m_0}{R^3}$

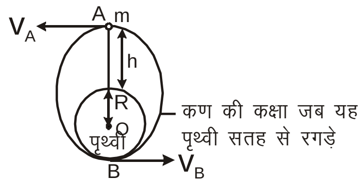
अतः कण का कलान्तर $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_o}{k}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_o}{\frac{GM_e m_0}{R^3}}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

R = 6400km, g = 9.8 m/s^2 का मान रखने पर $T \simeq$ 1hr 24 min.

Problem 4. एक कण को पृथ्वी की सतह से h ऊचाँई से ऊपर की तरफ फेंका जाता है। तो कण के लिए न्यूनतम प्रारम्भिक वेग ज्ञात करो जिसके लिए यह पृथ्वी सतह को गति के दौरान रगड़े तथा इसका पथ दीर्घवृत्ताकार हो एवं पृथ्वी दूर फोकस पर हो तथा प्रक्षेपण बिन्दु उपसौर (apogee) हो तथा व्यास के विपरीत बिन्दु अपसौर (perigee) हो।

Solution : माना पथ के बिन्दुओं A और B पर कण का वेग क्रमशः v_A और v_B है। अतः पृथ्वी के केन्द्र के सापेक्ष बिन्दु A तथा B पर कोणीय संवेग संरक्षण से :



$$mv_A (R + h) = mv_B R \Rightarrow v_B = \frac{v_A(R+h)}{R}$$

तो बिन्दुओं A और B पर न्यूटन का द्वितीय नियम लगाने पर

$$\frac{mv_A^2}{r_A} = \frac{GM_e m}{(R+n)^2} \quad \text{और} \quad \frac{mv^2}{r_B} = \frac{GM_e m}{R^2}$$

$$\Rightarrow \; GM_e m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{(R+h)}\right) = \frac{1}{2}\,(mv_B^2 - mv_A^2)$$

$$= \frac{1}{2}mv_A^2\left[\frac{(R+h)^2}{R^2} - 1\right]$$

$$\therefore v_A^2\,\frac{h(2R+h)}{R^2} = \frac{2GM_e h}{R(R+h)} \qquad \therefore \; v_A = \sqrt{\frac{2GM_e R}{(R+h)(2R+h)}}$$

Problem 5. एक रॉकेट ऊपर की तरफ v_0 चाल से चलता है। चाल v ऊचाँई h के साथ निम्न प्रकार बढ़ती है –

$v_0^2 - v^2 = \dfrac{2hg}{1+\frac{h}{R}}$, यहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या और g पृथ्वी की सतह पर गुरूत्वीय त्वरण है। यदि रॉकेट को पलायन वेग से 0.9 गुना चाल पर प्रक्षेपित किया जाए तो इसके द्वारा प्राप्त की गई अधिकतम ऊँचाई के लिए व्यंजक ज्ञात करो।

Solution : द्रव्यमान m की पृथ्वी की सतह से h ऊचाँई पर स्थितिज ऊर्जा

$$U(R) = -\frac{GMm}{R} \quad \text{और} \quad U(R+h) = -\frac{GMm}{R+h}$$

$$\therefore \; U(R+h) - U(R) = -GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = \frac{GMmh}{(R+h)R} = \frac{mhg}{1+\frac{h}{R}} \quad [\because \; GM = gR^2]$$

स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि गतिज ऊर्जा में कमी के साथ–साथ बढ़ती है। यदि h ऊचाँई पर रॉकेट का वेग v हो तो गतिज ऊर्जा में कमी

$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2$ इस प्रकार, $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \dfrac{mhg}{1+\frac{h}{R}}$, अर्थात् $v_0^2 - v^2 = \dfrac{2gh}{1+\frac{h}{R}}$

माना $h_{\text{अधिकतम}}$ रॉकेट द्वारा प्राप्त की गई अधिकतम ऊचाँई है। यहाँ पर इसका वेग शून्य हो जाता है तो उपरोक्त व्यंजक में v = 0 और $h = h_{\text{अधिकतम}}$ रखने पर प्राप्त व्यंजक

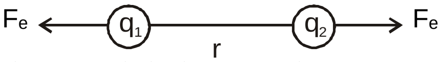
$$v_0^2 = \frac{2gh_{max}}{1+\frac{h_{max}}{R}} \text{ or } v_0^2\left(1+\frac{h_{max}}{R}\right) = 2\,gh_{max} \text{ or } v_0^2 = h_{max}\left(2g - \frac{v_0^2}{R}\right) \text{ or } h_{max} = \frac{v_0^2}{2g - \frac{v_0^2}{R}}$$

अब $v_0 = 0.9 \times$ पलायन वेग $= 0.9 \times \sqrt{(2gR)}$

$$\therefore h_{max} = \frac{(0.9\times0.9)2gR}{2g - \frac{(0.9\times0.9)2gR}{R}} = \frac{1.62gR}{2g - 1.62R} = \frac{1.62R}{0.38} = 4.26\,R$$

स्थिर वैद्युतिकी और गुरूत्वाकर्षण के मध्य तुलनात्मक अध्ययन
(COMPARATIVE STUDY OF ELECTROSTATICS AND GRAVITATION)

स्थिर वैद्युतिकी



दो बिन्दु आवेशों के मध्य लगने वाला बल

$F_e = \frac{kq_1q_2}{r^2}$ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ (आकर्षी या प्रतिकर्षी)

गुरूत्वाकर्षण

दो बिन्दु द्रव्यमानों के बीच लगने वाला गुरूत्वाकर्षण बल

$F_g = \frac{G\,m_1 m_2}{r^2}$ (always attractive)

गुरूत्वाकर्षण में सभी सूत्र स्थिर वैद्युतीक के समान है यहाँ K के स्थान पर G , और m_1 m_2 के स्थान पर q_1, q_2 होगा।

विद्युत क्षेत्र (E) :-

एकांक आवेश पर लगने वाला स्थिर विद्युत बल

$E = \frac{F_e}{q_0}$

यदि किसी आवेश q_0 को विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$, में रखा जाता है, तो इस आवेश पर लगने वाला बल

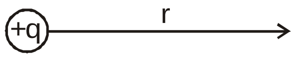
$\vec{F} = q_0\vec{E}$

गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र (g) :-

बिन्दु द्रव्यमान पर लगने वाला गुरूत्वाकर्षण बल $g = \frac{F_g}{m_0}$

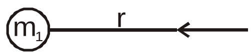
यदि गुरूत्वीय क्षेत्र g में एक m_0 द्रव्यमान रखा हुआ है तब इस द्रव्यमान पर लगने वाला बल $\vec{F}_g = (m_0)\,\vec{g}$

किसी बिन्दु आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र



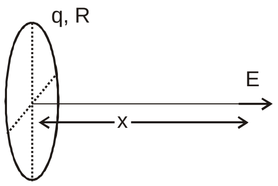
$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ प्रतिकर्षण

बिन्दु द्रव्यमान के कारण लगने वाला गुरूत्वीय क्षेत्र



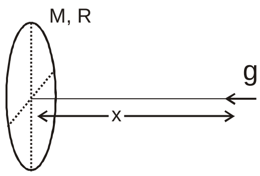
$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r}$ (आकर्षण)

किसी समान आवेशित वलय के कारण विद्युत क्षेत्र



$E = \frac{K\,q\,x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$

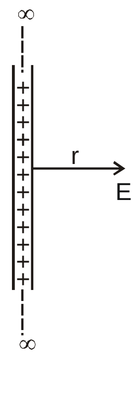
सममित वलय के कारण गुरूत्वीय क्षेत्र



$g = \frac{Gmx}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$

अनन्त लम्बाई वाले तार जिसका रेखीय आवेश घनत्व

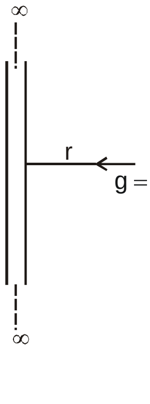
$\lambda = \frac{\text{आवेश}}{\text{लम्बाई}}$



$E = \frac{2k\lambda}{r}$

अनन्त लम्बाई वाले तार जिसका रेखीय आवेश

घनत्व $\lambda = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{लम्बाई}}$ है कि कारण गुरूत्वीय क्षेत्र



$g = \frac{2G\lambda}{r}$

समान आवेशित पतले गोलीय कोश के कारण विद्युत क्षेत्र

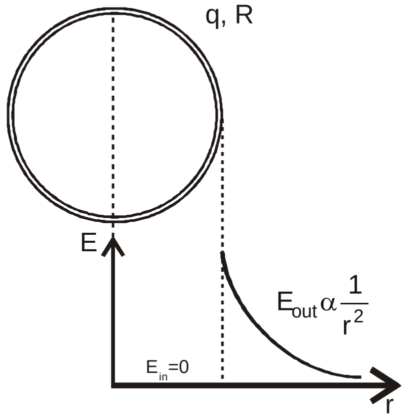
(i) गोले के बाहर विद्युत क्षेत्र (r > R) :

$$\vec{E}_{out} = \frac{kq}{r^2}\hat{r} = \frac{kq}{(\text{केन्द्र से दूरी})^2}$$

(ii) सतह के बाहर विद्युत क्षेत्र

$$\vec{E}_{surface} = \frac{kq}{R^2}\hat{r}$$

(iii) गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र E (r < R) : $E_{in} = 0$



सममित पतले गोलीय कोश के कारण गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र

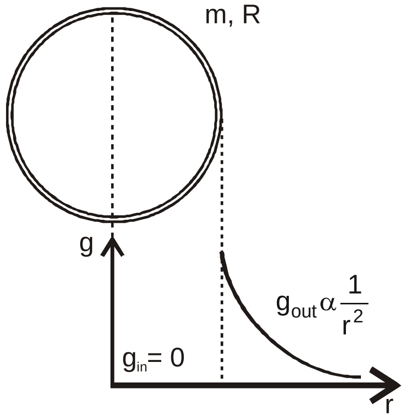
(i) गोले के बाहर गुरूत्वीय क्षेत्र (r > R) :

$$\vec{g}_{out} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r} = \frac{Gm}{(\text{केन्द्र से दूरी})^2}$$

(ii) सतह के बाहर गुरूत्वीय क्षेत्र

$$g_{\text{सतह}} = -\frac{Gm}{R^2}\hat{r}$$

(iii) सतह के अन्दर गुरूत्वीय क्षेत्र (r < R) : $g_{in} = 0$



(चित्र $\vec{g}$ के परिमाण को दर्शाता है)

समान आवेशित ठोस गोले के कारण विद्युत क्षेत्र

(i) गोले के बाहर विद्युत क्षेत्र (r ≥ R)

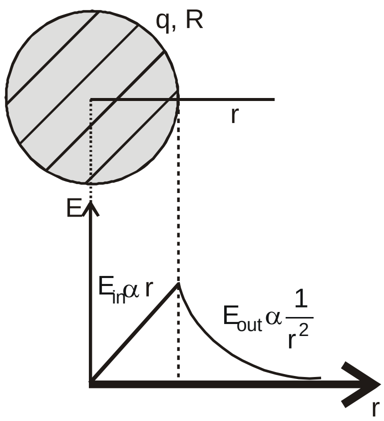
$$E_{\text{बाहर}} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

(ii) गोले की सतह पर विद्युत क्षेत्र (r = R)

$$E_{\text{सतह}} = \frac{kq}{R^2}\hat{r}$$

(iii) गोले के अन्दर विद्युत क्षेत्र (r ≤ R)

$$\vec{E}_{in} = \frac{kq}{R^3}.\vec{r}$$



सममित गोलीय सतह के कारण गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र

(i) गोले के बाहर गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र (r ≥ R)

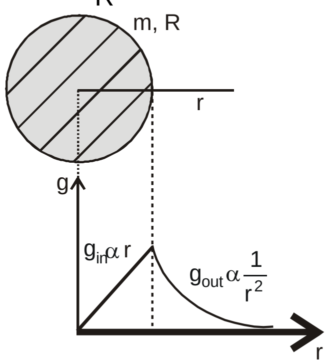
$$g_{\text{बाहर}} = -\frac{Gm}{r^2}\hat{r}$$

(ii) गोले की सतह पर गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र (r = R)

$$g_{\text{सतह}} = -\frac{Gm}{R^2}\hat{r}$$

(iii) गोले के अन्दर गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र (r ≤ R)

$$\vec{g}_{in} = -\frac{Gm}{R^3}.\vec{r}$$



(चित्र $\vec{g}$ के परिमाण को दर्शाता है)

स्थिर विद्युत विभव :

एकांक आवेश को अनन्त से धीरे–धीरे किसी बिन्दु तक लाने पर बाहरी तत्व द्वारा किया गया कार्य

$$V_E = -\int_{r\to\infty}^{r=r} \vec{E}.\vec{dr}$$

तथा विभवान्तर

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}.\vec{dr}$$

गुरूत्वीय विभव :

एकांक द्रव्यमान को अनन्त से किसी बिन्दु तक धीरे–धीरे लाने में बाहरी तत्व द्वारा किया गया कार्य

$$V_g = -\int_{r\to\infty}^{r=r} \vec{g}.\vec{dr}$$

और गुरूत्वाकर्षण विभवान्तर

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{g}.\vec{dr}$$

बिन्दु आवेश के कारण विभव

$$V = -\int_{r\to\infty}^{r=r} \vec{E}.\vec{dr}$$

$$V = -\int_{r\to\infty}^{r=r} \frac{kq}{r^2}\hat{r}.\vec{dr}$$

$$V = -\int_{r\to\infty}^{r=r} \frac{kq}{r^2}dr = \frac{kq}{r}$$

$$V = \frac{kq}{r}$$

बिन्दु द्रव्यमान द्वारा गुरूत्वीय विभव

$$V_g = -\int_{r\to\infty}^{r=r} \vec{g}.\vec{dr}$$

अतः बिन्दु द्रव्यमान के कारण लगने वाला गुरूत्वीय क्षेत्र

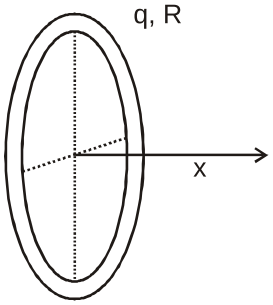
$$\vec{g} = \frac{Gm}{r^2}(-\hat{r})$$

(गुरूत्वीय क्षेत्र हमेशा आकर्षित करता है अतः $(-\hat{r})$ दिशा के लिये उपयोग में लाया गया है।)

$$\Rightarrow \quad V_g = -\int_{r\to\infty}^{r=r} \frac{Gm}{r^2}(-\hat{r}).\vec{dr}$$

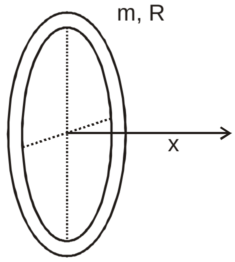
$$\Rightarrow \quad V_g = \int_{r\to\infty}^{r=r} \frac{Gm}{r^2} = -\frac{Gm}{r} \Rightarrow V_g = -\frac{Gm}{r}$$

आवेशित वलय के कारण स्थिर विद्युत विभव



$$V = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

वलय के कारण गुरूत्वीय विभव



$$V_g = -\frac{Gm}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

समान आवेशित पतले गोलीय कोश के कारण स्थिर विद्युत विभव

(i) कोश के बाहर विभव $(r > R)$

$$V_{out} = \frac{kq}{r} = \frac{kq}{(\text{distance from center})}$$

(ii) कोश की सतह पर विभव $(r = R)$

$$V_{surface} = \frac{kq}{R} = \frac{kq}{(\text{गोले की त्रिज्या})}$$

(iii) कोश के अन्दर विभव $(r < R)$

$$V_{in} = \frac{kq}{R} = \frac{kq}{(\text{गोले की त्रिज्या})}$$

सममित गोलीय कोश के कारण गुरूत्वीय क्षेत्र

(i) कोश के बाहर गुरूत्वीय विभव $(r > R)$

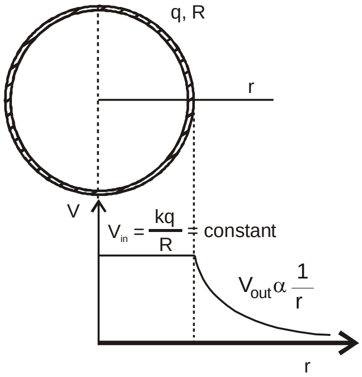
$$V_{out} = -\frac{Gm}{r} = -\frac{Gm}{(\text{distance from centre})}$$

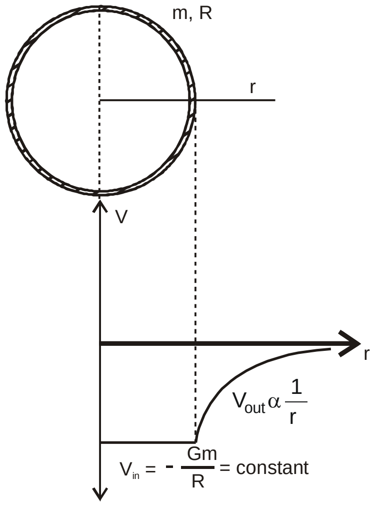
(ii) कोश की सतह पर गुरूत्वीय विभव $(r = R)$

$$V_{surface} = -\frac{Gm}{R} = -\frac{Gm}{(\text{गोले की त्रिज्या})}$$

(iii) कोश के अन्दर गुरूत्वीय विभव $(r < R)$

$$V_{in} = -\frac{Gm}{R} = -\frac{Gm}{(\text{गोले की त्रिज्या})}$$





समान आवेशित ठोस गोले के कारण विद्युत विभव

(i) बाहरी बिन्दु पर विभव (r > R)

$$V_{out} = \frac{kq}{r} = \frac{kq}{(\text{केन्द्र से दूरी})}$$

(ii) गोले की सतह पर विभव (r = R) :-

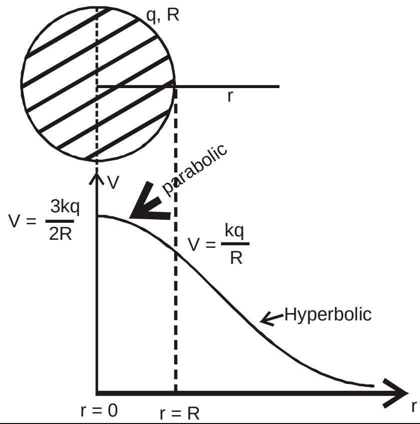
$$V_{surface} = \frac{kq}{R} = \frac{kq}{(\text{केन्द्र से दूरी})}$$

(iii) गोले के अन्दर विभव (r < R)

$$V_{in} = \frac{kq}{2R^3}\ (3R^2 - r^2)$$

(iv) केन्द्र पर विभव (r = 0)

$$V_{\text{केन्द्र}} = \frac{3kq}{2R}$$



सममित ठोस गोले के कारण गुरूत्वीय विभव

(i) बाहरी बिन्दु पर गुरूत्वीय विभव (r > R)

$$V_{out} = -\frac{Gm}{r} = -\frac{Gm}{(\text{केन्द्र से दूरी})}$$

(ii) गोले की सतह पर गुरूत्वीय विभव (r = R)

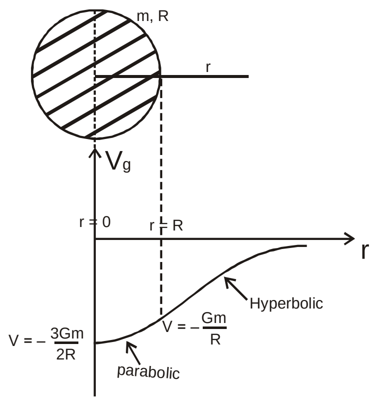
$$V_{surface} = -\frac{Gm}{R} = \frac{Gm}{(\text{केन्द्र से दूरी})}$$

(iii) गोले के अन्दर स्थित बिन्दु पर गुरूत्वीय विभव

$$V_{in} = -\frac{Gm}{2R^3}\ (3R^2 - r^2)$$

(iv) केन्द्र पर गुरूत्वीय विभव (r = 0)

$$V_{\text{केन्द्र}} = -\frac{3Gm}{2R}$$



विद्युत क्षेत्र तथा विद्युत विभव में सम्बन्ध

$$E = -\frac{dV}{dr}$$

यदि V, x, y और z पर निर्भर करता है

तब $\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$

$$g = -\frac{dV_g}{dr}$$

यदि विभव V_g x, y, z पर निर्भर करता है तब

$$\vec{g} = -\left(\frac{\partial V_g}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V_g}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V_g}{\partial z}\hat{k}\right)$$

यदि कोई आवेश q_o विद्युत विभव V में रखा गया है। तब आवेश की वैद्युत स्थितिज ऊर्जा

$U = q_o V$

समान आवेशित पतले गोलीय कोश की स्वतः स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा

$$U_{self} = \frac{Kq^2}{2R}$$

समान आवेशित ठोस गोले की स्व स्थिर वैद्युतीकी

$$U_{self} = \frac{3Kq^2}{5R}$$

यदि एक बिन्दु द्रव्यमान m_o को गुरूत्वीय विभव V_g में रखा गया है, तब गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$U_g = (m_o)(V_g)$

सममित पतले गोलीय कोश की स्वतः गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा है

$$(U_g)_{self} = -\frac{GM^2}{2R}$$

सममित ठोस गोले की स्व गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U_{self} = -\frac{3GM^2}{5R}$$