द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)

"Obvious" is the most dangerous word in mathematics......... Bell, Eric Temple

द्विपद व्यंजक (Binomial expression) :

कोई बीजगणितीय व्यंजक जिसमें दो असमान पद हैं, द्विपदीय व्यंजक कहलाता है।

उदाहरण : $x + y$, $x^2y + \frac{1}{xy^2}$, $3 - x$, $\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{(x^3+1)^{1/3}}$ इत्यादि।

द्विपद प्रमेय में उपयोग की जाने वाली परिभाषाएँ (Terminology used in binomial theorem) :

क्रम गुणित : $\lfloor n$ या $n!$ का उच्चारण क्रम गुणित n है तथा इसे निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है

$$n! = \begin{cases} n(n-1)(n-2)........3\ .\ 2\ .\ 1 & ;\ \text{यदि}\ n \in N \\ 1 & ;\ \text{यदि}\ n = 0 \end{cases}$$

नोट : $n! = n\,.\,(n-1)!\ ;\ n \in N$

${}^nC_r$ का गणितीय अर्थ : पद ${}^nC_r$ भिन्न n वस्तुओं से r वस्तुओं के चयन करने के तरीकों की संख्या को प्रदर्शित करता है।

$${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\ r!},\ n, r \in W,\ 0 \le r \le n$$

नोट : ${}^nC_r$ के दूसरे चिन्ह $\binom{n}{r}$ तथा $C(n, r)$ हैं।

${}^nC_r$ से सम्बन्धित गुणधर्म

(i) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

नोट : यदि ${}^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow$ या तो $x = y$ या $x + y = n$

(ii) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ (iii) $\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$

(iv) ${}^nC_r = \frac{n}{r}\ {}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n(n-1)}{r(r-1)}\ {}^{n-2}C_{r-2} = ... = \frac{n(n-1)(n-2).........(n-(r-1))}{r\ (r-1)(r-2).......2\ .1}$

(v) यदि n और r सह अभाज्य है, तो ${}^nC_r$, n से विभाजित है लेकिन इसका विपरीत सही हो, ये आवश्यक नहीं है।

द्विपद प्रमेय का कथन (Statement of binomial theorem) :

$$(a + b)^n = {}^nC_0\, a^nb^0 + {}^nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}^nC_2\, a^{n-2}b^2 + ... + {}^nC_r\, a^{n-r}b^r + ... + {}^nC_n\, a^0b^n$$

जहाँ $n \in N$

या $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\ a^{n-r}b^r$

नोट : यदि हम ऊपर दिये गए द्विपद प्रसार में $a = 1$ तथा $b = x$ रखते हैं तो

या $(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + ... + {}^nC_r\, x^r + ... + {}^nC_n\, x^n$ या $(1 + x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\ x^r$

उदाहरण # 1 : निम्न द्विपदों का प्रसार करो।

(i) $(x + \sqrt{2})^5$ (ii) $\left(1 - \frac{3x^2}{2}\right)^4$

हल : (i) $(x + \sqrt{2})^5 = {}^5C_0x^5 + {}^5C_1x^4\left(\sqrt{2}\right) + {}^5C_2x^3\left(\sqrt{2}\right)^2 + {}^5C_3\, x^2\left(\sqrt{2}\right)^3 + {}^5C_4x\left(\sqrt{2}\right)^4 + {}^5C_5\left(\sqrt{2}\right)^5$

$= x^5 + 5\sqrt{2}\, x^4 + 20x^3 + 20\sqrt{2} + 20x + 4\sqrt{2}$

(ii) $\left(1-\frac{3x^2}{2}\right)^4 = {}^4C_0 + {}^4C_1\left(-\frac{3x^2}{2}\right) + {}^4C_2\left(-\frac{3x^2}{2}\right)^2 + {}^4C_3\left(-\frac{3x^2}{2}\right)^3 + {}^4C_4\left(-\frac{3x^2}{2}\right)^4$

$$= 1 - 6x^2 + \frac{27}{2}x^4 - \frac{27}{2}x^6 + \frac{81}{16}x^8$$

उदाहरण # 2 : व्यंजक $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{10}$ का प्रथम चार पदों तक प्रसार करो।

हल : $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{10} = {}^{10}C_0\left(\frac{2}{x}\right)^{10} + {}^{10}C_1\left(\frac{2}{x}\right)^9 x + {}^{10}C_2\left(\frac{2}{x}\right)^8 x^2 + {}^{10}C_3\left(\frac{2}{x}\right)^7 x^3 + ...$

अभ्यास कार्य

(1) $\left(2-\frac{y}{3}\right)^6$ के प्रसार में प्रथम तीन पद लिखो।

(2) $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x}\right)^5$ का प्रसार करो।

Ans. (1) $64 - 64y + \frac{80}{3}y^2$ (2) $\frac{x^{10}}{243} + \frac{5}{27}x^7 + \frac{10}{3}x^4 + 30x + \frac{135}{x^2} + \frac{243}{x^5}$.

प्रेक्षण (Observations) :

(i) द्विपद प्रसार $(a + b)^n$ में पदों की संख्या $n + 1$ है।

(ii) प्रत्येक पद में a और b की घातों का योग n है।

(iii) द्विपद प्रसार में शुरूआत और अन्त से समान दूरी पर स्थित पदों के द्विपद गुणांक बराबर होते हैं।
अर्थात् ${}^nC_0 = {}^nC_n$, ${}^nC_1 = {}^nC_{n-1}$ इत्यादि $\{\because {}^nC_r = {}^nC_{n-r}\}$

(iv) द्विपद गुणांक पास्कल के त्रिभुज की सहायता से याद किये जा सकते हैं (इसे पिंगला (Pingla) द्वारा दिया गया Meru Prastra के नाम से भी जाना जाता है।)

Index of the binomial	The binomial coefficient
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

Pascal के त्रिभुज की सहायता से, हम निम्न बिन्दु प्राप्त करते हैं –

(a) त्रिभुज की प्रत्येक पंक्ति 1 से शुरू होती है और 1 से खत्म होती है।

(b) एक पंक्ति में प्रत्येक गुणांक उसके ऊपर वाली पंक्ति के दो गुणांको का योग होता है।

उदाहरण # 3 : $(1 + x^4 - 2x^2)^{15}$ के प्रसार में असमान पदों की संख्या है –

(A) 21 (B) 31 (C) 41 (D) 61

हल : $(1 - x^2)^{30}$ के प्रसार में असमान पदों की संख्या **31** है।

व्यापक पद (General term) :

$(x + y)^n = {}^nC_0\, x^n y^0 + {}^nC_1\, x^{n-1} y^1 + ...+ {}^nC_r\, x^{n-r} y^r + ...+ {}^nC_n\, x^0 y^n$ में

(r + 1) वाँ पद व्यापक पद कहलाता है।

$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r} y^r$

नोट : अन्त से rवाँ पद, शुरूआत से (n – r + 2)वें पद के बराबर है अर्थात् ${}^nC_{n-r+1}\, x^{r-1} y^{n-r+1}$

उदाहरण # 4 : ज्ञात करो (i) $(2x - 3y)^{20}$ के प्रसार में 15वाँ पद (ii) $\left(\frac{3x}{5} - y\right)^7$ के प्रसार में 4वाँ पद

हल : (i) $T_{14+1} = {}^{20}C_{14}\,(2x)^6\,(-3y)^{14} = {}^{20}C_{14}\,2^6\,3^{14}\,x^6.y^{14}$

(ii) $T_{3+1} = {}^{7}C_{3}\left(\frac{3x}{5}\right)^4 (-y)^3 = -{}^{7}C_{3}\left(\frac{3}{5}\right)^4 x^4y^3$

उदाहरण # 5 : $\left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{5}}\right)^{600}$ के प्रसार में परिमेय पदों की संख्या ज्ञात करो।

हल : $\left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{5}}\right)^{600}$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = {}^{600}C_r \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{600-r} \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^r = {}^{600}C_r\, 2^{\frac{600-r}{3}}\, 3^{\frac{r}{5}}$$

यदि 3 और 2 की घात पूर्णांक है, तो दिया गया पद परिमेय होगा –

अर्थात $\frac{600-r}{3}$ और $\frac{r}{5}$ पूर्णांक होने चाहिए।

अतः r के संभव मान {0, 15, 30,45............,600}

अतः परिमेय पदों की संख्या **41** **Ans.**

मध्य पद **(Middle term(s)) :**

(a) यदि n सम हो, तो केवल एक मध्य पद होगा, जो $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ वाँ पद हैं।

(b) यदि n विषम हो, तो दो मध्य पद $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ वें होगें।

उदाहरण # 6 : निम्न के प्रसार में मध्य पद ज्ञात करो

(i) $(1 + 2x)^{12}$ (ii) $\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)^{11}$

हल : (i) $(1 + 2x)^{12}$

यहाँ n सम है, इसलिए मध्य पद $\left(\frac{12+2}{2}\right)$ वाँ पद है।

अर्थात् T_7 मध्य पद है।

$T_7 = {}^{12}C_6\,(2x)^6$

(ii) $\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)^{11}$

यहाँ n विषम है, इसलिए मध्यपद $\left(\frac{11+1}{2}\right)$ वाँ और $\left(\frac{11+1}{2}+1\right)$ वाँ पद होगें।

अर्थात् T_6 एवं T_7 मध्य पद है।

$T_6 = {}^{11}C_5\,(2y)^6\left(-\frac{y^2}{2}\right)^5 = -2\,{}^{11}C_5\,y^{16} \Rightarrow T_7 = {}^{11}C_6\,(2y)^5\left(-\frac{y^2}{2}\right)^6 = \frac{{}^{11}C_6}{2}\,y^{17}$

उदाहरण # 7 : $\left(x^2 - \frac{1}{x^6}\right)^{16}$ के विस्तार में x से स्वतंत्र पद है–

हल : $T_{r+1} = {}^{16}C_r\,(x^2)^{16-r}\left(-\frac{1}{x^6}\right)^r$ x स्वतंत्र पद के लिए x की घात शून्य होनी चाहिए।

$32 - 2r = 6r \quad \Rightarrow \quad r = 4 \quad \therefore T_5$, x से स्वतंत्र पद

$(a + b)^n$, $n \in N$ के प्रसार में महत्तम संख्यात्मक मान वाला पद

(Numerically greatest term in the expansion of $(a + b)^n$, $n \in N$) :

$(a + b)^n$ का द्विपद प्रसार इस प्रकार है–

$(a + b)^n = {}^nC_0\, a^n b^0 + {}^nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}^nC_2\, a^{n-2} b^2 + ... + {}^nC_r\, a^{n-r} b^r + ... + {}^nC_n\, a^0 b^n$

यदि हम a और b के निश्चित मान दायें पक्ष में रखते है, तो द्विपद प्रसार का प्रत्येक पद निश्चित मान रखता है। महत्तम संख्यात्मक मान वाला पद महत्तम संख्यात्मक पद कहलाता है।

माना T_r और T_{r+1} क्रमशः r वें और (r + 1)वें पद हैं।

$T_r = {}^nC_{r-1}\, a^{n-(r-1)}\, b^{r-1}$

$T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, b^r$

अब, $\left|\dfrac{T_{r+1}}{T_r}\right| = \left|\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}\dfrac{a^{n-r}\ b^r}{a^{n-r+1}b^{r-1}}\right| = \dfrac{n-r+1}{r} \cdot \left|\dfrac{b}{a}\right|$

$\left|\dfrac{T_{r+1}}{T_r}\right| \geq 1$ पर विचार कीजिए –

$$\left(\frac{n-r+1}{r}\right)\left|\frac{b}{a}\right| \geq 1 \Rightarrow \frac{n+1}{r} - 1 \geq \left|\frac{a}{b}\right| \Rightarrow r \leq \frac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$$

Case - I जब $\dfrac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ एक पूर्णांक माना (m) है, तो

(i) $T_{r+1} > T_r$ जब $r < m$ $(r = 1, 2, 3 ...., m – 1)$

अर्थात् $T_2 > T_1, T_3 > T_2, ..., T_m > T_{m-1}$

(ii) $T_{r+1} = T_r$ जब $r = m$

अर्थात् $T_{m+1} = T_m$

(iii) $T_{r+1} < T_r$ जब $r > m$ $(r = m + 1, m + 2, ...n)$

अर्थात् $T_{m+2} < T_{m+1}, T_{m+3} < T_{m+2}, ...T_{n+1} < T_n$

निष्कर्ष: जब $\dfrac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ एक पूर्णांक, माना m है, तब T_m और T_{m+1} दोनों अधिकतम संख्यात्मक मान वाले पद हैं (दोनों पद मापांक में समान हैं।)

Case - II

जब $\dfrac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ एक पूर्णांक नहीं है (माना इसके पूर्णांक भाग का मान m है), तो

(i) $T_{r+1} > T_r$ जब $r < \dfrac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ $(r = 1, 2, 3,........, m–1, m)$

अर्थात् $T_2 > T_1, T_3 > T_2, ..., T_{m+1} > T_m$

(ii) $T_{r+1} < T_r$ जब $r > \dfrac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ $(r = m + 1, m + 2, ...n)$

अर्थात् $T_{m+2} < T_{m+1}, T_{m+3} < T_{m+2}, ..., T_{n+1} < T_n$

निष्कर्ष: जब $\dfrac{n+1}{1+\left|\frac{a}{b}\right|}$ एक पूर्णांक नहीं है और इसके पूर्णांक भाग का मान m है, तो T_{m+1} अधिकतम संख्यात्मक मान वाला पद होगा।

नोट : (i) किसी द्विपद प्रसार में, मध्य पद (पदों) महत्तम द्विपद गुणांक है।
$(a + b)^n$ के प्रसार में

यदि n	महत्तम द्विपद गुणांकों की संख्या	महत्तम द्विपद गुणांक
सम	1	$^nC_{n/2}$
विषम	2	$^nC_{(n-1)/2}$ और $^nC_{(n+1)/2}$ (इन दोनों गुणांकों के मान बराबर है)

(ii) महत्तम संख्यात्मक गुणांक वाला पद प्राप्त करने के लिए $a = b = 1$ रखते हैं और उपरोक्त प्रक्रिया का अनुसरण करते हैं।

उदाहरण # 8 : $(7 - 3x)^{25}$ के विस्तार में महत्तम संख्यात्मक मान वाला पद है जबकि $x = \dfrac{1}{3}$

हल : $m = \dfrac{n+1}{1+\left|\dfrac{a}{b}\right|} = \dfrac{25+1}{1+\left|\dfrac{7}{-1}\right|} = \dfrac{26}{8}$

$[m] = 3$ ([m] महत्तम पूर्णांक फलन को व्यक्त करता है।)

$\therefore$ T_4 संख्यात्मक महत्तम पद है।

अभ्यास कार्य :

(3) $\left(x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^9$ के विस्तार में, x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

(4) $(3^{1/7} + 2^{1/2})^{14}$ के प्रसार में सभी परिमेय पदों का योग ज्ञात कीजिए।
(A) 3^2 (B) $3^2 + 5^7$ (C) $3^7 + 5^2$ (D) 5^7

(5) $(1 + x^2 + x^4)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{18}$ के प्रसार में x^{-2} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

(6) $(1 + 3x + 3x^2 + x^3)^{2n}$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

(7) $x = .\dfrac{2}{5}$ के लिए $(2 + 5x)^{21}$ के प्रसार में अधिकतम संख्यात्मक मान वाला पद ज्ञात कीजिए।

Ans. (3) 28.3^7 (4) B (5) –681
(6) $^{6n}C_{3n} . x^{3n}$ (7) $T_{11} = T_{12} = {}^{21}C_{10}\ 2^{21}$

उदाहरण # 9 : प्रदर्शित करो कि $7^n + 5$, 6 से विभाजित हैं, जहाँ n धनात्मक पूर्णांक हैं।

हल : $7^n + 5 = (1 + 6)^n + 5$
$= {}^nC_0 + {}^nC_1 . 6 + {}^nC_2 . 6^2 + ... + {}^nC_n 6^n + 5.$
$= 6. C_1 + 6^2. C_2 + ... + C_n . 6^n + 6.$
$= 6\lambda$, (जहाँ λ धनात्मक पूर्णांक है)
अतः, $7^n + 5$, 6 से भाज्य हैं। .

उदाहरण # 10 : 7^{81} में 5 का भाग देने पर शेषफल ज्ञात करो।

हल : $7^{81} = 7.7^{80} = 7. (49)^{40} = 7 (50 - 1)^{40} = 7 [{}^{40}C_0 (50)^{40} - {}^{40}C_1 (50)^{39} + ... - {}^{40}C_{39} (50)^1 + {}^{40}C_{40} (50)^0]$
$= 5(k) + 7$ (जहाँ k धनात्मक पूर्णांक है) $= 5 (k + 1) + 2$
अतः शेषफल 2 है।

उदाहरण # 11 : $(13)^{12}$ के अन्तिम अंक ज्ञात करो –.

हल : $(13)^{12} = (169)^6 = (170 - 1)^6 = {}^6C_0 (170)^6 - {}^6C_1 (170)^5 + ... - {}^6C_5 (170)^1 + {}^6C_6 (170)^0$
अन्तिम अंक 1 है।

नोट : हम अन्तिम 3 अंक भी ज्ञात कर सकते हैं, जो 481 है।

उदाहरण #12 : $(1.1)^{100000}$ or 10,000 ? और 10,000 में से कौनसी संख्या बड़ी है ?

हल : द्विपद प्रमेय के अनुसार

$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$

$= 1 + {}^{1000000}C_1\,(0.01)$ + अन्य धनात्मक पद

$= 1 + 1000000 \times 0.01$ + अन्य धनात्मक पद

$= 1 + 10000$ + अन्य धनात्मक पद

अत : $(1.01)^{1000000} > 10{,}000$

अभ्यास कार्य :

(8) यदि n एक धनात्मक पूर्णांक है तो सिद्ध करो कि $6^n - 5n - 1$, 25 से विभाजित हैं।

(9) यदि 3^{257} को 80 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल ज्ञात करो।

(10) $(81)^{25.}$ के अन्तिम एक, दो व तीन अंक ज्ञात करो।

(11) $(1.2)^{4000}$ और 800 में से कौनसी संख्या बड़ी हैं।

Ans. (9) 3 (10) 1, 01, 001 (11) $(1.3)^{2000}$.

कुछ मानक प्रसार (Some standard expansions) :

(i) द्विपद प्रसार से हम जानते है

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\; x^{n-r} y^r = {}^nC_0\, x^n y^0 + {}^nC_1\, x^{n-1} y^1 + \ldots\ldots\ldots + {}^nC_r\, x^{n-r} y^r + \ldots\ldots\ldots + {}^nC_n\, x^0 y^n \qquad \ldots(i)$$

(ii) अब y के स्थान पर – y रखने पर –

$$(x - y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\; (-1)^r x^{n-r} y^r = {}^nC_0\, x^n y^0 - {}^nC_1\, x^{n-1} y^1 + \ldots + {}^nC_r\, (-1)^r x^{n-r} y^r + \ldots + {}^nC_n\, (-1)^n x^0 y^n \qquad \ldots(ii)$$

(iii) (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$(x + y)^n + (x - y)^n = 2[{}^nC_0\, x^n y^0 + {}^nC_2\, x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots]$

(iv) (i) में से (ii) को घटाने पर,

$(x + y)^n - (x - y)^n = 2[{}^nC_1\, x^{n-1} y^1 + {}^nC_3\, x^{n-3} y^3 + \ldots\ldots]$

द्विपद गुणांको के गुणधर्म (Properties of Binomial Coefficients) :

$(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots\ldots + C_r x^r + \ldots\ldots + C_n x^n$ ......(1)

जहाँ C_r , ${}^nC_r$ को प्रदर्शित करता है।

(1) $(1 + x)^n$ के प्रसार में द्विपद गुणांकों का योग 2^n होता है।

प्रमेय (1) में x = 1 रखने पर

${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots\ldots + {}^nC_n = 2^n$ ......(2)

या $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r = 2^n$

(2) पुनः (1) में x = –1 रखने पर –

${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n\, {}^nC_n = 0$ ......(3)

या $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} (-1)^r\; {}^nC_r = 0$

(3) विषम स्थानों पर द्विपद गुणांकों का योग, सम स्थानों पर द्विपद गुणांकों के योग के बराबर है और प्रत्येक 2^{n-1} के बराबर होता है।

(2) और (3) से

${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 2^{n-1}$

(4) दो क्रमागत द्विपद गुणांकों का योग

$^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

L.H.S. $= {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \dfrac{n!}{(n-r)!\ r!} + \dfrac{n!}{(n-r+1)!\ (r-1)!}$

$= \dfrac{n!}{(n-r)!\ (r-1)!}\left[\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{n-r+1}\right]$

$= \dfrac{n!}{(n-r)!\ (r-1)!}\ \dfrac{(n+1)}{r(n-r+1)} = \dfrac{(n+1)!}{(n-r+1)!\ r!}$

$= {}^{n+1}C_r$ = R.H.S.

(5) दो क्रमागत द्विपद गुणांको का अनुपात

$$\frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

(6) $^nC_r = \dfrac{n}{r}\ {}^{n-1}C_{r-1} = \dfrac{n(n-1)}{r(r-1)}\ {}^{n-2}C_{r-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-(r-1))}{r\ (r-1)(r-2)\ldots\ldots.2\ .1}$

उदाहरण # 13 : यदि $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_nx^n$, हो तो दर्शाइये।

(i) $C_0 + 4C_1 + 4^2C_2 + \ldots\ldots\ldots. + 4^n C_n = 5^n$.

(ii) $3C_0 + 5C_1 + 7.\ C_2 + \ldots\ldots.. + (2n + 3)\ C_n = 2^n(n + 3)$.

(iii) $C_0 + \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{3} + \dfrac{C_3}{4} + \ldots\ldots... + \dfrac{C_n}{n+1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

हल : (i) $(1 + x)^n = C_0 + C_1\ x + C_2x^2 + \ldots\ldots\ldots.. + C_nx^n$

$x = 4$ रखने पर

$C_0 + 4C_1 + 4^2C_2 + \ldots\ldots\ldots. + 4^n C_n = 5^n$.

(ii) L.H.S. $= 3C_0 + 5C_1 + 7.\ C_2 + \ldots\ldots.. + (2n + 3)\ C_n$

$= \sum\limits_{r=0}^{n}(2r+3)\ .\ {}^nC_r = 2\sum\limits_{r=0}^{n} r.\ {}^nC_r + 3\sum\limits_{r=0}^{n} {}^nC_r$

$= 2n\ \sum\limits_{r=1}^{n} {}^{n-1}C_{r-1} + 3\ \sum\limits_{r=0}^{n} {}^nC_r = 2n\ .\ 2^{n-1} + 3.\ 2^n = 2^n(n + 3)$ RHS

(iii) **I विधि : योगफल से**

L.H.S. $= C_0 + \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{3} + \dfrac{C_3}{4} + \ldots\ldots... + \dfrac{C_n}{n+1}$

$= \sum\limits_{r=0}^{n}\ .\ \dfrac{^nC_r}{r+1} = \dfrac{1}{n+1}\ .\ \sum\limits_{r=0}^{n}\ {}^{n+1}C_{r+1}$ $\quad \left\{\dfrac{n+1}{r+1}\ .\ {}^nC_r = {}^{n+1}C_{r+1}\right\} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ R.H.S.

II विधि : समाकल से

$(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots\ldots + C_n\ x^n$.

दोनो तरफ समाकलन करके सीमा 0 से 1 रखने पर

$$\left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \left[C_0x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2\frac{x^3}{3} + \ldots.. + C_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \left(C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots.. + \frac{C_n}{n+1}\right) - 0$$

$C_0 + \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{3} + \dfrac{C_3}{4} + \ldots\ldots.. + \dfrac{C_n}{n+1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ सिद्ध।

उदाहरण # 14 : यदि $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ...+ C_nx^n$, हो तो सिद्ध कीजिए
(i) $C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + ... + C_{n-1}\, C_n = {}^{2n}C_{n-1}$ or ${}^{2n}C_{n+1}$
(ii) $1^2 . C_1^{\,2} + 2^2 . C_2^{\,2} + 3^2 . C_3^{\,2} + ... + n^2 C_n^{\,2} . = n^2 . {}^{2n-2}C_{n-1}$

हल : (i) $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_n x^n$. ....(i)
$(x + 1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + ... + C_n x^0$ ....(ii)
(i) और (ii) को गुणा करने पर
$(C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n)\,(C_0x^n + C_1x^{n-1} + ... + C_nx^0) = (1 + x)^{2n}$
x^{n-1} के गुणांक की तुलना करने पर
$C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + ... + C_{n-1}\, C_n = {}^{2n}C_{n-1}$ or ${}^{2n}C_{n+1}$

(ii) $(1 + x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_n x^n$. ....(i)
x के सापेक्ष अवकलन करने पर
$n(1 + x)^{n-1} = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + ... + nC_n x^{n-1}$.
x से गुणा करने पर
$n\, x(1 + x)^{n-1} = C_1x + 2C_2x^2 + 3C_3x^3 + ... + nC_n x^n$
x के सापेक्ष अवकलन करने पर
$n(1 + x)^{n-1} + n\,(n-1)x.(1+x)^{n-2} = 1^2C_1 + 2^2C_2x + 3^2C_3x^2 + ... + n^2C_nx^{n-1}$ ....(ii)
$(x + 1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + ... + C_n x^0$ ....(iii)
(ii) और (iii) को गुणा करके x^{n-1} के गुणांक की तुलना करने पर
$1^2 . C_1^{\,2} + 2^2 . C_2^{\,2} + 3^2 . C_3^{\,2} + ... + n^2 C_n^{\,2} . = n\left({}^{2n-1}C_{n-1} - {}^{2n-2}C_{n-2}\right) + n^2\, {}^{2n-2}C_{n-2}$
$= n^2\, {}^{2n-2}C_{n-1}$ = R.H.S.

उदाहरण # 15 : दी गई श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए –
(i) ${}^mC_m + {}^{m+1}C_m + {}^{m+2}C_m + ... + {}^nC_m$
(ii) ${}^nC_3 + 2 . {}^{n+1}C_3 + 3. {}^{n+2}C_3 + ... + n . {}^{2n-1}C_3$

हल: (i) प्रथम विधि : गुणधर्म ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ के प्रयोग से
${}^mC_m + {}^{m+1}C_m + {}^{m+2}C_m + ... + {}^nC_m$
$= \underbrace{{}^{m+1}C_{m+1} + {}^{m+1}C_m} + {}^{m+2}C_m + ... + {}^nC_m$ $\{\because {}^mC_m = {}^{m+1}C_{m+1}\}$
$= \underbrace{{}^{m+2}C_{m+1} + {}^{m+2}C_m} + ... + {}^nC_m$
$= {}^{m+3}C_{m+1} + ... + {}^nC_m = {}^nC_{m+1} + {}^nC_m = \mathbf{{}^{n+1}C_{m+1}}$

द्वितीय विधि
${}^mC_m + {}^{m+1}C_m + {}^{m+2}C_m + ... + {}^nC_m$
निम्न के प्रसार में x^m का गुणांक, ही उपरोक्त श्रेणी है।
$(1 + x)^m + (1 + x)^{m+1} + ... + (1 + x)^n$
माना $S = (1 + x)^m + (1 + x)^{m+1} + ... + (1 + x)^n$
$$= \frac{(1+x)^m\left[(1+x)^{n-m+1} - 1\right]}{x} = \frac{(1+x)^{n+1} - (1+x)^m}{x}$$
$= \dfrac{(1+x)^{n+1}}{x} - \dfrac{(1+x)^m}{x}$ में x^m का गुणांक $= {}^{n+1}C_{m+1} + 0 = {}^{n+1}C_{m+1}$

(ii) ${}^nC_3 + 2 . {}^{n+1}C_3 + 3 . {}^{n+2}C_3 + ... + n . {}^{2n-1}C_3$
उपरोक्त श्रेणी, निम्नलिखित प्रसार में x^3 का गुणांक ही है।
$(1 + x)^n + 2 . (1 + x)^{n+1} + 3 . (1 + x)^{n+2} + ... + n . (1 + x)^{2n-1}$
माना $S = (1 + x)^n + 2 . (1 + x)^{n+1} + 3. (1 + x)^{n+2} + ... + n\,(1 + x)^{2n-1}$ .....(i)
$(1 + x)S = (1 + x)^{n+1} + 2\,(1 + x)^{n+2} + ... + (n - 1)\,(1 + x)^{2n-1} + n(1 + x)^{2n}$ ....(ii)
(i) में से (ii) को घटाने पर
$-xS = (1 + x)^n + (1 + x)^{n+1} + (1 + x)^{n+2} + ... + (1 + x)^{2n-1} - n(1 + x)^{2n}$

$= \dfrac{(1+x)^n\left[(1+x)^n-1\right]}{x} - n\,(1+x)^{2n}$

$S = \dfrac{-(1+x)^{2n}+(1+x)^n}{x^2} + \dfrac{n(1+x)^{2n}}{x}$

$x^3 : S$ (S में x^3 का गुणांक)

$x^3 : \dfrac{-(1+x)^{2n}+(1+x)^n}{x^2} + \dfrac{n(1+x)^{2n}}{x}$

अतः दी गई श्रेणी का योग होगा $-{}^{2n}C_5 + {}^{n}C_5 + n \, . \, {}^{2n}C_4$

उदाहरण # 16 : सिद्ध करो कि $C_1 - C_3 + C_5 - .... = 2^{n/2} \sin \dfrac{n\pi}{4}$.

हल : हम जानते है $(1 + x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_n x^n$ ....(i)

(i) में $x = -i$ रखने पर

$(1 - i)^n = C_0 - C_1 i - C_2 + C_3 i + C_4 + ...\ (-1)^n C_n i^n$

या $2^{n/2}\left[\cos\left(-\dfrac{n\pi}{4}\right) + i \ \sin\ \left(-\dfrac{n\pi}{4}\right)\right] = (C_0 - C_2 + C_4 - ....) - i\,(C_1 - C_3 + C_5 - ......)$ ....(ii)

(ii) में काल्पनिक भाग की तुलना करने पर, $C_1 - C_3 + C_5 - .... = 2^{n/2} \sin \dfrac{n\pi}{4}$.

अभ्यास कार्य :

(12) सिद्ध करो कि –

(i) $5C_0 + 7C_1 + 9C_2 + ... + (2n + 5)\, C_n = 2^n\,(n + 5)$

(ii) $4C_0 + \dfrac{4^2}{2} . C_1 + \dfrac{4^3}{3}\ C_2 + ... + \dfrac{4^{n+1}}{n+1} C_n = \dfrac{5^{n+1}-1}{n+1}$

(iii) ${}^{n}C_0 \,.\, {}^{n+1}C_n + {}^{n}C_1 \,.\, {}^{n}C_{n-1} + {}^{n}C_2 \,.\, {}^{n-1}C_{n-2} + ... + {}^{n}C_n \,.\, {}^{1}C_0 = 2^{n-1}\,(n + 2)$

(iv) ${}^{2}C_2 + {}^{3}C_2 + ... + {}^{n}C_2 = {}^{n+1}C_3$

ऋणात्मक तथा भिन्नात्मक घातों के लिए द्विपद प्रमेय
(Binomial theorem for negative and fractional indices)

यदि $n \in R$ तब,

$(1 + x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2\ !}\ x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\ !}\ x^3 + ...$

$.................. + \dfrac{n(n-1)(n-2).......(n-r+1)}{r\ !}\ x^r + ... \infty.$

टिप्पणी

(i) यदि $|x| < 1$ हो, तो उपरोक्त प्रसार, पूर्ण संख्याओं के अलावा प्रत्येक परिमेय संख्या के लिए सत्य होता हैं।

(ii) घात n का मान ऋणात्मक पूर्णांक अथवा भिन्न होने पर, उपरोक्त प्रसार में पदों की संख्या अनन्त होती है और तब व्यापक पद के गुणांक को ${}^{n}C_r$ से नहीं दर्शाया जा सकता।

(iii) प्रसार में पहला पद 1 होना चाहिए यदि घात n एक ऋणात्मक पूर्णांक या भिन्न है।

$$(x + y)^n = \left[\begin{array}{l} x^n\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^n = x^n\left\{1+n\ .\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{n\ (n-1)}{2\ !}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+.....\right\}\ \text{if}\ \left|\dfrac{y}{x}\right|<1 \\ \\ y^n\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^n = y^n\left\{1+n\ .\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{n\ (n-1)}{2\ !}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+.....\right\}\ \text{if}\ \left|\dfrac{x}{y}\right|<1 \end{array}\right.$$

(iv) $(1 + x)^n$ के प्रसार में सामान्य पद $T_{r+1} = \dfrac{n(n-1)(n-2).........(n-r+1)}{r\ !}\ x^r$ है।

(v) जब 'n' पूर्ण संख्या के अलावा कोई परिमेय संख्या है तब $(1 + x)^n$ का अनुमानित मान $1 + nx$ है।
(x^2 और उच्च घातों को नगण्य मानने पर)

(vi) कुछ महत्त्वपूर्ण प्रसार ($|x| < 1$)

(a) $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^r x^r + ...\infty$

(b) $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^r + ...\infty$

(c) $(1 + x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ... + (-1)^r (r + 1) x^r + ...\infty$

(d) $(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + (r + 1)x^r + ... \infty$

उदाहरण # 17 : सिद्ध करो कि $(1 - x)^{-n}$ के प्रसार में x^r का गुणांक ${}^{n+r-1}C_r$ है।

हल: $(1 - x)^{-n}$ के प्रसार में $(r + 1)$ वें पद को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$T_{r+1} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)......(-n-r+1)}{r\,!}(-x)^r$$

$$= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)......(n+r-1)}{r\,!}(-x)^r = \frac{n(n+1)(n+2)......(n+r-1)}{r\,!}x^r$$

$$= \frac{(n-1)!\ n(n+1)......(n+r-1)}{(n-1)\,!\ r\,!}x^r$$ अतः x^r का गुणांक $\dfrac{(n+r-1)!}{(n-1)!\ r!} = {}^{n+r-1}C_r$

उदाहरण #18 : यदि **x** इतना कम है कि इसका वर्ग और उच्च घातों को नगण्य माना जा सकता है, तो $\dfrac{(1-2x)^{1/3}+(1+5x)^{-3/2}}{(9+x)^{1/2}}$ का मान ज्ञात करो।

हल :

$$\frac{(1-2x)^{1/3}+(1+5x)^{-3/2}}{(9+x)^{1/2}} = \frac{1-\frac{2}{3}x+1-\frac{15x}{2}}{3\left(1+\frac{x}{9}\right)^{1/2}} = \frac{1}{3}\left(2-\frac{49}{6}x\right)\left(1+\frac{x}{9}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2-\frac{49}{6}x\right)\left(1-\frac{x}{18}\right) = \frac{1}{2}\left(2-\frac{x}{9}-\frac{49}{6}x\right) = 1-\frac{x}{18}-\frac{49}{12}x = 1-\frac{149}{36}x$$

अभ्यास कार्य :

(13) x के मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिये, जिसके लिए $(3 - 2x)^{1/2}$ का प्रसार x की बढ़ती हुई घातों में वैद्य हैं।

(14) यदि $y = \frac{2}{5} + \frac{1.3}{2\,!}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3\,!}\left(\frac{2}{5}\right)^3 + ...$ हो, तो $y^2 + 2y$ का मान ज्ञात कीजिए।

(15) $\dfrac{2-3x}{(1-x)^3}$ में x^{50} का गुणांक ज्ञात करो।

(A) 500 (B) 1000 (C) –1173 (D) 1173

Ans. (13) $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (14) 4 (15) C

बहुपदीय प्रमेय (Multinomial Theorem) :

हम जानते हैं कि द्विघात प्रमेय –

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\ x^{n-r}\, y^r = \sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!\ r!}x^{n-r}\,y^r$$

$n - r = r_1$, $r = r_2$ रखने पर

$$(x + y)^n = \sum_{r_1+r_2=n}\frac{n!}{r_1!\ r_2!}x^{r_1}\,.\,y^{r_2}$$

$(x + y)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $r_1 + r_2 = n$ के अऋणात्मक पूर्णांक हलों की संख्या के बराबर है।
अर्थात् ${}^{n+2-1}C_{2-1} = {}^{n+1}C_1 = n + 1$

इसी प्रकार बहुपदीय प्रमेय को निम्न रूप में लिखा जा सकता हैं–

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... x_k)^n = \sum_{r_1+r_2+...+r_k=n} \frac{n!}{r_1!\ r_2!...\ r_k!}\ x_1^{r_1}\ .\ x_2^{r_2}...x_k^{r_k}$$

यहाँ $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$ के अऋणात्मक पूर्णांक हलों की संख्या के बराबर हैं। अर्थात् ${}^{n+k-1}C_{k-1}$

उदाहरण # 19 : $(a - b - c + d)^{10}$ के प्रसार में $a^2 b^3 c^4 d$ का गुणांक ज्ञात करो।

हल : $$(a - b - c + d)^{10} = \sum_{r_1+r_2+r_3+r_4=10} \frac{(10)!}{r_1!\ r_2!r_3!\ r_4!} (a)^{r_1}\ (-b)^{r_2}\ (-c)^{r_3}\ (d)^{r_4}$$

$a^2 b^3 c^4 d$ का गुणांक ज्ञात करने के लिये स्पष्टतः $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4, r_4 = 1$

$\therefore$ $a^2 b^3 c^4 d$ का गुणांक $\dfrac{(10)!}{2!\ 3!\ 4!\ 1!} (-1)^3 (-1)^4 = -12600$ Ans.

उदाहरण # 20 : $\left(1+x+\dfrac{7}{x}\right)^{11}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिये।

हल : $$\left(1+x+\frac{7}{x}\right)^{11} = \sum_{r_1+r_2+r_3=11} \frac{(11)!}{r_1!\ r_2!\ r_3!} (1)^{r_1}\ (x)^{r_2}\ \left(\frac{7}{x}\right)^{r_3}$$

अब दी गई घात 11 को, दिये गये चर आधारों 1, x एवं $\dfrac{7}{x}$ में इस प्रकार वितरित करते है कि हमें x^0 प्राप्त हो।

अतः इस वितरण हेतु (r_1, r_2, r_3) सम्भव समुच्चय (11, 0, 0), (9, 1, 1), (7, 2, 2), (5, 3, 3), (3, 4, 4), (1, 5, 5) होगें।

अतः अभीष्ठ पद होगा –

$$\frac{(11)!}{(11)!}(7^0) + \frac{(11)!}{9!\ 1\ !1\ !} 7^1 + \frac{(11)!}{7!\ 2\ !\ 2\ !} 7^2 + \frac{(11)!}{5!\ 3\ !\ 3\ !} 7^3 + \frac{(11)!}{3!\ 4\ !\ 4\ !} 7^4 + \frac{(11)!}{1\ !\ 5\ !\ 5\ !} 7^5$$

$$= 1 + \frac{(11)!}{9\ !\ 2\ !} . \frac{2\ !}{1\ !\ 1\ !} 7^1 + \frac{(11)!}{7\ !\ 4\ !} . \frac{4\ !}{2\ !\ 2\ !} 7^2 + \frac{(11)\ !}{5\ !\ 6\ !} . \frac{6\ !}{3\ !\ 3\ !} 7^3$$

$$+ \frac{(11)\ !}{3\ !\ 8\ !} . \frac{8\ !}{4\ !\ 4\ !} 7^4 + \frac{(11)\ !}{1\ !\ 10\ !} . \frac{(10)\ !}{5\ !\ 5\ !} 7^5$$

$$= 1 + {}^{11}C_2 . {}^{2}C_1 . 7^1 + {}^{11}C_4 . {}^{4}C_2 . 7^2 + {}^{11}C_6 . {}^{6}C_3 . 7^3 + {}^{11}C_8 . {}^{8}C_4 . 7^4 + {}^{11}C_{10} . {}^{10}C_5 . 7^5$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{5} {}^{11}C_{2r} . {}^{2r}C_r . 7^r$$

अभ्यास कार्य :

(16) $(a + b + c + d + e)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या हैं –

(A) ${}^{n+4}C_4$ (B) ${}^{n+3}C_n$ (C) ${}^{n+5}C_n$ (D) $n + 1$

(17) $(x - 2y - 3z)^7$ में $x^2 y^3 z^1$ का गुणांक ज्ञात करो।

(18) $(2x^2 - x - 3)^9$ में x^{17} का गुणांक ज्ञात करो।

Ans. (16) A (17) $\dfrac{7!}{2!\ 3!\ 1!}$ 24 (18) 2304