High Level Problems (HLP)

1. सिद्ध कीजिए कि –

(i) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$ (ii) $\dfrac{\cot^2\theta \quad (\sec\theta - 1)}{1+\sin\theta} = \sec^2\theta\,\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sec\theta}$.

2. व्यंजक $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$ को सरल कीजिए।

3. माना कि अन्तराल $[0, \pi]$ में संख्याऐं a, b, c, d इस प्रकार है

$\sin a + 7\sin b = 4(\sin c + 2\sin d)$,

$\cos a + 7\cos b = 4(\cos c + 2\cos d)$

तो सिद्ध कीजिए कि $2\cos(a - d) = 7\cos(b - c)$

4. सिद्ध कीजिए कि $(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \tan 9^\circ$

5. यदि $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{4}{5}$; $\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{5}{13}$ और α, β अन्तराल 0 तथा $\dfrac{\pi}{4}$ के मध्य हो, तो $\tan 2\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि समीकरण $a\tan\theta + b\sec\theta = c$ के दो भिन्न–भिन्न मूल α और β हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{2ac}{a^2 - c^2}$.

7. यदि $\tan\alpha = \dfrac{p}{q}$ जहाँ $\alpha = 6\beta$, α एक न्यून कोण है तो सिद्ध कीजिए कि

$\dfrac{1}{2}(p\,\mathrm{cosec}\,2\beta - q\sec 2\beta) = \sqrt{p^2 + q^2}$

8. यदि $\sin(\theta + \alpha) = a$ और $\sin(\theta + \beta) = b$ $(0 < \alpha, \beta, \theta < \pi/2)$ हो, तो $\cos 2(\alpha - \beta) - 4ab\cos(\alpha - \beta)$ का मान ज्ञात कीजिये।

9. प्रदर्शित कीजिए कि –

(i) $\cot 7\dfrac{1^\circ}{2}$ या $\tan 82\dfrac{1^\circ}{2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$ या $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6}$

(ii) $\tan 142\dfrac{1^\circ}{2} = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$

10. यदि $\tan\beta = \dfrac{\tan\alpha + \tan\gamma}{1 + \tan\alpha\,.\tan\gamma}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin 2\beta = \dfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\gamma}{1 + \sin 2\alpha\,.\sin 2\gamma}$

11. यदि α एवं β समीकरण $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta = c$ को संतुष्ट करते हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{a^2 + ac + b^2}{a^2 + b^2}$.

12. प्रदर्शित कीजिए कि : $4\sin 27^\circ = (5 + \sqrt{5})^{1/2} - (3 - \sqrt{5})^{1/2}$

13. यदि $xy + yz + xz = 1$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{y}{1-y^2} + \dfrac{z}{1-z^2} = \dfrac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$.

14. माना कि $a = \frac{\pi}{7}$ हो, तो –

(a) दर्शाइये कि $\sin^2 3a - \sin^2 a = \sin 2a \sin 3a$

(b) दर्शाइये कि $\text{cosec } a = \text{cosec } 2a + \text{cosec } 4a$

(c) $\cos a - \cos 2a + \cos 3a$ का मान ज्ञात कीजिए।

(d) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ का एक मूल $\cos a$ है।

(e) $\tan a \tan 2a \tan 3a$ का मान ज्ञात कीजिए।

(f) $\tan^2 a + \tan^2 2a + \tan^2 3a$ का मान ज्ञात कीजिए।

(g) $\tan^2 a \tan^2 2a + \tan^2 2a \tan^2 3a + \tan^2 3a \tan^2 a$ का मान ज्ञात कीजिए।

(h) $\cot^2 a + \cot^2 2a + \cot^2 3a$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. एक त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए कि $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$

16. सरल कीजिए $\cos a \cos 2a \cos 3a..........\cos 999a$, जहाँ $a = \frac{2\pi}{1999}$

$\cos a \cos 2a \cos 3a..........\cos 999a$, का मान ज्ञात कीजिए, जबकि $a = \frac{2\pi}{1999}$

17. सिद्ध कीजिए कि संख्याओं $2 \sin 2^o, 4 \sin 4^o, 6 \sin 6^o, ...180 \sin 180^o$ का औसत $\cot 1^o$ है।

18. हल कीजिए $\tan 2\theta = \tan \frac{2}{\theta}$.

19. समीकरण $5 \sin x \cos y = 1$, $4 \tan x = \tan y$ को संतुष्ट करने वाले x और y के व्यापक मान ज्ञात कीजिये।

20. हल कीजिए $\frac{\sin^3 \frac{x}{2} - \cos^3 \frac{x}{2}}{2 + \sin x} = \frac{\cos x}{3}$

21. निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिये।

$x + y = \frac{2\pi}{3}$, $\sin x + \sin y = \frac{3}{2}$ और $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

22. निम्नलिखित समीकरण निकाय को x और y के लिए हल कीजिये–

$4^{\sin x} + 3^{1/\cos y} = 11$

$5.16^{\sin x} - 2.3^{1/\cos y} = 2$

23. हल कीजिए: $\cos\theta + \sin\theta = \cos 2\theta + \sin 2\theta$.

24. हल कीजिए $8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$

25. समीकरण $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x + 0.375 = 0$ को हल कीजिए।

26. समीकरण $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \cos x = \cos^2 x$ को हल कीजिए

27. समीकरण $\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x + \frac{3}{4} \sin^2 2x = 0$ को हल कीजिए।

28. समीकरण $\sqrt{13-18\tan x} = 6\tan x - 3$, जहाँ $-2\pi < x < 2\pi$ को हल कीजिए।

29. समीकरण $3 - 2\cos\theta - 4\sin\theta - \cos 2\theta + \sin 2\theta = 0$ को हल कीजिए।

30. समीकरण $\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cos^4 x$ को हल कीजिए।

31. सिद्व कीजिए : $\cos 5A = 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A$

32. यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ तथा $\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(a^k + \frac{1}{a^k}\right)$ हो, तब 50 से छोटी प्राकृत संख्या k के मानों की संख्या है (दिया गया है $a \in R$)

33. $0 \le \theta \le 2\pi$ के लिए माना कि समीकरण $\left(\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta\right)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2\theta\right)$ यदि θ का अधिकतम मान $\frac{k\pi}{p}$ (जहाँ k, p सहअभाज्य संख्या है), तब (k + p) का मान ज्ञात कीजिए।

Answers

2. $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ **5.** $\frac{56}{33}$ **8.** $1 - 2a^2 - 2b^2$

14. (c) $\frac{1}{2}$ (e) $\sqrt{7}$ (f) 21 (g) 35 (h) 5

16. $\frac{1}{2^{999}}$ **18.** $\frac{n\pi}{4} \pm \sqrt{1+\frac{n^2\pi^2}{16}}$, $n \in I$

20. $x = (4n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in I$ **21.** $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{6}$ or $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{2}$.

22. $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, $y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ **23.** $2n\pi$, $n \in I$ or $\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$, $n \in I$

24. $x = n\pi + \frac{\pi}{6}$, $n \in I$, $x = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, $n \in I$ **25.** $x = \frac{n\pi}{4} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{24}$; $n \in I$

26. $x = (2n+1)\pi : n \in I$, $x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$, $n \in I$ **27.** $x = n\pi \pm \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(2 - \sqrt{5}\right)$, $n \in I$

28. $\alpha - 2\pi;\ \alpha - \pi,\ \alpha,\ \alpha + \pi$, where $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ **29.** $\theta = (4n+1)\pi/2$, $\theta = 2n\pi$, $n \in I$

30. $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in I$ **32.** 25 **33.** 31