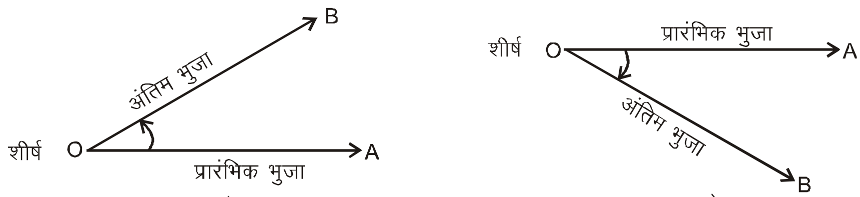
त्रिकोणमितीय (Trigonometry)

When writing about transcendental issues, be transcendentally clear....... Descartes, Rene

शब्द 'त्रिकोणमिति' दो ग्रीक अक्षरों 'त्रिकोण' तथा 'मिति' से मिलकर बना है। तथा इसका अर्थ होता है – ''एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों का मापन'',

कोण (Angle) :

कोण दी गई किरण के प्रारम्भिक बिन्दु के सापेक्ष घुमाव की माप है। वास्तविक किरण प्रारम्भिक भुजा और किरण की घूर्णन के बाद अंतिम स्थिति कोण की अन्तिम भुजा कहलाती है। घुर्णन बिन्दु शीर्ष कहलाता है। यदि घुमाव की दिशा वामावर्त (anticlockwise) है, तो कोण धनात्मक होता है तथा यदि घुमाव की दिशा दक्षिणावर्त (clockwise) है, तो कोण ऋणात्मक होता है।



(i) धनात्मक कोण (वामावर्त मापन)　　(ii) ऋणात्मक कोण (दक्षिणावर्त मापन)

कोण के मापन की पद्धतियाँ (Systems For Measurement of Angles) :

एक कोण निम्न पद्धतियों में मापा जा सकता है।

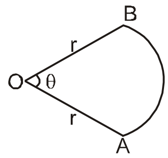
रेडियन, डिग्री और ग्रेड मे मध्य सम्बन्ध (Relation between radian, degree and grade) :

From \ To	षाष्टिक–पद्धति (ब्रिटिश–पद्धति)	शतिक–पद्धति (फ्रेंच– पद्धति)	वृत्तीय पद्धति (Circular System (Radian Measurement))
षाष्टिक–पद्धति (ब्रिटिश–पद्धति)		1 डिग्री = $\frac{400}{360}$ ग्रेड	1 डिग्री (1°) = $\frac{\pi}{180}$ रेडियन 1 min (1′)= $\frac{1}{60}$ डिग्री (1° = 60′) 1 sec(1″) = $\frac{1}{60}$ min (1′ = 60″)
शतिक–पद्धति (फ्रेंच– पद्धति)	1 ग्रेड = $\frac{360}{400}$ डिग्री		
वृत्तीय पद्धति (Circular System (Radian Measurement))	1 रेडियन = $\frac{180}{\pi}$ डिग्री 1 डिग्री = 60 min (1°=60′) 1 min = 60 sec (1′ = 60″)	1 रेडियन = $\frac{200}{\pi}$ ग्रेड 1 ग्रेड =100 min(1^g = 100') 1 min = 100 sec(1' =100")	

नोट : यदि कोई चिन्ह न दिया हो जबकि कोण की माप हो, तो यह माना जा सकता है कि यह माप रेडियन में है
उदाहरणार्थ $\theta = 15$ $\Rightarrow$ 15 रेडियन

वृत्तीय भाग का क्षेत्रफल :

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} r^2\theta$ वर्ग इकाई



न्यूनकोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios for Acute Angles) :

माना एक घूर्णित किरण OP, OA से प्रारम्भ होती है, और OP की स्थिति तक घूमती है, इस प्रकार कोण AOP बनता है।

घूर्णित किरण में एक बिन्दु P लें और P से प्रारम्भिक किरण OA पर लम्ब PM खींचें।

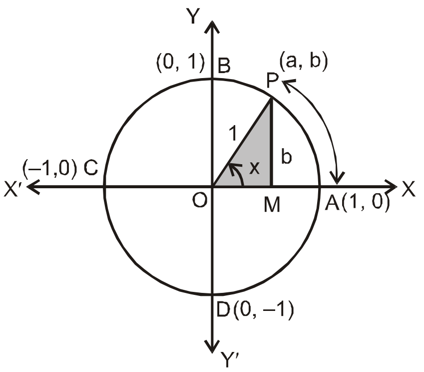
समकोण त्रिभुज MOP में OP विकर्ण है, PM लम्ब तथा OM आधार है,

$\sin(\angle AOP)$	$\cos(\angle AOP)$	$\tan(\angle AOP)$	$\cot(\angle AOP)$	$\sec(\angle AOP)$	$\text{cosec}(\angle AOP)$
$\frac{\text{Perp}}{\text{Hyp}} = \frac{MP}{OP}$	$\frac{\text{Base}}{\text{Hyp}} = \frac{OM}{OP}$	$\frac{\text{Perp}}{\text{Base}} = \frac{MP}{OM}$	$\frac{\text{Base}}{\text{Perp}} = \frac{OM}{MP}$	$\frac{\text{Hyp}}{\text{Base}} = \frac{OP}{OM}$	$\frac{\text{Hyp}}{\text{Prep}} = \frac{OP}{MP}$

सभी त्रिकोणमितिय अनुपात वास्तविक संख्याएँ है। संक्षिप्त में इन आठ अनुपातों को क्रमशः इस प्रकार लिखा जा सकता है–

कोण $\theta \in R$ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात :

अब हम त्रिकोणमितीय अनुपात की परिभाषा को एक कोण रेडियन के सन्दर्भ में आगे बढ़ाते हैं और उन्हें त्रिकोणमितीय फलन के रूप में अध्ययन करते हैं। (वृत्तीय फलन) माना एक इकाई वृत्त (त्रिज्या 1 इकाई) है, जिसका केन्द्र नर्देशांक अक्षों का मूलबिन्दु है। माना P(a, b) वृत्त पर कोई बिन्दु इस प्रकार है कि कोण AOP = x रेडियन अर्थात् इस प्रकार चाप AP की लम्बाई = x से हम $\cos x = a$ और $\sin x = b$ को परिभाषित करते हैं। चूँकि OMP एक समकोण त्रिभुज है अतः $OM^2 + MP^2 = OP^2$ या $a^2 + b^2 = 1$ इस प्रकार वृत्त पर उपस्थित प्रत्येक बिन्दु के लिए $a^2 + b^2 = 1$ या $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$



चूँकि एक सम्पूर्ण चक्कर वृत्त के केन्द्र पर 2π कोण बनाता है। $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, $\angle AOC = \pi$ तथा $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ के पूर्णांक गुणज कोण चतुर्थांश कोण कहलाते हैं। बिन्दुओं A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमशः (1, 0), (0, 1), (–1, 0) तथा (0, –1) है। अतः चतुर्थांश कोणों के लिए हम कह सकते हैं –

$\cos 0 = 1$ $\quad$ $\sin 0 = 0$,

$\cos \frac{\pi}{2} = 0$ $\quad$ $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\cos \pi = -1$ $\quad$ $\sin \pi = 0$

$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ $\quad$ $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$

$\cos 2\pi = 1$ $\quad$ $\sin 2\pi = 0$

अब यदि हम स्थिति OP से एक सम्पूर्ण चक्कर लें, तो हम पुनः प्रारम्भिक स्थिति OP पर वापस आ जाते हैं इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि यदि x किसी 2π के पूर्णांक गुणज से बढ़ता है (या घटता है) तो sine तथा cosine फलनों का मान परिवर्तित नहीं होता है, इस प्रकार

$\sin(2n\pi + x) = \sin x$, $n \in Z$, $\cos(2n\pi + x) = \cos x$, $n \in Z$

और $\sin x = 0$, यदि $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ ..... अर्थात् जब x, π का पूर्णांक गुणज है तथा $\cos x = 0$, यदि $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$, ... अर्थात् cos x का मान शून्य हो जाता है जब x, $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणज है।

$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = n\pi$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

अब हम अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों को sine और cosine फलन के रूप में व्यक्त करते हैं।

$\text{cosec } x = \frac{1}{\sin x}$, $x \neq n\pi$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \neq n\pi$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

हम प्रदर्शित कर चुके हैं कि सभी वास्तविक x के लिए $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

जिसके अनुसार $1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad \{x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2};\ n \in Z\}$

$1 + \cot^2 x = \text{cosec}^2 x \qquad \{x \neq n\pi;\ n \in Z\}$

त्रिकोणमितीय फलनों के चिन्ह (Signs of The Trigonometric Functions) :

(i) यदि θ प्रथम चतुर्थांश में है तब P(a, b) प्रथम चतुर्थांश में होगा। इसलिए $a > 0$, $b > 0$ अतः सभी त्रिकोणमितीय फलनों का मान धनात्मक होगा।

(ii) यदि θ द्वितीय चतुर्थांश में है तब P(a, b) द्वितीय चतुर्थांश में होगा। इसलिए $a < 0$, $b > 0$ अतः sin, cosec के मान धनात्मक और शेष ऋणात्मक होंगे।

(iii) यदि θ तृतीय चतुर्थांश में है तब P(a, b) तृतीय चतुर्थांश में होगा। इसलिए $a < 0$, $b < 0$ अतः tan, cot के मान धनात्मक और शेष ऋणात्मक होंगे।

(iv) यदि θ चर्तुथ चतुर्थांश में है तब P(a, b) चतुर्थ चतुर्थांश में होगा। इसलिए $a > 0$, $b < 0$ अतः cos, sec के मान धनात्मक और शेष ऋणात्मक होंगे।

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\text{cosec}\theta$
I^{st} Quadrant	+	+	+	+	+	+
II^{nd} Quadrant	+	–	–	–	–	+
III^{rd} Quadrant	–	–	+	+	–	–
IV^{th} Quadrant	–	+	–	–	+	–

कुछ महत्त्वपूर्ण कोणों के त्रिकोणमितीय फलनों के मान नीचे दी गई सारणी में दिये गये हैं –

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\sqrt{\frac{0}{4}}=0$	$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.

N.D. = अपरिभाषित

cosec x, sec x तथा cot x के मान क्रमशः sin x, cos x तथा tan x के व्युत्क्रम है।

सम्बद्ध कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios of allied angles)

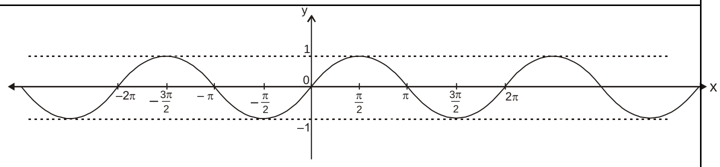
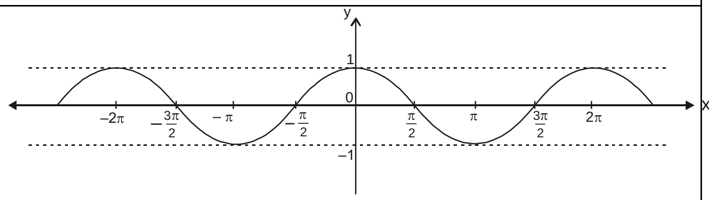
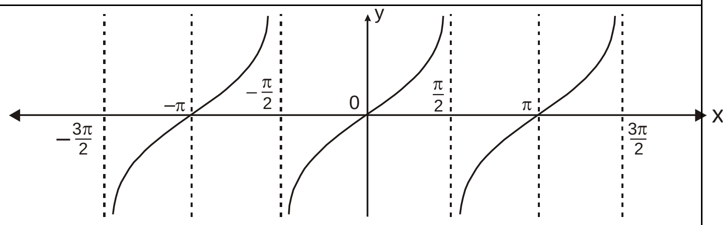
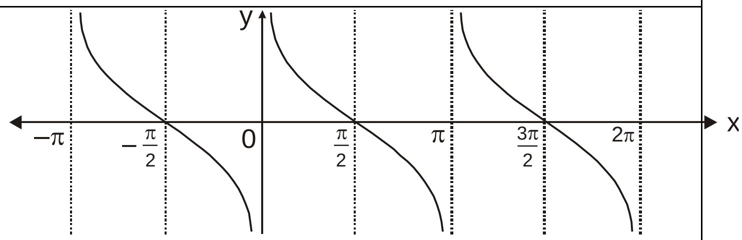
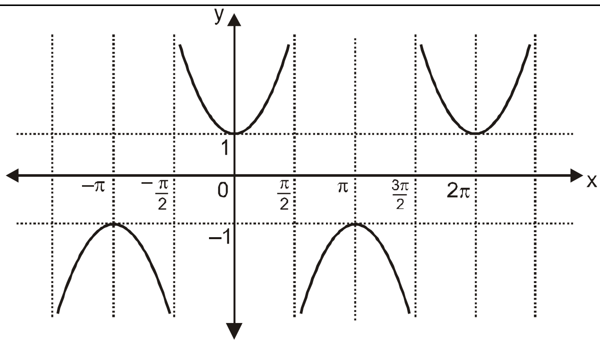
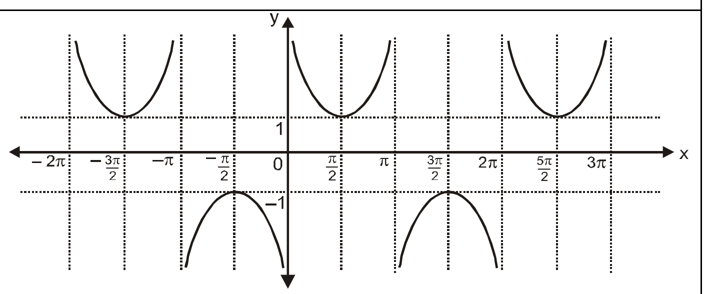
यदि θ कोई कोण है, तब $-\theta, \frac{\pi}{2} \pm \theta, \pi \pm \theta, \frac{3\pi}{2} \pm \theta, 2\pi \pm \theta$ इत्यादि सम्बद्ध कोण कहलाते हैं।

	$-\theta$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$	$2\pi-\theta$	$2\pi+\theta$
sin	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
cos	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tan	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\tan\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$
cot	$-\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\cot\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$	$\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$\cot\theta$
sec	$\sec\theta$	$\text{cosec}\,\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\text{cosec}\,\theta$	$\text{cosec}\,\theta$	$\sec\theta$	$\sec\theta$
cosec	$-\text{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\text{cosec}\theta$	$\text{cosec}\theta$	$-\text{cosec}\theta$	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\text{cosec}\theta$	$\text{cosec}\theta$

नीचे दी गई सारणी में रिक्त स्थानों को स्वयं भरिए।

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1									
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0									
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.									

त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric functions) :

	Domain	Domain	Range	Graph
y = sinx	R	R	[–1,	
y = cosx	R	R	[–1, 1]	
y = tanx	R– $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in I\right\}$	R– $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $n \in I$	R	
y = cotx	R – $\{n\pi,\ n \in I\}$	R – {nπ}, n $\in I$	R	
y = secx	R– $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in I\right\}$	R– $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $n \in I$	(– ∞, –1] ∪ [1, ∞)	
y=cosec x	R – {nπ, n $\in I$}	R – {nπ}, n $\in I$	(– ∞, –1] ∪ [1, ∞)	

दो कोणों के योग और अन्तर के त्रिकोणमितीय फलन
(Trigonometric functions of sum or difference of two angles) :

(a) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

(b) $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

(c) $\sin^2A - \sin^2B = \cos^2B - \cos^2A = \sin(A+B).\sin(A-B)$

(d) $\cos^2A - \sin^2B = \cos^2B - \sin^2A = \cos(A+B).\cos(A-B)$

(e) $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ (f) $\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$

(g) $\sin(A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$

(h) $\cos(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C$

(i) $\tan(A + B + C) = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

(j) $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n) = \dfrac{S_1 - S_3 + S_5 - ......}{1 - S_2 + S_4 - ....}$

जहाँ S_i कोणों के एक बार में i स्पर्शज्याओं के गुणनफलों का योग है।

उदाहरण # 1 : सिद्ध कीजिए कि –

(i) $\sin(45^o + A)\cos(45^o - B) + \cos(45^o + A)\sin(45^o - B) = \cos(A - B)$

(ii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right)\tan\left(\dfrac{3\pi}{4} + \theta\right) = -1$

हल : (i) स्पष्टतया $\sin(45^o + A)\cos(45^o - B) + \cos(45^o + A)\sin(45^o - B)$

$= \sin(45^o + A + 45^o - B) = \sin(90^o + A - B) = \cos(A - B)$

(ii) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) \times \tan\left(\dfrac{3\pi}{4} + \theta\right) = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} \times \dfrac{-1 + \tan\theta}{1 + \tan\theta} = -1$

अभ्यास कार्य :

(1) यदि $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$, तब $\cos(\alpha + \beta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(2) $\cos 375^o$ का मान ज्ञात कीजिए।

(3) सिद्ध कीजिए कि $1 + \tan A \tan \dfrac{A}{2} = \tan A \cot \dfrac{A}{2} - 1 = \sec A$

Answers : (1) $\dfrac{\pm 6\sqrt{2} \pm 4}{15}$ (2) $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

रूपान्तरण सूत्र (Transformation formulae) :

(i) $\sin(A+B) + \sin(A - B) = 2\sin A \cos B$

(ii) $\sin(A+B) - \sin(A - B) = 2\cos A \sin B$

(iii) $\cos(A+B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$

(iv) $\cos(A - B) - \cos(A+B) = 2\sin A \sin B$

(a) $\sin C + \sin D = 2\sin\dfrac{C + D}{2}\cos\dfrac{C - D}{2}$

(b) $\sin C - \sin D = 2\cos\dfrac{C + D}{2}\sin\dfrac{C - D}{2}$

(c) $\cos C + \cos D = 2\cos\dfrac{C + D}{2}\cos\dfrac{C - D}{2}$

(d) $\cos C - \cos D = 2\sin\dfrac{C + D}{2}\sin\dfrac{D - C}{2}$

उदाहरण # 2 : सिद्ध कीजिए कि $\cos 7A + \cos 8A = 2\cos\left(\dfrac{15A}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$

हल : L.H.S. $\cos 7A + \cos 8A = 2\cos\left(\dfrac{15A}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$

$[\because \cos C + \cos D = 2\cos\dfrac{C + D}{2}\cos\dfrac{C - D}{2}]$

उदाहरण # 3 : $2\sin3\theta \sin\theta - \cos2\theta + \cos4\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $2\sin3\theta \sin\theta - \cos2\theta + \cos4\theta = 2 \sin 3\theta \sin \theta - 2\sin3\theta \sin\theta = 0$

उदाहरण # 4 : सिद्ध कीजिए कि –

(i) $\dfrac{\sin8\theta\cos\theta - \sin6\theta\cos3\theta}{\cos2\theta\cos\theta - \sin3\theta\sin4\theta} = \tan 2\theta$

(ii) यदि A + B = 45º तब सिद्ध कीजिए कि (1 + tanA) (1 + tanB) = 2

हल : (i)

$$\frac{2\sin8\theta\cos\theta - 2\sin6\theta\cos3\theta}{2\cos2\theta\cos\theta - 2\sin3\theta\sin4\theta} = \frac{\sin9\theta + \sin7\theta - \sin9\theta - \sin3\theta}{\cos3\theta + \cos\theta - \cos\theta + \cos7\theta} = \frac{2\sin2\theta\cos5\theta}{2\cos5\theta\cos2\theta} = \tan 2\theta$$

(ii) $A + B = 45^\circ$

$\tan (A + B) = 1$

$\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$

$\tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B$

$\tan A + \tan B + \tan A \tan B + 1 = 2 \Rightarrow (1 + \tan A) (1 + \tan B) = 2$

अभ्यास कार्य :

(4) सिद्ध कीजिए कि –

(i) $\cos 8x - \cos 5x = -2 \sin \dfrac{13x}{2} \sin \dfrac{3x}{2}$

(ii) $\dfrac{\cos A - \cos3A}{\sin A - \sin3A} = -\tan2A$

(iii) $\dfrac{\sin2A + \sin4A + \sin6A + \sin8A}{\cos2A + \cos4A + \cos6A + \cos8A} = \tan 5A$

(iv) $\dfrac{\sin A + 2\sin3A + \sin5A}{\sin3A + 2\sin5A + \sin7A} = \dfrac{\sin3A}{\sin5A}$

(v) $\dfrac{\sin A - \sin5A + \sin9A - \sin13A}{\cos A - \cos5A - \cos9A + \cos13A} = \cot 4A$

(5) सिद्ध कीजिए कि $\sin \dfrac{\theta}{2} \sin \dfrac{7\theta}{2} + \sin \dfrac{3\theta}{2} \sin \dfrac{3\theta}{2} = \sin 2\theta \sin 5\theta$

(6) सिद्ध कीजिए कि $\cos A \sin (B - C) + \cos B \sin (C - A) + \cos C \sin (A - B) = 0$

(7) सिद्ध कीजिए कि $2 \cos \dfrac{\pi}{13} \cos \dfrac{9\pi}{13} + \cos \dfrac{3\pi}{13} + \cos \dfrac{5\pi}{13} = 0$

अपवर्त्य और अपवर्तक कोण (Multiple and sub-multiple angles) :

(a) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

नोट : $\sin\theta = 2 \sin \dfrac{\theta}{2} \cos \dfrac{\theta}{2}$ इत्यादि

(b) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$

नोट : $2 \cos^2 \dfrac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$, $2 \sin^2 \dfrac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$

(c) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$ नोट : $\tan\theta = \dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}$

(d) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$, $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(e) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(f) $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(g) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

उदाहरण # 5 : सिद्ध कीजिए कि –

(i) $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$

(ii) $\tan A + \cot A = 2 \operatorname{cosec} 2A$

(iii) $\dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)} = \tan\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}$

हल : (i) L.H.S. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \dfrac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A} = \tan A$

(ii) L.H.S. $\tan A + \cot A = \dfrac{1+\tan^2 A}{\tan A} = 2\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{2\tan A}\right) = \dfrac{2}{\sin 2A} = 2 \operatorname{cosec} 2A$

(iii) L.H.S. $\dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)} = \dfrac{2\sin^2\dfrac{A}{2}+2\sin\dfrac{A}{2}\sin\left(\dfrac{A}{2}+B\right)}{2\cos^2\dfrac{A}{2}-2\cos\dfrac{A}{2}\cos\left(\dfrac{A}{2}+B\right)}$

$$= \tan\frac{A}{2}\left[\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)}{\cos\frac{A}{2}-\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)}\right] = \tan\frac{A}{2}\left[\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\left(\frac{B}{2}\right)}{2\sin\frac{A+B}{2}\sin\left(\frac{B}{2}\right)}\right] = \tan\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}$$

अभ्यास कार्य :

(8) सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\sin 4\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 4\theta+\cos 2\theta} = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(9) सिद्ध कीजिए कि $\sin\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{3\pi}{18}\sin\dfrac{5\pi}{18}\sin\dfrac{7\pi}{18} = \dfrac{1}{16}$

(10) सिद्ध कीजिए कि $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$

(11) सिद्ध कीजिए कि $\tan\left(45^o+\dfrac{A}{2}\right) = \sec A + \tan A$

मानक–कोणों के महत्त्वपूर्ण त्रिकोणमितीय अनुपात
(Important trigonometric ratios of standard angles) :

(a) $\sin n\pi = 0$; $\cos n\pi = (-1)^n$; $\tan n\pi = 0$, जहाँ $n \in I$

(b) $\sin 15°$ या $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75°$ या $\cos\dfrac{5\pi}{12}$;

$\cos 15°$ या $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75°$ या $\sin\dfrac{5\pi}{12}$;

$\tan 15° = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3} = \cot 75°$; $\tan 75° = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3} = \cot 15°$

(c) $\sin\dfrac{\pi}{10}$ या $\sin 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72°$

$\cos 36°$ या $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54°$

प्रतिबन्धित सर्वसमिकाएँ (Conditional identities) :

यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो –

(i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

(ii) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

(iii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$

(iv) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(v) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(vi) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

(vii) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} . \cot \frac{B}{2} . \cot \frac{C}{2}$

(viii) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

उदाहरण # 6 : यदि $A + B + C = 90°$, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$

हल : $A + B = 90^o - C \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \cot C \Rightarrow \tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$

उदाहरण # 7 : यदि $x + y + z = xyz$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} . \frac{2y}{1-y^2} . \frac{2z}{1-z^2}$.

हल : $x = \tan A$, $y = \tan B$ और $z = \tan C$ रखने पर

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \Rightarrow A + B + C = n\pi$, जहाँ $n \in I$

इस प्रकार L.H.S.

$$\therefore \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B} + \frac{2\tan C}{1-\tan^2 C} .$$

$= \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C$ $[\because A + B + C = n\pi]$

$= \tan 2A \tan 2B \tan 2C = \frac{2x}{1-x^2} . \frac{2y}{1-y^2} . \frac{2z}{1-z^2}$

अभ्यास कार्य :

(12) यदि $A + B + C = 180°$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि–

(i) $\sin(B + 2C) + \sin(C + 2A) + \sin(A + 2B) = 4\sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

(ii) $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

(13) यदि $A + B + C = 2S$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि –

(i) $\sin(S - A) \sin(S - B) + \sin S \sin (S - C) = \sin A \sin B$

(ii) $\sin(S - A) + \sin (S - B) + \sin(S - C) - \sin S = 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

ज्या और कोज्या श्रेणी : (Sine and Cosine - series) :

(i) $$\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots + \sin\{\alpha + (n-1)\beta\} = \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)$$

(ii) $$\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \ldots. + \cos\{\alpha + (n-1)\beta\} = \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)$$

जहाँ : $\beta \neq 2m\pi$, $m \in I$

उदाहरण # 8 : (i) सिद्ध कीजिए कि $\sin\theta + \sin3\theta + \sin5\theta + ... + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$

(ii) $\sin2^o, \sin4^o, \sin6^o$, ... , $\sin180^o$ का माध्य ज्ञात कीजिए।

(iii) सिद्ध कीजिए कि $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$

हल : (i) $\sin\theta + \sin3\theta + \sin5\theta + ... + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin n\left(\frac{2\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta+(2n-1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\theta}{2}\right)} = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$

(ii) $= \frac{\sin2^o + \sin4^o + ... + \sin180^o}{90} = \frac{\sin90^o(\sin91^o)}{90\sin1^o} = \frac{\cos1^o}{90\sin1^o} = \frac{\cot1^o}{90}$

(iii) $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{\cos\frac{10\pi}{22}\sin\frac{5\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}} = \frac{\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}} = \frac{1}{2}$

अभ्यास कार्य :

निम्न श्रेणियों का योग ज्ञात कीजिए।

(14) $\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + ...$ n पदों तक

(15) $\sin2\alpha + \sin3\alpha + \sin4\alpha + ... + \sin n\alpha$, जहाँ $(n + 2)\alpha = 2\pi$

Answers : (14) $-\frac{1}{2}$ (15) 0

कोज्या कोणों की गुणन श्रेणी (Product series of cosine angles) :

$\cos\theta \,.\, \cos2\theta \,.\, \cos2^2\theta \,.\, \cos2^3\theta ...... \cos2^{n-1}\theta = \frac{\sin2^n\theta}{2^n\sin\theta}$

त्रिकोणमितीय व्यंजकों का परिसर (Range of trigonometric expression) :

$E = a\sin\theta + b\cos\theta$

$\Rightarrow$ $E = \sqrt{a^2+b^2}\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right\}$

माना $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$ और $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$

$\Rightarrow$ $E = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$, जहाँ $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

अतः θ के किसी भी वास्तविक मान के लिए

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le E \le \sqrt{a^2+b^2}$$

उदाहरण # 9 : (i) यदि $\alpha+\beta = 90^o$ तो $\sin\alpha \sin\beta$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।
(ii) $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x$ का अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए–

हल : (i) $\sin\alpha \sin(90^o - \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} \times \sin 2\alpha$

(ii) $1 + 2\sin x + 3\cos^2 x = -3\sin^2 x + 2\sin x + 4$

$$= -3\left(\sin^2 x - \frac{2\sin x}{3}\right) + 4 = -3\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{13}{3}$$

अतः $0 \le \left(\sin x - \frac{1}{3}\right)^2 \le \frac{16}{9}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{16}{3} \le -3\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)^2 \le 0 \Rightarrow -1 \le -3\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{13}{3} \le \frac{13}{3}$$

अभ्यास कार्य :

(16) निम्नलिखित के अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए–

(i) $3 + (\sin x - 2)^2$
(ii) $9\cos^2 x + 48\sin x \cos x - 5\sin^2 x - 2$
(iii) $2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$

Answers : (i) अधिकतम = 12, न्यूनतम = 4 (ii) अधिकतम = 25, न्यूनतम = –25

(iii) अधिकतम = $\sqrt{13}$, न्यूनतम = $-\sqrt{13}$

त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometric Equation) :

एक ऐसा समीकरण जिसमें किसी अज्ञात कोण के एक या एक से अधिक त्रिकोणमितीय अनुपात होते हैं, त्रिकोणमितीय समीकरण कहलाता हैं।

त्रिकोणमितीय समीकरण का हल (Solution of Trigonometric Equation) :

त्रिकोणमितीय समीकरण का हल उस अज्ञात कोण का मान होता है, जो इस दी गई समीकरण को संतुष्ट करता है।

उदाहरणार्थ यदि $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \ldots\ldots\ldots$

इस प्रकार, त्रिकोणमितीय समीकरण के हल अनन्त हो सकते हैं (उनकी आवर्ती प्रकृति की वजह से) और हलों को निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जा सकता हैं।

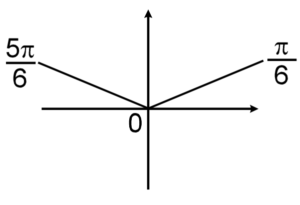
(i) मुख्य हल (principal solution)
(ii) व्यापक हल (General Solution)

मुख्य हल (Principal solutions) :

त्रिकोणमितीय समीकरण के ऐसे हल जो अन्तराल $[0, 2\pi)$ के अन्तर्गत आते हैं मुख्य हल कहलाते हैं।

उदाहरणः समीकरण **$\sin x = \frac{1}{2}$** के मुख्य हल ज्ञात करो।

हल.



$\because \quad \sin x = \frac{1}{2}$

अतः अन्तराल $[0, 2\pi)$ में x के दो मान $\frac{\pi}{6}$ और $\frac{5\pi}{6}$ विद्यमान होंगे। अतः मुख्य हल $\rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

व्यापक हल :

पूर्णांक 'n' निहित व्यंजक, जो त्रिकोणमितीय समीकरण के समस्त हल देता है, व्यापक हल कहलाता हैं। कुछ विशेष त्रिकोणमीतिय समीकरण के व्यापक हल नीचे दिये गए हैं।

कुछ विशेष त्रिकोणमितीय समीकरण के व्यापक हल
(General Solution Of Some Standard Trigonometric Equations) :

(i) यदि $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha$ जहाँ $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $n \in I$.

(ii) यदि $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha$ जहाँ $\alpha \in [0, \pi]$; $n \in I$.

(iii) यदि $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha$ जहाँ $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; $n \in I$.

(iv) यदि $\sin^2\theta = \sin^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha$; $n \in I$.

(v) यदि $\cos^2\theta = \cos^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha$; $n \in I$.

(vi) यदि $\tan^2\theta = \tan^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha$; $n \in I$. **[नोट : यहाँ α मुख्य कोण हैं]**

कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some Important deductions) :

(i) $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$; $n \in I$

(ii) $\sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = (4n + 1)\frac{\pi}{2}$; $n \in I$

(iii) $\sin\theta = -1 \Rightarrow \theta = (4n - 1)\frac{\pi}{2}$; $n \in I$

(iv) $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$; $n \in I$

(v) $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2n\pi$; $n \in I$

(vi) $\cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = (2n + 1)\pi$; $n \in I$

(vii) $\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$; $n \in I$

उदाहरण # 10 : हल कीजिए $\cos\theta = \frac{1}{2}$

हल : $\because \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$ $\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in I$

उदाहरण # 11 : हल कीजिए $\sec 2\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

हल : $\because \sec 2\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 2\theta = \cos\frac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$; $n \in I$ $\Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{5\pi}{12}$; $n \in I$

उदाहरण # 12 : हल कीजिए $\tan\theta = \frac{3}{4}$

हल : $\because \tan\theta = \frac{3}{4}$ ....(i)

माना $\frac{3}{4} = \tan\alpha \Rightarrow \tan\theta = \tan\alpha$

$\Rightarrow \theta = n\pi + \alpha$, जहाँ $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$, $n \in I$

अभ्यास कार्य :

(17) हल कीजिए $\cot\theta = -1$ (18) हल कीजिए $\cos 4\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Answers : (17) $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$; $n \in I$ (18) $\frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{24}$, $n \in I$

उदाहरण # 13 : हल कीजिए $\tan^2\theta = 1$

हल : $\because$ $\tan^2\theta = 1$ $\Rightarrow$ $\tan^2\theta = (1)^2$

$\Rightarrow$ $\tan^2\theta = \tan^2\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in I$

उदाहरण # 14 : हल कीजिए $4\sec^2\theta = 5 + \tan^2\theta$

हल : $\because$ $4\sec^2\theta = 5 + \tan^2\theta$ ....(i)

समीकरण (i) के परिभाषित होने के लिए $\theta \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in I$

$\because$ समी. (i) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$4(1 + \tan^2\theta) = 5 + \tan^2\theta$

$3\tan^2\theta = 1$

$\tan^2\theta = \tan^2\pi/6$

$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $n \in I$

अभ्यास कार्य :

(19) हल कीजिए $\frac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \ \tan 2x} = 1$ (20) हल कीजिए $2\cos^2x + \sin^2 2x = 2$

Answers : (19) कोई हल नहीं (20) $n\pi$, $n \in I$ या $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in I$

त्रिकोणमितीय समीकरण के प्रकार (Types of Trigonometric Equations) :

Type -1

त्रिकोणमितीय समीकरणें जिन्हें गुणनखण्डों का उपयोग करके हल किया जा सकता है।

उदाहरण # 15 : $\frac{\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2}}{2 + \sin x} = \frac{\cos x}{3}$

हल :
$$\frac{\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2}}{2 + \sin x} = \frac{\cos x}{3} \Rightarrow \frac{\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{2 + \sin x} = \frac{\cos x}{3}$$

$$\frac{\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)(2 + \sin x)}{2(2 + \sin x)} = \frac{\cos x}{3} \Rightarrow 3\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) - 2\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)\left(3 + 2\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in I \quad \Rightarrow \quad x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in I$$

अभ्यास कार्य :

(21) हल कीजिए $\cos^3x + \cos^2x - 4\cos^2\frac{x}{2} = 0$ (22) हल कीजिए $\tan^2\theta + 3\sec\theta + 3 = 0$

Answers : (21) $(2n + 1)\pi$; $n \in I$ (22) $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $n \in I$ या $(2n + 1)\pi$, $n \in I$

Type - 2

त्रिकोणमितीय समीकरणें जिन्हे द्विघात समीकरण के रूप में बदल कर हल किया जाता हैं।

उदाहरण # 16 : हल कीजिए $\sin^2x - \frac{\cos x}{4} = \frac{1}{4}$

हल : $\sin^2x - \frac{\cos x}{4} = \frac{1}{4}$

$4(1 - \cos^2x) - \cos x = 1$

$4\cos^2x + \cos x - 3 = 0$

$(\cos x + 1)(4\cos x - 3) = 0$

$\cos x = -1$, $\cos x = \frac{3}{4}$

$x = (2n+1)\pi$, $x = (2m\pi \pm \alpha)$ जहाँ $\alpha = \cos^{-1}\frac{3}{4}$, $m, n \in I$

अभ्यास कार्य :

(23) हल कीजिए $4\sin^2\theta + 2\sin\theta\left(\sqrt{3} - 1\right) - \sqrt{3} = 0$

(24) हल कीजिए $4\cos\theta - 3\sec\theta = \tan\theta$

Answers : (23) $n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$, $n \in I$ या $n\pi + (-1)^n\left(\frac{-\pi}{3}\right)$, $n \in I$

(24) $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$ जहाँ $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{8}\right)$; $n \in I$

या $n\pi + (-1)^n\beta$ जहाँ $\beta = \sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right)$; $n \in I$

Type - 3

त्रिकोणमितीय समीकरणें जिनमें त्रिकोणमितीय अनुपात के योगफल या अन्तर को उनके गुणनफल के रूप में बदलकर हल किया जा सकता हैं।

उदाहरण # 17 : हल कीजिए $\cos x + \cos 3x - 2\cos 2x = 0$

हल : $\cos x + \cos 3x - 2\cos 2x = 0$

$2\cos 2x \cos x - 2\cos 2x = 0$

$2\cos 2x(\cos x - 1) = 0$

$\cos 2x = 0$, $\cos x = 1$

$x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $x = 2m\pi$, $m, n \in I$

अभ्यास कार्य :

(25) हल कीजिए $\sin 7\theta = \sin 3\theta + \sin\theta$ (26) हल कीजिए $1 + \cos 3x = 2\cos 2x$

(27) हल कीजिए $8\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{\sin 6x}{\sin x}$

Answers : (25) $\theta = \frac{n\pi}{3}$; $n \in I$ या $\frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$; $n \in I$

(26) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, $n \in I$ या $2n\pi$, $n \in I$ (27) $\frac{n\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$, $n \in I$

Type - 4

त्रिकोणमितीय समीकरणें जिनमें त्रिकोणमितीय अनुपातों के गुणनफल को उनके योगफल और अन्तर में बदलकर हल किया जा सकता हैं।

उदाहरण # 18 : हल कीजिए $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$

हल : $\dfrac{1}{\cos 4\theta} - \dfrac{1}{\cos 2\theta} = 2$

$\cos 2\theta - \cos 4\theta = 2\cos 4\theta \cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta - \cos 4\theta = \cos 6\theta + \cos 2\theta$

$\cos 6\theta + \cos 4\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos 5\theta \cos\theta = 0$

$\cos 5\theta = 0$ या $\cos\theta = 0$

$5\theta = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2} \qquad \theta = (2m + 1)\dfrac{\pi}{2}$ m, n $\in$ I

Type - 5

a sinx + b cosx = c रूप की त्रिकोणमितीय समीकरण, (जहाँ a, b, c $\in$ R) को दोनों तरफ $\sqrt{a^2 + b^2}$ से भाग देकर हल किया जा सकता हैं।

उदाहरण # 19 : हल कीजिए $\sin x + 2\cos x = \sqrt{5}$

हल : $\because \quad \sin x + 2\cos x = \sqrt{5}$ ....(i)

यहाँ a = 1, b = 2.

$\therefore$ समीकरण (i) में दोनों तरफ $\sqrt{5}$ का भाग देने पर

$\sin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2\cos x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x \cdot \sin\alpha + \cos x \cdot \cos\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos(x - \alpha) = 1$

$\Rightarrow \quad x - \alpha = 2n\pi,\ n \in I \quad \Rightarrow \quad x = 2n\pi + \alpha,\ n \in I$

$\therefore$ दिए गए समीकरण का हल $2n\pi + \alpha,\ n \in I$ जहाँ $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

नोट: a sinx + b cosx = c रूप की त्रिकोणमितीय समीकरणों में **sinx** एवं **cosx** को संगत tan के अर्द्धकोण में परिवर्तित करके भी हल किया जा सकता हैं।

उदाहरण # 20 : हल कीजिए $3\cos x + 4\sin x = 5$

हल : $\because \quad 3\cos x + 4\sin x = 5$ ....(i)

$\because \quad \cos x = \dfrac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$ एवं $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}$

$\therefore$ अतः समीकरण (i) से $\Rightarrow \quad 3\left(\dfrac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}\right) + 4\left(\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}\right) = 5$ ....(ii)

माना $\tan\dfrac{x}{2} = t \quad \therefore$ समीकरण (ii) से– $3\left(\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) + 4\left(\dfrac{2t}{1 + t^2}\right) = 5$

$\Rightarrow \quad 4t^2 - 4t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2t - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{1}{2}$

$\because \quad t = \tan\dfrac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tan\dfrac{x}{2} = \tan\alpha,$

जहाँ $\tan\alpha = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{2} = n\pi + \alpha \quad \Rightarrow \quad x = 2n\pi + 2\alpha$

जहाँ $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$; n $\in$ I

अभ्यास कार्य :

(28) हल कीजिए $2\sqrt{2}\cos x + \sin x = 3$ (29) हल कीजिए $\sin x + \tan\frac{x}{2} = 0$

Answers : (28) $2n\pi + \alpha,\ n \in I$ where $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ (29) $x = 2n\pi\ ;\ n \in I$

Type - 6

P(sinx ± cosx, sinx cosx) = 0 रूप की त्रिकोणमितीय समीकरण, (जहाँ p(y, z) एक बहुपद हैं), को sinx ± cosx = t रखकर हल किया जा सकता है।

उदाहरण # 21 : हल कीजिए $\sin 2x + 3\sin x = 1 + 3\cos x$

हल : $\sin 2x + 3\sin x = 1 + 3\cos x$

$\sin 2x + 3(\sin x - \cos x) = 1$ ------ (i)

माना $\sin x - \cos x = t$

$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x.\cos x = t^2$

$\Rightarrow \sin 2x = 1 - t^2$

अब (i) में $\sin x - \cos x = t$ तथा $\sin 2x = 1 - t^2$ रखने पर

$1 - t^2 + 3t = 1$

$t^2 - 3t = 0$

$t = 0$ या $t = 3$ (सम्भव नहीं)

$\sin x - \cos x = 0$

$\tan x = 1,\ x = n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n \in I$

अभ्यास कार्य :

(30) हल कीजिए $1 - \sin 2x + 2\sin x - 2\cos x = 0$

(31) हल कीजिए $2\cos x + 2\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$

(32) हल कीजिए $(1 - \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2\sin^2 x$.

Answers : (30) $n\pi + \frac{\pi}{4},\ n \in I$ (31) $n\pi - \frac{\pi}{4}$ या $\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{12},\ n \in I$

(32) $2n\pi + \frac{\pi}{2}\ ;\ n \in I$ या $2n\pi\ ;\ n \in I$ या $n\pi + \frac{\pi}{4}\ ;\ n \in I$

Type - 7

त्रिकोणमितीय समीकरण जिसे त्रिकोणमितीय अनुपातों sinx एवं cosx के मानों की परिसीमा का उपयोग करके हल किया जा सकता हैं।

उदाहरण # 22 : हल कीजिए $\sin 2x + \cos 4x = 2$

हल : $\sin 2x + \cos 4x = 2$

अब समीकरण सही होगी यदि $\sin 2x = 1$ एवं $\cos 4x = 1$

$\Rightarrow 2x = (4n + 1)\frac{\pi}{2},\ n \in I$ एवं $4x = 2m\pi,\ m \in I$

$\Rightarrow x = (4n + 1)\frac{\pi}{4},\ n \in I$ एवं $x = \frac{m\pi}{2}$, $m \in I \Rightarrow (4n + 1)\frac{\pi}{4} = \frac{m\pi}{2}$

$m = \frac{4n+1}{2}$ जो कि $m, n \in I$ के लिए संभव नहीं है।

अभ्यास कार्य :

(33) हल कीजिए $\cos^{50}x - \sin^{50}x = 1$

(34) x एवं y के लिए हल कीजिए $12\sin x + 5\cos x = 2y^2 - 8y + 21$

Answers : (33) $n\pi,\ n \in I$ (34) $x = 2n\pi + \alpha$ जहाँ $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$, $n \in I$ y = 2

महत्वपूर्ण बिन्दु :

1. कई त्रिकोणमितीय समीकरणों को विभिन्न तरीको द्वारा हल किया जा सकता है। एक ही त्रिकोणमितीय समीकरण के लिये विभिन्न तरीकों से निकाले गये हल अलग–अलग रूप वाले हो सकते है। अतः इन हलों को देखकर विद्यार्थी को इस उलझन में नहीं पड़ना चाहिये कि एक विधि से निकाला गया हल सही है जबकि अन्य विधि से प्राप्त हल गलत है। विभिन्न विधियों द्वारा प्राप्त हलों को कुछ रूपान्तरणों द्वारा एक समान सिद्ध किया जा सकता है।
दो विधियों द्वारा प्राप्त हलों की समानता की जाँच करने के लिये, प्राप्त हलों में $n = ...–2, –1, 0, 1, 2, 3.......$ आदि रखकर अन्तराल $[0, 2\pi]$ में कोण के मान ज्ञात किये जाते है। यदि दोनों हलों से प्राप्त समस्त कोणों के मान एक समान हो, तो दोनों हलों की समानता सिद्व हो जाती है।

2. त्रिकोणमितीय समीकरण को व्यवस्थित (manipulating) करने के दौरान कुछ हल खो जानें की स्थिति बन जाती है। सामान्यतः समीकरण में से दाँये पक्ष (RHS) एवं बाँये पक्ष (LHS) से किसी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को परस्पर काट देनें से कुछ मूल लुप्त हो सकते है।
उदाहरणार्थ समीकरण $\tan x = 2 \sin x$ में दोनों ओर $\sin x$ से भाग लगानें पर $\cos x = \frac{1}{2}$ प्राप्त होता है जो दी गयी वास्तविक समीकरण के तुल्य नहीं है। यहाँ $\sin x = 0$ से प्राप्त होने वाले मूल लुप्त हो गये है। इस प्रकार किसी समीकरण को किसी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से भाग देनें क बजाय उस गुणनखण्ड को पूरी समीकरण से उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के रूप में बाहर ले लेना चाहिये।

3. किसी भी गुणनखण्ड को शून्य के बराबर रखते समय इस बात का ध्यान रखा जाना चाहिये कि ऐसा करने से कोई अन्य गुणनखण्ड अनन्त ना हो जाये।
उदाहरणार्थ– यदि कोई समीकरण $\sin x = 0$ हो तो यह $\cos x \,.\, \tan x = 0$ भी लिखी जा सकती है लेकिन अब हम $\cos x = 0$ नहीं रख सकते क्योंकि ऐसा करने से $\tan x = \sin x / \cos x$ का मान अनन्त हो जाता है।

4. किसी भी दी गयी समीकरण को दोनों ओर वर्ग करने से अब हमें कुछ अनचाहे मूल भी प्राप्त होगें। अतः ऐसी स्थिति में प्राप्त होनें वाले समस्त हलों को दी गई समीकरण में रखकर उनकी जाँच कर लेनी चाहिये। जो हल दी गयी समीकरण को संतुष्ट न करें उन्हें छोड़ दिया जाना चाहिये।
उदाहरणार्थ समीकरण –
$\sin\theta + \cos\theta = 1$ .....(1)
वर्ग करने पर
$1 + \sin 2\theta = 1$ या $\sin 2\theta = 0$ .....(2)
अर्थात् $2\theta = n\pi$ या $\theta = n\pi/2$,
$\Rightarrow \quad \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, ...$
जाँच करने से पता लगता है कि π और $\frac{3\pi}{2}$ दी गयी समीकरण को संतुष्ट नहीं करते है। जैसा कि
$\sin\pi + \cos\pi = –1, \neq 1$
एवं $\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = – 1, \quad \neq 1.$
जिसका कारण स्पष्ट है, कि समीकरण (2) समीकरण (1) के तुल्य नहीं है क्योंकि समीकरण (2), समीकरणों
$\sin\theta + \cos\theta = 1$
एवं $\sin\theta + \cos\theta = – 1$
को प्रदर्शित करती है। अतः हमें अतिरिक्त हल प्राप्त होते है। इस प्रकार यदि किसी समीकरण को हल करने के लिये वर्ग (squaring) करना ही पड़े तो प्राप्त होने वाले समस्त हलों की दी गई समीकरण में जाँच कर लेनी चाहिये।

5. यदि दी गयी समीकरण में $\tan x, \sec x$ मौजूद हो, तो प्रतिबन्ध $\cos x \neq 0$ लेकर चलना चाहिये।
यदि दी गयी समीकरण में $\cot x$ या $\text{cosec } x$ मौजूद हो तो प्रतिबन्ध $\sin x \neq 0$ लेकर चलना चाहिये।
यदि दी गयी समीकरण में $\log [f(\theta)]$ मौजूद हो, तो प्रतिबन्धों $f(\theta) > 0$ तथा लघुगणक का आधार $> 0, \neq 1$ को लेकर चलना चाहिये। इसके अलावा $\sqrt{[f(\theta)]}$ सदैव धनात्मक होता है।
उदाहणार्थ $\sqrt{\sin^2\theta} = |\sin\theta|$ न कि $\pm \sin\theta$.

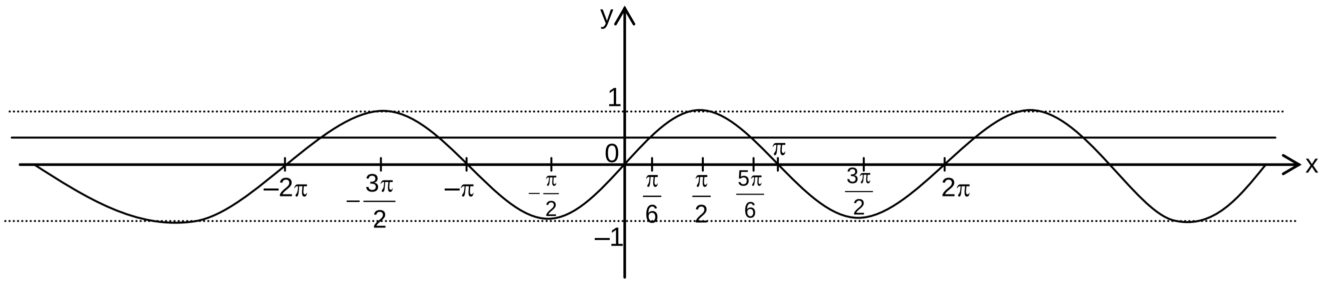
6. यह जाँच लेना भी आवश्यक है कि समीकरण को हल करने से प्राप्त होनें वाले समस्त मूल, दी गयी समीकरण को संतुष्ट करते है तथा दिये गये प्रान्त में ही है।

त्रिकोणमितिय असमिकाए (Trigonometric Inequalities) :

किसी त्रिकोणमितिय असमिका को हल करने के लिये सर्वप्रथम उसे विभिन्न मूलभूत त्रिकोणमितिय असमिकाओं में रूपान्तरित किया जाता है। रूपान्तरण की प्रक्रिया ठीक वैसे ही है जैसे त्रिकोणमितिय समीकरण को हल करने की प्रक्रिया में होती है। त्रिकोणमितिय असमिका का आवर्तकाल उसमें प्रयुक्त समस्त त्रिकोणमितिय फलनों के आवर्तकालों के LCM के बराबर होता है। उदाहरणार्थ त्रिकोणमितिय असमिका $\sin x + \sin 2x + \cos x/2 < 1$ का आवर्तकाल 4π है। यदि कुछ दिया नहीं तो किसी भी त्रिकोणमितिय असमिका को कम से कम एक सम्पूर्ण सामान्य आवर्तकाल में हल किया जाना चाहिये।

उदाहरण # 23 : असमिका $\sin x > 1/2$ हल समुच्चय ज्ञात कीजिए।

हल : जब $\sin x = 1/2$ अन्तराल 0 से 2π में x के दो मान $\pi/6$ तथा $5\pi/6$ है।



y = sinx

$y = \sin x$ के ग्राफ से स्पष्ट है कि 0 एवं 2π के मध्य $\sin x > 1/2 \Rightarrow \pi/6 < x < 5\pi/6$.

अतः $\sin x > 1/2 \Rightarrow 2n\pi + \pi/6 < x < 2n\pi + 5\pi/6,\ n \in I$.

अभीष्ट हल समुच्चय $\bigcup_{n\in I} (2n\pi + \pi/6,\ 2n\pi + 5\pi/6)$

अभ्यास कार्य :

(35) असमिकाओं को हल कीजिए।

(i) $(\sin x - 2)(2\sin x - 1) < 0$ (ii) $\sin x + \sqrt{3}\cos x \ge 1$

Answers. **(35)** (i) $x \in \bigcup_{n\in I}\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right)$ (ii) $x \in \bigcup_{n\in I} [-\frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ 2n\pi + \frac{\pi}{2}]$

ऊँचाईयाँ एवं दूरियाँ (Heights and Distances)

उन्नयन एवं अवनमन कोण (Angle of elevation and depression)

माना OX एक क्षैतिज रेखा है तथा P एक बिन्दु है जो इस रेखा के ऊपर है तथा एक व्यक्ति बिन्दु O से बिन्दु P पर रखी वस्तु को देख रहा है तब $\angle XOP$ उन्नयन कोण कहलाता है। यदि व्यक्ति बिन्दु P से बिन्दु O को देखे तो बनने वाला $\angle QPO$ अवनमन कोण कहलाता है, जहाँ PQ क्षैतिज है।