रस्सी पर तरंगें (WAVE ON A STRING)

तरंगें

तरंग गति हमारे चारों ओर होने वाली तथा भौतिकी के हर शाखा में प्रक्षेपित होने वाली घटना है। द्रव्य की सतह पर तरंग गति सामान्यतः प्रेक्षित होती है। ध्वनि तथा प्रकाश तरंगे वातावरण के आभास के लिए अत्यन्त आवश्यक है। सभी तरंगों की समान गणितीय व्याख्या होती है, जो दो अलग–अलग प्रकार की तरंगों के अध्ययन में सहायक है। इस अध्याय में हम मुख्य रूप से डोरी (रस्सी) मे तरंग का अध्ययन करेंगे जो एक प्रकार की यांत्रिक तरंग है। ध्वनि तरंग तथा जल तरंग भी यांत्रिक तरंगों के दूसरे उदाहरण है। प्रकाश तरंगे यांत्रिक तरंग नहीं होती है।

ये विद्युत चुम्बकीय तरंग होती है जिनके संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती है। यांत्रिक तरंगे माध्यम में विक्षेप से उत्पन्न होती है (जैसे तालाब में पत्थर डालना) और विक्षोभ माध्यम से संचरित होता है। माध्यम के कणों के मध्य बल के कारण यांत्रिक तरंगों का संचरण होता है। प्रत्येक परमाणु अपने पास वाले परमाणु पर बल लगाते है और इस बल के द्वारा गति दूसरे परमाणु तक संचरित होती है। इसमें माध्यम के कण का किसी भी प्रकार का परिणामी विस्थापन नहीं होता है। जब तरंग गति करती है तो माध्यम कण इर्द–गिर्द गति करते है। सरलता के लिए, हम पुनः सरल आवर्त गति पर ध्यान केन्द्रित करेंगे जो कि ज्यावक्रीय व कोज्या वक्रीय फलनों से प्रदर्शित की जाती है।

यांत्रिक तरंगों के प्रकार

माध्यम के भौतिक गुणों के आधार पर यांत्रिक तरंगों को विभाजित किया जाता है। इसके लिए दूसरे तरीके भी सम्भव है।

1. **कणों की गति की दिशा :** तरंगों को माध्यम के कणों की गति की दिशा के आधार पर विभाजित किया जाता है। यदि विक्षोभ x दिशा में संचरित होता है, परन्तु माध्यम कण x अक्ष के लम्बवत् गति करते है तो तरंग अनुप्रस्थ तरंग कहलाती है और यदि माध्यम के कण तरंग संचरण के दिशा में गति करते हैं तो तरंग अनुदैर्ध्य कहलाती है। कम्पित गिटार की डोरी में अनुप्रस्थ तरंग होती है। जबकि ध्वनि तरंगे अनुदैर्ध्य होती है।
2. **दिशाओं की संख्या :** तरंग, एक दो और तीन दिशाओं में संचरित होती है। एक कसी हुई रस्सी में तरंग एक विमीय होती है। पानी में पत्थर गिराने पर उत्पन्न तरंगे द्विविमिय होती है। बंदूक चलाने पर उत्पन्न ध्वनि तरंगे त्रिविमिय होती है।
3. **आवर्तता :** एक पत्थर तालाब में डालने पर जल तरंग उत्पन्न होती है, जो दो विमाओं में बाहर की तरफ संचरित होती है। यहाँ एक से अधिक उर्मिकाऐं भी उत्पन्न हो सकती है। अन्य समान समय अन्तराल में यदि पत्थर उसी स्थान पर गिरायें जहाँ से पहला पत्थर गिराया गया है तो आवर्तित तरंगें उत्पन्न होती हैं।
4. **तरंग्राग की आकृति :** पत्थर गिराने पर पानी में उत्पन्न तरंगे वृत्ताकार होती है। एक बिन्दु स्रोत से बाहर की तरफ संचरित तरंगो का तरंग्राग गोलीय होता है। एक समतल तरंग त्रिविमिय तरंग होती है। जिनका तरंग्राग समतल होता है।

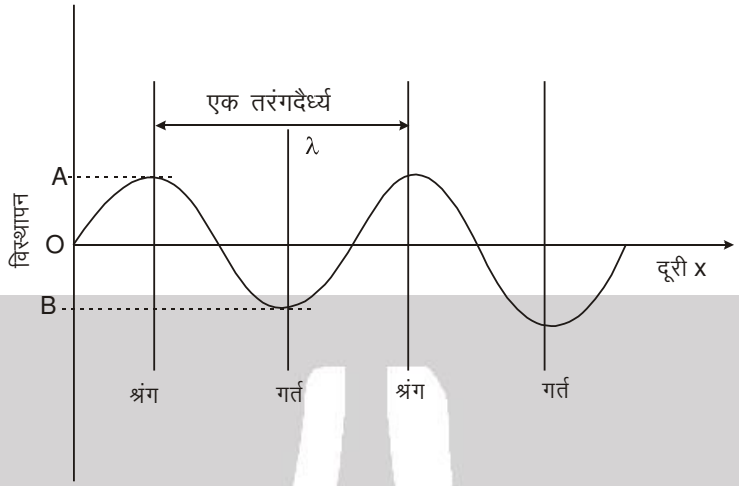
   ठोस में अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्ध्य दोंनो तरंगे संचरित होती है। एक तरल जिसकी संरचना शुद्ध रूप से परिभाषित संरचना नहीं होती है, सम्पीड़न के प्रतिरोध को अनुदैर्ध्य बल (shearing force) से अधिक सहन कर सकता है। जिसके कारण अनुदैर्ध्य तरंगे गैसों या आदर्श द्रव (अश्यान) में आसानी से संचरित हो जाती है। अनुप्रस्थ तरंगे तरल की सतह पर अस्तित्व में रह सकती है। तालाब में उत्पन्न तरंगों में पृष्ठ तनाव प्रत्यानयन बल होता है, और समुद्री तरंगों में यह गुरूत्व बल होता है। यदि विक्षोभ एक ही दिशा में संचरण के लिए बाध्य है और वहां ऊर्जा संरक्षित होती है तो विक्षोभ की दिशा नहीं बदलती है।

तरंग व्याख्या :

विस्थापन–समय व विस्थापन–दूरी दो प्रकार के ग्राफ खींचे जा सकते है।

अनुप्रस्थ तरंगों के लिए विस्थापन दूरी ग्राफ कम्पित कणों का विस्थापन y तथा किसी क्षण कण की स्रोत से दूरी x को प्रदर्शित करता है। यह किसी तरंग की आकृति को प्रदर्शित करता जो फोटोग्राफ जैसा होता है। प्रत्येक कण का माध्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन आयाम होता है।

चित्र 1 में OA व OB आयाम है। तरंगदैर्ध्य सामान्यतः दो श्रृंग या दो गर्तो के मध्य दूरी है। विशेष रूप से यह दो क्रमागत संगत बिन्दुओं के मध्य की दूरी है जो समान कला में है स्पष्ट रूप से यह तरंग पर समान कला के दो बिन्दुओं के बीच की दूरी है।



तरंग गति के लिए विस्थापन समय–ग्राफ भी प्रदर्शित किया जाता है जो किसी दूरी पर स्थित किसी कण के लिए समय के साथ विस्थापन के परिवर्तन को प्रदर्शित करता है। यदि यह सामान्यतः सरल आवर्त परिवर्तन है तो यह ज्या वक्र ग्राफ होता है।

तरंगदैर्ध्य, आवृत्ति तथा चाल

यदि एक स्रोत f कम्पन प्रति सैकण्ड उत्पन्न करता है तो माध्यम कण भी इसी तरह संचरित होते है। तरंग की आवृत्ति स्रोत की आवृति के तुल्य होती है।

जब स्रोत अपना एक पूर्ण कम्पन करता है, एक तरंग उत्पन्न होती है तथा विक्षोभ स्रोत से λ दूरी में फैल जाता है। यदि स्रोत f आवृत्ति से लगातार कम्पन्न करता है तो प्रति सैकण्ड f तरंगे उत्पन्न होती है तथा तरंग $f\lambda$ दूरी में एक सैकण्ड में फैल जाती है। यदि v तरंग का वेग है तो $v = f\lambda$

यह संबंध सभी प्रकार की तरंग गतियों में होता है।

संचरित तंरग : माना एक रस्सी x दिशा में खींची जाती है। इसकी मूल अवस्था सीधी व समतल है। माना y कण का माध्य स्थिति से तरंग संचरण के लम्बवत् विस्थापन है। यदि रस्सी को बांये सिरे से झटका दिया जाता है तो विक्षोभ दांयी तरफ संचरित होता है। बांये सिरे का $(x = 0)$ पर उर्ध्व विस्थापन y समय का फलन है। अतः $y(x = 0, t) = f(t)$

यदि वहाँ पर कोई घर्षण हानि नहीं होती है तो विक्षोभ बिना छोटे हुए अपनी वास्तविक स्थिति में आगे संचरित होती है। यदि विक्षोभ v वेग से आगे बढ़ता है तो किसी क्षण इसकी स्थिति $x = vt$ होगी इसलिए x बिन्दु पर स्थित कण का विस्थापन $t - \frac{x}{v}$ पहले बांयी तरफ उत्पन्न हुआ है। [y(x, t), x तथा t दोंनो का फलन है] परन्तु किसी क्षण t पर बांयी ओर विस्थापन f(t) है तथा $(t - \frac{x}{v})$ समय पर ये विस्थापन $f(t - \frac{x}{v})$ है।

इसलिए $y(x, t) = y\,(x = 0, t - \frac{x}{v}) = f\,(t - \frac{x}{v})$

इसे निम्न प्रकार भी लिख सकते है

$\Rightarrow \quad \frac{f}{v}(vt - x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{f}{v}(x - vt) \Rightarrow y(x, t) = g(x - vt)$

t को कोई नियत मान लेने पर, (किसी क्षण पर), जो रस्सी की आकृत्ति प्रदर्शित करता है

यदि तरंग – x दिशा में संचरित है तो तरंग का समीकरण $y(x, t) = f(t + \frac{x}{v})$

राशि $x - vt$ तरंग की कला कहलाती है। विक्षोभ की कला स्थिर होती है।

$x - vt =$ नियतांक

समय के साथ अवकलन $\frac{dx}{dt} = v$

जहाँ v कला वेग है यद्धपि इसे तरंग वेग भी कहते हैं। यह वह वेग है जिस पर कोई विक्षोभ की कला किसी क्षेत्र में से गति करती है।

किसी माध्यम में v वेग से संचरित तरंग का समीकरण x, v तथा t, (x + vt) या (x – vt) के रूप में अवश्य होते है। $(x - vt)^2$ स्वीकार्य है, लेकिन $x^2 - v^2 t^2$ नहीं।

Solved Example

Example 1. एक डोरी में विक्षोभ 2 m/s से चलता है। किसी स्थिति x = 0 पर किसी क्षण विस्थापन $y = \frac{2}{t^2+1}$ से दिया जाता है। ज्ञात करो?

(i) फलन y =(x, t) का व्यंजक, अर्थात् कण का स्थिति x तथा समय t पर विस्थापन।

(ii) t = 0 व t = 1s पर विक्षोभ की आकृत्ति।

Solution : (i) t को $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, से बदलने पर आवश्यक तरंग

$$y = \frac{2}{\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 + 1}$$

(ii) हम तरंग फलन को किसी भी क्षण उपयोग में ले सकते है। जैसे t = 0, x का अलग–अलग मान लेकर तरंग फलन की आकृत्ति पता कर सकते है।

$t = 0$ पर $y = \frac{2}{\frac{x^2}{4} + 1}$

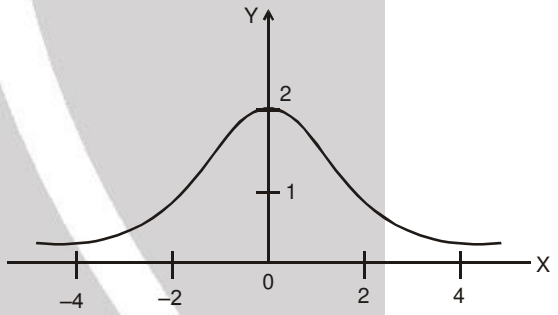
$x = 0$ पर $y = 2$

$x = 2$ पर $y = 1$

$x = -2$ पर $y = 1$

$x = 4$ पर $y = 0.4$

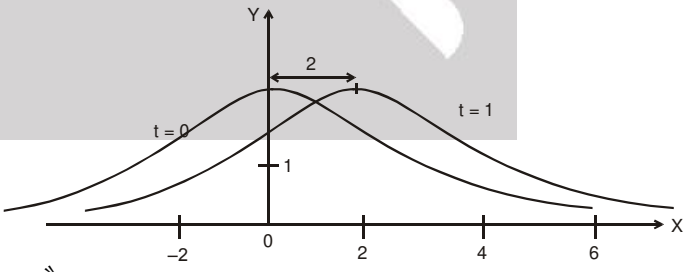
$x = -4$ पर $y = 0.4$



मान उपयोग कर, आकृत्ति बनायी गयी है।

इसी प्रकार t = 1s, पर आकृति बनायी जा सकती है। तो आप ग्राफ से संचरण की दिशा के बारे में क्या निष्कर्ष निकाल सकते है ? 1 सैकण्ड में विक्षोभ कितना गति करेगा यह तरंग वेग के तुल्य होगा। यहाँ तरीका दिया गया है।

$$y = \frac{2}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + 1} \quad t = 1s \text{ पर}$$



$x = 2$ पर $y = 2$ (अधिकतम मान)

$x = 0$ पर $y = 1$

$x = 4$ पर $y = 1$

स्पंद 1s में दांयी तरफ 2 इकाई चलता है।

$t - \frac{x}{2}$ = भी नियतांक है।

समय के साथ अवकलित करने पर

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2.$$

एक विमिय ज्या प्रगामी तरंग (रस्सी पर तरंगे) :

एक तरंग समीकरण $y = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ है, जो यादृच्छ तरंगों के लिए है तथा अनुप्रस्थ व अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए भी सही है।

एक तरंग की पूर्ण व्याख्या f(x) के विश्लेषण से होती है। यह भौतिक तथा अभियांत्रिकी में सबसे महत्त्वपूर्ण है जब f(x) एक ज्यावक्रीय फलन होता है अर्थात जब तरंग की आकृत्ति ज्यावक्रीय या कोज्या वक्रीय होती है। यह तब सम्भव है जब स्रोत बांयी तरफ (x=0) से रस्सी को स.आ.गति में लगातार कम्पित करता है इसके लिए स्रोत रस्सी पर लगातार कार्य करता है व लगातार ऊर्जा प्रदान करता है। तो बांये सिरे के लिए समीकरण लिख सकते है

$f(t) = A \sin \omega t$

जहाँ A तरंग का आयाम है जो माध्यम में कण का उसकी साम्यावस्था से अधिकतम विस्थापन है, ω कोणीय आवृत्ति है, जो $2\pi f$ के बराबर है जहाँ f स्रोत की स.आ.गति की आवृत्ति है।

कण का t समय पर x पर विस्थापन होगा

$y = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ या $y = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) \Rightarrow y = A \sin(\omega t - kx)$

जहाँ $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ तरंग संख्या कहलाती है। $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ तरंग का आवर्तकाल है, जो यह निकटतम श्रृंग या गर्त के मध्य की दूरी (यह तरंगदैर्ध्य λ है) को तय करने में लिया गया समय है।

तरंग समीकरण $y = A \sin(\omega t - kx)$ दर्शाती है कि $x = 0$ व $t = 0$ पर $y = 0$ है। यह आवश्यक नहीं है कि यह स्रोत की शर्त हो। समान परिस्थिति के लिए, y शून्य के बराबर नहीं हो सकता है। इसलिए अधिक उपयुक्त व्यंजक में कला नियतांक ϕ भी सम्मिलित होगा, जो अन्य सम्भावनाओं को अनुमति देता है।

$y = A \sin(\omega t - kx + \phi)$

ϕ का उपयुक्त विकल्प मिलने वाली अन्य प्रारम्भिक स्थितियों के अनुसार है। पद $kx - \omega t + \phi$ तरंग की कला कहलाती है। समान कला की दो तरंगे (2π के गुणज मे कलान्तर की) 'एक ही कला' में कहलाती है। ये समान समय से समान गति करती है।

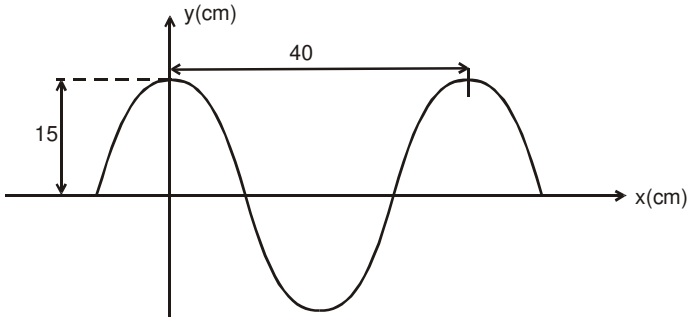
स्थिति x व समय t पर कण का वेग समीकरण द्वारा दर्शाया गया है।

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx + \phi)$$

कण को विशेष बनाने के लिए तरंग समीकरण का x को नियत रखते हुए आंशिक अवकलन करते हैं। नोट करते हैं कि तरंग वेग $\frac{dx}{dt}$, कण के वेग से भिन्न है, जबकि माध्यम के लिए तरंग वेग नियत है और यह डोरी के अनुदिश है, जैसा कि कण का वेग तरंग के वेग के लम्बवत् है और x व t पर निर्भर करता है।

Solved Example

Example 2. एक ज्यावक्रीय तरंग धनात्मक x दिशा में, 15 cm आयाम, 40 cm तरंगदैर्ध्य व 8 Hz आवृत्ति से संचरित होती है। $t = 0$ व $x = 0$ पर माध्यम का ऊर्ध्वाधर विस्थापन भी 15 cm है, जैसा दर्शाया गया है।



(a) कोणीय तरंग संख्या, आवर्तकाल, कोणीय आवृत्ति व कण की चाल ज्ञात कीजिए।

(b) कला नियतांक ϕ की गणना करें व तरंग फलन का सामान्य व्यंजक लिखें।

Solution : (a) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{40 \text{ cm}} = \frac{\pi}{20}$ rad/cm $\quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8}$ s

$\omega = 2\pi f = 16\ s^{-1}$ $\quad v = f\lambda = 320$ cm/s

(b) दिया है A = 15 cm और x = 0 व t = 0 पर y = 15 cm है y = A sin (ωt – kx + ϕ) का उपयोग करते हुए

$15 = 15 \sin\phi \Rightarrow \sin\phi = 1$ या $\phi = \frac{\pi}{2}$ rad.

इसलिए तरंग समीकरण है

$y = A \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}) = (15 \text{ cm}) \sin\left[(16\pi s^{-1})t - \left(\frac{\pi}{20}\frac{\text{rad}}{\text{cm}}\right).x + \frac{\pi}{2}\right]$

Solved Example

Example 3. एक ज्यावक्रीय तरंग रस्सी के अनुदिश संचरित है। दोलित्र तरंग उत्पन्न करता है जो 30s में 60 कम्पन्न पूरे करती है। यह दिया गया है कि रस्सी के अनुदिश इसका 10.0s में अधिकतम संचरण 425cm है। तरंगदैर्ध्य क्या है ?

Solution : $v = \frac{425}{10} = 42.5$cm/s. $\Rightarrow f = \frac{60}{30} = 2$Hz $\Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = 21.25$ cm.

रेखीय तरंग समीकरण :

तरंग फलन $y = A \sin(\omega t - kx + \phi)$, के उपयोग से, डोरी के किसी भी बिन्दु पर गति की व्याख्या कर सकते है। डोरी पर कोई भी बिन्दु केवल ऊर्ध्वाधर गति करता है, और इसलिए इसका x निर्देशांक अपरिवर्तित रहता है। किसी बिन्दु का अनुप्रस्थ वेग v_y और इसका अनुप्रस्थ त्वरण a_y है

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right]_{x=\text{नियत}} = \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx + \phi) \quad \text{....(1)}$$

$$a_y = \left.\frac{dv_y}{dt}\right]_{x=\text{नियत}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t - kx + \phi) \quad \text{....(2)}$$

और अतः $v_{y,\ \text{अधिकतम}} = \omega A$

$a_{y,\ \text{अधिकतम}} = \omega^2 A$

डोरी के किसी बिन्दु का अनुप्रस्थ वेग व अनुप्रस्थ त्वरण एक साथ उनके अधिकतम मान पर नहीं पहुँच सकता है। वास्तव में, अनुप्रस्थ वेग उसके अधिकतम मान (ωA) पर पहुँचता है, जब विस्थापन y = 0 है, जबकि अनुप्रस्थ त्वरण उसके अधिकतममान ($\omega^2 A$) पर आगे पहुँचता है जब $y = \pm A$ है।

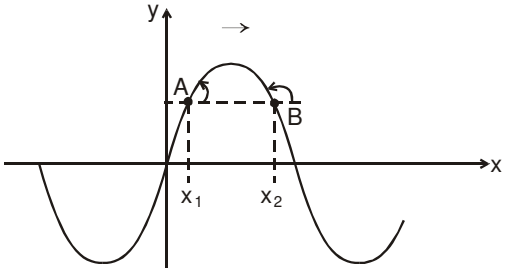
$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=\text{नियत}} = \frac{\partial y}{\partial x} = -kA \cos(\omega t - kx + \phi) \quad \text{....(3)}$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(\omega t - kx + \phi) \quad \text{....(4)}$$

(1) व (3) से $\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\omega}{k}\frac{\partial y}{\partial x}$

$\Rightarrow v_P = -v_w \times$ ढाल

अर्थात् यदि किसी बिन्दु पर ढाल ऋणात्मक है तो कण का वेग धनात्मक है और इसका विलोम भी, धनात्मक x अक्ष के अनुदिश गतिशील तरंग के लिए अर्थात् v_w धनात्मक है।



उदाहरण के लिए, एक तरंग के y-x वक्र के दो बिन्दु A व B लेते हैं, जैसा दर्शाया गया है। तरंग धनात्मक x-अक्ष के अनुदिश गतिशील है।

A पर ढाल धनात्मक है इसलिए दिये गये क्षण पर इसका वेग ऋणात्मक है। इसका अर्थ है यह नीचे आ रहा है। बिन्दु B पर कण के लिए विपरीत स्थिति है।

अब समीकरण (2) व (4) का उपयोग करके

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

इसे रेखीय तरंग समीकरण या प्रगामी तरंग का अवकलन समीकरण के रूप में जानते हैं। हम माध्यम में संचरित ज्यावक्रीय यांत्रिक तरंग से रेखीय तरंग समीकरण बनाते है, लेकिन यह अधिक सामान्य है। रेखीय तरंग समीकरण स्पष्ट रूप से डोरी की तरंगो, ध्वनि तरंगो एवं विद्युत चुम्बकीय तरंगो की भी व्याख्या करती है।

Solved Example

Example 4. प्रदर्शित करो कि तरंग फलन $y = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$ एक रेखीय तरंग समीकरण का हल है, x व y सेमी में है।

Solution : x व t के सापेक्ष इस फलन का आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{12(x-3t)^2-4}{[(x-3t)^2+1]^3}, \text{ और } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{108\ (x-3t)^2-36}{[(x-3t)^2+1]^3} \quad \text{या} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

रेखीय तरंग समीकरण से तुलना करने पर, हम देखते है कि तरंग फलन रेखीय तरंग समीकरण का हल है, यदि चाल जिससे स्पन्द गतिशील है, 3 cm/s है। यह तरंग फलन से उत्पन्न होती है, इसलिए यह रेखीय तरंग समीकरण का हल है।

डोरी में अनुप्रस्थ तरंगो की चाल

डोरी में तरंग की चाल निम्न सूत्र द्वारा दी जाती है

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

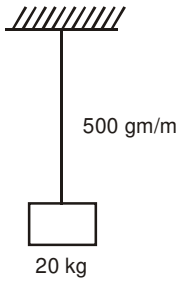
जहाँ T (न्यूटन में) तनाव है और μ डोरी का प्रति इकाई लम्बाई में द्रव्यमान (किग्रा/मी) है।

यह नोट करें कि v माध्यम (डोरी) के सापेक्ष तरंग की चाल है।

डोरी में असमान तनाव की स्थिति में या डोरी असमान रेखीय द्रव्यमान घनत्व रखती है तब v दिये गये बिन्दु पर चाल व T व μ उस बिन्दु पर संगत मान है।

Solved Example

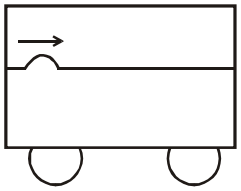
Example 5. दर्शाई गई स्थिति में डोरी में उत्पन्न तरंग की चाल ज्ञात कीजिए। मानिए कि डोरी का द्रव्यमान तनाव को प्रभावित नहीं करता है।



Solution : $T = 20 \times 10 = 200$ N

$$v = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = 20 \ \ m/s$$

Example 6. 100 N तनाव व 0.25 kg/m रेखीय द्रव्यमान घनत्व की एक तनी हुई डोरी को एक गाड़ी में डोरी के बांये सिरे से प्रारम्भ होने वाले तरंग स्पन्द को उत्पन्न करने में उपयोग करते हैं, जैसा चित्र में दर्शाया गया है। गाड़ी का वेग क्या होना चाहिए ताकि स्पन्द जमीन के सापेक्ष स्थिर रहे।



Solution : स्पन्द का वेग = $\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 20 \ \ m/s$

अब $\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PC} + \vec{v}_{CG}$

$0 = 20\,i + \vec{v}_{CG}$

$\vec{v}_{CG} = -20i\ m/s$

एक ज्या वक्रीय तरंग द्वारा डोरी के अनुदिश स्थान्तरित शक्ति

जब एक प्रगामी तरंग डोरी में बनती है, ऊर्जा तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश स्थितिज व गतिज ऊर्जा के रूप में स्थान्तरित होती है।

औसत शक्ति $\langle P \rangle = 2\pi^2 f^2 A^2 \mu v$

ऊर्जा स्थान्तरण = $\int_0^t P_{av} dt$

एक आवर्त काल में ऊर्जा स्थानान्तरण = $P_{av} T$

यह एक तरंगदैर्ध्य में संचित ऊर्जा के बराबर है।

तीव्रता : प्रति इकाई क्षेत्रफल से प्रति सेकण्ड स्थान्तरित ऊर्जा तीव्रता कहलाती है।

$$I = \frac{\text{शक्ति}}{\text{अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल}} = \frac{P}{s} \quad \Rightarrow I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v$$

यह तरंग की औसत तीव्रता है।

एक तरंग का ऊर्जा घनत्व प्रति इकाई आयतन की ऊर्जा है।

$$= \frac{Pdt}{svdt} = \frac{I}{v}$$

Solved Examples

Example 7. रेखीय द्रव्यमान घनत्व $m = 5.00 \times 10^{-2}$ kg/m की एक डोरी में तनाव 80.0 N है। 6.00 cm आयाम व 60.0 Hz आवृत्ति की ज्यावक्रीय तरंगों को उत्पन्न करने के लिए डोरी को कितनी शक्ति दी जानी चाहिए ?

Solution : डोरी में तरंग की चाल $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \left(\frac{80.0\ N}{5.00\times10^{-2}\ kg/m}\right)^{1/2}$ **= 40.0 m/s**

क्योंकि $\phi = 60$ Hz, डोरी में ज्यावक्रीय तरंगों की कोणीय आवृत्ति ω का मान।

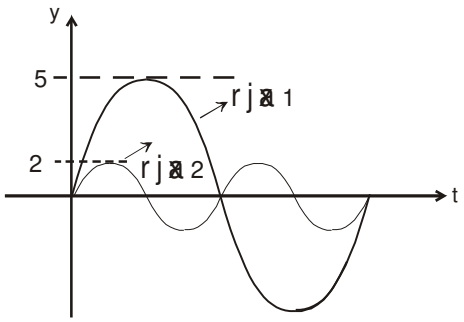
$\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0\ Hz) = 377\ s^{-1}$

शक्ति के लिए इस मान को निम्न समीकरण में उपयोग करने पर, व $A = 6.00 \times 10^{-2}$ m

$$p = \frac{1}{2}\ \mu\omega^2 A^2 v$$

$$= \frac{1}{2}(5.00 \times 10^{-2}\ kg/m)\ (377 s^{-1})^2 \times (6.00 \times 10^{-2}\ m)^2\ (40.0\ m/s) = 512\ W.$$

Example 8. चित्र में y-t वक्रों द्वारा समान माध्यम में दो तरंगे दर्शाई गई है। उनके औसत तीव्रताओं का अनुपात ज्ञात कीजिए ?



Solution : $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\omega_1^2 A_1^2}{\omega_2^2 A_2^2} = \frac{f_1^2 \cdot A_1^2}{f_2^2 \cdot A_2^2} = \frac{1 \times 25}{4 \times 4} = \frac{25}{16}$

अध्यारोपण का सिद्धान्त

जब दो या दो से अधिक तरंगे किसी बिन्दु से गुजरती है तो उस बिन्दु पर परिणामी विक्षोभ प्रत्येक तरंग के स्वंय के विक्षोभ के सदिश के योग के बराबर होता है।

साधारणतया अध्यारोपण का सिद्धान्त अल्प विक्षोभ के लिए लागू होता है। यदि रस्सी को बहुत अधिक खींचा जाए तो तरंगो के स्वंय के विस्थापनों का योग परिणामी तरंग के विस्थापन के बराबर नहीं होता। ऐसी तरंगे अरेखीय तरंगे कहलाती हैं।

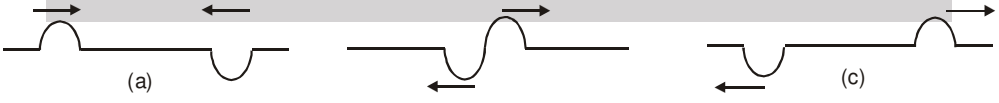
इस भाग में हम केवल रेखीय तरंगों का ही अध्ययन करेंगे, जो अध्यारोपण के सिद्धान्त का पालन करती है।

इस नियम को गणितीय रूप में रखने के लिए माना $y_1(x, t)$ व $y_2(x, t)$ रस्सी के किसी भी भाग का विस्थापन है, जब प्रत्येक तरंग अकेले गमन करती है। रस्सी के किसी भी भाग का विस्थापन $y(x, t)$ जब तरंगें एक दूसरे पर अध्यारोपित हो जाती है, निम्न प्रकार से दिया जाता है :–

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार दो तरंगों के अध्यारोपण से परिणामी तरंग का विस्थापन तरंगों के विस्थापन के बीजगणितीय योग के बराबर होता है। अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार यदि दो या दो से अधिक तरंग एक माध्यम मे गमन करती है तो परिणामी तरंग सभी तरंगों के तरंग फलन के योग का परिणामी होती है।

निम्न चित्र दो स्पंदों को प्रदर्शित कर रहा है। जो कि विपरीत दिशा में किसी तनी हुई रस्सी के अनुदिश गतिशील है। जब दो विक्षोभ अध्यारोपित होते है तो वे एक टेढ़ा–मेढ़ा प्रारूप देते हैं। जिसे (b) व (c) चित्र में दिखाया गया है। वे एक–दूसरे से गुजरते है व अपरिवर्तित रहते हैं।



(b)

इन सिद्धान्त के सभी उदाहरण तरंगों के व्यतिकरण व परावर्तन के उदाहरण है।

Solved Example

Example 9. दों तरंगे जो किसी सतह से गुजरती है को निम्न समीकरणों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है

$y = (1.0\ m) \sin [(3.14\ cm^{-1})\ x - (157\ s^{-1})\ t]$

तथा $y = (1.5\ cm) \sin [(1.57\ cm^{-1})x - (314\ s^{-1})\ t]$.

$x = 4.5$ cm तथा $t = 5.0$ ms पर कण का विस्थापन ज्ञात करो।

Solution : अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार प्रत्येक तरंग स्वतंत्र विक्षोभ उत्पन्न करते है तथ परिणामी विक्षोभ दोनों तरंग के स्वतंत्र विक्षोभ के सदिश योग के बराबर होता है x = 4.5 cm तथा t = 5.0 ms पर कण का विस्थापन होगा

y_1 = (1.0 cm) sin [(3.14 cm^{-1}) (4.5 cm)]
– (157 s^{-1}) (5.0 × 10^{-3} s)]

$= (1.0\text{ cm})\sin\left[4.5\pi - \frac{\pi}{4}\right] = (1.0\text{ cm})\sin\left[4\pi + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1.0\text{cm}}{\sqrt{2}}$

तथा y_2 = (1.5 cm) sin [(1.57 cm^{-1})(4.5 cm) – (314 s^{-1}) (5.0 × 10^{-3} s)]

$= (1.5\text{ cm})\sin\left[2.25\pi - \frac{\pi}{2}\right] = (1.5\text{ cm})\sin\left[2\pi - \frac{\pi}{4}\right] = (1.5\text{ cm})\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1.5\text{cm}}{\sqrt{2}}$

कुल विस्थापन है $y = y_1 + y_2 = \frac{-0.5\text{cm}}{\sqrt{2}} = -0.35$ cm.

एक दिशा में गतिशील तरंगों का व्यतिकरण

माना दो समरूप स्रोत जो x दिशा में गतिशील व ω कोणीय आवृत्ति की ज्या तरंग उत्पन्न करते है दोनों तरंगों की तरंग संख्या k व तरंग वेग भी समान है। जब दो तरंगे एक बिन्दु पर पहुँचती है, तो उनकी कला भिन्न होती है। माना कि दो तरंगों के आयाम A_1 तथा A_2 है तथा उनके मध्य कलान्तर φ है तो उनके समीकरण निम्न प्रकार से लिखे जा सकते है

$y_1 = A_1 \sin(kx - \omega t)$ तथा $y_2 = A_2 \sin(kx - \omega t + \phi)$.

अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार परिणामी तरंग को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin(kx - \omega t) + A_2 \sin(kx - \omega t + \phi)$.

हम पाते है $y = A \sin(kx - \omega t + \alpha)$

जहाँ $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi}$ (A परिणामी तरंग का आयाम है)

$\tan\alpha = \frac{A_2 \sin\phi}{A_1 + A_2\cos\phi}$ (α पहली तरंग व परिणामी तरंग के मध्य कलान्तर है)

सम्पोषी व विनाशी व्यतिकरण

सम्पोषी व्यतिकरण :

जब परिणामी आयाम A अधिकतम हो।

$A = A_1 + A_2$ जब $\cos\phi = +1$ या $\phi = 2n\pi$

जहां n एक पूर्णाक है।

विनाशी व्यकितरण :

जब परिणामी आयाम A न्यूनतम हो

या $A = |A_1 - A_2|$ जब $\cos\phi = -1$ या $\phi = (2n + 1)\pi$

जब n एक पूर्णाक है।

Solved Example

Example 10. दो ज्या तरंगें जिनकी आवृत्ति समान है। रस्सी के अनुदिश एक ही दिशा में गतिशील है। यदि A_1 = 3.0 cm, A_2 = 4.0 cm, $\phi_1 = 0$, तथा $\phi_2 = \pi/2$ rad, हो तो परिणामी तरंग का आयाम होगा ?

Solution : परिणामी आयाम $= \sqrt{3^2 + 4^2 + 2\times3\times4\times\cos90^o}$ = 5 cm.

तरंगो का परावर्तन व संचरण

जब तरंगों का परावर्तन दृढ़ या सघन माध्यम से होता है तो वे विपरीत कला में होती है लेकिन जब विरल या अर्द्ध माध्यम में होती है तो उनकी कला में कोई परिवर्तन नहीं होता। संचरित तरंगे कभी विपरीत नहीं होती लेकिन संचरण गुणांक बदल जाता है।

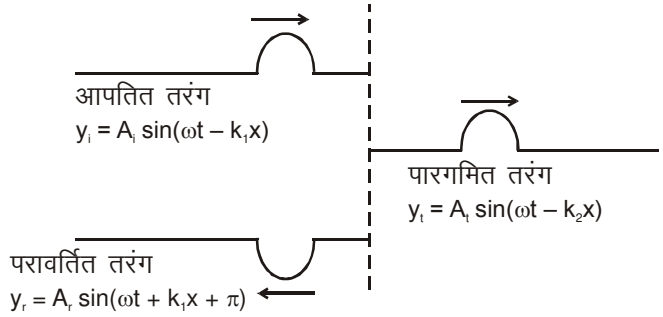


Fig. : सघन माध्यम से परावर्तन

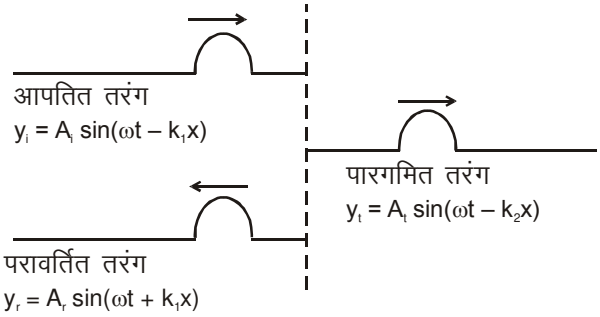


Fig. : विरल माध्यम से परावर्तन

परावर्तित व पारगमित तरंगों के आयाम :

v_1 व v_2 आपतित व पारगमित तरंगों की तरंग चाल है

$$A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} A_i \qquad \Rightarrow \quad A_t = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} . \ A_i$$

यदि $v_2 > v_1$ है तो A_r धनात्मक है तरंग का परावर्तन विरल माध्यम से हुआ है।

Solved Example

Example 11. एक आवर्त तरंग रस्सी 1 के अनुदिश गतिशील है। एक रस्सी 2 के साथ सन्धि पर वह तरंग आंशिक परावर्तित व पारगमित होती है। दूसरी रस्सी का रेखीय घनत्व पहली रस्सी में रेखीय घनत्व का चार गुना है। दोंनो रस्सी की सन्धि पर $x = 0$ सीमा है। यदि आपतित तरंग का समीकरण $y_i = A_i \cos (k_1 x - \omega_1 t)$ है तो परावर्तित व पारगमित तरंगों के समीकरण A_i, k_1 तथा ω_1 के रूप में क्या होंगे ?

Solution : चूंकि $v = \sqrt{T/\mu}$, $T_2 = T_1$ तथा $\mu_2 = 4\mu_1$

$$v_2 = \frac{v_1}{2} \qquad .....(i)$$

आवृत्ति नहीं बदलती है,

$$\omega_1 = \omega_2 \qquad .....(ii)$$

क्योंकि $k = \omega/v$, है दोंनो रस्सियों में आवर्त तरंगो की तरंगों की संख्या में सम्बन्ध है।

$$k_2 = \frac{\omega_2}{v_2} = \frac{\omega_1}{v_1/2} = 2\frac{\omega_1}{v_1} = 2k_1 \qquad ....(iii)$$

आयाम, $A_t = \left(\frac{2v_2}{v_1 + v_2}\right) A_u = \left[\frac{2(v_1/2)}{v_1 + (v_1/2)}\right] A_i = \frac{2}{3} A_i$ ....(iv)

तथा $A_r = \left(\frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\right) A_u = \left[\frac{(v_1/2) - v_1}{v_1 + (v_1/2)}\right] A_i = \frac{A_i}{3}$ ....(v)

(ii), (iii) तथा (iv), की सहायता से पारगमित तरंग को लिखा जा सकता है

$$y_t = \frac{2}{3} A_i \cos (2k_1 x - \omega_1 t) \qquad \textbf{Ans.}$$

इसी तरह परिवर्तित तरंग को व्यक्त किया जा सकता है,

$$= \frac{A_i}{3} \cos (k_1 x + \omega_1 t + \pi) \qquad \textbf{Ans.}$$

अप्रगामी तरंगे :

माना कि समान आयाम व समान आवृत्ति की दो ज्या तरंगे एक लम्बी रस्सी के अनुदिश विपरीत दिशा में गतिशील है तथा दो तरंगों के समीकरण निम्न प्रकार है

$y_1 = A \sin (\omega t - kx)$ और $y_2 = A \sin (\omega t + kx + \phi)$.

इन तरंगों के व्यतिकरण से अप्रगामी तरंग प्राप्त होती है इस प्रकार की तरंगों के अध्ययन के लिए हम विशिष्ट स्थिति $\phi = 0$ प्रकरण का अध्ययन करेंगे।

दो तरंगों का परिणामी विस्थापन जब वे एक–दूसरे पर अध्यारोपित होती है निम्न है

$$y = y_1 + y_2 = A [\sin (\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)] = 2A \sin \omega t \cos kx$$

अथवा $y = (2A \cos kx) \sin \omega t.$

यह आवश्यक परिणाम है तथा इससे यह स्पष्ट है कि :

1. यह समीकरण तरंग समीकरण को संतुष्ट करती है,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial\ t^2}$$

यह तरंग को प्रदर्शित करता है। यदि फलन f(ax ± bt), के रूप में नहीं है तो तरंग गमन नहीं कर रही है। इसलिए इसे अप्रगामी तरंग कहते है।

2. तरंग का आयाम स्थिर नहीं है $A_s = 2A \cos kx$ लेकिन आवर्त रूप से स्थिति के साथ बदलता है (व समय के साथ नहीं जैसा कि विस्पन्द में)

3. जिन बिन्दुओं पर आयाम न्यूनतम होता है उन्हें निस्पंद कहा जाता है

$\cos kx = 0,$ अर्थात् $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ अर्थात् , $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, ...$ $\left[\text{as} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}\right]$

अप्रगामी तरंग में निस्पंद समान दूरी पर होते है।

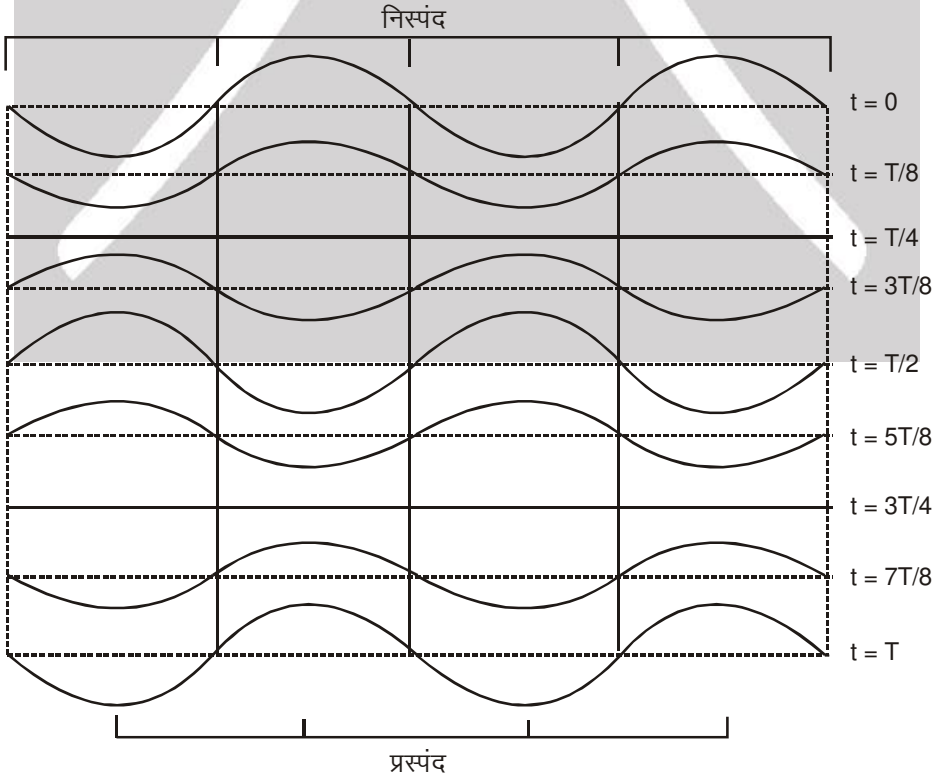
4. जिन बिन्दुओं पर आयाम अधिकतम होता है वे प्रस्पंद कहलाते है।

$\cos kx = \pm 1,$ i.e., $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...$

अर्थात् $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, ... \quad \left[k = \frac{2\pi}{\lambda}\right]$

निस्पंदों के समान प्रस्पंद भी (λ/2) की समान दूरी पर स्थित होते है और $A_{\text{अधिकतम}} = \pm 2A$ होता है। निस्पन्द और प्रस्पन्द (λ/4) दूरी पर एकान्तर क्रम में होते है।

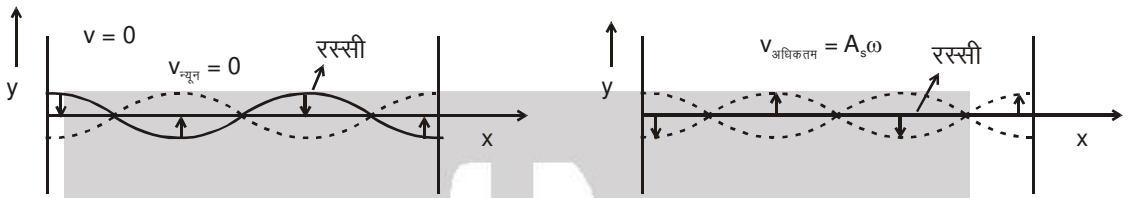
5. निस्पंद माध्यम को लूपों में विभक्त करते है। समान लूप में स्थित सभी कण समान कला में कम्पन्न करते है लेकिन निकटवर्ती लूप में स्थित सभी कण विपरीत कला में होते है। एक आवर्त में सभी कण दो बार माध्य स्थिति से अधिकतम वेग ($A_s\omega$) से गुजरते है। प्रत्येक अर्द्ध चक्र में गति की दिशा बदल जाती है।



(a)

6. अप्रगामी तरंग अनुप्रस्थ व अनुदैर्ध्य दोंनो हो सकती है। तनित रस्सी में यदि परावर्तित तरंगे है तो वे अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग व आर्गन पाईप में है तो अनुदैर्ध्य अप्रगामी तरंगे है।

7. अप्रगामी तरंगों में निस्पंद स्थाई रूप से स्थिरावस्था में होते है। अतः उनकी ऊर्जा का स्थानान्तरण नहीं होता इस खण्ड में ऊर्जा स्थिर रहती है। अतः यह ऊर्जा, गतिज ऊर्जा व प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा के रूप में दोलन करती है। जब सभी कण चरम बिन्दु पर होते है तो गतिज ऊर्जा न्यूनतम तथा स्थितिज ऊर्जा अधिकतम होती है लेकिन जब कण माध्य स्थिति से गुजरते है तो गतिज ऊर्जा अधिकतम व स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होती है। लेकिन लूप में कुल ऊर्जा (स्थितिज + गतिज), सदैव स्थिर रहती है।



(प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा)$_{अधिकतम}$ = E
न्यूनतम गतिज ऊर्जा = 0
(A)

(प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा)$_{न्यूनतम}$ = 0
(अधिकतम गतिज ऊर्जा) = E
(B)

Solved Examples

Example 12. विपरीत दिशा में गतिशील दो तरंग एक अप्रगामी तरंग का उत्पन्न करती है। तरंगों के स्वतंत्र समीकरण निम्न प्रकार है –

$y_1 = (4.0\text{ cm}) \sin(3.0x - 2.0t)$
$y_2 = (4.0\text{ cm}) \sin(3.0x + 2.0t)$

जहाँ x तथा y सेन्टीमीटर में है।

(a) x = 2.3 cm पर माध्यम के कण का अधिकतम विस्थापन बताइए।

(b) निस्पंद व प्रस्पंद की स्थिति बताइए।

Solution : (a) जब दो तरंगों का अध्यारोपण होता है तो प्राप्त अप्रगामी तरंग को निम्न गणितीय रूप से व्यक्त किया जाता है जहाँ A = 4.0 cm तथा k = 3.0 rad/cm है ;

$y = (2A \sin kx) \cos \omega t = [(8.0\text{ cm}) \sin 3.0\,x] \cos 2.0\,t$

इस प्रकार x = 2.3 cm पर कण का अधिकतम विस्थापन होगा।

$y_{max} = [(8.0\text{ cm}) \sin 3.0x]_{x = 2.3\text{ cm}} = (8.0\text{ m}) \sin(6.9\text{ rad}) = 4.6\text{ cm}$

(b) क्योंकि $k = 2\pi/\lambda = 3.0$ rad/cm, हम देखते $\lambda = 2\pi/3$cm. इसलिए प्रस्पंद स्थित है।

$x = n\left(\frac{\pi}{6.0}\right)$ cm (n = 1, 3, 5, ...)

तथा $x = n\,\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\pi}{3.0}\right)$ cm (n = 1, 2, 3, ...)

अतः निस्पंद स्थित है।

Example 13. समान आयाम व समान आवृत्ति की दो प्रगामी तरंगे रस्सी के अनुदिश विपरीत दिशा में गतिशील है। उनके अध्यारोपण से निम्न समीकरण वाली अप्रगामी तरंग प्राप्त होती है।

$y = A \cos kx \sin \omega t$

जहाँ A = 1.0 mm, $k = 1.57\text{ cm}^{-1}$ तथा $\omega = 78.5\text{ s}^{-1}$ है। (a) प्रगामी तरंग का आयाम व वेग बताइए। (b) x > 0 भाग में मूल बिन्दु से निकटतम निस्पंद की स्थिति बताइए। (c) x > 0 भाग में मूल बिन्दु से निकटतम प्रस्पंद की स्थिति बताइए। (d) x = 2.33 cm. पर स्थित कण का आयाम ज्ञात किजिए।

Solution : (a) अप्रगामी तरंगें निम्न तरगों के अध्यारोपण से प्राप्त होती हैं –

$$y_1 = \frac{A}{2}\sin(\omega t - kx) \text{ और } y_2 = \frac{A}{2}\sin(\omega t + kx).$$

किसी एक तरंग का वेग (परिमाण) है -

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{78.5 s^{-1}}{1.57 cm^{-1}} = 50 \text{ cm/s ; आयाम } = 0.5 \text{ mm.}$$

(b) निस्पंद के लिए, $\cos kx = 0$.

x का न्यूनतम धनात्मक मान जो इस संबंध को संतुष्ट करता है दिया गया है -

$kx = \pi/2$

या, $x = \frac{\pi}{2k} = \frac{3.14}{2 \times 1.57 cm^{-1}} = 1 \text{ cm}$

(c) प्रस्पंद के लिए, $|\cos kx| = 1$.

x का न्यूनतम धनात्मक मान जो इस संबंध को संतुष्ट करता है दिया गया है -

$kx = \pi$ या $x = \frac{\pi}{k} = 2 \text{ cm}$

(d) x दूरी पर स्थित कण के कंपन का आयाम $|A \cos kx|$ द्वारा दिया जाता है दिये गये बिन्दु के लिए -

$$kx = (1.57 \text{ cm}^{-1})(2.33 \text{ cm}) = \frac{7}{6}\pi = \pi + \frac{\pi}{6}.$$

इस प्रकार आयाम होगा -

$$(1.0 \text{ mm}) |\cos(\pi + \pi/6)| = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ mm} = 0.86 \text{ mm.}$$

रस्सी में कम्पन्न :

(a) दोनों सिरों से तनी हुई : माना कि एक L लम्बाई की रस्सी दोनों सिरों x=0 और x = L के बीच कसी हुई है। इस प्रकार की व्यवस्था में हम एक निरन्तर ज्या तरंग दायें सिरे की तरफ भेजते है। जब तरंग दायें सिरे पर पहुचँती है यह परावर्तित होकर पुनः लौटती हैं। यह परावर्तित तरंग आपतित तरंग पर अध्यारोपित होती है। जब परावर्तित तरंग बाएं सिरे पर पहुँचती है, तो पुनः परावर्तित होकर दांए सिरे की ओर लौटती है। पुनः बायीं सिरे की ओर गतिशील तरंग पर अध्यारोपित होती है। यह प्रक्रम निरन्तर चलता रहता है और शीघ्र ही हमें कई अध्यारोपित तरंगे प्राप्त होती है। जिनका एक दूसरे पर व्यतीकरण होता है। इस प्रकार की व्यवस्था में किसी बिन्दु x पर व t समय में दो तरंगे उपस्थित रहती है। एक बायीं ओर गतिशील होती है तथा दूसरी दांयी ओर गतिशील होती है। इसलिए

$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ (धनात्मक x दिशा में गतिशील तरंग)

और $y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t)$ (ऋणात्मक x दिशा में गतिशील तरंग).

दोनों तरंगों के लिए अध्यारोपण का सिद्धान्त लगाने पर

$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m \sin(kx - wt) + y_m \sin(kx + \omega t) = (2y_m \sin kx) \cos \omega t$

यह देखा जाता है कि अधिकतम या न्यूनतम आयाम के बिन्दु एक ही स्थिति पर रूके हुए हैं।

निस्पंद : kx के जिन मानों के लिए $\sin kx = 0$ होगा वहाँ आयाम भी शून्य होगा।

$n = 0, 1, 2, 3, ...$ के लिए $kx = n\pi$,

$k = 2\pi/\lambda$ रखने पर $x = n\frac{\lambda}{2}$, for $n = 0, 1, 2, 3, ...$

शून्य आयाम की स्थिति निस्पंद कहलाती है तथा दो क्रमागत निस्पंदों के बीच की दूरी $\frac{\lambda}{2}$ या तरंगदैर्ध्य की आधी होगी।

प्रस्पंद : kx के जिन मानों के लिए |sin kx| = 1 अधिकतम होगा वहाँ आयाम भी अधिकतम होगा तथा इसका अधिकतम मान $2y_m$ होगा

$n = 0, 1, 2, 3,....$ के लिए $kx = (n + 1/2)\pi$

$k = 2\pi/\lambda$ रखने पर

$n = 0, 1, 2, 3,....$ के लिए $x = (n + 1/2)\dfrac{\lambda}{2}$

पर अधिकतम आयाम होगा। ये बिन्दु प्रस्पंद कहलाते है। प्रस्पंद के मध्य दूरी $\lambda/2$ होती है तथा ये निस्पंदो के मध्य में स्थित होते है।

L लम्बाई की दोंनो सिरों पर कसी हुई रस्सी में जिसका एक सिरा $x = 0$ तथा दूसरा सिरा $x = L$ पर व्यवस्थित है। निस्पंद सिरों पर स्थित होंगे। लम्बाई L नीचे दी गई शर्त को निश्चित रूप से संतुष्ट करती है।

$n = 1, 2, 3,....$ के लिए $L = n\dfrac{\lambda}{2}$

यह शर्त दर्शाती है कि L लम्बाई की रस्सी पर अप्रगामी तरंगें प्रतिबन्धित तरंगदैर्ध्य की होगी जिसका मान

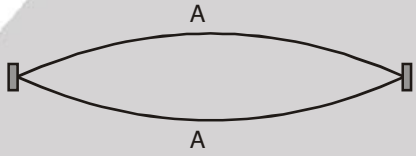
$n = 1, 2, 3,.....$ के लिए $\lambda = \dfrac{2L}{n}$

इन तरंगदैर्ध्यों के संगत आवृत्ति का मान नीचे लिखे समीकरण से लिखा जाता है

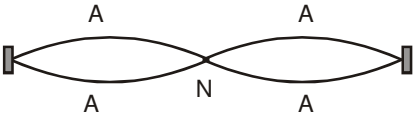
$n = 1, 2, 3,.....$ के लिए $v = n\dfrac{v}{2L}$

जहाँ v डोरी पर प्रगामी तरंग की चाल है। समीकरण द्वारा प्राप्त आवृत्तियों का समुच्चय प्राकृतिक आवृत्तियाँ या निकाय के दोलन की विधा कहलाती है। यह समीकरण दर्शाता है कि रस्सी पर प्राकृतिक आवृत्तियाँ, न्यूनतम आवृत्ति $v = \dfrac{v}{2L}$ की पूर्णांक गुणक है, जो $n = 1$ के संगत हैं न्यूनतम आवृत्ति के साथ दोलन मूल विधा या प्रथम गुणावृत्ति कहलाता है। द्वितीय गुणावृत्ति या प्रथम अधिस्वरक $n = 2$ की दोलन विधा है। तीसरी गुणावृत्ति और द्वितीय अधिस्वरक $n = 3$ के संगत है तथा इसी प्रकार आगे भी संगत होती है। इन विधाओं के संगत आवृत्तियां ν_1, ν_2, ν_3 इत्यादि से दर्शायी जाती है। सभी संभव विधाओं का संगह गुणावृत्ति श्रेणी और n को गुणावृत्ति संख्या कहते हैं।

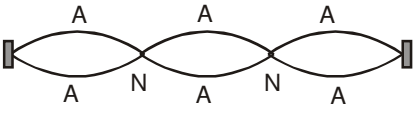
दोनों सिरों पर बंधी तनी हुई रस्सी की कुछ गुणावृत्तियां चित्र में दिखाई गई हैं



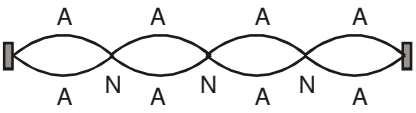
(a)
मूल या प्रथम गुणावृत्ति
$\nu_0 = v/2L$



(b)
द्वितीय गुणावृत्ति या प्रथम अधिस्वरक =
$\nu_1 = 2\nu_0 = 2v/2L$



(c)
तृतीय गुणावृत्ति या द्वितीय अधिस्वरक =
$\nu_2 = 3\nu_0, = 3v/2L$



(d)
चतुर्थ गुणावृत्ति या तृतीय अधिस्वरक =
$\nu_3 = 3\nu_0, = 3v/2L$

Solved Example

Example 14. पियानों के मध्य C डोरी की मूल आवृत्ति 262 Hz, है और A नोट की मूल आवृत्ति 440 Hz (a) C डोरी की अगली दो गुणावृत्तियों की आवृत्तियों की गणना करो। (b) यदि A और C नोट के लिए डोरियों की लम्बाईयाँ तथा प्रति एकांक लम्बाई का द्रव्यमान समान हो तो दोनों डोरीयों में तनाव का अनुपात ज्ञात करो।

Solution : (a) क्योंकि डोरी C के लिए $f_1 = 262$ Hz हम f_2 और f_3 आवृत्तियां पाने के लिए समीकरण का प्रयोग कर सकते हैं;

$f_2 = 2f_1 = 524$ Hz

$f_3 = 3f_1 = 786$ Hz

दो रस्सीयों के उनकी मूल आवृत्तियों पर कम्पन्न के लिए समीकरण का प्रयोग करने पर

$$f_{1A} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{\mu}} \quad f_{1C} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_C}{\mu}} \quad \therefore \frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_C}}\ \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2 = \left(\frac{440\ \text{Hz}}{262\ \text{Hz}}\right)^2 = 2.82.$$

Example 15. एक तार जिसका रेखीय द्रव्यमान घनत्व 10^{-3} kg/m है, दो दृढ आधारों के बीच तनी हुई है तथा रस्सी में तनाव 90 N है। तार 350 Hz की आवृत्ति पर अनुनादित है। अगली उच्च आवृत्ति जिस पर वही तार पुनः अनुनादित होता है 420 Hz है तार की लम्बाई ज्ञात करो।

Solution : माना तार इसकी nवीं गुणावृत्ति में 350 Hz और (n + 1)वीं गुणावृत्ति में 420 Hz पर कम्पन्न करता है।

$$350\ s^{-1} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad ....(i) \quad \text{और} \quad 420\ s^{-1} = \frac{(n+1)}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad ....(ii)$$

$$\frac{420}{350} = \frac{n+1}{n} \quad \text{या , } n = 5.$$

(i) में मान रखने पर ,

$$350 = \frac{5}{2\ell}\sqrt{\frac{90}{10^{-3}}} \Rightarrow 350 = \frac{5}{2\ell} \times 300 \Rightarrow \ell = \frac{1500}{700} = \frac{15}{7}\text{ m} = 2.1\text{ m}$$

(b) एक सिरे पर जड़वत : रस्सी के एक सिरे को कस कर मुक्त सिरे से लम्बवत् दिशा में कम्पन्न कराकर अप्रगामी तरंगें उत्पन्न की जा सकती हैं। इस तरह का मुक्त सिरा बहुत हल्की डोरी को रस्सी से संयोजित करके भी प्राप्त किया जा सकता है।

यदि किसी स्रोत द्वारा उत्पन्न कम्पन्न की आवृत्ति सही हो तो अप्रगामी तरंगें उत्पन्न होती हैं। यदि $x = 0$ वाला सिरा जड़त्व हो तथा $x = L$ वाला सिरा मुक्त हो तो अप्रगामी तरंगों का समीकरण निम्न प्रकार से दिया जा सकता है -

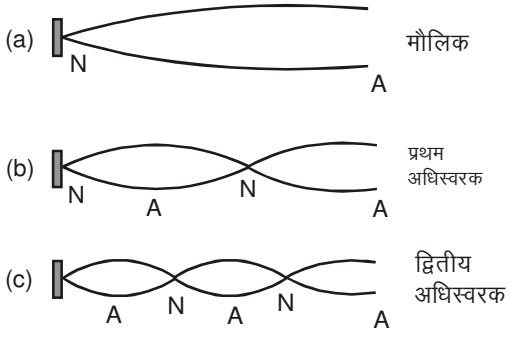
$y = 2A \sin kx \cos \omega t$

सीमान्त शर्तों के अनुसार $x = L$ पर प्रस्पंद है तथा $x = 0$ पर निस्पंद है,

$\sin kL = \pm 1$

$$\text{या, } kL = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{या, } \frac{2\pi L}{\lambda} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \text{ या, } \frac{2Lf}{v} = n + \frac{1}{2} \text{ या, } f = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{v}{2\ L} = \frac{n+\frac{1}{2}}{2\ L}\sqrt{T/\mu} \ .....$$

ये कम्पन्न की समान आवृत्तियाँ हैं। जब $n = 0$, है तो मूल आवृत्तियां प्राप्त होती हैं।



$f_0 = v/4L$

अधिस्वरक आवृत्तियां हैं

$$f_1 = \frac{3v}{4L} = 3f_0$$

$$f_2 = \frac{5v}{4L} = 5f_0$$

हम देखते हैं कि सभी मूल कम्पन्नों की गुणावृत्तियां अप्रगामी तरंगों के लिए आवृत्तियाँ स्वीकार्य नहीं होती। केवल विषम गुणावृत्तियाँ ही अधिस्वरक होती हैं। चित्र में रस्सी की कुछ सामान्य विधायें प्रदर्शित की गई हैं।

डोरी के अनुप्रस्थ कम्पन के नियम - सोनोमीटर तार

(a) लम्बाई का नियम $f \alpha \frac{1}{L}$ इसलिए $\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1}$; यदि T & μ नियतांक हैं

(b) तनाव का नियम $f \alpha \sqrt{T}$ इसलिए $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$; L और μ नियतांक हैं

(c) द्रव्यमान का नियम $f \alpha \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ इसलिए $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$; T और L नियतांक हैं

Solved Miscellaneous Problems

Problem 1. एक तरंग स्पंद x अक्ष के अनुदिश संचरित है जिसे निम्न फलन से व्यक्त किया जाता है :

$$y(x, t) = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$$

जहां x cm तथा t सैकण्ड में है।

(i) तरंग किस दिशा में संचरित है ? (ii) तरंग वेग ज्ञात करो।

(iii) t = 0, t = 2s तरंग रूप क्या होगा।

Solution : $y = \frac{2}{(x-3t)^2+1}$

(i) चूंकि तरंग धनात्मक x–दिशा में गतिमान $y = (x, t) = f(t - x/v) = f/v(vt - x)$

(ii) अब $x - v t$ को $x - 3t$ से तुलना करने पर

$\therefore$ v = 3 cm/sec. **Ans.** (i) धनात्मक x अक्ष (ii) 3 cm/s.

Problem 2. t = 0 पर तार में तरंग स्पंद फलन $y = \frac{6}{x^2+3}$ से व्यक्त किया जाता है। जहाँ x व y मीटर प्रदर्शित है तो y(x, t) फलन लिखें जो इस तरंग को व्यक्त करें। यदि तरंग धनात्मक x दिशा में 4.5 m/s की चाल से गति कर रही है।

Solution : $y = \frac{6}{x^2+3} = f(x)$ जैसे $y(x, t) = f(x - vt) = \frac{6}{(x-4.5t)^2+3}$ **Ans.** $\frac{6}{(x-4.5t)^2+3}$

Problem 3. डोरी में संचरित तरंग का तरंग फलन दिया गया है $y (x, t) = (0.350 \text{ m}) \sin (10\pi t - 3\pi x +)$

(a) संचरित तरंग की दिशा व चाल क्या है ?

(b) t = 0, x = 0.1 m पर डोरी का ऊर्ध्वाधर विस्थापन क्या है ?

(c) तरंग के तरंगदैर्ध्य व आवृत्ति क्या है ?

Solution : $Y (x, t) = (0.350\text{m}) \sin (10\pi t - 3 \pi x + \frac{\pi}{4})$

सभी से तुलना करने पर ; $Y = A \sin (wt - kx + \phi)$ $w = 10\pi$, $k = 3\pi$, $\phi = \frac{\pi}{4}$

(a) चाल $= \frac{w}{k} = \frac{10}{3} = 3.33$ m/sec और +x–अक्ष के अनुदिश

(b) $y (0.1, 0) = 0.35 \sin (10 \pi \text{ x O} - 3 \pi (0.1) + \frac{\pi}{4}) = 0.35 \sin \left[\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{10}\right] = -5.48$ cm

(c) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3 \pi =)$ $\lambda = \frac{2}{3}$ cm= 0.67 cm and $f = \frac{\nu}{\lambda} = \frac{10/3}{2/3} = 5$ Hz.

Problem 4. दर्शाईये कि तरंग फलन $y = e^{b(x-vt)}$ एक रेखीय तरंग समीकरण का हल है।

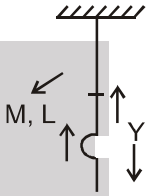
Solution : $Y = e^{b(x-vt)}$ $\frac{\partial y}{\partial x} = be^{b(x-vt)}$ और $\frac{\partial y}{\partial t} = (bv)e^{b(xv-vt)}$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = b^2 e^{b(x-vt)}$ और $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (bv)^2 e^{b(x-vt)}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

जोकि एक रेखीय तरंग समीकरण है।

Problem 5. m द्रव्यमान व L लम्बाई की एक समान रस्सी एक छत से लटक रही है। (a) दर्शाओं कि डोरी की अनुप्रस्थ तरंग की चाल y का फलन है, y निचले सिरे से दूरी है, और $v = \sqrt{gy}$ द्वारा दिया गया है। (b) दर्शाओ कि रस्सी की लम्बाई को तय करने में अनुप्रस्थ तरंग द्वारा लिया गया समय $t = 2\sqrt{L/g}$ द्वारा दिया गया है।

Solution : (a) जैसे द्रव्यमान प्रति एकांक लम्बाई



$\mu = \frac{m}{L}$

$\therefore$ $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\therefore$ P पर तनाव = μyg

$\therefore$ $V = \sqrt{\frac{\mu yg}{\mu}} = \sqrt{yg}$

(b) अब $\frac{dy}{dt} = \sqrt{yg}$ $\Rightarrow$ $\int_0^{\ell}\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{g}\int_0^t dt$ $t = 2\sqrt{\ell/g}$

Problem 6. दो समान आवृति की ज्या तरंगे किसी स्रोत द्वारा रस्सी के अनुदिश एक ही दिशा में भेजी जाती है। एक तरंग का आयाम 5.0 mm, तथा दूसरी का आयाम 8.0 mm है। (a) परिणामी तरंग के न्यूनतम आयाम के लिए तरंगों के बीच कलान्तर ϕ_1 क्या है? (b) न्यूनतम आयाम क्या है ? (c) अधिक आयाम वाली तरंग से परिणामी तरंग का कलान्तर ϕ_2 क्या है ? (d) अधिकतम आयाम क्या है ? (e) परिणामी आयाम क्या है जब कलान्तर $(\phi_1 - \phi_2)/2$ है ?

Solution : (a) न्यूनतम आयाम हेतु ; $A_R = |A_1 - A_2|$
और यह तभी सम्भव है जब A_1 और A_2 के मध्य $\phi_1 = \pi$ है।

(b) $A_R = |A_1 - A_2| = 3$ mm

(c) अधिकतम आयाम हेतु ;
$A_R = |A_1 + A_2|$ यह तभी सम्भव है जब A_1 और A_2 के मध्य $\phi_2 = 0$ है।

(d) $A_R = |A_1 + A_2| = 13$ mm

(e) जब $\phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} = \frac{\pi - o}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $A_R = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\frac{\pi}{2}]^{1/2} = 9.4$ mm

Ans. (a) π rad; (b) 3.0 mm; (c) 0 rad; (d) 13 mm; (e) 9.4 mm

Problem 7. 120 kg द्रव्यमान तथा 8.40 m लम्बी रस्सी दोंनों सिरों पर बंधी हुई है। यदि इस पर 96.0 N तनाव बल आरोपित किया जाता है तथा दोलन कराया जाता है। तो (a) रस्सी में तरंग का वेग क्या होगा ? (b) अप्रगामी तरंग के लिए रस्सी में अधिकतम सम्भव तरंगदैर्ध्य क्या होगी ? (c) तरंग की आवृत्ति क्या होगी।

Solution : (a) $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{96}{\left(\frac{0.12}{8.4}\right)}} = 82$ m/sec.

(b) अधिकतम सम्भव तरंगदैर्ध्य हेतु ; $\frac{\lambda}{2} = \ell$ $\Rightarrow$ $\lambda = 2\ell = 2 \times 8.4 = 16.8$ m

(c) $V = f\lambda \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{82}{16.8} = 4.88$ Hz. **Ans.** (a) 82.0 m/s, (b) 16.8 m, (c) 4.88 Hz.

Exercise-1

✍ चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

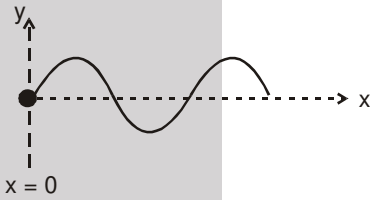
भाग - I : विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

खण्ड (A) : प्रगामी तरंग का समीकरण (ज्या तरंगों को शामिल करते हुए)

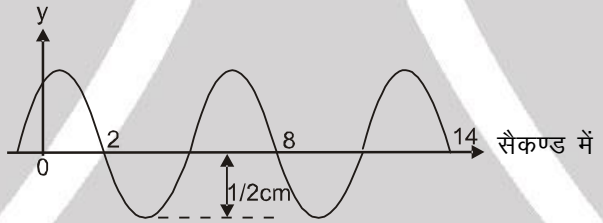
A-1. माना एक तरंग का समीकरण $y = (10\ mm) \sin [(5\pi\ cm^{-1})\ x - (60\pi\ s^{-1})\ t + \frac{\pi}{4}]$ है तो ज्ञात करो (a) तरंग का आयाम (b) तरंग संख्या (c) तरंगदैर्ध्य (d) तरंग की आवृत्ति (e) आवर्तकाल (f) तरंग का वेग (g) x = 0 पर स्थित कण के SHM का कला नियतांक।

A-2. एक ही दिशा में गतिमान दो समान तरंगों में $\pi/2$ rad का कलान्तर है। दोनों जुड़ने वाली तरंगों के उभयनिष्ठ आयाम y_m के पदों में परिणामी तरंग का आयाम क्या है?

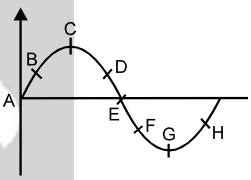
A-3. दिखाई गई रस्सी में उत्पन्न तरंग की आवृत्ति 5.00 Hz है। तरंग की चाल 20.0 m/s और गति का आयाम 12.0 cm है। तरंग इस प्रकार की है कि x = 0 और t = 0 पर y = 0 है। ज्ञात करो। (a) कोणीय आवृत्ति। (b) इस तरंग के लिए तरंग संख्या। (c) तरंग फलन के लिए आवश्यक व्यंजक लिखो। (d) अधिकतम अनुप्रस्थ चाल। (e) रस्सी पर किसी बिन्दु का अधिकतम अनुप्रस्थ त्वरण।



A-4.✍ चित्र में ज्या तरंग के लिए x = 8 m पर विस्थापन–समय वक्र दिखाया गया है। तरंग का वेग v = 6m/s धनात्मक x-अक्ष की दिशा में मानते हुए तरंग की समीकरण लिखो।



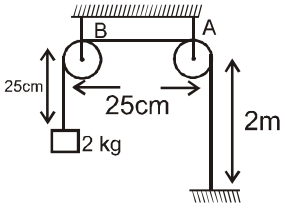
A-5. एक अनुप्रस्थ तरंग रस्सी के अनुदिश बायीं से दायीं तरफ संचरण कर रही है। चित्र मे किसी क्षण रस्सी की आकृति दर्शायी गयी है। इस क्षण पर
(a) कौनसे कणों का वेग ऊपर की तरफ है।
(b) कौनसे कणों का वेग नीचे की तरफ है।
(c) कौनसे कणों का वेग शून्य है।
(d) किन कणों के वेग का मान अधिकतम है।



खण्ड (B) : रस्सी पर तरंग की चाल

B-1. एक पियानों की रस्सी जिसके लिए प्रति एकांक लम्बाई का द्रव्यमान 5.00×10^{-3} kg/m है, में तनाव 1350 N है। इस रस्सी पर चलने वाली तरंग की चाल बताओ।

B-2.✍ चित्र में दर्शायी गयी व्यवस्था में, डोरी का द्रव्यमान 5g है। डोरी में फर्श के समीप उत्पन्न अनुप्रस्थ विक्षोभ को घिरनी A तक पहुँचने में कितना समय लगेगा ? $g = 10\ m/s^2$ मानिए।



B-3. 20 m लम्बी तथा 8 kg द्रव्यमान की एकसमान रस्सी के एक सिरे को किसी दृढ़ आधार से ऊर्ध्वाधर तथा इसके मुक्त सिरे को 2 kg द्रव्यमान से जोड़ा जाता है। रस्सी के निचले सिरे पर 0.06 m तरंगदैर्ध्य की अनुप्रस्थ स्पन्द उत्पन्न की जाती है। स्पन्द की तरंगदैर्ध्य क्या होगी जब यह रस्सी के उच्चतम बिन्दु पर पहुँचती है?

B-4. एक तनी हुई डोरी का कण, जिसमें एक तरंग गमन कर रही है, माध्य स्थिति से माध्य स्थिति तक गति करने में न्यूनतम समय 5.0 मिली सेकण्ड समय लेता है। माध्य स्थितियों पर स्थित दो क्रमागत कणों के मध्य की दूरी 2.0 सेमी है। आवृत्ति, तरंगदैर्ध्य तथा तरंग की चाल ज्ञात कीजिये।

B-5. भिन्न–भिन्न घनत्व किन्तु समान अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल वाले दो तार एक सिरे पर वेल्डिंग कर जोडे गये है तथा T तनाव से ताने गये है। प्रथम तार में एक अनुप्रस्थ तरंग का वेग, दूसरे तार के वेग का आधा है। दोनों तारों के घनत्व का अनुपात ज्ञात करो।

B-6. एक लिफ्ट की छत से 1.6×10^{-3} kg/m. रैखिक द्रव्यमान घनत्व वाली डोरी की सहायता से एक 4 किग्रा द्रव्यमान का गुटका लटकाया गया है। (a) यदि लिफ्ट 6 मी./से.^{2} की दर से ऊपर की ओर त्वरित हो रही हो तो डोरी में एक तरंग स्पंद के गमन की चाल(डोरी के सापेक्ष) ज्ञात कीजिये। (b) भाग (a) में किसी क्षण पर लिफ्ट की चाल 40 m/s ऊपर की ओर है तो उसी क्षण पर धरातल के सापेक्ष तरंग स्पन्द की चाल होगी। ($g = 10$ m/s^2)

खण्ड (C) : रस्सी के अनुदिश संचरित शक्ति

C-1. एक बहुत लम्बी रस्सी के 6.00 m भाग का द्रव्यमान 180 g है। एक अति उच्च चाल वाला फोटोग्राफ यह प्रदर्शित करता है कि इस भाग में तरंग के चार पूर्ण चक्र है। रस्सी ज्या रूप में 50.0 Hz आवृत्ति के साथ कम्पन करती है और श्रृंग से गर्त का विस्थापन 15.0 cm है। (सबसे अधिक धनात्मक विस्थापन तथा सबसे अधिक ऋणात्मक विस्थापन के बीच ऊर्ध्वाधर दूरी को श्रृंग से गर्त का विस्थापन कहते है।) (a) धनात्मक x अक्ष की दिशा में चलती हुई इस तरंग को प्रदर्शित करने वाला फलन लिखो। (b) रस्सी को दी गई औसत शक्ति ज्ञात करो।

C-2. 100 न्यूटन तनाव से तने हुए तार में 5 mm आयाम तथा 10 हर्ट्ज आवृत्ति की अनुप्रस्थ तरंग उत्पन्न की जाती है। यदि तरंग की चाल 100 मी/से है, तो स्त्रोत द्वारा तार को औसत कितनी शक्ति स्थानांतरित की जा रही है। ($\pi^2 = 10$)

खण्ड (D) : व्यतिकरण, परावर्तन संचरण

D-1. धनात्मक x-दिशा में गति कर रही समतल तरंग का समीकरण $y = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$ है। जब यह तरंग दृढ़ आधार से परावर्तित होती है तो आयाम 80% हो जाता है तब इस परावर्तित तरंग का समीकरण होगा।

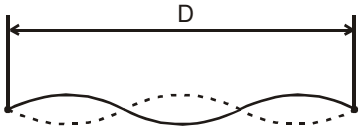
D-2. श्रेणीबद्ध स्पंद प्रत्येक का आयाम 0.150 m, को एक सिरे से किसी दीवार से बंधी रस्सी पर भेजा जाता है। स्पंद आयाम में बिना किसी हानि के दीवार से परावर्तित होकर रस्सी के अनुदिश लौटते है। जब दोनों तरंगे रस्सी पर रहती है तो किसी बिन्दु पर कुल विस्थापन दोनों तरंगो के अलग–अलग विस्थापनों के योग के बराबर होता है। उस बिन्दु पर कुल विस्थापन क्या होगा जहाँ से दो स्पंद साथ–साथ गुजरते है। (a) यदि रस्सी दीवार से दृढ़ता से बंधी है ? (b) यदि बँधा हुआ सिरा ऊपर नीचे गति कर सकने के लिए स्वतन्त्र है ?

D-3. एक डोरी में एक ही दिशा में दो तंरगे गमन कर रही है, प्रत्येक की आवृत्ति 100 हर्ट्ज तथा तरंगदैर्ध्य 2 सेमी है। तरंगो के मध्य कलांतर कितना होगा। (a) यदि द्वितीय तरंग प्रथम तरंग के 10 m sec पश्चात उसी स्थान पर उत्पन्न की गई है। (b) यदि दोनों तरंगे एक ही क्षण पर उत्पन्न की गयी किन्तु प्रथम दूसरी से 1 सेमी पीछे उत्पन्न की गयी ? (c) यदि प्रत्येक तरंग का आयाम 2.0 मिमी है, तो भाग (a) तथा (b) में परिणामी तरंगों के आयाम कितने होगें?

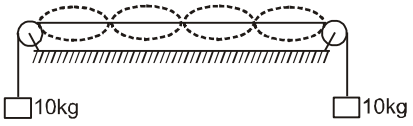
खण्ड (E) : अप्रगामी तरंगे और अनुनाद

E-1. दोंनो सिरों से बंधी हुई 10m लम्बी तथा 100 ग्राम द्रव्यमान वाली रस्सी जिसमें तनाव 25 N है, में उत्पन्न अप्रगामी तरंग की (a) निम्नतम आवृत्ति, (b) द्वितीय निम्नतम आवृत्ति तथा (c) तृत्तीय निम्नतम आवृत्ति ज्ञात करो?

E-2. गिटार की नायलोन रस्सी का रेखीय द्रव्यमान घनत्व 7.20 g/m है तथा इसमें तनाव 150 N है। जड़वत् आधार D = 90.0 cm दूरी पर है। रस्सी चित्र में दिखाये अनुसार अप्रगामी तरंग के रूप में कम्पन कर रही है। गणना करो। (a) चाल (b) तरंगदैर्ध्य तथा (c) उन प्रगामी तरंगों की आवृत्ति जिनके अध्यारोपण से यह अप्रगामी तरंग प्राप्त होती है।



E-3. चित्र में प्रदर्शित घिरनियों के मध्य तार की लम्बाई 1.5 मी तथा इसका द्रव्यमान 15 ग्राम है। दोनों घिरनियो के मध्य के तार के मध्य बिन्दु विरामावस्था में रहते हुए तार चार लूपों में कम्पन्न कर रहा है, कम्पन्न की आवृत्ति ज्ञात कीजिये।

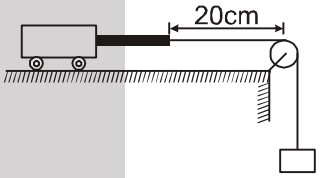


E-4. एक रस्सी निम्न समीकरण के अनुसार दोलन करती है y' = (0.50 cm) sin $\left[\left(\frac{\pi}{3}\text{cm}^{-1}\right)x\right]$ cos [(40 π s^{-1})t]. What गणना करो (a) आयाम तथा (b) दोंनो तरंगों (गति की दिशा को छोड़कर समान तरंगे) की चाल जिनके अध्यारोपण से यह दोलन उत्पन्न होता है ? (c) निस्पन्दों के बीच की दूरी ? (d) t = $\frac{9}{8}$s तथा x = 1.5 cm स्थिति पर रस्सी के कण की अनुप्रस्थ चाल।

E-5. एक रस्सी 4 लूपों में 400 Hz आवृत्ति से कम्पित है।
(a) इसकी मूल आवृत्ति क्या है ? (b) 7 लूपों में कम्पित होने के लिए इसकी आवृत्ति ज्ञात करो।

E-6. 60 cm लम्बी रस्सी का कम्पन निम्न समीकरण से व्यक्त किया जाता है। y = 3 cos (πx/20) cos (72πt) जहाँ x तथा y सेमी० तथा t सैकण्ड में है।
(i) घटक तरंगे लिखिये जिनके अध्यारोपण से उपरोक्त तरंग प्राप्त होती है।
(ii) रस्सी के अनुदिश निस्पन्द और प्रस्पन्द की स्थितियां बताओ।
(iii) x = 5 cm पर स्थित रस्सी के कण का t = 0.25 sec पर वेग क्या है।

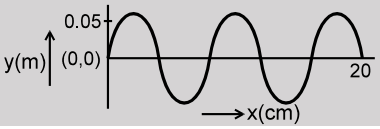
E-7. एक भारी डोरी का एक सिरा एक भारी एवं गति करने में सक्षम आधार से बांधा गया है तथा इसका दूसरा सिरा चित्रानुसार एक हल्के धागे से ब्लॉक से बांधा गया है। हल्का धागा एक स्थिर घिरनी से होकर गुजर रहा है जिससे तनाव उत्पन्न होता है। न्यूनतम आवृत्ति जिससे भारी डोरी अनुनादित हो सकती है, 120 हर्ट्ज है। यदि गतिशील आधार दायीं ओर 20 सेमी खीचा जाता है, जिससे संधि घिरनी पर आ जाती है, वह न्यूनतम आवृत्ति कितनी होगी, जिससे कि भारी डोरी अनुनादित हो सके?



भाग - II : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

खण्ड (A) : प्रगामी तरंग का समीकरण (ज्यातरंग को शामिल करते हुए)

A-1. चित्र में दिखायी गयी तरंग के लिये समी. होगा ? यदि t = 0 पर तरंग का वेग 350 ms^{-1} है तथा तरंग +x दिशा में संचरित है?



(A) 0.05 sin ($\frac{314}{4}$ x – 27475 t) (B) 0.05 sin ($\frac{379}{5}$ x – 27475 t)

(C) 1 sin ($\frac{314}{4}$ x – 27475 t) (D) 0.05 sin ($\frac{289}{5}$ x + 27475 t)

A-2. एक तरंग विक्षोभ जो घनात्मक x-दिशा में संचरित है, का विस्थापन निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है। t = 0 पर y = 1/(1 + x^2) और t = 2 सैकण्ड पर y = 1/[1 + (x – 1)^2] जहाँ x और y मीटर में है यदि तरंग विक्षोभ की आकृति संचरण के दौरान नही बदलती है तो तरंग का वेग होगा? **[JEE - 1990]**
(A) 2.5 m/s (B) 0.25 m/s (C) 0.5 m/s (D) 5 m/s

A-3. एक अनुप्रस्थ तरंग निम्न समीकरण से दी गयी है Y = Y$_0$ sin 2π (ft – x/λ) तो कण का अधिकतम वेग तरंग के वेग का चार गुना होगा यदि **[JEE - 1984]**
(A) $\lambda = \pi Y_0/4$ (B) $\lambda = \pi Y_0/2$ (C) $\lambda = \pi Y_0$ (D) $\lambda = 2\pi Y_0$

A-4. किसी रस्सी के अनुदिश गतिशील एक प्रगामी तरंग का समीकरण $y = A \sin [\alpha x + \beta t + \frac{\pi}{6}]$ है। यदि $\alpha = 0.56$ /cm, $\beta = 12$/sec, A = 7.5 cm तो किसी कण का x = 1 cm और t = 1s के लिये स्थिति एवं वेग होगा।

(A) 4.6 cm, 46.5 cm s^{-1} (B) 3.75 cm, 77.94 cm s^{-1}
(C) 1.76 cm, 7.5 cm s^{-1} (D) 7.5 cm, 75 cm s^{-1}

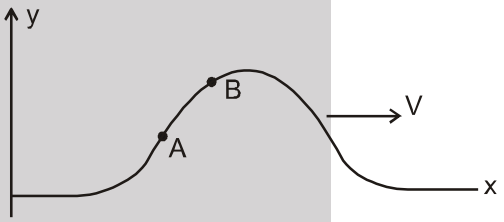
A-5. 0.50 मीटर आयाम, 1मीटर तरंगदैर्ध्य तथा 2 Hz आवृति की एक अनुप्रस्थ तरंग ऋणात्मक x-अक्ष के अनुदिश रस्सी पर गति कर रही है तो इस तरंग का समी. है – **[REE - 1989]**

(A) $y(x, t) = 0.5 \sin (2\pi x - 4\pi t)$ (B) $y(x, t) = 0.5 \cos (2\pi x + 4\pi t)$
(C) $y(x, t) = 0.5 \sin (\pi x - 2\pi t)$ (D) $y(x, t) = 0.5 \cos (2\pi x - 2\pi t)$

A-6. झील पर दो छोटी नांवे 10 मीटर दूरी पर है। प्रत्येक नांवे पानी की सतह पर तरंग गति के कारण ऊपर एवं नीचे 4.0 सैकण्ड के आवर्तकाल से गति करती है। जब एक नाव उच्चतम बिन्दु पर होती है, तब दूसरी नांव निम्नतम बिन्दु पर होती है। दोनों नांवे हमेशा एक ही तरंग चक्र (single cycle) के अन्तर्गत रहती है। तरंग की चाल है।

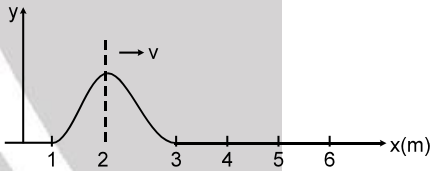
(A) 2.5 m/s (B) 5.0 m/s (C) 14 m/s (D) 40 m/s

A-7. एक रस्सी में एक तरंग स्पन्द उत्पन्न किया जाता है जो x-अक्ष के अनुदिश स्थित है। चित्र में दिखाये अनुसार बिन्दु A तथा B पर तरंग की चाल तथा कण की चाल का अनुपात क्रमशः R_A तथा R_B है तो –



(A) $R_A > R_B$ (B) $R_B > R_A$
(C) $R_A = R_B$
(D) निष्कर्ष के लिए सूचना अपर्याप्त है।

A-8. एक रस्सी में तरंग स्पन्द बिना अपनी आकृति परिवर्तित किये दॉयी दिशा में गति कर रहा है जैसा चित्र में प्रदर्शित है। दो कण क्रमशः $x_1 = 1.5$ मी. तथा $x_2 = 2.5$ मी. स्थितियों पर माने। चित्र में प्रदर्शित क्षण पर उनका अनुप्रस्थ वेग निम्न के अनुदिश होगा –



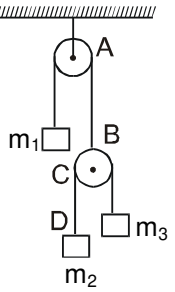
(A) क्रमशः धनात्मक y–अक्ष तथा धनात्मक y–अक्ष (B) क्रमशः ऋणात्मक y–अक्ष तथा धनात्मक y–अक्ष
(C) क्रमशः धनात्मक y–अक्ष तथा ऋणात्मक y–अक्ष (D) क्रमशः ऋणात्मक y–अक्ष तथा ऋणात्मक y–अक्ष

A-9. एक प्रेक्षक समुद्र तट पर खड़े होकर प्रेक्षित करता है कि एक मिनट में 54 तरंगे तट पर पहुँचती है। यदि तरंग की तरंगदैर्ध्य 10m हो तो तरंग का वेग होगा **[REE - 1979]**

(A) 19 m/sec (B) 29 m/sec (C) 9 m/sec (D) 39 m/sec

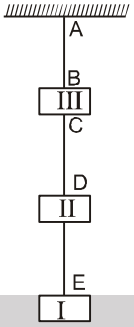
खण्ड (B) : रस्सी पर तरंग की चाल

B-1. चित्र में दिखाई गई रस्सियाँ एक ही पदार्थ की तथा समान क्षेत्रफल पर है। घिरनीयाँ हल्की हैं। रस्सी AB में अनुप्रस्थ तरंग की चाल v_1 तथा CD में चाल v_2 है तो v_1 / v_2 होगा।



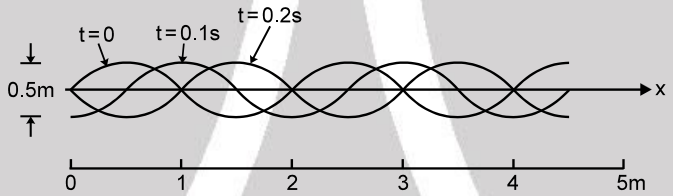
(A) 1 (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B-2. तीन ब्लॉक I, II, व III जिनके द्रव्यमान क्रमशः 1.6 kg, 1.6 kg व 3.2 kg है, चित्रानुसार जुडे हुये है। तार AB, CD तथा DE का रैखिक द्रव्यमान घनत्व क्रमशः 10 ग्राम/मी., 8 ग्राम/मी. तथा 10 ग्राम/मीटर है। AB, CD तथा DE में उत्पन्न अनुप्रस्थ तरंग स्पंद की चाल ज्ञात कीजिये। ($g = 10\ m/sec^2$)



(A) 80 m/s, $20\sqrt{10}$ m/s, 40 m/s (B) $20\sqrt{10}$ m/s, 40 m/s, 80 m/s
(C) $20\sqrt{10}$ m/s सभी में (D) 80 m/s सभी में

B-3. रस्सी पर चलती हुई तीन क्रमागत तरंगों का फोटोग्राफ चित्र में दर्शाया गया है तथा निम्न प्रेक्षण लिये गये है। सही परीक्षण को चुनिये ($\mu = 3\ g/cm.$)



(A) तरंग का विस्थापन आयाम 0.25 मी., तरंगदैर्ध्य 1m, तरंग चाल 2.5 m/s तथा तरंग उत्पन करने वाले बल की आवृत्ति 0.2/s है
(B) तरंग का विस्थापन आयाम 2.0 m, तरंगदैर्ध्य 2 m, तरंग चाल 0.4 m/s तथा तरंग उत्पन्न करने वाले बल की आवृत्ति 0.7/s है
(C) तरंग का विस्थापन आयाम 0.25 m, तरंगदैर्ध्य 2 m, तरंग चाल 5 m/s तथा तरंग उत्पन्न करने वाले बल की आवृत्ति 2.5/s है
(D) तरंग का विस्थापन आयाम 0.5 m, तरंगदैर्ध्य 2 m, तरंग चाल 2.5 m/s तथा तरंग उत्पन्न करने वाले बल की आवृत्ति 0.2/s है

B-4. एक मोटर कार की छत से एक हल्की डोरी की सहायता से एक भारी गेंद लटकायी गयी है। जब कार विरामावस्था में है तो एक अनुप्रस्थ स्पंद डोरी पर 50 सेमी/से चाल से तथा जब कार क्षेतिज सड़क पर त्वरित है तो 52 सेमी/से चाल से गमन करता है। कार का त्वरण ज्ञात कीजिये। ($g = 10$ मी./से.^{2})

(A) 2.7 m/s^2 (B) 3.7 m/s^2 (C) 2.4 m/s^2 (D) 4.1 m/s^2

खण्ड (C) : रस्सी के अनुदिश संचरित शक्ति

C-1. एक रस्सी में नियत चाल से गति कर रही तरंग बिन्दु $x = 0$ से गुजरती है। इसका आयाम A_0, कोणीय आवृत्ति ω_0 तथा ऊर्जा संचरण की औसत दर P_0 है। जैसे–जैसे तरंग रस्सी में नीचे की ओर गति करती है इसकी ऊर्जा में धीरे–धीरे ह्रास होता है तथा बिन्दु $x = \ell$ पर ऊर्जा संचरण की औसत दर $\frac{P_0}{2}$ हो जाती है तो बिन्दु $x = \ell$ पर कोणीय आवृत्ति तथा आयाम क्रमशः होंगे –

(A) ω_0 तथा $A_0/\sqrt{2}$ (B) $\omega_0/\sqrt{2}$ तथा A_0 (C) ω_0 व A_0 से कम (D) $\omega_0/\sqrt{2}$ तथा $A_0/\sqrt{2}$

C-2. ज्या वक्रीय तरंग जिसका आयाम y_m तथा चाल V है, एक रेखीय घनत्व ρ की रस्सी पर संचरित है तरंग की कोणीय आवृति ω है। निम्न निष्कर्ष निकाले गये है। सही कथन चुनिये।
(A) आवृति को दोगुना करने पर रस्सी के अनुदिश संचरित ऊर्जा की दर दो गुनी हो जायेगी।
(B) आयाम दो गुना करने पर रस्सी के अनुदिश संचरित ऊर्जा की दर आधी हो जायेगी।
(C) आयाम दो गुना करने पर रस्सी के अनुदिश संचरित ऊर्जा की दर दो गुनी हो जायेगी।
(D) उर्जा संचरण की दर तरंग वेग के अनुक्रमानुपाती होगी।

C-3. ज्यावक्रीय तरंगे जिनका आयाम 5.00 सेमी. है, को उस रस्सी के अनुदिश संचरित किया जाता है जिसका रेखीय द्रव्यमान घनत्व 4.00×10^{-2} कि.ग्रा./मी. है। अगर स्त्रोत से औसत 90 वाट शक्ति प्रदान की जा सकती है तथा रस्सी में तनाव 100 न्यूटन है तो वह उच्चतम आवृत्ति जिस पर स्त्रोत कार्य कर सके, होगी – ($\pi^2 = 10$ मानें) :
(A) 45 हर्ट्ज (B) 50 हर्ट्ज (C) 30 हर्ट्ज (D) 62 हर्ट्ज

C-4. ज्यातरंग उत्पन्न करने वाली रस्सी के किसी दिये गये बिन्दु से संचरित औसत शक्ति 0.40 है जब तरंग का आयाम 2 mm है। जब आयाम बढकर 4 mm हो जाता है तब इस बिन्दु से संचरित औसत शक्ति क्या होगी।
(A) 0.40 वॉट (B) 0.80 वॉट (C) 1.2 वॉट (D) 1.6 वॉट

खण्ड (D) : व्यतिकरण,परावर्तन, संचरण

D-1. जब दो समान आयाम एवं समान आवृत्ति की तरंगे जिसमें कलान्तर ϕ, हो, घनात्मक x दिशा में एक समान चाल से गति करते हुए, समान बिन्दु पर मिलती है तो –
(A) उनका परिणामी आयाम किसी एक तरंग के आयाम का दो गुना होगा लेकिन आवृत्ति समान होगी।
(B) उनका परिणामी आयाम एवं आवृत्ति किसी एक तरंग की दोगुनी होगी।
(C) उनका परिणामी आयाम उनके मध्य कलान्तर पर निर्भर करेगा जबकि आवृति समान होती है।
(D) परिणामी आयाम एवं आवृति उनके मध्य कलान्तर पर निर्भर करेगा।

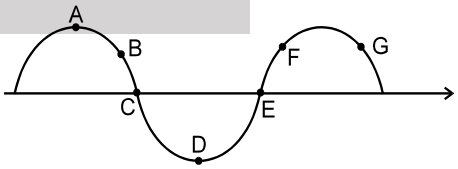
D-2. तरंग में उर्जा संचरण की दर निर्भर करती है।
(A) तरंग के आयाम के वर्ग एवं आवृत्ति के वर्ग के समानुपाती (B) तरंग के आयाम के वर्ग एवं आवृति के वर्गमूल के समानुपाती
(C) तरंग के आयाम के वर्ग एवं आवृति के समानुपाती (D) तरंग के आयाम एवं तरंग आवृत्ति के वर्ग के समानुपाती।

D-3. आयाम क्रमशः A_1 व A_2 तथा समान आवृत्ति की दो तरंगे समान बिन्दु की ओर गमन कर रही है। परिणामी तरंग का आयाम है–
(A) $A_1 + A_2$ (B) $A_1 - A_2$
(C) $A_1 + A_2$ तथा $A_1 - A_2$ के मध्य (D) कुछ कहा नही जा सकता

D-4. एक तरंग स्पंद दो टुकड़ों से बनी हुई डोरी में गमन कर रहा है, यह संधि पर आंशिक परावर्तित तथा आंशिक पारगमित होती है। परावर्तित तरंग की आकृति, आपतित की तुलना में उत्क्रमित (inverted) हो जाती है। यदि आपतित तरंग की चाल v है तथा पारगमित तरंग की v′, है तो -
(A) $v' > v$ (B) $v' = v$ (C) $v' < v$
(D) v तथा v′ के सम्बन्ध के बारे में कुछ नहीं कहा जा सकता।

D-5. समीकरण $y_1 = y_m \sin \omega t$ और $y_2 = y_m \sin(\omega t + \phi)$ द्वारा व्यक्त की गयी दो तरंगों द्वारा मुक्त आकाश में किसी दिये बिन्दु पर प्रभाव उत्पन्न किया गया है जहां y_m दोनों तरंगों के लिये समान है तथा ϕ कलान्तर है। निम्न से असत्य कथन चुनिये।
(A) दिये गये बिन्दु पर अधिकतम तीव्रता किसी एक तरंग की दोगुनी होगी यदि $\phi = 0$ हो।
(B) दिये गये बिन्दु पर अधिकतम तीव्रता किसी एक तरंग की चौगुनी होगी यदि $\phi = 0$ हो।
(C) दिये गये बिन्दु पर अधिकतम आयाम किसी एक तरंग के आयाम का दो गुना होगा जब दोनों तरंगें $\phi = 0$ मिलती है।
(D) जब तीव्रता शून्य होगी तो कुल आयाम शून्य होगा तथा इस बिन्दु पर $\phi = \pi$ होगा।

D-6. प्रदर्शित चित्र एक माध्यम मे गति कर रही तरंग को प्रदर्शित करता है। कणों का कौनसा युग्म समान कला में है –
(A) A तथा D (B) B तथा F
(C) C तथा E (D) B तथा G



D-7. तीन तरंगे जिनकी आवृति समान है तथा आयाम 10 μm, 4 μm एवं 7 μm हैं, किसी दिये बिन्दु पर क्रमागत कलान्तर $\pi/2$ से पहुचती हैं। परिणामी तरंग का μm में आयाम होगा।
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4

खण्ड (E) : अप्रगामी तरंगे और अनुनाद

E-1. समीकरण $y = a \cos(kx - \omega t)$ द्वारा दर्शायी जाने वाली तरंग पर एक दूसरी तरंग का अध्यारोपण करके एक अप्रगामी तरंग इस प्रकार बनाई जाती है कि बिन्दु $x = 0$ पर निस्पंद है। इस दूसरी तरंग का समीकरण है : **[JEE - 1988]**
(A) $a \sin(kx + \omega t)$ (B) $-a \cos(kx + \omega t)$ (C) $-a \cos(kx - \omega t)$ (D) $-a \sin(kx - \omega t)$

E-2. एक तनित सोनोमीटर का तार 350 Hz आवृत्ति पर अनुनादित है और अगली उच्च आवृति 420 Hz है। इस तार की मूल आवृत्ति है

(A) 350 Hz (B) 5 Hz (C) 70 Hz (D) 170 Hz

E-3. अप्रगामी तरंग तथा प्रगामी तरंग के समीकरण क्रमशः $y_1 = a \sin kx \cos \omega t$ तथा $y_2 = a \sin(\omega t - kx)$ है। बिन्दु $x_1 = \frac{\pi}{3k}$ तथा $x_2 = \frac{3\pi}{2k}$ के बीच कलान्तर ϕ_1 प्रथम तरंग के लिए और ϕ_2 द्वितीय तरंग के लिए है तो $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ का मान होगा :

(A) 1 (B) 5/6 (C) 3/4 (D) 6/7

E-4. समान लम्बाई के दो तने हुए तार A व B को स्वतंत्र रूप से अलग–अलग कंपित कराया जाता है। यदि तार A की त्रिज्या, घनत्व व तनाव तार B से दुगुना है तो A की B के सापेक्ष कम्पन की मूल आवृति होगी। **[REE - 1990]**

(A) 1 : 1 (B) 1 : 2 (C) 1 : 4 (D) 1 : 8

E-5. 4.0 ग्राम द्रव्यमान तथा 80 सेमी लम्बाई वाला स्टील का एक तार दोनों सिरों पर कसा हुआ है। तार में 50 न्यूटन तनाव है। मूल की चतुर्थ सन्नादि की तरंगदैर्ध्य ज्ञात कीजिये।

(A) 80 cm (B) 60 cm (C) 40 cm (D) 20 cm

E-6. समान धातु के व समान लम्बाई के दो तार, जिनके अर्द्धव्यास क्रमशः r व 2r है, सिरे से सिरा मिलाकर, वेल्ड करके जोड़ दिये जाते है। इस युग्म को स्वरमापी के तार के रूप में प्रयोग किया जाता है और इस पर T तनाव लगाया जाता है। तारों का वैल्डिंग बिन्दु, सेतुओं के ठीक बीच में है। अप्रगामी कम्पन करते समय यदि वैल्डिंग बिन्दु निस्पन्द बना रहा हो, तो दोनों तारों मे बने लूपो की संख्या का अनुपात होगा ? **[JEE - 1985]**

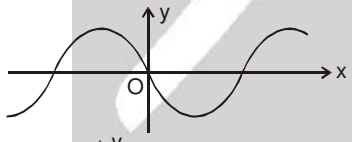
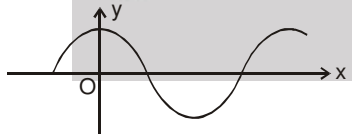
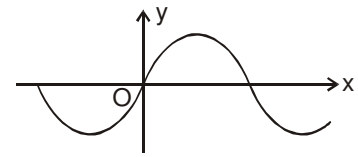
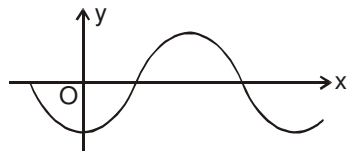
(A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 3 : 4 (D) 4 : 5

E-7. अप्रगामी तरंग $y = a \sin \omega t \cos kx$, में प्रगामी तरंग के घटक का आयाम होगा –

(A) $\frac{a}{2}$ (B) a (C) 2a (D) इनमें से कोई नहीं

भाग - III : कॉलम को सुमेलित कीजिए (MATCH THE COLUMN)

1. चार ज्यावक्रीय तरंगों के लिए जो धनात्मक x के अनुदिश एक डोरी पर गतिमान है, विस्थापन दूरी वक्र (y-x वक्र) t = 0 पर दिखाये गये हैं। ज्या तरंगों के लिए समय t और दूरी x के फलन के रूप में y का व्यंजक दांयें स्तम्भ में दिये गये हैं। समीकरण में सभी पदों का सामान्य अर्थ है। y-x वक्र को संगत समीकरणों के साथ सुमेलित करो।

स्तम्भ-I	स्तम्भ-II
(A) 	(p) $y = A \cos(\omega t - kx)$
(B) 	(q) $y = -A \cos(kx - \omega t)$
(C) 	(r) $y = A \sin(\omega t - kx)$
(D) 	(s) $y = A \sin(kx - \omega t)$
	(t) $y = A \cos(kx - \omega t)$

2. डोरी में तरंग के प्रकरण के लिए स्तम्भ-I में दिये गये कथनों को स्तम्भ-II से सुमेलित करिये।

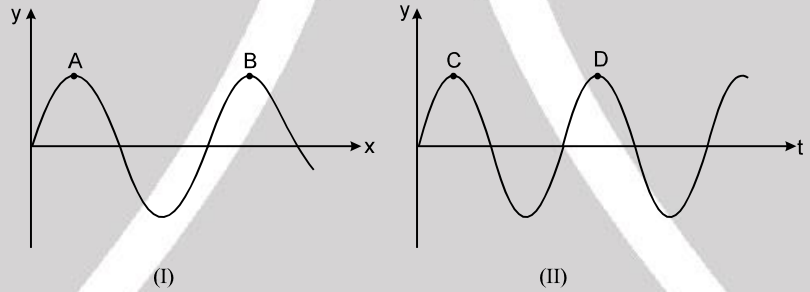
	स्तम्भ-I		**स्तम्भ-II**
(A)	एक तनी हुई रस्सी दोनों सिरो पर जड़वत है तथा इसमें एक अप्रगामी तरंग बनी हुई है।	(p)	विषम संनादी में मध्य पर (at the middle) प्रस्पन्द बनेगा।
(B)	एक तनी हुई रस्सी एक सिरे से जड़वत है व दूसरे सिरे पर मुक्त है।	(q)	सम संनादी में मध्य पर निस्पन्द बनता है।
(C)	एक तनी हुई रस्सी दोनो सिरो पर जडवत है और चार लूपो में कम्पन कर रही है	(r)	कम्पन की आवृति इसकी मुल आवृति से 300% अधिक होगी
(D)	एक तनी हुई रस्सी एक सिरे पर जडवत है और दूसरे सिरे पर मुक्त है तथा यह दूसरे अधिस्वरक में कम्पन कर रही है	(s)	किन्ही दो कणों के SHM(सरल आवर्त गति) में कलान्तर π या शून्य होगा।
		(t)	कम्पन की आवृति, मूल आवृति से 400% अधिक होगी।

Exercise-2

चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

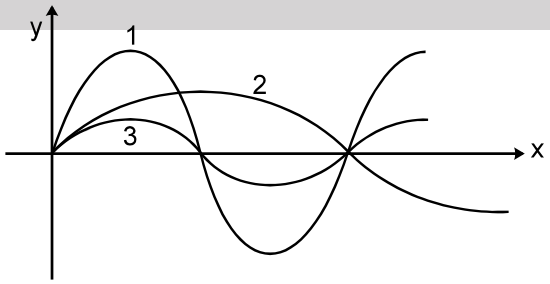
भाग - I : केवल एक सही विकल्प प्रकार (ONLY ONE OPTION CORRECT TYPE)

1. दो लेखाचित्रों I तथा II में समान प्रगामी तरंगे प्रदर्शित की गई हैं। किसी दिये गए समय पर ग्राफ I में विस्थापन 'y' जो कि दुरी 'x' के साथ परिवर्तित है, दिखाया गया है। लेखाचित्र II में तरंग पर स्थित किसी बिन्दु के लिए y का समय t के साथ परिवर्तन दिखाया गया है। मापन AB तथा CD का अनुपात जो कि वक्र पर चिन्हित है, प्रदर्शित करता है



(A) तरंग संख्या k (B) तरंग चाल V
(C) आवृत्ति ν (D) कोणीय आवृत्ति ω

2. एक रस्सी जो कि x–अक्ष के अनुदिश किसी निश्चित तनाव के अन्तर्गत खिंची हुई है, में अलग–अलग रूप से तीन तरंगें भेजी जाती हैं जिन्हे ग्राफ में दर्शाया गया है। अगर ω_1, ω_2 तथा ω_3 क्रमशः उनकी कोणीय आवृत्ति हैं तो–



(A) $\omega_1 = \omega_3 > \omega_2$ (B) $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ (C) $\omega_2 > \omega_1 = \omega_3$ (D) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$

3. 0.200 किग्रा./मी. रैखिक द्रव्यमान घनत्व की रस्सी पर एक अनुप्रस्थ आवर्ती तरंग निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त की जाती है $y = 0.05 \sin(420t - 21.0 x)$ जहाँ x तथा y मी. में तथा t सेकण्ड में है। रस्सी में तनाव 'T' बराबर है –

(A) 32 N (B) 42 N (C) 66 N (D) 80 N

4. एक भारी तथा एक समान L लम्बाई की डोरी के एक सिरे को छत से बाँधा जाता है। एक कण को छत से उस क्षण छोड़ा जाता है जब डोरी के निम्नतम सिरे को झटका दिया जाता है। कण स्पन्द से कहाँ मिलेगा।

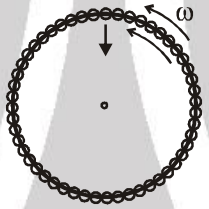
(A) निम्नतम बिन्दु से $\frac{2L}{3}$ दूरी पर। (B) निम्नतम बिन्दु से $\frac{L}{3}$ दूरी पर।

(C) निम्नतम बिन्दु से $\frac{3L}{4}$ दूरी पर। (D) इनमें से कोई नहीं

5. एक वस्तु जिसका विशिष्ट गुरूत्व ρ है , को पतले स्टील के तार से लटकाते है। तार में अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंगो की मूल आवृति 300 Hz है। अब वस्तु का आधा आयतन पानी में डुबोते है। नयी मूल आवृति Hz में हैं **[JEE - 1995]**

(A) $300\left(\frac{2\rho-1}{2\rho}\right)^{1/2}$ (B) $300\left(\frac{2\rho}{2\rho-1}\right)^{1/2}$ (C) $300\left(\frac{2\rho}{2\rho-1}\right)$ (D) $300\left(\frac{2\rho-1}{2\rho}\right)$

6. (a) L लम्बाई की रस्सी का एक वृत्तीय लूप एकसमान कोणीय वेग ω से क्षैतिज चिकने प्लेटफॉर्म पर केन्द्र से गुजरती अक्ष के परितः घूम रही है। एक हल्के त्रिज्यीय विस्थापन से उत्पन्न स्पन्द का वेग (रस्सी के सापेक्ष) होगा?



(A) ωL (B) $\frac{\omega L}{2\pi}$ (C) $\frac{\omega L}{\pi}$ (D) $\frac{\omega L}{4\pi^2}$

(b) उपरोक्त प्रश्न में यदि स्पन्द की गति व लूप के घूर्णन की दिशा समान है तो जमीन के सापेक्ष स्पन्द का वेग होगा–

(A) ωL (B) $\frac{\omega L}{2\pi}$ (C) $\frac{\omega L}{\pi}$ (D) $\frac{\omega L}{4\pi^2}$

(c) उपरोक्त प्रश्न में यदि दोनों विपरित दिशा में हो तो जमीन के सापेक्ष स्पन्द का वेग होगा–

(A) ωL (B) $\frac{\omega L}{2\pi}$ (C) $\frac{\omega L}{\pi}$ (D) 0

7. x तथा t के परिमित धनात्मक मानों के लिए निम्न में से कौनसा प्रगामी तरंग समीकरण को प्रदर्शित करता है–

(A) $y = x^2 - t^2$ (B) $y = \cos x^2 \sin t$

(C) $y = \log(x^2 - t^2) - \log(x - t)$ (D) $y = e^{2x} \sin t$

8. एक 75 सेमी. की रस्सी दोनों सिरों पर बंधी हुई है तथा 384 Hz व 288 Hz की अनुनाद आवृत्ति इस प्रकार उत्पन्न करती हैं कि इन दोनों आवृत्तियों के मध्य अन्य कोई अनुनादी आवृत्ति नहीं है तो रस्सी में तरंग में तरंग की चाल होगी।

(A) 144 मी./सै. (B) 216 मी./सै. (C) 108 मी./सै. (D) 72 मी./सै.

9. दो तरंग स्पंद एक रस्सी पर विपरित दिशाओं में गतिमान है तथा एक दूसरे की तरफ आ रही है। एक स्पंद का आकार दूसरे के सापेक्ष समान है।

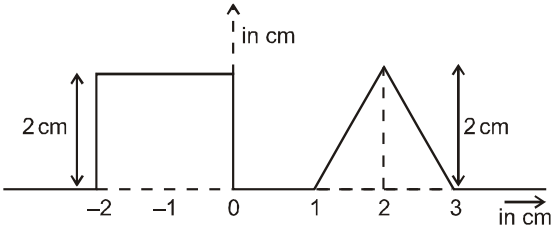
(A) स्पंद एक दूसरे से टकरायेंगे तथा इस टक्कर के बाद खत्म हो जायेंगे।

(B) स्पंद एक दूसरे से परावर्तित होंगे अर्थात् दायीं तरफ जाने वाला स्पंद अन्त में बायीं तरफ जायेगा तथा इसी प्रकार बायीं तरफ वाला दायीं तरफ।

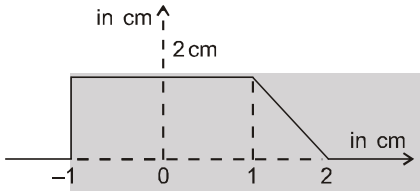
(C) स्पंद एक दूसरे से गुजर जायेंगे लेकिन उनकी आकृति बदलेगी।

(D) स्पंद एक दूसरे से गुजर जायेंगे लेकिन उनकी आकृति नहीं बदलेगी।

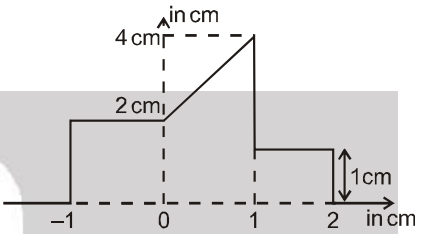
10. समय t = 0 सेकण्ड पर चित्र पर एक आयताकार तथा त्रिभुजाकार तरंगे (pulse) एक समरूप तार पर एक दूसरे की ओर आ रही है। तरंग की चाल 0.5 cm/s है। t = 2 सेकण्ड पर परिणामी तरंग होगी।



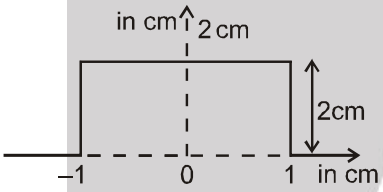
(A)



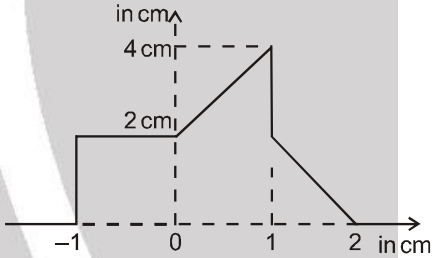
(B)



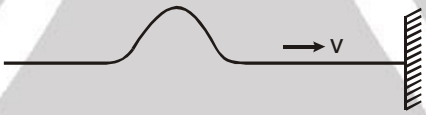
(C)



(D)



11. जब एक तरंग स्पन्द (pulse) रस्सी के अनुदिश गमन कर रही है तथा यह दृढ़ दीवार से परावर्तित हो रही है। रस्सी दीवार से चित्रानुसार बंधी है। इस स्थिति के लिए दो कथन दिए गए है।



1) परावर्तित स्पन्द का विन्यास आपतित स्पन्द के समान होता है तथा उसका कला में परिवर्तन π रेडियन होता है।
(2) परावर्तन के दौरान दीवार रस्सी पर ऊपर की दिशा में बल लगाती है।
इन दिये गये कथनों में सत्य है।

(A) केवल (1) सत्य है (B) केवल (2) सत्य है (C) दोनों सत्य है (D) दोनो गलत है

12. एक तरंग हल्की डोरी पर संचरित होती है। तरंग की समीकण $Y = A \sin (kx - \omega t + 30°)$ है। डोरी के एक सिरे (x = 0 पर) पर जुड़ी एक भारी डोरी से यह तंरग परावर्तित होती है। यदि आपतित ऊर्जा का 64% परावर्तित हो जाता है तो परावर्तित तरंग की समीकरण है–

(A) $Y = 0.8 A \sin (kx - \omega t + 30° + 180°)$ (B) $Y = 0.8 A \sin (kx + \omega t + 30° + 180°)$
(C) $Y = 0.8 A \sin (kx + \omega t - 30°)$ (D) $Y = 0.8 A \sin (kx + \omega t + 30°)$

13. दोनो सिरो पर जुड़ी स्थिर रस्सी में किसी अप्रगामी तरंग का तरंग फलन $y(x,t) = 0.5 \sin (0.025\pi x) \cos 500\, t$ है जहाँ x तथा y सेन्टीमीटर में तथा t सैकण्ड में है। रस्सी की संभावित न्यूनतम या लघुत्तम लम्बाई होगी–

(A) 126 सेमी. (B) 160 सेमी. (C) 40 सेमी. (D) 80 सेमी.

14. अप्रगामी तरंग की समीकरण को $y = 2A \sin\omega t \cos kx$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। समीकरण में राशि ω/k प्रदर्शित करता है–

(A) रस्सी के कणों की अनुप्रस्थ चाल को
(B) तरंग घटक की चाल को
(C) अप्रगामी तरंग की चाल को
(D) एक राशि जो कि रस्सी के गुणों या उसकी प्रकृति से स्वतन्त्र है।

15. एक सोनोमीटर तार को सेतुओ की मदद से बहुत सारे भागों में विभाजित किया जाता है। यदि इन भागों की मूल प्राकृतिक आवृत्तियाँ क्रमशः n_1, n_2, n_3.... हैं तो पूरे सोनोमीटर तार की मूल आवृति क्या होगी (यदि तार को विभाजित नहीं किया जाता है)–

(A) $n = n_1 + n_2 + n_3 + ...$ (B) $n = \sqrt{n_1 \times n_2 \times n_3 \times ....}$ (C) $\frac{1}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + ...$ (D) इनमें से कोई नहीं

16. दोनों सिरों पर बंधी लम्बाई L की रस्सी प्रथम अधिस्वरक में कम्पन्न कर रही है। एक सिरे से स्थितियों $\ell_1 = 0.2$ L तथा $\ell_2 = 0.45$ L पर रस्सी के अल्प तथा समान लम्बाई के दो भाग लें। यदि उनकी महत्तम गतिज ऊजाऐं क्रमशः K_1 तथा K_2 लें तो-

(A) $K_1 = K_2$ (B) $K_1 > K_2$ (C) $K_1 < K_2$
(D) संबंध स्थापित करना संभव नहीं है।

17. स्वरमापी के तार से एक पत्थर हवा में लटकाया गया है। स्वरमापी के सेतु 40 cm दूरी पर है जब तार 256 Hz आवृति के स्वरित्र के साथ स्वरमेल में है। जब पत्थर को पानी में पूरी तरह डुबोया जाता है तो पुनः समान स्वरित्र से स्वरमेल (समान विधा में) कराने के लिए सेतुओं के बीच की दूरी 22 cm होती है। पत्थर के पदार्थ का विशिष्ट गुरूत्व होगा।

(A) $\frac{(40)^2}{(40)^2 + (22)^2}$ (B) $\frac{(40)^2}{(40)^2 - (22)^2}$ (C) $256 \times \frac{22}{40}$ (D) $256 \times \frac{40}{22}$

18. 9 gm/cm^3 घनत्व का एक तार 1.00 m दूर स्थित दो दृढ़ आधारों पर तनित है जो 0.05 cm का विस्तार देते है तो तार में अनुप्रस्थ कम्पन्न की न्यूनतम आवृत्ति क्या होगी (माना $Y = 9 \times 10^{10}$ N/m^2) **[JEE - 1975]**

(A) 35 Hz (B) 45 Hz (C) 75 Hz (D) 90 Hz

19. एक 20 सेमी. लम्बी रबर की रस्सी, जो दोनो सिरों से जड़वत है, हुक के नियम का पालन करती है। प्रारम्भ में जब इसको खींचकर इसकी कुल लम्बाई को 24 सेमी. कर दिया जाता है तो अनुनाद की न्यूनतम आवृत्ति υ_0 है। अगर इसे पुनः खींचकर इसकी लम्बाई 26 सेमी. कर दी जाए तो अब अनुनाद की न्यूनतम आवृत्ति होगी –

(A) υ_0 के समान (B) υ_0 से अधिक
(C) υ_0 से कम (D) इनमें से कोई नहीं

20. समान पदार्थ के बने हुए दो तार एक पतला तथा दूसरा मोटा को जोड़कर एक संयुक्त तार बनाया जाता है। संयुक्त तार में कुछ तनाव उत्पन्न किया जाता है। तार के अनुदिश संचरित एक तरंग सन्धि बिन्दु से गुजरती है। वह गुण जो सन्धि बिन्दु पर परिवर्तित होगा, होगा

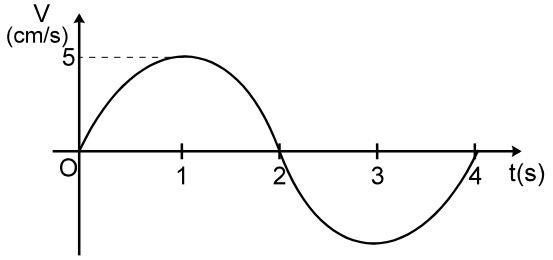
(A) केवल आवृत्ति (B) केवल संचरण की चाल
(C) केवल तरंगदैर्ध्य (D) संचरण की चाल तथा तरंगदैर्ध्य

21. बेलनाकार वस्तु से भारित एक डोरी में अप्रगामी तरंग उत्पन्न की जाती है। यदि बेलन पानी मे डुबोया जाता है, तब लूपों की लम्बाई 2.2 गुणक से परिवर्तित होती है। बेलन के पदार्थ का विशिष्ठ गुरूत्व होगा। **[Olympiad 2014, Stage–I]**

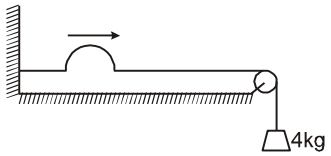
(A) 1.11 (B) 2.15 (C) 2.50 (D) 1.26

भाग - II : एकल एवं द्वि–पूर्णांक मान प्रकार (SINGLE AND DOUBLE VALUE INTEGER TYPE)

1. एक अनुप्रस्थ ज्यावक्रीय तरंग जिसकी तरंगदैर्ध्य 20 सेमी. है, धनात्मक x दिशा में गति कर रही है। x = 0 पर स्थित कण का अनुप्रस्थ वेग समय के फलन के रूप में प्रदर्शित है। गति का आयाम $\frac{x}{\pi}$ (cm में) है तो x का मान ज्ञात करो–

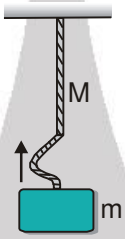


2. चित्र में दर्शायी रस्सी का प्रति एकांक लम्बाई का द्रव्यमान 1.0 g/cm है जिसमें एक तरंग स्पन्द गति कर रहा है। तरंग स्पन्द द्वारा रस्सी पर 60 cm दूरी तय करने में लिया गया समय (मिली सैकण्ड में) क्या होगा। $g = 10\ m/s^2$ लीजिए।



3. 9.8×10^{-3} kg प्रति मीटर द्रव्यमान वाला तार, 30° के कोण पर झुके घर्षण रहित नततल के ऊपरी सिरे पर स्थिर घर्षण रहित घिरनी से गुजरता है। तार के दोनों सिरों पर M_1 व M_2 द्रव्यमान बँधे है। द्रव्यमान M_1 तल पर विराम पर है तथा M_2 मुक्त रूप से ऊर्ध्वाधर लटक रहा है। पूरा निकाय संतुलन में है। अब एक अनुप्रस्थ तरंग 100 m/sec के वेग से तार के अनुदिश गतिमान होती है। M_1 व M_2 का अनुपात ज्ञात करो। **[REE - 1993, 4]**

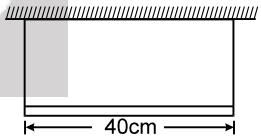
4. एक समान रस्सी जिसकी लम्बाई ℓ और द्रव्यमान M है, को किसी दृढ़ आधार से लटकाया गया है तथा रस्सी के अन्तिम सिरे पर एक m (m = M) द्रव्यमान का पिण्ड लटकाया जाता है। रस्सी के अंतिम सिरे पर एक अनुप्रस्थ स्पन्द जिसका तरंगदैर्ध्य λ है, उत्पन्न किया जाता है। जब स्पन्द रस्सी के उपरी सिरे पर पहुचता है तो स्पन्द का तरंगदैर्ध्य $a\lambda$ है तो a^2 का मान ज्ञात करो।



5. एक असमान रस्सी (द्रव्यमान M, लम्बाई L) का रेखीय द्रव्यमान घनत्व परिवर्तनशील है तथा $\mu = kx$, से व्यक्त किया जाता है जहाँ x रस्सी के एक सिरे से दूरी है तथा k एक स्थिरांक है।
यदि उत्पन्न स्पंद को तार के एक सिरे से दूसरे सिरे तक जाने में लगा समय $t = \sqrt{(pML/9F)}$ द्वारा दिया जाता है। जहाँ F (नियत) रस्सी में तनाव है तो p का मान ज्ञात करो।

6. एक व्यक्ति अपने हाथों को ऊपर नीचे गति कराकर रस्सी में एक सममित स्पंद उत्पन्न करता है। t = 0 पर उसके हाथों में बिन्दु नीचे की ओर गति करता है। रस्सी पर स्पंद 3 m/s की चाल से गति करता है तथा उसका हाथ प्रत्येक सेकण्ड में माध्य स्थिति से 6 बार गुजरता है तब रस्सी पर 3m दूरी पर स्थित बिन्दु t समय पर इसकी ऊपरी सीमान्त स्थिति पर पहुचता है। यदि t = n/12 तो n का मान ज्ञात करों।

7. 40 cm लम्बी तथा 1.2 kg द्रव्यमान वाली एक समरूप छड़ चित्रानुसार दो एक समान तारों के सहारे लटकाई गई है। छड़ पर एक 4.8 kg द्रव्यमान बॉये सिरे से कहाँ पर (सेमी मे) रखा जाये कि एक ही स्वरित्र द्विभुज बायें तार को मूल विधा में तथा दांये तार को प्रथम अधिस्वरक में कम्पित कर सके। $g = 10\ m/s^2$ लीजिए।



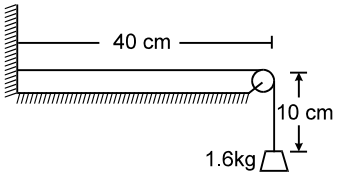
8. एक 'ℓ' लम्बाई की रस्सी दोनों सिरों से बंधी हुई है। यह इसके तीसरे अधिस्वरक में अधिकतम आयाम 'a' के साथ कम्पन्न कर रही है। इसके एक सिरे से $\frac{\ell}{3}$ दूरी पर आयाम $\sqrt{p}\frac{a}{2}$ है तो p का मान ज्ञात कीजिए।

9. एक 120 cm लम्बे तार में अप्रगामी तरंग उत्पन्न होती है जो दोनों तरफ से बंधा है तथा 15 सेमी. दूरी पर स्थित क्रमागत बिन्दुओं का विस्थापन आयाम 3.5 mm (जो कि अधिकतम नही) है। अधिकतम विस्थापन आयाम $3.5\ x^{1/2}$ mm में हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।। सम्बन्धित अधिस्वरक का मान ज्ञात करो।

10. एक 'm' द्रव्यमान व ℓ, लम्बाई की रस्सी जो दोनों सिरो से बंधी है, इसकी मूल विधा में कम्पित है। अधिकतम आयाम a है तथा रस्सी में तनाव 'T' है। यदि रस्सी की कम्पन ऊर्जा $\frac{\pi^2 a^2 T}{\eta L}$ है तो η का मान ज्ञात करो। **[JEE(Mains) 2003; 4/60]**

11. 5 A आयाम की संचरित तरंग किसी सीमा से 3 A आयाम के साथ आंशिक रूप में परावर्तित होती है। भिन्न आयामों और विपरीत दिशा में चलने वाली तरंगों के अध्यारोपण से एक तरंग उत्पन्न होती है। प्रस्पन्द और निस्पन्द पर आयाम का अनुपात ज्ञात करो।

12. चित्रानुसार 20 g द्रव्यमान तथा 50 cm लम्बी रस्सी से 1.6 kg द्रव्यमान जोड़ा गया है। दीवार और घिरनी के मध्य स्थित रस्सी में उत्पन्न प्रथम अधिस्वरक आवृत्ति ज्ञात करो। $g = 10\ m/s^2$ लीजिए।



13. एक 1 मी. लम्बी डोरी का द्रव्यमान 40 ग्राम है, यह एक सिरे पर कसी हुई है तथा दूसरे सिरे पर एक हल्की डोरी से बंधी हुई है। डोरी में 400 न्यूटन का तनाव है तो दूसरे अधिस्वरक की तरंगदैर्ध्य (cm में) ज्ञात करों।

14. अप्रगामी तरंग के प्रयोग में, 90 cm लम्बी रस्सी को विद्युत चलित स्वरित्र की एक भुजा (prong) से जोड़ा गया है। स्वरित्र रस्सी की लम्बाई के लम्बवत् दिशा में 60 Hz से दोलन कर रहा है। रस्सी का द्रव्यमान 0.044 kg है। रस्सी में उत्पन्न तनाव न्यूटन में (दूसरे सिरे पर भार बँधे है) क्या होगा यदि यह चार लूपो में कम्पित है?

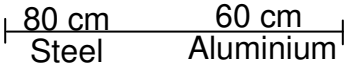
15. एक डोरी की तीन क्रमागत अनुनादी आवृत्तियाँ 90, 150 एवं 210 Hz है। यदि डोरी की लम्बाई 80 cm है तो, इस डोरी में अनुप्रस्थ तरंग की चाल (m/s में) कितनी है?

16. एक स्टील का तार, जिसकी लम्बाई 1 मीटर, द्रव्यमान 0.1 kg तथा समान अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $10^{-6}\ m^2$ है, दोंनो सिरों पर बिना किसी प्रतिबल के कसा हुआ है। तार का ताप 20ºC कम कर दिया जाता है। यदि तार को मध्य में खींचकर इसमें अनुप्रस्थ तरंग उत्पन्न की जाती है, तो इसके कम्पन्न की मूल आवृत्ति (frequency in fundamental mode) ज्ञात करो। स्टील का यंग गुणांक = $2 \times 10^{11}\ N/m^2$, स्टील का रेखीय प्रसार गुणांक = $1.21 \times 10^{-5}/ºC$. **[JEE - 1984]**

17. कुछ रेखीय द्रव्यमान घनत्व वाले तार को दो दृढ़ आधारों के मध्य तनित किया जाता है। यह प्रेक्षित है कि तार 420 चक्कर/सैकण्ड की आवृत्ति पर अनुनादित है। इसी तार के लिए अगली उच्च अनुनादी आवृत्ति 490 चक्कर/सैकण्ड है तो रस्सी का प्रारम्भिक कम्पन विधा ज्ञात करो– **[JEE - 1971]**

18. चित्र में प्रदर्शित डोरी, घिरनी से होकर लटकाए गये गुटके द्वारा खींची हुई है। डोरी इसकी दसवीं संनादी में कम्पन्न करते हुए एक विशिष्ट स्वरित्र द्विभुज के साथ अनुनादित है। जब गुटके के नीचे पानी से भरा हुआ एक पात्र लाया जाता है, जिससे गुटका पानी में पूरा डूब जाता है, तो डोरी इसके ग्यारहवीं संनादी में कम्पन करती है। यदि गुटके के पदार्थ का घनत्व d gm/cm^3 है तो d का महत्तम पूर्णांक ज्ञात कीजिए। (घिरनी पर निस्पंद बनते है)

19. चित्र में दर्शाया गया है कि एल्यूमिनियम का एक 60 cm लम्बा तार स्टील के 80 cm लम्बे तार से जोड़ा गया है तथा दो स्थिर आधारों के मध्य ताना गया है। उत्पन्न किया गया तनाव 40 N है। स्टील के तार की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 1.0 mm^2 है तथा एल्यूमिनियम के तार का 3.0 mm^2 है। स्वरित्र की न्यूनतम आवृत्ति 10P (Hz में) होने पर वह इस निकाय में संधि पर निस्पंद रखते हुए अप्रगामी तरंगे उत्पन्न करता है तो P का मान ज्ञात कीजिए ? एल्यूमिनियम का घनत्व 2.6 g/cm^3 तथा स्टील का 7.8 g/cm^3 है।



20. एक धात्विक तार जिस पर तनाव T है तथा ताप 30º C है, 1 kHz मूल आवृति से कम्पन कर रहा है। यदि उसी तार में तनाव समान रखा जाए तथा ताप 10ºC कर दिया जाए तो तार 1.001 kHz की मूल आवृत्ति से कम्पन करता है। यदि तार का रेखीय प्रसार गुणांक 10^{-K} °C है तो 2K का मान ज्ञात करो–

भाग - III : एक या एक से अधिक सही विकल्प प्रकार प्रश्न

1. समतल तंरग की समीकरण को $y = f(x - v\,t)$ के रूप में प्रदर्शित किया गया है जो धनात्मक x-दिशा में नियत वेग v से बिना अपना रूप बदले संचरित होती है तो :

(A) $\frac{\partial y}{\partial t} = -v\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ (B) $\frac{\partial y}{\partial t} = -v\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$ (C) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$ (D) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$

2. एक तरंग समीकरण जो Y अक्ष की दिशा में विस्थापन देती है $y = 10^{-4}\sin(60t + 2x)$ से प्रदर्शित है जहाँ x,y मीटर में तथा t समय सैकण्ड मे है। यह निम्न तरंग को प्रदर्शित करती है। **[JEE - 1982]**

(A) ऋणात्मक x–अक्ष की दिशा में 30 m/s के वेग से गति करती हुई प्रगामी तरंग
(B) π मीटर की तरंगदैर्ध्य वाली
(C) $30/\pi$ Hz की आवृति वाली
(D) ऋणात्मक x–अक्ष के अनुदिश गति करती हुई 10^{-4} मीटर आयाम वाली

3. किसी माध्यम मे धनात्मक x-दिशा में संचरित तरंग के कारण कण का विस्थापन $y = A\sin(\alpha t - \beta x)$ है जहाँ t = समय, तथा α तथा β अचर है तो :

(A) तरंग की आवृत्ति α (B) तरंग की आवृत्ति $\alpha/2\pi$
(C) तरंगदैर्ध्य $2\pi/\beta$ (D) तरंग का वेग α/β

4. x–दिशा मे एक तनी हुई डोरी मे कण का विस्थापन y द्वारा प्रदर्शित है। y के लिए दिये गए निम्न व्यंजको में से जो तरंग गति प्रदर्शित करते है, होगे : **[JEE - 1987, 2]**

(A) $\cos(kx)\sin(\omega t)$ (B) $k^2x^2 - \omega^2t^2$ (C) $\cos^2(kx + \omega t)$ (D) $\cos(k^2x^2 - \omega^2t^2)$

5. तरंग में कण का विस्थापन $y = 0.2 \times 10^{-5}\cos(500\,t - 0.025\,x)$, है यहां दूरी मीटर में तथा समय सैकण्ड है, तो – **[REE - 1994]**

(A) तरंग वेग $2 \times 10^4\ ms^{-1}$ है। (B) कण का वेग $2 \times 10^4\ ms^{-1}$ है।
(C) प्रारम्भिक कलान्तर $\frac{\pi}{2}$ है। (D) तरंग की तरंगदैर्ध्य (80π) m है।

6. a आयाम, λ तरंगदैर्ध्य तथा f आवृत्ति की एक अनुप्रस्थ ज्यावक्रिय तरंग तनित रस्सी में संचरित है। रस्सी पर स्थित किसी बिन्दु पर अधिकतम चाल v /10 है, जहाँ v तरंग संचरण की चाल है। यदि $a = 10^{-3}$ m तथा v = 10 m/s, है तो λ तथा f का मान होगा–

(A) $\lambda = 2\pi \times 10^{-2}$ m (B) $\lambda = 10^{-3}$ m (C) $f = 10^3/(2\pi)$ Hz (D) $f = 10^4$ Hz

7. यदि रस्सी के तनाव को 21% बढाया जाये तो रस्सी की मूल आवृत्ति में परिवर्तन 15 Hz होता है तो निम्न में कौनसे कथन सही होंगे –

(A) मुख्य मूल आवृत्ति लगभग 150 Hz होगी।
(B) तरंग संचरण के वेग में परिवर्तन लगभग 4.5% होगा।
(C) तरंग संचरण के वेग में परिवर्तन लगभग 10% होगा।
(D) मूल तरंगदैर्ध्य में लगभग परिवर्तन 10% होगा।

8. दो समान आवृत्ति f तथा चाल v की तरंगे एक दूसरे से विपरीत दिशा में एक ही पथ पर गति कर रही है। इन तरंगो का आयाम क्रमशः A तथा 3A है तब :

(A) परिणामी तरंग का आयाम अधिकतम आयाम 4A तथा न्यूनतम आयाम शून्य के बीच बदलता है।
(B) उच्चिष्ठ आयाम तथा निकटतम निम्निष्ठ आयाम के बीच की दूरी $\frac{v}{2f}$ है।
(C) पथ के किसी बिन्दु पर औसत विस्थापन शून्य होता है। $\Rightarrow$ किसी भी बिन्दू पर माध्यम के कण का औसत विस्थापन शून्य होता है।
(D) उच्चिष्ठ आयाम अथवा निम्निष्ठ आयाम की स्थिति समय के साथ नहीं बदलती है।

9. जब किसी क्षेत्र से एक ज्यावक्रीय तरंग गुजरती है, दो कणो A व B के मध्य कलान्तर π है तो –

(A) A तथा B समान आवृति से दोलन करते है।

(B) A तथा B विपरीत दिशा में गति करेगें।

(C) A व B के मध्य दूरी अर्ध तरंगदैर्ध्य के विषम गुणज के बराबर होती है।

(D) A तथा B पर विस्थापन का परिमाण एक समान होगा।

10. किसी अप्रगामी तरंग में–

(A) माध्यम के समस्त कण या तो समान कला में या विपरीत कला में कम्पन्न करते है।

(B) समस्त प्रस्पंद विपरीत कला में कम्पन्न करते है।

(C) एकांतर प्रस्पंद समान कला में कम्पन्न करते है।

(D) दो क्रमागत निस्पंदो के बीच वाले समस्त कण समान कला में कम्पन्न करते है।

11. निम्न में कौनसे कथन सही है ?

(i) $y_1 = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$ (ii) $y_2 = a \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right)$

(iii) $z_1 = a \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$ (iv) $z_2 = a \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right)$

तरंग (i) और (iii), के अध्यारोपण से $a\sqrt{2}$ आयाम की एक प्रगामी तरंग बनेगी।

(A) तरंग (ii) और (iii) का अध्यारोपण सम्भव नहीं है।

(B) तरंग (ii) और (iii) का अध्यारोपण सम्भव नहीं है।

(C) तरंग (i) और (ii), के अध्यारोपण से $a\sqrt{2}$ आयाम की अप्रगामी तरंग बनेगी।

(D) तरंग (iii) और (iv), के अध्यारोपण से अनुप्रस्थ अप्रगामी तरंग बनेगी।

12. किसी माध्यम में तरंग विक्षोभ $y(x, t) = 0.02 \cos (50\pi t + \pi/2) \cos 10(\pi x)$, द्वारा प्रदर्शित है जहाँ x, y मीटर में एवं t सैकण्ड में है तो **[JEE - 1995]**

(A) x = 0.15 m पर निस्पन्द होता है। (B) x = 0.3 m पर प्रस्पन्द होता है।

(C) तरंग की चाल 5 ms^{-1} है। (D) तरंगदैर्ध्य 0.2m है।

13. 600 cm लम्बी रस्सी जिसके दोंनो सिरे बँधे हुए है, में कम्पन्न निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता हैं

$y = 4 \sin \left(\pi \frac{x}{15} \right) \cos (96\pi t)$, जहाँ x और y सेमी० में तथा t सैकण्ड में। **[JEE - 1985]**

(A) बिन्दु x = 5 cm का अधिकतम विस्थापन $2\sqrt{3}$ cm होगा।

(B) रस्सी के अनुदिश 15n दूरी पर निस्पंद होंगे जहाँ n एक पूर्णांक संख्याा है जो 0 से 40 तक बदलता है।

(C) बिन्दु x = 7.5 cm का t = 0.25 sec सेक० पर वेग शून्य होगा।

(D) तरंगों के घटक, जिनके अध्यारोपण से उपरोक्त तरंग बनती है निम्न होंगे $2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{30} + 48t \right), 2 \sin 2\pi \left(\frac{x}{30} - 48t \right)$.

14. एक 1 मीटर लम्बे व दोनों सिरों से बंधे तार में तरंग $\xi = 10 \sin [80\pi t - 4\pi x]$ से प्रदर्शित की जाती है। यदि समान आयाम की अन्य तरंग, अप्रगामी तरंग उत्पन्न करने के लिए इस तरंग पर अध्यारोपित की जाये तो (एक सिरा x = 0 पर है।) **[REE - 1998]**

(A) अध्यारोपित तरंग $\xi = -10 \sin [80\pi t + 4\pi x]$ है। (B) अप्रगामी तरंग का अधिकतम आयाम 20 मीटर है।

(C) अप्रगामी तरंग का तरंगदैर्ध्य 0.5 मीटर है। (D) तार के अन्दर कुल निस्पंद 3 है।

15. एक तनी हुई डोरी के अल्पांश पर विचार करते है, जिसके अनुदिश तरंग संचरित है। इसके अनुप्रस्थ दोलनी गति के दौरान अल्पांश y = 0 वाले बिन्दु से गुजरता है तथा इसके अधिकतम बिन्दु $y = y_m$ पर पहुँचता है। तब डोरी के अल्पांश की अधिकतम होगी। **[Olympiad 2014; Stage–I]**

(A) $y = y_m$ पर गतिज ऊर्जा (B) $y = y_m$ पर प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा

(C) y = 0 पर गतिज ऊर्जा (D) y = 0 पर प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा

भाग - IV : अनुच्छेद (COMPREHENSION)

अनुच्छेद-1

एक लम्बी तनी हुई रस्सी में समय t = 0 पर +x दिशा में एक स्पंद को भेजा जाता है। समय t = 0 पर स्पंद का आकार फलन y द्वारा निम्न प्रकार दिया जाता है –

$$y = \begin{cases} -4 < x \le 0 \quad \text{के लिए} \quad \dfrac{x}{4}+1 \\ 0 < x < 1 \quad \text{के लिए} \quad -x+1 \\ \text{अन्य था} \qquad\qquad 0 \end{cases}$$

यहाँ y व x सेन्टीमीटर(cm) में है। रस्सी का रेखीय द्रव्यमान घनत्व 50 g/m है व इसे 5N तनाव में रखा गया है।

1. समय t = 0 पर स्पंद के आकार को दर्शाया जाता है। स्पंद का क्षेत्रफल जोकि रस्सी व x-अक्ष द्वारा परिबद्ध है, होगा –
(A) 2 cm^2 (B) 2.5 cm^2 (C) 4 cm^2 (D) 5 cm^2

2. x = 7 cm पर स्थित रस्सी के कण का समय t = 0.01 s पर ऊर्ध्वाधर विस्थापन होगा –
(A) 0.75 cm (B) 0.5 cm (C) 0.25 cm (D) zero

3. x = 13 cm पर स्थित कण का समय t = 0.015 s पर अनुप्रस्थ वेग होगा –
(A) –250 cm/s (B) –500 cm/s (C) 500 cm/s (D) –1000 cm/s

अनुच्छेद-2

एक अनुप्रस्थ ज्या तरंग लम्बी, क्षैतिज रस्सी के एक सिरे पर किसी छड़ की सहायता से जो 1/2 cm आयाम से ऊपर नीचे गतिमान है, उत्पन्न की जाती है। गति सतत् है तथा प्रति सैकण्ड 120 बार दोहरायी जा रही है। रस्सी का रेखीय द्रव्यमान घनत्व 90 gm/m है तथा रस्सी में तनाव 900 N है ज्ञात करो।

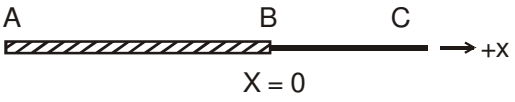
4. तनाव (न्यूटन में) के अनुप्रस्थ घटक का अधिकतम मान होगा।
(A) 1.8 π (B) 10.8 π (C) 9 (D) 18 π

5. रस्सी के अनुदिश संचरित अधिकतम शक्ति (वाट में) क्या है।
(A) 3.24 π^2 (B) 6.48 π^2 (C) 12.96 π^2 (D) 25.92 π^2

6. जब न्यूनतम शक्ति संचरित होती है तो अनुप्रस्थ विस्थापन y (सेमी में) क्या है।
(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 1
[अपने उत्तरों को π के पदों में लिखे जहां भी यह आता है।]

अनुच्छेद-3

दर्शाये गये चित्र मे एक ज्यावक्रीय तरंग सिरे A पर उत्पन्न की जाती है। तरंग धनात्मक x अक्ष के अनुदिश गति करती है तथा इसकी गति के दौरान यह संधि B पर x = 0 पर दूसरी डोरी BC पर प्रवेश करती है। डोरियों AB व BC का घनत्व क्रमशः ρ व 9ρ है एवं उनकी अनुप्रस्थ काट त्रिज्याएं क्रमशः 2r एवं r है। तरंग फलन, आयाम व आपतित तरंग की तरंगदैर्ध्य क्रमशः y_i, A_i व λ_i है। इसी प्रकार परावर्तित व पारगमित तरंग के लिये ये प्राचल क्रमशः y_r, A_r, λ_r व y_t, A_t, λ_t है।



7. $\Delta\phi$ कलान्तर के लिये x = 0 पर निम्न में से कौन से कथन सत्य है?
(A) $\Delta\phi = 0$, y_i व y_r के मध्य (B) $\Delta\phi = 0$, y_r व y_t के मध्य
(C) $\Delta\phi = \pi$, y_i व y_t के मध्य (D) $\Delta\phi = \pi$, y_r व y_t के मध्य

8. तरंगदैर्ध्यों λ_r व λ_t का अनुपात होगा (अर्थात $\lambda_r : \lambda_t$)
(A) 1 : 1 (B) 3 : 2 (C) 2 : 3 (D) इनमें से कोई नही

9. आयामों A_r व A_t का अनुपात (अर्थात $A_r : A_t$) होगा।
(A) 1 : 1 (B) 1 : 4 (C) 4 : 1 (D) इनमें से कोई नही

Exercise-3

*** चिन्हित प्रश्न एक से अधिक सही विकल्प वाले प्रश्न है -**

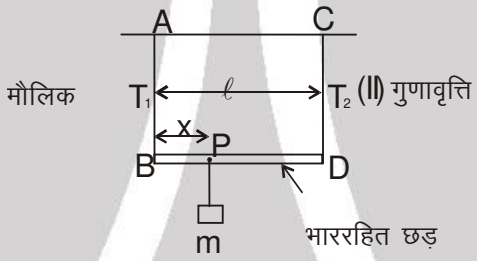
चिन्हित प्रश्न दोहराने योग्य प्रश्न है।

भाग - I : JEE (ADVANCED) / IIT-JEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. एक अनुप्रस्थ तरंग एक डोरी में चल रही है तथा एक कण में 3 m/s की अधिकतम अनुप्रस्थ चाल एवं 90 m/s^2 का अधिकतम त्वरण उत्पन्न करती है। यदि डोरी में तरंग का वेग 20 m/s है। तरंग का समीकरण ज्ञात करो।

[JEE(Mains) 2005 ; 4/60]

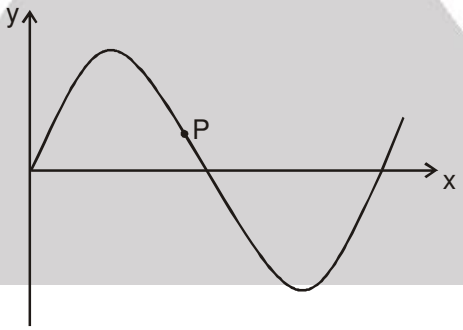
2. एक द्रव्यमानरहित छड़ BD को दो एक समान लम्बाई की रस्सियों (द्रव्यमान रहित) AB तथा CD से लटकाया गया है। 'm' द्रव्यमान का एक पिण्ड बिन्दु P से इस प्रकार लटकाया गया है कि BP 'x', के बराबर है। यदि बांये तार की मूल आवृति दांये तार की मूल आवृति की दुगुनी है तो x का मान है : **[JEE(Mains) 2006; 3/184]**



(A) l/5 (B) l/4 (C) 4l/5 (D) 3l/4

3. एक अनुप्रस्थ ज्यावक्रीय (transverse sinusoidal) तरंग एक डोरी में 10 cm/s की चाल से x-अक्ष की ओर चलती है। इसकी तरंगदैर्ध्य 0.5 m तथा आयाम 10 cm है। एक विशेष समय t पर, तरंग का आशुचित्र (snap-shot) चित्र में दिखाया गया है। बिन्दु P का विस्थापन 5 cm होने पर इसका वेग होगा – **[JEE 2008; 3/163]**

चित्र :



(A) $\frac{\sqrt{3}\pi}{50}\hat{j}$ m/s (B) $-\frac{\sqrt{3}\pi}{50}\hat{j}$ m/s (C) $\frac{\sqrt{3}\pi}{50}\hat{i}$ m/s (D) $-\frac{\sqrt{3}\pi}{50}\hat{i}$ m/s

4. 1.0 g द्रव्यमान की 20cm लम्बी डोरी के दोंनो सिरे स्थिर रखे गये है तथा इस रस्सी में 0.5 N का तनाव है। 100 Hz के किसी बाह्य कम्पित (vibrator) के द्वारा इस डोरी में कम्पन्न पैदा किये जाते है। कम्पित डोरी के दो उत्तरोत्तर निस्पन्दों (successive nodes) के बीच की दूरी (**cm में**) निकालें। **[JEE 2009; 4/160, –1]**

5. जब दो प्रगामी तरंगे $y_1 = 4 \sin (2x - 6t)$ तथा $y_2 = 3 \sin \left(2x - 6t - \frac{\pi}{2}\right)$ अध्यारोपित होती हैं तो परिणामी तरंग का आयाम कितना होगा ? **[JEE 2010; 3/163, –1]**

6.* दोंनो सिरों पर परिबद्ध क्षैतिज तनित डोरी पाँचवी गुणवृत्ति समीकरण, $y(x, t) = (0.01\ m) \sin [(62.8\ m^{-1})\ x] \cos [(628\ s^{-1})t]$ द्वारा कम्पित हो रही है। यदि $\pi = 3.14$ मान जाये तब निम्न प्रकथन सही है/हैं – **[JEE (Advanced) 2013, 3/60]**

(A) निस्पंदो की संख्या 5 है।

(B) डोरी की लम्बाई 0.25 m है।

(C) साम्यावस्था से डोरी के मध्य बिन्दु का अधिकतम विस्थापन 0.01 m है।

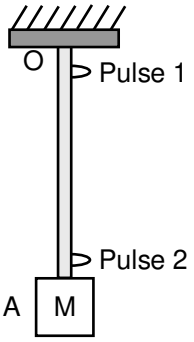
(D) मूल आवृत्ति 100 Hz है।

7.* x-दिशा के अनुदिश 3m लम्बाई की एक तनित डोरी का एक सिरा x = 0 पर जड़ित (fixed) है। डोरी में तरंग की गति 100m/s है। डोरी का दूसरा सिरा y दिशा के अनुदिश इस प्रकार कम्पन्न कर रहा हैं कि डोरी में अप्रगामी तरंगें बन रही है। इन अप्रगामी तरंगों के संभावित तरंगरूप (wavesform) हैं/है। **[JEE (Advanced) 2014, P-1, 3/60]**

(A) $y(t) = A \sin \frac{\pi x}{6} \cos \frac{50\pi t}{3}$ (B) $y(t) = A \sin \frac{\pi x}{3} \cos \frac{100\pi t}{3}$

(C) $y(t) = A \sin \frac{5\pi x}{6} \cos \frac{250\pi t}{3}$ (D) $y(t) = A \sin \frac{5\pi x}{2} \cos 250\pi t$

8.* एक समान रैखिक घनतावाले (uniform mass per unit length) उर्ध्वाधर डोरी के निचले सिरे पर गुटका M लटका हुआ है। डोर का दूसरा सिरा दृढ़ आधार (बिन्दु O) से संलग्न है। तरंगदैर्ध्य λ_0 की अनुप्रस्थ तरंग स्पंद (स्पंद 1, pulse 1) बिंदु O पर उत्पन्न की गई है। ये तरंग स्पंद बिन्दु O से बिन्दु A तक T_{OA} समय में पहुँचती है। गुटके M को बिना विक्षोभित किये हुए बिन्दु A पर निर्माण की गई तरंगदैर्ध्य λ_0 की अनुप्रस्थ तरंग स्पंद (स्पंद 2, pulse 2), बिन्दु A से बिन्दु O तक T_{AO} समय में पहुँचती है। निम्न में कौनसा (से) कथन सही हैं/है ? **[JEE (Advanced) 2017, P-1, 4/61, –2]**



(A) डोर के मध्य बिन्दु पर स्पंद 1 (Pulse 1) एवं स्पंद 2 (Pulse 2) का वेग समान है

(B) डोर के अनुदिश प्रेषित किसी भी स्पंद का वेग उसकी आवृत्ति एवं तरंग–दैर्ध्य पर निर्भर नहीं है।

(C) स्पंद 1 (Pulse 1) की तरंग–दैर्ध्य बिन्दु A तक पहुंचने में लम्बी हो जाएगी

(D) समय $T_{AO} = T_{OA}$

भाग - II : JEE (MAIN) / AIEEE (पिछले वर्षो) के प्रश्न

1. 75 सेमी दूरी पर स्थित स्थिर बिन्दुओं के बीच एक डोरी तानी जाती है। इसकी अनुनाद आवृतियाँ 420 हर्ट्ज और 315 हर्ट्ज मापी जाता है। इन दोनो के बीच ओर कोई अनुनाद आवृति नही है। तब इस डोरी के लिए निम्नतम अनुनाद आवृति है। **[AIEEE 2006, 3/180]**

(1) 10.5 हर्ट्ज (2) 105 हर्ट्ज (3) 1.05 हर्ट्ज (4) 1050 हर्ट्ज

2. x-अक्ष के अनुदिश गमन करती किसी तरंग का वर्णन समीकरण $y(x, t) = 0.005 \cos (\alpha x - \beta t)$. द्वारा किया जाता है। यदि इस तरंग की तरंगदैर्ध्य तथा आवर्तकाल क्रमशः 0.08 m तथा 2.0 s है, तो α एवं β के उपयुक्त मात्रकों में मान है। **[AIEEE 2008, 3/105, –1]**

(1) $\alpha = \frac{0.08}{\pi}, \beta = \frac{2.0}{\pi}$ (2) $\alpha = \frac{0.04}{\pi}, \beta = \frac{1.0}{\pi}$ (3) $\alpha = 12.50\pi, \beta = \frac{\pi}{2.0}$ (4) $\alpha = 25.00\ \pi,\ \beta = \pi$

3. रैखिक द्रव्यमान घनत्व 0.04 kg m^{-1} वाली एक डोरी पर एक तरंग का समीकरण निम्न प्रकार दिया जाता है $y = 0.02\ (m) \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{0.04(s)} - \frac{x}{0.50(m)}\right)\right]$ डोरी में तनाव होगा। **[AIEEE 2010, 144/4 –1]**

(1) 4.0 N (2) 12.5 N (3) 0.5 N (4) 6.25 N

4. एक डोरी पर एक तरंग का अनुप्रस्थ विस्थापन y(x,t) दिया जाता है $y(x,t) = e^{-(ax^2+bt^2+2\sqrt{ab}\,xt)}$ यह दर्शाता है एक : **[AIEEE 2011; 1 MAY; 4/120, –1]**

(1) +x–दिशा में गतिशील चाल $\sqrt{\frac{a}{b}}$ की एक तरंग। (2) –x-दिशा में गतिशील चाल $\sqrt{\frac{b}{a}}$ की एक तरंग।

(3) आवृत्ति $\sqrt{b}$ की एक अप्रगामी तरंग। (4) आवृत्ति $\frac{1}{\sqrt{b}}$ की एक अप्रगामी तरंग।

5. y = A sin ((ωt – kx) से दर्शायी गयी एक प्रगामी तरंग को y = A sin (ωt + kx) से दर्शाई गई एक दूसरी तरंग पर अध्यारोपित किया जाता है। परिणामी है– **[AIEEE 2011, 11 MAY; 4/120, –1]**

(1) + x दिशा में प्रगामी एक तरंग।

(2) – x दिशा में प्रगामी एक तरंग।

(3) $x = \frac{n\lambda}{2}$, n = 0, 1, 2 .... पर नोड रखने वाली एक अप्रगामी तरंग।

(4) $x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$; n = 0, 1, 2 ..... पर नोड रखने वाली एक अप्रगामी तरंग।

6. लम्बाई 1.5 m का एक सोनोमापी तार स्टील का बना है। इसमें एक तनाव 1% की प्रत्यास्थ विकृति उत्पन्न करता है। यदि स्टील के घनत्व और प्रत्यास्थता गुणांक क्रमशः 7.7×10^3 kg/m^3 और 2.2×10^{11} N/m^2 हैं तब स्टील के तार की मूल आवृति क्या है? **[JEE(Main) 2013; 4/120, –1]**

(1) 188.5 Hz (2) 178.2 Hz (3) 200.5 Hz (4) 770 Hz

7. 20 m लम्बाई की एकसमान डोरी को दृढ़ आधार से लटकाया गया है। इसके निचले सिरे से एक सूक्ष्म तरंग –स्पंद चालित होता है। ऊपर आधार तक पहुँचने में लगने वाला समय है : (g = 10 ms^{-2} लें) **[JEE(Main) 2016; 4/120, –1]**

(1) 2 s (2) $2\sqrt{2}$ s (3) $\sqrt{2}$ s (4) $2\pi\sqrt{2}$ s

Answers

EXERCISE - 1
भाग - I

खण्ड (A) :

A-1. (a) 10 mm (b) 5π cm^{-1} (c) $\frac{2}{5}$ cm

(d) 30 Hz (e) $\frac{1}{30}$ s (f) 12 cm/s.

A-2. 1.41 y_m

A-3. (a) 10π rad/s (b) $\pi/2$ rad/m

(c) $y = (12 \times 10^{-2}\ m) \sin\left(\frac{\pi}{2}x - 10\,\pi t\right)$

(d) $\frac{6}{5}\pi$ m/s (e) $12\,\pi^2$ m/s^2

A-4. $0.5 \sin\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{18}x + \frac{7\pi}{9}\right)$

A-5. (a) D, E, F; (b) A, B, H ; (c) C, G ; (d) A, E

खण्ड (B) :

B-1. $300\sqrt{3}$ m/s

B-2. $\frac{1}{50}$ sec

B-3. $\frac{3}{10\sqrt{5}}$ m.

B-4. 100 Hz, 4 cm, 4 m/s

B-5. 4

B-6. (a) 200 m/s; (b) 240 m/s

खण्ड (C) :

C-1. (a) $y = (7.50\ cm) \sin\left(\frac{4\pi}{3}x - 314t + \phi\right)$

(b) $\frac{2025\pi^2}{32} \simeq 625$ W

C-2. 50 mW

खण्ड (D) :

D-1. $y' = 0.8\ a \sin. \frac{2\pi}{\lambda}\left(vt + x + \frac{\lambda}{2}\right)$

D-2. (a) शून्य (b) 0.300 m.

D-3. (a) 2π (b) π (c) 4.0 mm, शून्य

खण्ड (E) :

E-1. (a) 2.5 Hz; (b) 5 Hz; (c) 7.5 Hz.

E-2. (a) $\frac{250}{\sqrt{3}}$ m/s; (b) 60.0 cm; (c) $\frac{1250}{3\sqrt{3}}$ Hz

E-3. $\frac{400}{3}$ Hz

E-4. (a) 0.25 cm ; (b) 1.2×10^2 cm/s;
(c) 3.0 cm ; (d) 0

E-5. (a) 100 Hz (b) 700 Hz

E-6. **(i)** $y_1 = 1.5 \cos\{(\pi/20)x - 72\pi t\}$,
$y_2 = 1.5 \cos\{(\pi/20)x + 72\pi t\}$
(ii) 10 , 30 , 50 cm तथा 0 , 20 , 40 , 60 cm
(iii) 0

E-7. 240 Hz.

भाग - II

खण्ड (A) :

A-1.	(A)	**A-2.**	(C)	**A-3.**	(B)
A-4.	(B)	**A-5.**	(B)	**A-6.**	(B)
A-7.	(B)	**A-8.**	(B)	**A-9.**	(C)

खण्ड (B) :

B-1.	(C)	**B-2.**	(A)	**B-3.**	(C)
B-4.	(D)				

खण्ड (C) :

C-1.	(A)	**C-2.**	(D)	**C-3.**	(C)
C-4.	(D)				

खण्ड (D) :

D-1.	(C)	**D-2.**	(A)	**D-3.**	(C)
D-4.	(C)	**D-5.**	(A)	**D-6.**	(D)
D-7.	(C)				

खण्ड (E) :

E-1.	(B)	**E-2.**	(C)	**E-3.**	(D)
E-4.	(B)	**E-5.**	(C)	**E-6.**	(A)
E-7.	(A)				

भाग - III

1. (A) → r ; (B) → p, t ; (C) → s ; (D) → q

2. (A) → p,q,s; (B) → s; (C) → q,r,s; (D) → s,t

EXERCISE - 2

भाग - I

1.	(B)	**2.**	(A)	**3.**	(D)
4.	(B)	**5.**	(A)		
6.	(a) (B); (b) (C); (c) (D)				
7.	(C)	**8.**	(A)	**9.**	(D)
10.	(D)	**11.**	(D)	**12.**	(C)
13.	(C)	**14.**	(B)	**15.**	(C)
16.	(B)	**17.**	(B)	**18.**	(A)
19.	(B)	**20.**	(D)	**21.**	(D)

भाग - II

1.	10	**2.**	30	**3.**	2
4.	2	**5.**	8	**6.**	15
7.	5	**8.**	3	**9.**	2, 3
10.	4	**11.**	4	**12.**	50
13.	80	**14.**	36	**15.**	96
16.	11	**17.**	6	**18.**	5
19.	18	**20.**	8		

भाग - III

1.	(AD)	**2.**	(ABCD)	**3.**	(BCD)
4.	(AC)	**5.**	(AD)	**6.**	(AC)
7.	(AC)	**8.**	(CD)	**9.**	(ABCD)
10.	(ACD)	**11.**	(AD)	**12.**	(ABCD)
13.	(ABCD)	**14.**	(ABC)	**15.**	(CD)

भाग - IV

1.	(B)	**2.**	(C)	**3.**	(A)
4.	(B)	**5.**	(C)	**6.**	(B)
7.	(D)	**8.**	(B)	**9.**	(B)

EXERCISE - 3

भाग - I

1. रस्सी मे तरंग का समीकरण

$$y = 0.1 \sin\left(30t \pm \frac{3}{2}x + \phi\right)$$

[जहाँ ϕ प्रारम्भिक कला है]

2.	(A)	**3.**	(A)	**4.**	5
6.	(BC)	**7.**	(ACD)	**8.**	(BD)

भाग - II

1.	(2)	**2.**	(4)	**3.**	(4)
4.	(2)	**5.**	(4)	**6.**	(2)
7.	(2)				

High Level Problems (HLP)

विषयात्मक प्रश्न (SUBJECTIVE QUESTIONS)

1. एक रस्सी जो 75.0 cm दूरी पर स्थित दो दृढ़ आधारों के बीच तनी है, की अनुनादी आवृतियाँ 420 तथा 315 Hz है तथा बीच में कोई अनुनादी आवृत्ति नहीं है। गणना करो (a) निम्नतम अनुनादी आवृत्ति (b) तरंग चाल ?

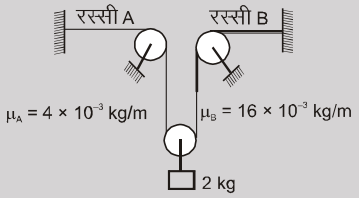
2. 50 $\sqrt{3}$ cm लम्बे स्टील तार को 60 cm लम्बे एल्यूमिनियम के तार से जोड़कर दो जड़वत् आधारों के बीच तनित किया जाता है। उत्पन्न तनाव 104 N है और प्रत्येक तार का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 1mm^2 है। यदि तार में अनुप्रस्थ तरंगे उत्पन्न की जाती है। वह न्यूनतम आवृति ज्ञात करो जिसके लिए उत्पन्न अप्रगामी तरंगों के लिए निस्पन्द जोड़ बिन्दु पर हो। (एल्यूमिनियम का घनत्व = 2.6 gm/cm^3 और स्टील का घनत्व = 7.8 gm/cm^3)

3. 1×10^{-6} m^2 अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल का एल्यूमिनियम का एक तार, समान अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल के एक स्टील के तार से जोड़ दिया गया है। यह मिश्रित तार, 10 kg का भार लटकाकर एक स्वमापी पर तान दिया गया है। सेतुओं के बीच मिश्रित तार की कुल लम्बाई 1.5 m है। इसमें से एल्यूमिनियम का तार 0.6 m तथा शेष स्टील का तार है। चर (variable) आवृत्ति के बाह्य बल को लगाकर इसमे अनुप्रस्थ कम्पन उत्पन्न किये गये है। उत्तेजन की वह न्यूनतम आवृत्ति ज्ञात कीजिए, जिस पर अप्रगामी तरंगे इस प्रकार बनें कि तारों के जोड़ पर निस्पन्द हो। इस आवृत्ति पर कुल निस्पंदों की संख्या क्या है ? (तारों के सिरों पर दो निस्पंदों को छोड़कर) एल्यूमिनियम का घनत्व 2.6×10^3 kg/m^3 , स्टील का घनत्व 1.04×10^4 kg/m^3 है। **[REE - 1983]**

4. सोनोमीटर के तार की लम्बाई स्थिर रखते हुए इस पर लगने वाले तनाव को 44% बढ़ाने पर सोनोमीटर की मूल आवृति में 6 Hz की बढ़ोतरी हो जाती है। तार पर लगने वाले मूल तनाव को स्थिर रखते हुए तार की लम्बाई में 20 % की बढ़ोतरी करने पर सोनोमीटर की मूल आवृति में परिवर्तन की गणना कीजिए : **[JEE - 1997; 5]**

5. ρ आयतन धनत्व तथा यंग गुणांक Y का एक धातु का तार दो दृढ आधारो के मध्य तना हुआ है। T ताप पर अनुप्रस्थ तरंग की चाल v_1 है। जब ताप घटकर $T - \Delta T$ है तब चाल बढकर v_2 हो जाती है। तार के रेखीय प्रसार गुणांक की घटना कीजिए।

6. रस्सी A व B में तरंग का वेग ज्ञात करो।



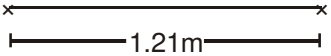
7. 50 cm लम्बाई की एक रस्सी 400 Hz की मूल आवृत्ति से क्षेतिज दिशा में कम्पन कर रही है। मूल विद्या में मध्य पर साम्यवस्था स्थिति से अधिकतम विस्थापन 2 cm है तथा रस्सी में तनाव 10 N है। अन्तिम आधार पर बल के ऊर्ध्वाधर घटक का अधिकतम मान ज्ञात करो।

8. दोंनों सिरों पर बँधी रस्सी कम्पन की निम्नतम विधा में कम्पित है जिसके लिए एक सिरे से इसकी चौथाई लम्बाई पर स्थित बिन्दु अधिकतम विस्थापन का बिन्दु है। इस विधा में कम्पन की आवृत्ति 100 Hz है। यदि यह अगली उच्च विधा में कम्पन्न करें तथा यह बिन्दु पुनः अधिकतम विस्थापन का बिन्दु हो तो इसकी आवृत्ति ज्ञात करो।

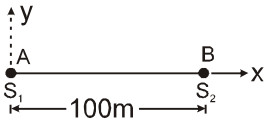
9. 180 cm लम्बी गिटार की रस्सी की मूल आवृत्ति 90 Hz है। इसे कहाँ से दबाया जाये ताकि यह 135 Hz की मूल आवृत्ति उत्पन्न करें ?

10. 90 cm तथा 4 ग्राम वाले पियानों का तार मध्य C" (ν = 125 हर्ट्ज) के संगत एक मूल आवृत्ति उत्पन्न कर रहा है। तार में तनाव ज्ञात कीजिये।

11. सोनोमीटर के तार की लम्बाई 1.21 m है। तीन लूपों की लम्बाई ज्ञात करो जिसके मूल आवृत्तियों का अनुपात 1 : 2 : 3 है।



12. चित्रानुसार 100 m लम्बी रस्सी जिसके दोनो सिरे A और B है, चित्र में प्रदर्शित है। S_1 और S_2 दो स्त्रोत है जिनके कारण बिन्दु 'A' और 'B' क्रमशः 'y' और 'z' दिशा में क्रमशः समीकरण $y = 2 \sin (100 \pi t + 30°)$ और $z = 3 \sin (100 \pi t + 60°)$ के अनुसार दोलन कर रहे है जहॉ t, sec में और y mm में है। रस्सी मे विक्षोभ सचंरण की चाल 50 m/s है। रस्सी पर बिन्दु 25m दूरी पर स्थित कण P का ताक्ष्णणिक स्थिति सदिश (mm में) और वेग सदिश (m/s में) ज्ञात करो। इन दोनो प्राचंलों का मान तब ज्ञात करना है जब दोनो विक्षोभ S_1 और S_2 बिन्दु 'P' पर पहुॅच जाये तथा बिन्दु 'P' पर तरंगों के मध्य कलान्तर ज्ञात करो जब वे बिन्दु 'P' पर पहली बार मिलते है।



13. m द्रव्यमान की एक डोरी दोनों सिरों पर स्थिर है मूल स्वर के दोलन कोणीय आवृति ω तथा अधिकतम विस्थपन आयाम a_{max} से उत्तेजित है ज्ञात करो।

(a) डोरी की अधिकतम गतिज ऊर्जा

(b) औसतन एक दोलन के दौरान डोरी की माध्य गतिज ऊर्जा

HLP Answers

1. (a) 105 Hz; (b) 157.5 m/s

2. 1000/3Hz

3. 162 कम्पन/सैकण्ड, 3

4. 5 Hz घटती है।

5. $\alpha = \dfrac{\rho(v_2^2 - v_1^2)}{Y\Delta T}$

6. 50 m/sec; 25 m/sec

7. $\dfrac{2\pi}{5}$ N

8. 300 Hz

9. एक सिरे से 120 cm दूर।

10. 225 N

11. 0.66 m, 0.33 m, 0.22 m

12. $\vec{r}_{(mm\ में)} = 25000\hat{i} + 2\sin(100\pi t + 30°)\hat{j} + 3\sin(100\pi t + 60°)\hat{k}$

$\vec{v}(\text{in m/s}) = 0.2\pi\cos(100\pi t + 30°)\hat{j} + 0.3\pi\cos(100\pi t + 60°)\hat{k}$

't' समय पर कलान्तर = 30° है जो कि बिन्दु 'P' पर मिलने के बाद हमेशा नियत रहता है।

13. (a) $T_{max} = 1/4\ m\omega^2 a^2_{max}$; (b) $T = 1/8\ m\omega^2 a^2_{max}$.